ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

M. MEBKHOUT

Étude du groupe $SL(3, C)$ et quelques applications

Annales de l'I. H. P., section A, tome 10, nº 1 (1969), p. 1-29
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1969__10_1_1_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. X, n° 1, 1969, p. 1-29.

Section A :
Physique théorique.

Étude du groupe SL(3, C) et quelques applications (*)

par

M. MEBKHOUT
C. N. R. S. Centre de Physique Théorique,
Faculté des Sciences, Département de Physique Mathématique,
31, chemin Joseph-Aiguier, 13-Marseille (9e), France.

ABSTRACT. — The group SL(3, C) [*1*] has been postulated as the group symmetry for Hadrons. So we have first written unitary irreducible representations of this group using Mackey theory of induced representations. Then for the case of two unitary irreducible representations of the principal non degenerate series, we have explicitly written the decomposition of their tensorial product by a geometrical method of Gelfand and Graev [*2*]. Next we have used the Clebsch-Gordan kernel in order to build the possible invariant vertex from three unitary irreducible representations of the principal non degenerate series.

INTRODUCTION

Le groupe SL(3, C) a été proposé [*1*] comme groupe de symétrie interne des hadrons. Dès lors se pose le problème de l'étude des représentations unitaires irréductibles de ce groupe, de la décomposition du produit tensoriel de deux représentations irréductibles, de la détermination du noyau de Clebsch-Gordan.

Nous décrivons dans une première partie les représentations unitaires induites de ce groupe; puis dans la deuxième partie, nous écrirons grâce

(*) Ce travail fait partie d'une thèse de Doctorat d'État soutenue devant la Faculté des Sciences de Marseille.

à une méthode géométrique de Guelfand et Graev [2] la décomposition du produit tensoriel de deux représentations unitaires irréductibles de série principale non dégénérée (le cas dégénéré sera étudié ultérieurement). Dans la dernière partie, moyennant la forme obtenue pour les noyaux de Clebsch-Gordan, nous déterminerons un critère de choix des représentations pour pouvoir former des vertex invariants pour le groupe à partir de trois représentations irréductibles quelconques, et appartenant à la série principale non dégénérée.

I. — ÉTUDE DES REPRÉSENTATIONS IRRÉDUCTIBLES UNITAIRES INDUITES DE SL(3, C)

Structure de SL(3, C) [3].

Soit G un groupe de Lie semi-simple, ayant un centre fini et aucune composante compacte simple; alors G a des sous-groupes fermés connexes N, E, U, avec les propriétés suivantes :

a) N est nilpotent,

b) E est abélien,

c) U est compact,

d) l'application $(n, e, u) \to n \cdot e \cdot u$ de N × E × U dans G est un homéomorphisme sur G,

e) soit A le centralisateur de E dans U, alors le groupe Γ = NEA est le produit semi-direct de N et D = EA,

f) U est un compact maximal de G.

Désignons par M le normalisateur de E dans U, A et M sont deux sous-groupes fermés de U contenant le centre $\mathcal{C}$ de G et A est invariant dans M. W = M/A est discret et fini, nous l'appellerons le groupe de Weyl restreint de G.

Cette décomposition nous permet pour SL(3, C) de faire les identifications suivantes :

N est le sous-groupe des matrices 3 × 3 telles que

$$n_{ii} = 1 \; ; \qquad n_{ij} = 0 \; ; \qquad i > j \quad (i, j, 1, 2, 3)$$

Il est nilpotent maximal.

E est le sous-groupe des matrices diagonales telles que

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{pq}\,; \qquad \varepsilon_{22} = p\,; \qquad \varepsilon_{33} = q \qquad p \text{ et } q \text{ réels} > 0.$$

EA = D est un groupe de Cartan de D; c'est l'ensemble des matrices diagonales dont nous désignerons les éléments par $\delta_1 = \dfrac{1}{\delta_2\delta_3}$; δ_2, δ_3. $\Gamma = \mathrm{N}\cdot\mathrm{D}$ est le trigonal supérieur; nous désignerons ses éléments par γ_{ij} avec $\gamma_{ij} = 0$, $i > j$, $\gamma_{11} = \dfrac{1}{\gamma_{22}\gamma_{11}}$,U n'est autre que SU_3 à une conjugaison près.

Si l'on munit les racines correspondant à l'algèbre de Cartan de D d'un ordre lexicographique, N a pour algèbre de Lie celle engendrée par les racines > 0 et Γ par les racines $\geqslant 0$.

Quant aux éléments de W, ils sont au nombre de 3 ! que nous désignerons par ω_i [i 1 à 6]; dans toute ligne et toute colonne d'un ω_i quelconque, il n'y a qu'un élément non nul qui est ± 1, le signe étant imposé par dét $\omega_i = 1$. W a une propriété importante : toute double classe de SL(3, C) modulo Γ que nous noterons $\Gamma : \Gamma$, rencontre M suivant une classe modulo A. Par suite, il n'y a que 6 doubles classes et elles sont en correspondance biunivoque avec les éléments $\omega_i \in \mathrm{W}$.

Désignons par $\| g_{ij} \|$ $(1 \leqslant i,\ j \leqslant 3)$ une matrice appartenant à G; $| g_{ij} |$ le module de l'élément g_{ij}, $\overline{g_{ij}}$ son complexe conjugué et G_{ij} le mineur de l'élément g_{ij} dans le déterminant de la matrice $\| g_{ij} \|$. Nous utiliserons par la suite, trois décompositions de G :

1. — *Décomposition de Iwasawa.*

$$g = n\cdot e\cdot u \ (1)$$

$$g \in \mathrm{G}\,;\ n \in \mathrm{N}\,;\ e \in \mathrm{E} \qquad \text{et} \qquad u \in \mathrm{U}$$

avec

$$(1.a)\quad n = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{\overline{\mathrm{G}_{11}}\mathrm{G}_{21} + \overline{\mathrm{G}_{12}}\mathrm{G}_{22} + \overline{\mathrm{G}_{13}}\mathrm{G}_{23}}{p^2q^2} & \dfrac{g_{11}\overline{g_{31}} + g_{12}\overline{g_{32}} + g_{13}\overline{g_{33}}}{q^2} \\ & 1 & \dfrac{g_{21}\overline{g_{31}} + g_{22}\overline{g_{32}} + g_{23}\overline{g_{33}}}{q^2} \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

$$(1.b)\quad e = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{pq} & & \\ & p & \\ & & q \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} p &= \left[\frac{\mathrm{G}_{11}\overline{\mathrm{G}_{11}} + \mathrm{G}_{12}\overline{\mathrm{G}_{12}} + \mathrm{G}_{13}\overline{\mathrm{G}_{13}}}{q}\right]^{\frac{1}{2}} \\ q &= (g_{31}\overline{g_{31}} + g_{32}\overline{g_{32}} + g_{33}\overline{g_{33}})^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$(1.c)\quad u = \begin{bmatrix} \dfrac{\overline{G_{11}}}{pq} & -\dfrac{\overline{G_{12}}}{pq} & \dfrac{\overline{G_{13}}}{pq} \\ -\dfrac{\overline{g_{33}}G_{12}+\overline{g_{32}}G_{13}}{pq^2} & \dfrac{\overline{g_{33}}G_{11}-\overline{g_{31}}G_{13}}{pq^2} & -\dfrac{\overline{g_{32}}G_{11}+\overline{g_{31}}G_{12}}{pq^2} \\ \dfrac{g_{31}}{q} & \dfrac{g_{32}}{q} & \dfrac{g_{33}}{q} \end{bmatrix}$$

2. — *Décomposition de Guelfand-Naimark.*

$$G = \Gamma\cdot Z \qquad \text{avec} \qquad \Gamma = MAN = D\cdot N$$

$$(2)\qquad g = \gamma . z = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{G_{11}} & \dfrac{G_{21}}{g_{33}} & g_{13} \\ & \dfrac{G_{11}}{g_{33}} & g_{23} \\ & & g_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & & \\ \dfrac{G_{12}}{G_{11}} & 1 & \\ \dfrac{g_{31}}{g_{33}} & \dfrac{g_{32}}{g_{33}} & 1 \end{bmatrix}$$

elle n'est possible que si $G_{11} \neq 0$ et $g_{33} \neq 0$.

$$G = \Gamma' Z'$$

$$(3)\qquad g = \gamma z : \begin{bmatrix} -\dfrac{G_{22}}{g_{33}} & \dfrac{G_{12}}{g_{33}} & g_{12} \\ \dfrac{G_{12}}{g_{33}} & \dfrac{G_{11}}{g_{33}} & g_{23} \\ 0 & 0 & g_{43} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ \dfrac{g_{31}}{g_{33}} & \dfrac{g_{32}}{g_{33}} & 1 \end{bmatrix}$$

qui n'est possible que si $g_{11} \neq 0$.

Espace homogène et mesure quasi invariante [*4a*].

