

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

I. MORET-BAILLY

**Structure du champ gravitationnel « non-radiatif »,
sans hypothèse de symétrie, en relativité générale**

Annales de l'I. H. P., section A, tome 9, n° 4 (1968), p. 395-439

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1968__9_4_395_0

© Gauthier-Villars, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Structure du champ gravitationnel « non-radiatif », sans hypothèse de symétrie, en relativité générale

par

Mme I. MORET-BAILLY

Laboratoire de Physique Théorique associé au C. N. R. S.,
Institut H. Poincaré, Paris.

RÉSUMÉ. — Ce travail établit deux théorèmes valables dans le cas « non-radiatif » pour le champ gravitationnel, sans hypothèse de symétrie axiale, étudié