Soit G un groupe localement compact séparable et Γ un sous-groupe fermé; désignons par dg et $d\gamma$ les mesures de Haar invariantes à droite sur G et Γ; $\Delta(g)$ et $\delta(\gamma)$ les fonctions modulaires sur ces groupes. $X = G/\Gamma$ l'espace homogène des classes à droite modulo Γ. Sur X qui est un espace localement compact, il n'existe pas de mesure de Radon qui soit invariante par les opérations de G, mais il existe sur X des mesures qui sont équivalentes à leurs transformées par G : on dit qu'une telle mesure est quasi invariante par G. Deux mesures quasi invariantes sont équivalentes et on les obtient toutes de la manière suivante :

— soit $\rho(g)$ une fonction borélienne strictement positive sur G, bornée inférieurement et supérieurement sur tout compact et vérifiant pour tout $\gamma \in \Gamma$:

$$\rho(g) = \frac{\Delta(\gamma)}{\delta(\gamma)} \rho(g) \tag{4}$$

et à cette fonction est associée une mesure μ quasi invariante sur X définie par :

$$\int_G f(g)\rho(g)dg = \int_X d\mu(x) = \int_\Gamma f(\gamma g)d\gamma \tag{5}$$

x étant la classe de g dans X. De plus, cette mesure vérifie :

$$d\mu(\widehat{\dot{g_1 g_2}}) = \frac{\rho(g_1 g_2)}{\rho(g_1)} d\mu(\dot{g}_1) \tag{6}$$

Dans le cas de $G = SL(3, C)$, $\Delta(g) = 1$, $\forall g$ car il est unimodulaire; la relation (4) s'écrit :

$$\rho(\gamma g) = \delta^{-1}(\gamma)\rho(g)$$

Déterminons des mesures quasi invariantes pour les deux espaces homogènes qui nous intéressent, à savoir :

$X = G/\Gamma$ et $X' = G/\Gamma'$, Γ et Γ' correspondant aux décompositions (2) et (3). Dans les deux cas, on peut mettre tout $g \in G$ sous la forme [5] :

$$g = \gamma u \tag{7}$$

où γ appartient à $\Gamma(\Gamma')$ et u appartient à un sous-groupe compact. Posons alors $\rho(g) = \delta^{-1}(\gamma)$; nous aurons :

$$\rho(\gamma' g) = \rho(\gamma' \cdot \gamma u) = \delta^{-1}(\gamma'\gamma) = \delta^{-1}(\gamma')\delta^{-1}(\gamma) = \delta^{-1}(\gamma')\rho(g)$$

ρ vérifie bien (4).

D'autre part, grâce aux relations (2) et (3), on peut, à des ensembles de dimension inférieure près, c'est-à-dire les éléments de G pour lesquels $G_{11} = 0$ et $g_{33} = 0$, assimiler :

$$X = \frac{G}{\Gamma} \text{ à } X = \begin{bmatrix} 1 & & \\ x_1 & 1 & \\ x_2 & x_3 & 1 \end{bmatrix}$$

et

$$X' = \frac{G}{\Gamma'} \text{ à } X' = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ x_2 & x_3 & 1 \end{bmatrix}$$

ce sont des espaces projectifs; les points à l'infini correspondant justement aux classes d'éléments de G pour lesquels $G_{11} = 0$ ou $g_{33} = 0$ [*6*].

Dans les espaces X et X′, toute mesure > 0 qui, sur toute carte locale, est équivalente à la mesure de Lebesgue, par exemple, est le produit de la mesure de Lebesgue par une fonction indéfiniment différentiable > 0, est quasi invariante [*3*].

Appelons $dx_1dx_2dx_3$ avec $x_i = \alpha_i + i\beta_i$ et $dx_i = d\alpha_i\, d\beta_i$ la mesure de Lebesgue sur X et posons :

$$d\mu(x) = \rho(x)\cdot dx_1dx_2dx_3 \tag{7}$$

où $\rho(x) = \delta^{-1}(\gamma)$ avec $x = \gamma u$; en utilisant la relation (1) et l'expression de la fonction modulaire (7), on obtient :

$$\delta(\gamma) = p^4\cdot q^8$$

d'où

$$\rho(x) = [1 + x_3\bar{x}_2 + x_3\bar{x}_3]^{-2}[1 + x_1\bar{x}_1 + (x_1x_3 - x_2)\overline{(x_1x_3 - x_2)}]^{-2}$$

De même, pour l'espace X′, on obtient de la même façon

$$d\mu(x) = (1 + x_2\bar{x}_2 + x_2\bar{x}_3)^{-3}dx_2dx_3 \tag{8}$$

Les mesures (7) et (8) sont quasi invariantes dans X et X′ et vérifient la relation (6).

Représentations induites [*8*].

Donnons-nous maintenant G localement compact séparable, Γ sous-groupe fermé, ρ vérifiant (4) et μ une mesure quasi invariante sur $X = G/\Gamma$ vérifiant (5) et (6). Soit d'autre part $\gamma \to L(\gamma)$ une représentation continue unitaire de Γ dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Considérons l'ensemble des fonctions $\vec{f}$ définies sur G à valeurs dans $\mathcal{H}$ et vérifiant les conditions suivantes :

a) pour tout $\vec{h} \in \mathcal{H}$ la fonction $g \to \langle \vec{f}(g), \vec{h} \rangle$ est mesurable pour dg;
b) $\vec{f}(\gamma g) = L(\gamma)\vec{f}(g)$, $\forall \gamma \in \Gamma$ et $g \in G$;
c) $\int_X \| f(g) \|^2 \, d\mu(\dot{g}) < \infty$, $\dot{g}$ classe de g dans X.

On montre que l'ensemble de ces fonctions forme un espace vectoriel et que si l'on considère l'ensemble des classes d'équivalence des fonctions égales presque partout sur X pour la mesure $d\mu(x)$, celui-ci est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_{G/\Gamma} \langle f_1(g), f_2(g) \rangle \, d\mu(x) \tag{9}$$

Nous noterons cet espace $\mathcal{H}_G^L$.

On y définit une représentation unitaire de G sur $\mathcal{H}_G^L$ par

$$[{}_G U^L(g_0) f](g) = \rho(g)^{-\frac{1}{2}} \rho(g g_0)^{\frac{1}{2}} f(g g_0) \tag{10}$$

$f(g)$ étant la fonction associée à $d\mu$.

Cette représentation est dite représentation induite à G par L et on la note ${}_G V^L$.

Du point de vue pratique, il est préférable de construire un isomorphisme $\mathcal{H}_G^L \to \mathcal{L}_\mu^2(X, \mathcal{H})$ ensemble des fonctions définies sur X à valeurs dans $\mathcal{H}$ et telles que

$$\int_X \| F(x) \|^2 d\mu(x) < \infty \tag{11}$$

on introduit pour cela une fonction $g \to B(g)$ à valeurs dans les opérateurs unitaires de $\mathcal{H}$ et telle que :

$$B(\gamma g) = L(\gamma) B(g) \qquad \gamma \in \Gamma \quad g \in G \tag{12}$$

l'isomorphisme est réalisé par :

$$f(g) \to F(x) = B^{-1}(g) f(g) \tag{13}$$

A la représentation (10) sur $\mathcal{H}_G^L$ correspond une représentation unitaire sur $\mathcal{L}_\mu^2(X, \mathcal{H})$ que nous noterons encore ${}_G U^L$ et qui est donnée par :

$$({}_G U^L(g_0) F)(x) = \rho(g)^{-\frac{1}{2}} \rho(g g_0)^{\frac{1}{2}} B(g)^{-1} B(g g_0) F(\overline{x g}) \tag{14}$$

où g est un élément quelconque de la classe de g.

On peut choisir facilement $B(g)$ vérifiant (12); en effet, supposons g écrit sous la forme $g = \gamma \cdot u$, ce qui est toujours possible [5] et posons :

$$B(g) = L(\gamma)$$

nous aurons :

$$B(\gamma' g) = B(\gamma' \gamma u) = L(\gamma' \gamma) = L(\gamma') L(\gamma) = L(\gamma') B(g)$$

c. q. f. d.

Nous allons construire des représentations de G en utilisant ces résultats.

1) *La série principale non dégénérée.*

Elle se construit à partir de l'espace homogène $X = G/\Gamma$ et de la mesure $d\mu(x) = \rho(x)dx$, où $dx = dx_1dx_2dx_3$ en utilisant l'espace de Hilbert $\mathcal{L}^2_\mu(X, \mathcal{H})$ des fonctions $F(x)$, telles que :

$$\int_X \| F(x) \|^2 d\mu(x) < \infty \tag{15}$$

Pour écrire explicitement (14), il nous faut l'expression de $B(g)$, c'est-à-dire $L(\gamma)$.

Dans la décomposition $\Gamma = N.D$, D est abélien; désignons par $\widehat{D}$ son dual. Le groupe de Weyl W définit un groupe des automorphismes de D, donc de $\widehat{D}$. Désignons par $\widehat{D}'$ l'ensemble des éléments de $\widehat{D}$ dont les transformés par W sont tous distincts. Soit alors $\chi \in \widehat{D}$ et χ^0 la représentation de Γ définie par :

$$\gamma = n\cdot\delta \to \chi(\delta)I \tag{16}$$

On montre que les représentations unitaires induites par les représentations χ^0 de Γ pour $\chi \in \widehat{D}'$ sont irréductibles. C'est la série principale non dégénérée. Nous avons donc :

$$B(g) = L(\gamma) = \chi(\delta)I = \left[\frac{G_{11}}{g_{33}}\right]^{\frac{-m_2+i\rho_2}{2}} \overline{\left[\frac{G_{11}}{g_{33}}\right]}^{\frac{m_2+i\rho_2}{2}} (g_{33})^{\frac{-m_3+i\rho_3}{2}} \overline{(g_{33})}^{\frac{m_3+i\rho_3}{2}} \tag{17}$$

$$m_i = \text{entier}, \ \rho_i = \text{réels}$$

Dans (14), g est un élément quelconque de la classe x; en faisant :

$$g = x \quad \text{et} \quad g_0 = g$$

nous aurons

$$({}_G U^L(g)F)(x) = \rho(x)^{-\frac{1}{2}}\rho(xg)^{\frac{1}{2}}B(x)^{-1}B(xg)F(x')$$

avec, en désignant par $\| a_{ij} \|$ la matrice xg

$$\rho(x) = (1 + x_2\bar{x}_2 + x_3\bar{x}_3)^{-2}[1 + x_1\bar{x}_1 + (x_1x_3 - x_2)(\overline{x_1x_3 - x_2})^{-2}]$$

$$\rho(xg) = \frac{\rho(x')}{A_{11}a_{33}\,.\,\overline{A_{11}a_{33}}}$$

$$B(x) = 1$$

$$B(xg) = \left[\frac{A_{11}}{a_{33}}\right]^{\frac{-m_2+i\rho_2}{2}} \overline{\left[\frac{A_{11}}{a_{33}}\right]}^{\frac{m_2+i\rho_2}{2}} (a_{33})^{\frac{-m_3+i\rho_3}{2}} \overline{(a_{33})}^{\frac{m_3+i\rho_3}{2}}$$

On retrouve une forme des représentations équivalentes à celle donnée en [5]; en considérant l'espace $\mathcal{H}$ isomorphe isométriquement à l'espace $\mathcal{L}^2_\mu(X)$ des fonctions $f(x)$ telles que :

$$(18) \qquad \int_X f(x)\overline{f(x)}dx < \infty$$

l'isométrie s'obtenant par l'application :

$$(19) \qquad \rho(x)^{\frac{1}{2}}F(x) \to f(x)$$

d'où

$$(20) \quad [{}_G U^L(g)f](x) = (A_{11})^{\frac{-m_2+i\rho_2-2}{2}}(\overline{A_{11}})^{\frac{m_2+i\rho_2-2}{2}}(a_{33})^{\frac{-m_3-m_2+i(\rho_3-\rho_2)-2}{2}} \times (\overline{a_{33}})^{\frac{m_2-m_3+i(\rho_3-\rho_2)-2}{2}} f(x')$$

où x' est la classe de xg dans X.

2) *La série principale dégénérée.*

Elle se construit sur l'espace $\mathcal{L}^2_\mu(X', \mathcal{H})$ avec la mesure :

$$d\mu(x) = \rho(x)dx_2dx_3 = (1 + x_2\bar{x}_2 + x_3\bar{x}_3)^{-3}dx_2dx_3$$

On considère la représentation L de Γ' définie par :

$$(21) \qquad \gamma' \to L(\gamma') = \chi(\gamma_{33})I = \left(\gamma_{33}^{\frac{-m+i\rho}{2}}\overline{\gamma_{33}}^{\frac{m+i\rho}{2}}\right)I$$

et nous aurons de la même facon

$$({}_G U^L(g)F)(x) = \rho(x)^{-\frac{1}{2}}\rho(xg)^{\frac{1}{2}}B(x)^{-1}B(xg)F(x')$$

x' étant la classe de xg dans X'.

Avec :

$$\rho(x) = (1 + x_2\bar{x}_2 + x_3\bar{x}_3)^{-3}$$

$$\rho(xg) = \frac{1}{(a_{33}\cdot\overline{a_{33}})^3}\rho(x')$$

$$B(x) = \chi(x) = 1$$

$$B(xg) = (a_{33})^{\frac{-m+i\rho}{2}}(\overline{a_{33}})^{\frac{m+i\rho}{2}}$$

On obtient également la forme des représentations données en [5] par l'isomorphisme isométrique

$$(22) \qquad \rho(x)^{\frac{1}{2}}F(x) \to f(x)$$

d'où :

$$[{}_G U^L(g)f](x) = a_{33}^{\frac{-m+i\rho-3}{2}} \overline{(a_{33})}^{\frac{m+i\rho-3}{2}} f(x') \tag{23}$$

En plus de ces deux séries, il en existe deux autres dites séries complémentaires non dégénérée et dégénérée qui s'obtiennent par induction à G d'une représentation unidimensionnelle non unitaire de Γ et de Γ'. Nous ne les utiliserons pas par la suite.

II. — ÉTUDE DU PRODUIT TENSORIEL DE DEUX REPRÉSENTATIONS DE LA SÉRIE NON DÉGÉNÉRÉE

Introduction.

Considérons deux représentations de la série principale non dégénérée induites par les représentations χ_1 et χ_2 du sous-groupe Γ. Nous nous proposons donc d'analyser le produit tensoriel $U^{\chi_1} \otimes U^{\chi_2}$ en ses éléments irréductibles.

Appliquons d'abord le théorème d'induction réduction de Mackey [*4* a] (théorème 7.2).

On considère pour tout couple $(x, y) \in G \times G$ les représentations $\delta \to \chi_1(x\delta x^{-1})$ et $\chi_2(y\delta y^{-1})$ du sous-groupe $(x^{-1}\Gamma x) \cap (y^{-1}\Gamma y)$ de G, et soit $\chi(xy)$ leur produit tensoriel; on forme la représentation induite ${}_G U^{\chi(x,y)}$. Alors, cette représentation est déterminée à une équivalence près par la double classe $\Gamma xy^{-1}\Gamma$ et $U^{\chi_1} \otimes U^{\chi_2}$ est unitairement équivalente à la somme directe, sur les doubles classes de mesure non nulle, de représentations $U^{\chi(x,y)}$.

Dans notre cas, il n'y a qu'une seule double classe de mesure non nulle [*5*]; c'est la double classe $\Gamma\omega\Gamma$ de l'élément :

$$\omega = \begin{bmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ -1 & & \end{bmatrix}.$$

En faisant $x = e$ et $y = \omega^{-1}$, nous obtenons $x^{-1}\Gamma x \cap y^{-1}\Gamma y \equiv D$ sous-groupe de Cartan et

$$\chi(x, y) = \chi_1(\delta)\chi_2(\omega\delta\omega^{-1}) \tag{24}$$

On peut donc dire que le produit tensoriel $U^{\chi_1} \otimes U^{\chi_2}$ est équivalent à la représentation induite à G par la représentation χ de D. Elle est donc construite sur l'espace $\mathfrak{L}^2_\mu(G/D)$, μ étant une mesure quasi invariante sur G/D. Cette dernière représentation n'est pas irréductible et nous nous proposons d'analyser ses composantes irréductibles par une méthode géométrique due à Guelfand et Graev [*2*].

En utilisant la forme (20) pour les représentations, nous pouvons écrire explicitement le produit tensoriel :

$$U^{\chi_1} \otimes U^{\chi_2} \equiv [U^\chi(g)f](x, y) = \alpha_1(x, g)\alpha_2(y, g)f(x\bar{g}, y\bar{g}) \tag{25}$$

En désignant par $S = G/D$ l'espace des couples (x, y) où x et $y \in X = G/D$; D étant le stabilisateur du couple $(\dot{e}, \dot{\omega})$, nous écrirons (25) sous la forme :

$$[U(g)f](s) = \alpha(s, g)f(sg) \tag{26}$$

$$s \equiv (x, y) \qquad \text{et} \qquad \alpha(s, g) = \alpha_1(x, g)\,\alpha_2(y, g)$$

$\alpha_1(x, g)$ correspondant aux nombres $[m_2, m_3, \rho_2, \rho_3]$.
$\alpha_2(y, g)$ correspondant aux nombres $[n_2, n_3, \sigma_2, \sigma_3]$.
L'unitarité de U entraînant la relation fonctionnelle

$$\alpha(s, g_1 g_2) = \alpha(sg_1, g_2)\,\alpha(s, g_1) \tag{27}$$

pour $\forall s \in S$ et $\forall g_1 g_2 \in G$.

Afin de décomposer la représentation (27), nous associons à S l'ensemble des orbites

$$\omega = sN \tag{28}$$

par N sous-groupe nilpotent maximal de G, ou tout sous-groupe $N' = g^{-1}Ng$ conjugué. Étudions les propriétés de ces orbites dites horosphères de centre s.

a) $$\omega g = sNg = sgg^{-1}Ng = s'N' = \omega' \in \Omega.$$
g fait passer de ω à une autre horosphère ω'. Cependant G n'agit pas transitivement sur Ω, mais on montre que Ω est stratifié en un ensemble de sous-espaces Ω_x transitifs par G; la base de stratification étant $X = G/\Gamma$.

b) Soient deux horosphères quelconques ω_1 et ω_2, voyons à quelles conditions elles peuvent être confondues

$$\begin{gathered} \omega_1 = sNg = \omega_2 = s'Ng' \\ s_0 g_1^{-1} Ng = s_0 g_2^{-1} Ng' \end{gathered} \tag{29}$$

Elles ont même stabilisateur, d'où :

$$g^{-1}\mathrm{N}g = g^{-1\prime}\mathrm{N}g'$$
$$g'g^{-1}\mathrm{N}gg'^{-1} = \mathrm{N}$$

$g'g^{-1}$ appartient au normalisateur de N, c'est-à-dire $\Gamma = \mathrm{D}\cdot\mathrm{N} = \mathrm{N}\cdot\mathrm{D}$, d'où

$$g'g^{-1} = \delta n$$

(30) $$g' = \delta ng \qquad \delta \text{ et } n\forall \in \mathrm{D} \text{ et } \mathrm{N}$$

D étant le stabilisateur de s_0; (29) donne

$$s_0 g_1^{-1} n_1 \cdot g = s_0 \delta_1 g_2^{-1} n_2 \cdot \delta n g$$

Or

$$\delta n = n'\delta$$

d'où :

(31) $$g_2 = \delta n' g_1 \delta_1 \qquad \delta \text{ et } \delta_1 \in \mathrm{D} \quad \text{et} \quad n' \in \mathrm{N}$$

Il résulte donc de (30) et (31) qu'on peut paramétrer une horosphère ω par le couple de points $\omega = (h_1, h_2)$ h_1 et $h_2 \in \mathrm{H} = \mathrm{G/N}$, $\omega = (h_1, h_2)$ étant confondues avec $\omega' = (\delta h_1, \delta h_2)$, ou encore écrire :

(32) $$\omega = s_0 g_1^{-1}\mathrm{N}g$$

$g_1(g)$ étant un représentant quelconque de la classe $h_1(h_2)$.

c) Le transformé par g d'une horosphère ω s'écrit

$$\omega g \equiv (h_1, h_2 g) = (h_1, h) \qquad h \text{ quelconque} \in \mathrm{H}.$$

Ainsi h_1 désigne la composante transitive Ω_x à laquelle ω appartient, h désignera l'horosphère ω.

Nous dirons que $h \in \mathrm{H}$ est en position générale si

$$h = \delta h \delta_1^{-1} \rightarrow \delta = \delta_1 = c \in \mathrm{C} \text{ centre de G}.$$

et $\omega = (h_1, h)$ est en position générale si h_1 l'est. D'autre part, nous avons :

$$(h_1, h) \equiv (\delta h_1 \delta_1, \delta h)$$

donc si h_1 est en position générale, $\delta = \delta_1^{-1} = c$ et alors sur une composante transitive d'horosphères en position générale, les horosphères (h_1, h) et (h_1, ch) sont confondues.

On voit aussi pourquoi la base de stratification de Ω est X; en effet, h_1 désignant la composante transitive, on les obtient toutes en faisant varier h_1, mais sachant que h_1 et δh_1 désignent la même composante; h_1 peut être remplacé par sa classe z_1 dans $H/D = Z$.

Nous avons également besoin d'une mesure μ sur horosphère ω telle que :

$$\mu_\omega(s) = \mu_{\omega g}(sg) \tag{33}$$

Pour la construire, considérons l'espace homogène $H = \frac{G}{N}$, à un ensemble de mesure nulle près; il peut être identifié au groupe $H = ZD$ et l'on a, en utilisant (5), une mesure sur Z

$$\int_H f(h)\rho^{-1}(h)dh = \int_Z dz \int_D f(\delta h)d\delta \tag{34}$$

où $\rho^{-1}(h)$ vérifie (4).

$$\rho^{-1}(\delta h) = \frac{\Delta_H(\delta)}{\Delta_D(\delta)}\rho^{-1}(h) \tag{35}$$

ou encore

$$\rho(\delta h) = \Delta_H^{-1}(\delta) = |\delta_2|^4 |\delta_3|^8 \rho(h) = \beta(\delta)\cdot\rho(h) \tag{36}$$

Maintenant, un point $s \in \omega = (h_1, h)$ est donné par $s = x_0 g_1^{-1} ng$ où $g_1(g)$ sont deux représentants fixes de la classe $h_1(h)$; on montre que la mesure

$$\mu_\omega(s) = d_\omega s = \rho(h_1)dn \tag{37}$$

où dn la mesure invariante sur N, vérifie (33).

— Considérons maintenant la représentation (26). Nous allons, dans une première étape, chercher les représentations irréductibles susceptibles d'apparaître dans la décomposition. Pour cela, associons à toute fonction. $f(s) \in \mathcal{C}_c^\infty(S)$ une fonction φ sur Ω par

$$\varphi(\omega) = \int_\omega k(\omega, s)f(s)d_\omega s \tag{38}$$

ou encore en utilisant (37) et la paramétrisation (32)

$$\varphi(h_1, h) = \int_\omega k(g_1, g_2, n)f(s_0 g_1^{-1} ng)\rho(h_1)dn \tag{39}$$

Imposons la condition que la représentation

$$[U(g)f](s) = \alpha(sg)f(sg)$$

induit la représentation $\tilde{U}(g)$ sur les fonctions Φ, définie par

$$[\tilde{U}(g)\varphi](\omega) = \varphi(\omega g) = \varphi(h_1, hg) \tag{40}$$
$$\varphi \in \mathfrak{L}^2(H, dh)$$

Pour voir quelles sont les composantes irréductibles qui apparaissent, on décompose d'abord (40).

Cette représentation, induite à H par la représentation identité de N, est dite quasi régulière; elle se décompose ainsi [9] :

— On associe à la fonction $\varphi(h_1, h)$ sa transformée de Fourier définie par

$$\psi(h_1, h, \chi) = \rho^{-\frac{1}{2}}(h_1) \int \varphi(h_1, \delta h)\rho^{\frac{1}{2}}(\delta h)\chi^{-1}(\delta)d\delta \tag{41}$$

et

$$\varphi(h_1, \delta h)\rho^{\frac{1}{2}}(\delta h) = \rho^{\frac{1}{2}}(h_1)\frac{1}{(2\pi)^4}\int \psi(h_1, h, \chi)\chi(\delta)d\chi \tag{42}$$

δ parcourant D et χ, $\widehat{D}$ son dual

$$\chi(\delta) = (\delta_2)\frac{-p_2 + i\tau_2}{2}(\bar{\delta}_2)\frac{p_2 + i\tau_2}{2}(\delta_3)\frac{-p_3 + i\tau_3}{2}(\bar{\delta}_3)\frac{p_3 + i\tau_3}{2} \tag{43}$$

$$d\chi = \sum_{p_1, p_2} d\tau_2 d\tau_3 \qquad p_2 \text{ et } p_3 \text{ entiers, } \tau_2, \tau_3 \text{ réels.} \tag{44}$$

Les fonctions ψ ayant les propriétés d'homogénéité suivantes :

$$\psi(\delta^{-1}h_1, h_2, \chi) = \psi(h_1, h_2, \chi) = \psi(h_1, h_2, \chi)\chi(\delta) \tag{45}$$

à la représentation $\tilde{U}(g)$ (40), correspond la représentation $\tilde{U}(g)$ sur les fonctions ψ par

$$[\tilde{U}(g)\psi](h_1, h, \chi) = \left[\frac{\rho(h)}{\rho(hg)}\right]^{\frac{1}{2}} \psi(h_1, hg, \chi) \tag{46}$$

et l'on a l'analogue de la formule de Plancherel pour les fonctions réciproques ψ et φ

$$\int |\varphi(h)|^2 dh = \int |\psi(h_1, h, \chi|^2 d\chi \cdot dx \tag{47}$$

dx étant la mesure définie par (34) sur $X = G/\Gamma$.

Cette représentation (46) n'est autre que la représentation irréductible de la série principale non dégénérée définie par (20).

En effet

$$| \psi(h_1 . h, \chi) | = | \psi(h_1, \delta x, \chi) | = | \chi(\delta) \cdot \psi(h_1, x, \chi) | = | \psi(h_1, x, \chi) |,$$

donc l'application $\psi(h_1, h, \chi) \to \psi(h_1, x, \chi)$ est une isométrie, et on peut décrire (46) sur l'espace $\mathfrak{L}^2(X, dx)$; nous aurons :

$$\begin{aligned}[\overline{U}(g)\psi](h_1, h, \chi) &= [\overline{U}(g)\psi](h_1, x, \chi)\chi(\delta) \\ &= \left[\frac{\rho(h)}{\rho(hg)}\right]^{\frac{1}{2}} \psi(h_1, \delta\delta' x', \chi) = \chi(\delta') \left[\frac{\rho(\delta x)}{\rho(\delta\delta' x')}\right]^{\frac{1}{2}} \psi(h_1, x', \chi)\end{aligned}$$

car si

$$h = \delta x$$

$$h' = hg = \delta\delta' n \cdot x' \qquad \text{où} \qquad x' = \text{classe de } g \text{ dans X}$$

et

$$(48) \qquad \begin{aligned}[\overline{U}(g)\psi](h_1, x, \chi) &= \chi(\delta')\beta^{-\frac{1}{2}}(\delta')\psi(h_1, x', \chi) \\ &= \alpha(x, g)\psi(h_1, x', \chi)\end{aligned}$$

Par ailleurs [5], on montre que les représentations réalisées sur les espaces des fonctions $\psi(h_1, x, \chi)$ et $\psi(h_1, x, \chi')$ sont équivalentes si $\chi(\delta) = \chi'(\omega\delta\omega^{-1})$ pour $\omega \in W$, donc chaque représentation apparaît 6 fois (nombre d'éléments de W) dans la décomposition de (40). Nous avons décomposé la représentation quasi régulière, en une intégrale hilbertienne de représentations de la série principale non dégénérée, la mesure étant $d\chi$, et chacune intervenant 6 fois; on peut donc écrire que :

$$(49) \qquad \varphi(h_1, h) = \frac{6}{(2\pi)^4} \int_{\widehat{D}} \psi(h_1, h, \chi)\chi(\delta)d\chi$$

— Tous les caractères χ n'interviennent pas dans la décomposition de la représentation (25); en effet, le noyau de la relation (39) va introduire une restriction sur les χ. Remarquons que les représentants g_1 et g_2 dans l'horosphère $\omega = (h_1, h)$ sont arbitraires, d'où

$$(50) \qquad k(g_1, g_2, n) = k(n_1 g_1, n_2 g_2, n_1 n n_2^{-1})$$

D'autre part, la condition imposée pour définir le noyau et l'invariance de la mesure (37) nous donne

$$\int k(\omega g, s) f(sg) d_\omega(s) = \int k(\omega, s)\alpha(s, g) f(sg) d_\omega s$$

d'où

$$(51)\qquad k(g_1, g_2g, n) = \mathrm{K}(g_1, g_2, n)\alpha(s_0g_1^{-1}ng_2, g)$$

en tenant compte de la relation fonctionnelle (27), on voit que :

$$(52)\qquad k(g_1, g_2, n) = \alpha(s_0, g_1^{-1}n, g_2)$$

est solution de (50) et (51), donc un noyau possible. Nous avons donc

$$(53)\qquad (h_1, h) = \int_{\mathrm{N}} \alpha(s_0, g_1^{-1}n, g_2)f(s_0, g_1^{-1}n, g_2)\rho(h_1)dn$$

Soit c appartenant au centre C de G; nous avons en utilisant (27) :

$$(h_1, ch) = \varphi(h_1, hc) = \int_{\mathrm{N}} \alpha(s_0, g_1^{-1}ng_2c)f(s_0g_1^{-1}ng_2)\rho(h_1)dn$$

$$= \int \alpha(s_0g_1^{-1}ng_2, c)\alpha(s_0, g_1^{-1}ng_2)f(s_0g_1^{-1}ng_2)\rho(h_1)dn = \alpha(s_0g_1^{-1}ng_2, c)\varphi(h_1, h)$$

car $\alpha(s_0g_1^{-1}ng_2, c) = \alpha(s, c)$ ne dépend que de c, d'où, en utilisant (45) et (49) :

$$\psi(h_1, ch, \chi) = \psi(h_1, h, \chi)\alpha(s, c) = \psi(h_1, h, \chi)\chi(c)$$

d'où :

$$(54)\qquad \alpha(s, c) = \chi(c)$$

soit, en tenant compte du fait que

$$\mathrm{C} = \left\{ \mathrm{I}\,;\, \mathrm{I}\cdot\exp i\frac{2\pi}{3}\,;\, \mathrm{I}\cdot\exp i\frac{4\pi}{3} \right\}$$

$$\exp i\frac{2\pi}{3}(m_2 + m_3 + n_2 + n_3) = \exp i\frac{2\pi}{3}(p_2 + p_3)$$

$$\exp i\frac{4\pi}{3}(m_3 + m_3 + n_2 + n_3) = \exp i\frac{2\pi}{3}(p_2 + p_3)$$

d'où

$$(55)\qquad p_2 + p_3 - (m_3 + m_2 + n_2 + n_3) \equiv 3k,$$

k entier quelconque.

Ainsi, seules les fonctions φ telles que :

$$(56)\qquad (h_1, h) = \frac{6}{(2\pi)^4} \sum_{p_2, p_3} \int d\tau_2 d\tau_3 \psi(h_1, h, \chi)\chi(\delta)$$

p_2 et p_3 vérifiant (55) interviennent et l'on peut dire que dans la décomposition de la représentation (25), seules les composantes irréductibles pour lesquelles χ vérifie la relation (55) apparaissent et (41) nous donne alors :

$$(57)\quad \psi(h_1, h, \chi) = \rho^{\frac{1}{2}}(h_1)\rho^{\frac{1}{2}}(h) \int \alpha(s_0, g_1^{-1}n\delta g_2) f(s_0, g_1^{-1}n\delta g_2)\beta^{\frac{1}{2}}(\delta)\chi^{-}(\delta)d\delta dn$$

Il reste maintenant à inverser (57), c'est-à-dire calculer $f(s)$ en se donnant φ vérifiant (53) et (56), ou bien ψ vérifiant (57). Pour cela, on utilise l'analogue de la formule de Plancherel pour le groupe G [5]. Soit

$$F(g) = u(g)[U(g)f](s) = u(g)\alpha(s, g)f(sg)$$

où $u(g)$ est continue, constante sur les classes d'éléments conjugués et bornée sur D; alors F(g) est continue, bornée sur G, et indéfiniment différentiable au voisinage de l'identité et de plus, en posant

$$\delta_2 = e^{t_2 + i\tau_2} \qquad \delta_3 = e^{t_3 + i\tau_3}$$

$$(58)\quad F(e) = \frac{4}{3(2\pi)^{10}} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t_2} - \frac{\partial}{\partial t_3}\right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial r_2} - \frac{\partial}{\partial r_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2}{\partial t_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial r_2^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial r_3^2}\right) \right] \left\{ \beta^{\frac{1}{2}}(\delta) \int \mathcal{F}(h, \delta h) dz \right\}_{\delta = e}$$

et

$$(59)\qquad \mathcal{F}(h, \delta h) = \rho(h) \int F(g_1^{-1}n\delta g_1)dn$$

où dz est la mesure définie par (34) sur $\frac{H}{D}$. En exprimant $\mathcal{F}(h, \delta h)$ en fonction de $\varphi(h, \delta h)$, nous obtenons :

$$\mathcal{F}(h, \delta h) = u(\delta)\rho(h) \int \alpha(s, g_1^{-1}n\delta g_1) f(s, g_1^{-1}n\delta g_1)dn$$

or

$$\alpha(s, g_1^{-1}n\delta g_1) = \alpha(s_0 g_s, g_1^{-1}n\delta g_1) = \alpha^{-1}(s_0, g_s)\alpha(s_0, g_s g_1^{-1}n\delta g_1)$$

d'où, en utilisant (53) et faisant $u(\delta) = 1$ au voisinage de e

$$\mathcal{F}(h, \delta h) = \frac{\rho^{\frac{1}{2}}(h)}{\rho^{\frac{1}{2}}(h, g_s^{-1})} \alpha^{-1}(s_0, g_s)\varphi(hg_s^{-1}, \delta h)$$

et en utilisant (56), (58), nous obtenons :

(60) $\mathrm{F}(e) = f(s) =$

$$\frac{8}{(2\pi)^{14}} \sum_{p_2, p_3} \int (p_2 - p_3)^2 + (\tau_2 - \tau_3)^3 \frac{\rho^{\frac{1}{2}}(h)}{\rho^{\frac{1}{2}}(hg_s^{-1})} \alpha^{-1}(s_0, g_s)\psi(hg_s^{-1}, h, \chi) dz d\tau_2 d\tau_3$$

Nous allons simplifier le noyau de cette intégrale.

Posons

(61) $$g_s = \delta \cdot nq$$

Calculons $h' = hg_s^{-1}$

$$hg_s^{-1} = \delta'' z(nq)^{-1}\delta^{-1}$$

Or, nous pouvons, en utilisant (2) écrire

$$z(nq)^{-1} = \delta n_1 z_1$$

où z_1 est la classe de $(nq)^{-1}$ dans $\mathrm{X} = \mathrm{G}/\Gamma$. z_1 peut être mis sous la forme :

$$z_1 = \widehat{\delta} z' \widehat{\delta}^{-1} \qquad \text{où} \qquad z' \text{ est en position générale}$$

d'où :

(62) $$hg_s^{-1} = \delta' \delta'' \widehat{\delta} z' \widehat{\delta}^{-1} \delta^{-1}$$

Par ailleurs, (57) nous donne :

(63) $$\psi(h_1 \delta, h, \chi) = \alpha(s_0, \delta^{-1}) \frac{\rho^{\frac{1}{2}}(h_1 \delta)}{\rho^{\frac{1}{2}}(h_1)} \psi(h_1, h, \chi)$$

et, en tenant compte de (45), (27) et (36), nous obtenons :

$$f(s) = f(x, y) = \frac{8}{(2\pi)^{14}} \sum_{p_2, p_3} \int dz d\tau_2 d\tau_3 [(p_2 - p_3)^2 + (\tau_2 - \tau_3)^2] \mathcal{N}(x, y, z) \psi(z', z, \chi)$$

où

(64) $$\mathcal{N}(x, y, z) = \beta^{-\frac{1}{2}}(\delta'' \widehat{\delta}) \chi^{-1}(\delta'' \widehat{\delta}) \alpha^{-1}(s_0, \delta nq) \alpha(s_0, \widehat{\delta}\delta)$$

Calculons $\alpha^{-1}(s_0, \delta nq)\alpha(s_0, \widehat{\delta\delta})$

$$\alpha^{-1}(s_0, \delta nq)\alpha(s_0, \widehat{\delta\delta}) = \alpha^{-1}(s_0\delta, nq)\alpha^{-1}(s_0, \delta)\alpha(s_0, \delta)\alpha(s_0, \widehat{\delta})$$
$$= \alpha^{-1}(s_0, nq)\alpha(s_0, \widehat{\delta})$$
$$\alpha(s_0, \widehat{\delta}) = \alpha_1(\dot{e}, \widehat{\delta}) \times \alpha_2(\dot{\omega}, \widehat{\delta}) = \alpha_1(\dot{e}, \widehat{\delta}) \times \frac{\alpha_2(\dot{e}, \omega\widehat{\delta}\omega^{-1}\cdot\omega)}{\alpha(\dot{e}, \omega)}$$

or

$$\omega\widehat{\delta}\omega^{-1} = \widehat{\delta}' \in \mathrm{D}$$

d'où

$$\alpha(s_0, \widehat{\delta}) = \alpha_1(\dot{e}, \widehat{\delta})\cdot\alpha_2(\dot{e}, \omega\widehat{\delta}\omega^{-1})$$

Pour écarter la valeur nulle de $\alpha^{-1}(s_0, nq)$, on multiplie le noyau par la fonction constante $\alpha(s_0, g)$, où

$$g = \begin{bmatrix} 1 & & -1 \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \tag{65}$$

d'où :

$$\alpha^{-1}(s_0, nq) = \alpha_1^{-1}(\dot{e}, nq)\alpha_2^{-1}(\dot{\omega}, nq) = \alpha_1^{-1}(\dot{e}, nq)\frac{\alpha_2^{-1}(\dot{e}, \omega nq)}{\alpha_2^{-1}(\dot{e}, \omega)}$$

d'où :

$$\alpha^{-1}(s_0, nq)\alpha(s_0, g) = \alpha_1^{-1}(\dot{e}, nq) \times \alpha_2^{-1}(\dot{e}, \omega nq)\alpha_2(\dot{e}, \omega g)$$

et en tenant compte du fait que :

(66)
$$nq = \begin{bmatrix} \frac{y_2}{y_2-x_2-x_1(y_3-x_3)} & \frac{y_3}{y_2-x_2-x_1(y_3-x_3)} & \frac{1}{y_2-x_2-x_1(y_3-x_2)} \\ x_1+\frac{x_2(y_1-x_1)}{x_2-y_2-y_1(x_3-y_3)} & 1+\frac{x_3(y_1-x_1)}{x_2-y_2-y_1(x_3-y_3)} & -\frac{y_1-x_1}{x_2-y_2-y_1(x_3-y_3)} \\ x_2 & x_3 & 1 \end{bmatrix}$$

et en posant

(67) $\mathrm{D}_{xy} = x_2 - y_2 - y_1(x_3 - y_3)\,;\qquad \mathrm{D}_{yx} = y_2 - x_2 - x_1(y_3 - x_3)$

on trouve :

$$\delta'' = (\delta_2'', \delta_3'')$$

avec

$$(68)\qquad \delta_2'' = \frac{D_{yz}D_{xy}}{D_{yx}D_{zy}}\,; \qquad\qquad \delta_3'' = \frac{D_{zy}}{D_{xy}}$$

$$\widehat{\delta} = (\widehat{\delta}_2, \widehat{\delta}_3)$$

$$(69)\quad \delta_2 = \left[\frac{D_{zx}D_{xy}}{D_{zy}}\right]^{-\frac{1}{3}} \times \left[\frac{D_{xz}D_{yx}}{D_{yz}}\right]^{\frac{2}{3}}; \quad \widehat{\delta}_3 = \left[\frac{D_{zx}D_{xy}}{D_{zy}}\right]^{+\frac{2}{3}} \times \left[\frac{D_{xz}D_{yx}}{D_{yz}}\right]^{-\frac{1}{3}}$$

et

$$\mathcal{N}(x, y, z) = (-1)^{n_3} \times D_{xy}{}^{a}\overline{D_{xy}}{}^{a'} D_{yx}{}^{b}\overline{D_{yx}}{}^{b'} D_{xz}{}^{c}\overline{D_{xz}}{}^{c'} D_{zx}{}^{d}\overline{D_{zx}}{}^{d'} D_{yz}{}^{e}\overline{D_{yz}}{}^{e'} D_{zy}{}^{f}\overline{D_{zy}}{}^{f'}$$

(70)

$$a = \frac{1}{6}[2p_2 - p_3 - 2n_2 + n_3 + m_2 - 2m_3 + i(-2\tau_2 + \tau_3 + 2\sigma_2 - \sigma_3 - \rho_2 + 2\rho_3) - 9]$$

$$a' = \frac{1}{6}[-(2p_2 - p_3 - 2n_2 + n_3 + m_2 - 2m_3) + i(-2\tau_2 + \tau_3 + 2\sigma_2 - \sigma_3 - \rho_2 + 2\rho_3) - 9]$$

$$b = \frac{1}{6}[-p_2 - p_3 - 2n_2 - 2n_3 - 2m_2 + m_3 + i(\tau_2 + \tau_3 + 2\sigma_2 + 2\sigma_3 + 2\rho_2 - \rho_3) - 3]$$

$$b' = \frac{1}{6}[-(p_2 - p_3 - 2n_2 - 2n_3 - 2m_2 + m_3) + i(\tau_2 + \tau_3 + 2\sigma_2 + 2\sigma_3 + 2\rho_2 - \rho_3) - 3]$$

$$c = \frac{1}{6}[2p_2 + p_3 + 2n_2 + n_3 + 2m_2 + m_3 + i(-2\tau_2 + \tau_3 + 2\sigma_2 - \sigma_3 + 2\rho_2 - \rho_3) - 3]$$

$$c' = \frac{1}{6}[-(2p_2 - p_3 - 2n_2 + n_3 - 2m_2 + m_3) + i(-2\tau_2 + \tau_3 + 2\sigma_2 - \sigma_3 + 2\rho_2 - \rho_3) - 3]$$

$$d = \frac{1}{6}[-p_2 - 2p_3 + n_2 + n_3 + m_2 - 2m_3 + i(-\tau_2 - 2\tau_3 - \sigma_2 - \sigma_3 - \rho_2 + 2\rho_3) - 3]$$

$$d' = \frac{1}{6}[-(-p_2 + 2p_3 + n_2 + n_3 + m_2 - 2m_3) + i(-\tau_2 - 2\tau_3 - \sigma_2 - \sigma_3 - \rho_2 + 2\rho_3) - 3]$$

$$e = \frac{1}{6}[p_2 + p_3 + 2n_2 - n_3 + 2m_2 - m_3 + i(-\tau_2 - \tau_3 - 2\sigma_2 + \sigma_3 - 2\rho_2 + \rho_3) - 3]$$

$$e' = \frac{1}{6}[-(p_2 + p_3 + 2n_2 - n_3 + 2m_2 - m_3) + i(-\tau_2 - \tau_3 - 2\sigma_2 + \sigma_3 - 2\rho_2 + \rho_3) - 3]$$

$$f = \frac{1}{6}[-2p_2 + p_3 - n_2 - n_3 - m_2 + 2m_3 + i(2\tau_2 - \tau_3 + \sigma_2 + \sigma_3 + \rho_2 - 2\rho_3) + 3]$$

$$f' = \frac{1}{6}[-(=2p_2 + p_3 - n_2 - n_3 - m_2 + 2m_3) + i(2\tau_2 - \tau_3 + \sigma_2 + \sigma_3 + \rho_2 - 2\rho_3) + 3]$$

III. — APPLICATIONS

Nous nous proposons d'utiliser le noyau de Clebsch-Gordon (70) pour former des invariants par G à partir de trois représentations irréductibles de la série principale non dégénérée. En suivant Rühl [77], nous ferons quelques hypothèses afin de restreindre le choix de ces représentations irréductibles.

Donnons-nous trois représentations irréductibles du type (20) :

$$\begin{aligned}[U(g)f](x) &= \alpha_1(x, g)f(xg)\\ [U(g)f](y) &= \alpha_2(y, g)f(yg)\\ [U(g)f](z) &= \alpha_3(z, g)f(zg)\end{aligned} \tag{71}$$

Supposons qu'elles correspondent à trois multiplets; un couplage entre ces trois multiplets n'est possible que s'il existe un invariant par G tel que

$$\mathfrak{J} = \int N(xyz)f(x)f(y)f(z)dxdydz \tag{72}$$

Nous voyons d'après l'étude du produit tensoriel qu'un invariant ne saurait se trouver dans sa décomposition, car seules des représentations unitaires irréductibles, donc de dimension infinie apparaissent; cependant cette étude nous donne la forme du noyau; en effet $\mathcal{N}(x, y, z)$ et $N(x, y, z)$ vérifient des équations fonctionnelles du même type et $N(x, y, z)$ peut être mis sous la forme :

$$\begin{aligned}&N(x, y, z)\\ &= D_{xy}{}^{P_1}\overline{D_{xy}}{}^{Q_1}D_{xz}{}^{P_2}\overline{D_{xz}}{}^{Q_2}D_{yz}{}^{P_3}\overline{D_{yz}}{}^{Q_3}D_{yx}{}^{P_4}\overline{D_{yx}}{}^{Q_4}\times D_{zx}{}^{P_5}\overline{D_{zx}}{}^{Q_5}D_{zy}{}^{P_6}\overline{D_{zy}}{}^{Q_6}\end{aligned} \tag{73}$$

Déterminons les $P_i(Q_i)$ en utilisant l'invariance de (72) par G, d'où

$$N(x', y', z') = \alpha_1(xg)\alpha_2(yg)\alpha_3(zg)J(x, y, z, x', y', z') \tag{74}$$

J = jacobien des variables xyz par rapport aux variables $x'y'z'$.

Or

$$D_{x'y'} = x'_2 - y'_2 - y'_1(x'_3 - y'_3) = \frac{x_2 - y_2 - y_1(x_3 - y_3)}{g_2(y)g_3(x)}, \text{etc...}$$

où nous avons posé :

$$\begin{aligned}g_2(y) &= G_{31}(y_1y_3 - y_2) + G_{21}y_1 + G_{11}\\ g_3(x) &= g_{13}x_2 + g_{23}x_3 + g_{33}\end{aligned}$$

d'où

$$(75)\quad \begin{aligned} N(x'y'z') = N(xyz)\cdot[g_2(x)]^{-(P_4+P_5)}[g_2(y)]^{-(P_1+P_6)}[g_2(z)]^{-(P_2+P_3)} \\ [g_3(x)]^{-(P_1+P_2)}[g_3(y)]^{-(P_3+P_4)}[g_3(z)]^{-(P_5+P_6)} \\ \times \text{ les complexes conjugués aux puissances } Q_i. \end{aligned}$$

Par comparaison de (74) et (75) en caractérisant

$$\begin{aligned} &\alpha_1(x, g) \quad \text{par} \quad m_2, m_3, \rho_2, \rho_3 \\ &\alpha_2(y, g) \quad \text{par} \quad n_2, n_3, \sigma_2, \sigma_3 \\ &\alpha_3(z, g) \quad \text{par} \quad p_2, p_3, \tau_2, \tau_3 \end{aligned}$$

on trouve une condition de compatibilité :

$$(76)\quad \begin{aligned} 2(m_2 + n_2 + p_2) - (m_2 + n_3 + p_3) = 0 \\ 2(p_2 + \sigma_2 + \tau_2) - (p_3 + \sigma_3 + \tau_3) = 0 \end{aligned}$$

et on trouve également :

$$\begin{aligned} P_1 &= -\frac{1}{6}(m_2 - n_2 - m_3 + p_3) + \frac{i}{6}(\rho_2 - \sigma_2 - \rho_3 + \tau_3) + a \\ P_2 &= -\frac{1}{6}(m_2 - p_2 - m_3 + n_3) + \frac{i}{6}(\rho_2 - \tau_2 - \rho_3 + \sigma_3) + \bar{b} \\ P_3 &= -\frac{1}{6}(n_2 - p_2 + m_3 - n_3) + \frac{i}{6}(\sigma_2 - \tau_2 + \rho_3 - \sigma_3) + a \\ P_4 &= -\frac{1}{6}(- m_2 + n_2 - n_3 + p_3) + \frac{i}{6}(- \rho_2 + \sigma_2 - \sigma_3 + \tau_3) + b \\ P_5 &= -\frac{1}{6}(- m_2 + p_2 + n_3 - p_3) + \frac{i}{6}(- \rho_2 + \tau_2 + \sigma_3 - \tau_3) + a \\ P_6 &= -\frac{1}{6}(- n_2 + p_2 + m_3 - p_3) + \frac{i}{6}(- \sigma_2 + \tau_2 + \rho_3 - \tau_3) + \bar{b} \end{aligned}$$

avec

$$a + b = \frac{1}{6}(m_2 + n_2 + p_2) - \frac{i}{6}(\rho_2 + \sigma_2 + \tau_2) - 1$$

Les Q_i sont donnés par les mêmes formules en remplaçant les $- m_i$ par les $+ m_i$, a par c et b par d

$$c + d = -\frac{1}{6}(m_2 + n_2 + p_2) - \frac{i}{6}(\rho_2 + \sigma_2 + \tau_2) - 1$$

D'autre part, le noyau est uniforme pour :

$$P_i - Q_i = \text{entier } \forall i$$

soit

$$(77) \qquad \begin{aligned} m_2 + n_2 + p_2 &\equiv 0 \bmod 3 \\ m_3 + n_3 + p_3 &\equiv 0 \bmod 3 \end{aligned}$$

et il n'y a pas de singularité pour

$$\mathcal{R}_e(P_i + Q_i) + 2 > 0 \ \forall i$$

condition qui est toujours vérifiée.

Donc, pour qu'un invariant, c'est-à-dire qu'un couplage existe, il suffit d'imposer aux représentations les conditions (76) et (77).

Nous pouvons encore restreindre le choix; en effet, faisons l'hypothèse que la restriction de la symétrie de G, à son compact maximal SU_3 redonne la classification bien connue de celui-ci, c'est-à-dire cherchons les représentations de G qui, par restriction à SU_3 ne contiennent que des représentations vérifiant la relation $p - q \equiv 0 \bmod 3$.

Pour cela, étudions la décomposition par rapport à SU_3 d'une représentation de G définie par $(m_2, m_3, \rho_2, \rho_3)$ par exemple. On utilise pour cela le théorème suivant [4 *b*] qui est l'extension du théorème de réciprocité de Frobenius.

Soit $U(u)$ une représentation irréductible de SU_3; χ une représentation de D de dimension 1. La multiplicité de $U(u)$ dans la restriction à SU_3 de la représentation de G, induite par χ, est égale à la multiplicité de χ restreinte à M sous-groupe diagonal de SU_3 dans la restriction de $U(u)$ à M.

Donnons-nous

$$\chi(\delta) = (\delta_2)^{\frac{-m_2+i\rho_2}{2}} \overline{(\delta_2)}^{\frac{m_2+i\rho_2}{2}} (\delta_3)^{\frac{-m_3+i\rho_3}{2}} \overline{(\delta_3)}^{\frac{m_3+i\rho_3}{2}}$$

la restriction de χ à M s'écrit

$$\chi(v) = (v_2)^{-m_2}(v_3)^{-m_3} \qquad \forall v \in M$$

les représentations de SU_3 cherchées sont celles dont le caractère contient $\chi(v)$; leur multiplicité étant celle de ce caractère. Les groupes que nous utilisons étant simplement connexes, nous pouvons raisonner sur leurs algèbres et considérer les poids correspondants.

Supposons qu'il y ait un ordre lexicographique sur les poids et pour fixer les idées, prenons $m_3 \geqslant m_2 \geqslant 0$ (les autres cas se traitent de la même façon); nous pouvons alors écrire le poids correspondant au caractère $\chi(v)$ sous la forme [*10*] :

$$(m_3 - m_2)\Lambda_1 + m_2\Lambda_2 = \mathrm{M}$$

où Λ_1 et Λ_2 sont les poids fondamentaux de l'algèbre SU_3. D'autre part, étant donné une représentation irréductible de SU_3 de poids dominant Λ, un poids quelconque appartenant à cette représentation peut se mettre sous la forme :

$$\mathcal{M} = \Lambda - (k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2) = p\Lambda_1 + q\Lambda_2 - k_1\alpha_1 - k_2\alpha_2$$

p, q, k_1, k_2 entiers $\geqslant 0$ et (α_1, α_2) étant un système fondamental de racines relatif à une sous-algèbre de Cartan de SU_3. Or :

$$\Lambda_1 = \frac{1}{3}(2\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$\Lambda_2 = \frac{1}{3}(\alpha_1 + 2\alpha_3)$$

d'où

$$\mathrm{M} = \frac{1}{3}[(2m_3 - m_2)\alpha_1 + (m_3 + m_2)\alpha_2]$$

$$\mathcal{M} = \frac{1}{3}[(2p + q - 3k_1)\alpha_1 + (p + 2q - 3k_2)_2\alpha_2]$$

et en identifiant M et $\mathcal{M}$

$$\begin{aligned} p &= m_3 - m_2 + 2k_1 - k_2 \\ q &= m_2 + 2k_2 - k_1 \end{aligned} \tag{78}$$

telles sont les représentations (p, q) de SU_3 qui sont susceptibles d'apparaître dans la restriction de la représentation $(m_2, m_3, \rho_2, \rho_3)$ de G si toutefois la multiplicité de P dans (p, q) est différente de 0. Or, étant donnée une représentation de poids dominant Λ [*12*], la multiplicité d'un poids M dans la représentation Λ est donnée par la formule de Kostant :

$$\mathcal{N}_{\mathrm{M}} = \sum_{\mathrm{S} \in \mathrm{W}} (\det \mathrm{S})\mathrm{P}[\mathrm{S}(\Lambda + \delta) - (\mathrm{M} + \delta)] \tag{79}$$

où

$$\delta = \frac{1}{2}\sum_{\alpha > 0} \alpha = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_2) = \alpha_1 + \alpha_2$$

les S sont les éléments du groupe de Weyl :

$$\mathrm{I},\ S_{\alpha_1},\ S_{\alpha_2},\ S_{\alpha_1}.\ S_{\alpha_2},\ S_{\alpha_2}.\ S_{\alpha_1},\ S_{\alpha_1}.\ S_{\alpha_2}.\ S_{\alpha_1}$$

Si X est une combinaison linéaire à coefficients entiers de $\mathfrak{h}^*$ dual de la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$, P(X) est ici le nombre de solutions $(r_\alpha, r_\beta, \ldots, r_\omega)$ de :

$$X = r_\alpha \alpha + r_\beta \beta + \ldots r_\omega \omega$$

les r_α, r_β ... sont entiers $\geqslant 0$ et $(\alpha, \beta, \ldots, \omega)$ est l'ensemble des racines positives.

En explicitant les calculs, on trouve :

$$(80) \qquad \mathcal{N}_M = P[k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2] - P[(m_2 - m_3 + k_2 - k_1 - 1)\alpha_1 + k_2\alpha_2] - P[k_1\alpha_1 + (-m_2 + k_1 - k_2 - 1)\alpha_2]$$

où $P[a\alpha_1 + b\alpha_2]$ est le nombre de solutions du système

$$a = r_1 + r_3$$
$$b = r_2 + r_3$$

r_1, r_2, r_3 nécessairement entiers $\geqslant 0$.

Nous avons calculé pour les premières valeurs de m_2 et m_3 les représentations (p, q) qui apparaissent ainsi que leur multiplicité (cf. Appendice). Il est à remarquer que $\rho_2\rho_3$ peuvent varier sans que la décomposition de la représentation par rapport à SU_3 change.

Ainsi donc, si nous voulons conserver la classification par rapport à SU_3, nous devons imposer :

$$p - q \equiv 0 \bmod 3.$$

D'où en utilisant (78)

$$m_3 - 2m_2 \equiv 0 \bmod 3$$

et aussi

$$(81) \qquad \begin{aligned} n_3 - 2n_2 &\equiv 0 \bmod 3 \\ p_3 - 2p_2 &\equiv 0 \bmod 3 \end{aligned}$$

conditions qui ne sont nullement entraînées par (76) et (77).

Jusqu'à présent, nous n'avons imposé des restrictions qu'aux paramètres entiers. Remarquons que tous les états appartenant à un même multiplet de SU_3 sont affectés de la même parité; pour conserver cette propriété, il faudrait choisir les représentations de G de telle facon que l'opérateur parité commute avec la partie compacte et anticommute avec la partie

hyperbolique de G; on montre [13] et ceci pour $SL(n, c)$ n quelconque que seules les représentations de la série principale pour lesquelles les paramètres continus ρ_i sont nuls, remplissent de telles conditions; sauf, quelques représentations singulières que nous ne choisirons pas. En définitive, les représentations que nous prendrons devront vérifier (76), (77), (81) et $\rho_2 = \rho_3 = 0$. En utilisant l'appendice, un choix très intéressant pour le vertex baryons antibaryons mesons $B\bar{B}M$
avec

(82) $\bar{B}$ et $B = (1, 1) + (0, 3) + (3, 0) + 2(2, 2) + \ldots$

(83) $M = (0, 0) + 2(1, 1) + (0, 3) + (3, 0) + 3(2, 2) + \ldots$

Ici, nous n'avons utilisé que les représentations de la série principale non dégénérée; d'autres choix sont évidemment possibles avec les représentations de la série dégénérée et même supplémentaire.

Pour finir, nous allons donner une forme plus commode pour l'invariant (73) utilisant le groupe SU_3.

On considère [5] l'espace de Hilbert $\mathcal{L}^2(SU/M, du)$ des fonctions $\varphi(u)$ telles que :

(84) $$\varphi(vu) = \alpha(e, v)\varphi(u)$$
$$\forall v \in M \qquad \text{et} \qquad u \in SU_3$$

et

$$\int |\varphi(u)|^2 du < \infty \qquad du \text{ étant la mesure de Haar sur } SU_3.$$

L'application $\varphi \to f$ définie par (85) $\to \varphi(u) = \dfrac{\pi^{3/2}}{\sqrt{2}}\alpha(e, u)f(x)$ u et x appartenant à la même classe dans $X = G/\Gamma$, établit une isométrie entre $\mathcal{L}^2(SU_3/M, du)$ et $\mathcal{L}^2(G/\Gamma, dx)$ et à la représentation :

$$[U(g)f](x) = \alpha(x, g)f(x, g)$$

correspond la représentation :

(86) $$[\tilde{U}(g)\Phi](u) = \frac{\alpha(e, ug)}{\alpha(e, \overline{ug})}\varphi(\overline{ug})$$

$\overline{ug}$ étant un élément quelconque de la classe de ug.

Posons :

$$\varphi(u) = \frac{\pi^{3/2}}{\sqrt{2}}\alpha_1(e, u)f(x)$$

$$\varphi(v) = \frac{\pi^{3/2}}{\sqrt{2}} \alpha_2(e, v) f(y)$$

$$\varphi(w) = \frac{\pi^{3/2}}{\sqrt{2}} \alpha_3(e, w) f(z)$$

et avec

$$dx = \frac{\pi^3}{2} \mid \alpha(e, u) \mid du, \text{ etc...}$$

x et u devant appartenir à la même classe, nous obtenons en utilisant [1 *a*]

(88) $$x_1 = -\frac{\bar{u}_{21}}{\bar{u}_{11}}; \qquad x_2 = \frac{u_{31}}{u_{33}}; \qquad x_3 = \frac{u_{32}}{u_{33}}, \text{ etc...}$$

d'où

(89) $$D_{xy} = \frac{u_{31}\overline{v_{11}} + u_{32}\overline{v_{21}} + u_{33}\overline{v_{31}}}{\bar{v}_{11}u_{33}}$$

et

$$\mathfrak{J} = \frac{\pi^{9/2}}{2\sqrt{2}} \int k(u, v, w)\varphi(u)\varphi(v)\varphi(w)dudvdw$$

(90) $$k(u, v, w) = C\pi_{i=1}^{6}(U_i)^{P_i}(\bar{U}_i)^{Q_i}$$

où les U_i sont toutes les combinaisons du type $u_{31}\overline{v_{11}} + u_{32}\overline{v_{21}} + u_{13}\overline{v_{11}}$, C étant une constante ne dépendant que des invariants (m_i, ρ_i) définissant les représentations.

D'autre part, on montre [*74*] que pour une représentation irréductible de G, on peut trouver une base canonique dans $\mathfrak{L}^2(SU_3/M, du)$ formée par la somme directe de bases orthonormales dans les sous-espaces invariants par SU_3 obtenus par la restriction de $U(g)$ à ce sous-groupe et on peut écrire :

$$\varphi(u) = \sum_{\alpha} \mu(\alpha) C_{il}^{\alpha}(u) e_l^{\alpha}$$

$$\varphi(v) = \sum_{\beta} \mu(\beta) C_{jm}^{\beta}(v) e_m^{\beta}$$

$$\varphi(w) = \sum_{\gamma} \mu(\gamma) C_{kn}^{\gamma}(w) e_n^{\gamma}$$

(e_l^{α}) est une base orthonormale dans l'espace de la représentation $\alpha = (p, q)$

de SU_3 qui apparaît avec la multiplicité $\mu(\alpha)$ dans la représentation $U(g)$ de G restreinte à SU_3; en remplaçant, nous obtenons :

$$\mathfrak{J} = \frac{\pi^{9/2}}{2\sqrt{2}} \int C\pi_{i=1}^{6}(U_i)^{P_i}(\overline{U}_i)^{Q_i} C_{il}^{\alpha}(u) C_{jm}^{\beta}(v) C_{kn}^{\gamma}(w) du dv dw$$

REMERCIEMENTS

Je remercie M. Carmona pour sa fructueuse collaboration, sans laquelle ce travail n'aurait jamais pu être mené à terme, ainsi que M. Halbwachs pour ses encouragements et ses conseils.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Flato et D. Sternheimer, *J. Math. Phys.*, t. **7**, nº 11, 1966, p. 1932.
[2] I. M. Guelfand et M. I. Graev, *Trudy Moskov*, obsc. 8, 1959, p. 321-390 et *AMST*, vol. **37**, série 2.
[3] F. Bruhat, *Thèse*, Gauthier-Villars, 1956.
[4a] G. W. Mackey, Induced representations of locally compact groups I. *Ann. Math.*, t. **55**, 1952, p. 101-140.
[4b] G. W. Mackey, Induced representations of locally compact groups II.
[5] I. M. Guelfand et M. A. Naimark, *Unitare Darstellungen der Klassischen Gruppen*, Akademie Verlag, Berlin, 1957.
[6] Bourbaki, livre VI, chap. 2.
[7] Bourbaki, livre.
[8] Georges Claude, Représentations induites. Séminaires de l'Institut Henri Poincaré.
[9] I. M. Guelfand et M. A. Naimark, *Mathematitchesky Sbormk*, t. **21**, nº 63, 1947, p. 405-434; *AMST*, série 1, vol. **9**.
[10] Fronsdal, The representations of SL(*n*, C), ICTP 66/51.
[11] Rülh, Ruegg et Santhaman, C. E. R. N. TH. 709, 1966.
[12] Jacobson, *Lie Algebras*, Interscience Publishers, New York, London, 1962.
[13] Rülh, C. E. R. N. 65 1670/5 TH. 626.
[14] M. A. Naimark, Description of all irreducible representations of classical groups, *AMST*, (2), vol. **9**.

(Manuscrit reçu le 21 octobre 1968).

APPENDICE

Représentations de SU_3 apparaissant dans celles de $SL(3, C)$.

$(m_3\ m_2)$	Représentations (p, q) et leurs multiplicités
(0, 0)	(0, 0) + 2(1, 1) + (0, 3) + (3, 0) + 3(2, 2) + 2(1, 4) + (0, 6) + 2(4, 1) + 4(3, 3) + 2(1, 7) + (0, 9) + (6, 0) + 2(7, 1) + (0, 0)
(1, 0)	(1, 0) + (0, 2) + 2(2, 1) + 2(1, 3) + (0, 5) + (4, 0) + 3(3, 2) + 3(2, 4) + 2(1, 3) + (0, 8) + 2(5, 1) + (0, 11) + (7, 0) + (0, 0)
(2, 0)	(2, 0) + (1, 2) + (0, 4) + 2(3, 1) + 2(2, 3) + 2(1, 5) + (0, 7) + (5, 0) + 3(4, 2) + (0, 10) + 2(6, 1) + (8, 0) + (11, 0)
(3, 0)	(3, 0) + (2, 2) + (1, 4) + (0, 6) + 2(4, 1) + 2(3, 3) + 2(1, 7) + (0, 9) + (6, 0) + 2(7, 1) + (9, 0)
(4, 0)	(4, 0) + (3, 2) + (2, 4) + (1, 6) + (0, 8) + 2(5, 1) + (0, 11) + (7, 0) + 10, 0)
(5, 0)	(5, 0) + (4, 2) + (0, 10) + 2(6, 1) + (8, 0) + (11, 0)
(1, 1)	(0, 1) + (2, 0) + 2(1, 2) + (0, 4) + 2(3, 1) + 3(2, 3) + 2(1, 5) + (0, 7) + (5, 0) + 3(4, 2) + (0, 10) + 2(6, 1) + (8, 0) + 11, 0)
(2, 1)	(1, 1) + (0, 3) + (3, 0) + 2(2, 2) + 2(1, 4) + (0, 6) + 2(4, 1) + 3(3, 3) + 2(1, 7) + (0, 9) + (6, 0) + 2(7, 1) + (9, 0)
(3, 1)	(2, 1) + (1, 3) + (0, 5) + (4, 0) + 2(3, 2) + 2(2, 4) + 2(1, 6) + (0, 8) + 2(5, 1) + (0, 11) + (7, 0) + (10, 0)
(4, 1)	(3, 1) + (2, 3) + (1, 5) + (0, 7) + (5, 0) + 2(4, 2) + (0, 10) + 2(6, 1) + (8, 0) + (11, 0)
(5, 1)	(4, 1) + (3, 3) + (1, 7) + (0, 9) + (6, 0) + 2(7, 1) + (9, 0)
(2, 2)	(0, 2) + (2, 1) + 2(1, 3) + (0, 5) + (4, 0) + 2(3, 2) + 3(2, 4) + 2(1, 6) + (0, 8) + 2(5, 1) + (0, 11) + (7, 0) + (10, 0)
(3, 2)	(1, 2) + (0, 4) + (3, 1) + 2(2, 3) + 2(1, 5) + (0, 7) + (5, 0) + 2(4, 2) + (0, 10) + 2(6, 1) + (8, 0) + (11, 0)
(4, 2)	(2, 2) + (1, 4) + (0, 6) + (4, 1) + 2(3, 3) + 2(1, 7) + (0, 9) + (6, 0) + 2(7, 1) + (9, 0)
(5, 2)	(3, 2) + (2, 4) + (1, 6) + (0, 8) + (5, 1) + (0, 11) + (7, 0) + (10, 0)
(3, 3)	(0, 3) + (2, 2) + 2(1, 4) + (0, 6) + (4, 1) + 2(3, 3) + 2(1, 7) + (0, 9) + (6, 0) + 2(7, 1) + (9, 0)
(4, 3)	(1, 3) + (0, 5) + (3, 2) + 2(2, 4) + 2(1, 6) + (0, 8) + (5, 1) + (0, 11) + (7, 0) + (10, 0)
(5, 3)	(2, 3) + (1, 5) + (0, 7) + (4, 2) + (0, 10) + (6, 1) + (8, 0) + (11, 0)
(4, 4)	(2, 3) + 2(1, 5) + (0, 7) + (4, 2) + (0, 10) + (6, 1) + (8, 0) + (11, 0)
(5, 4)	(1, 4) + (0, 6) + (3, 3) + 2(1, 7) + (0, 9) + (7, 1) + (9, 0)
(5, 5)	(0, 5) + (2, 4) + 2(1, 6) + (0, 8) + (0, 11) + (10, 0)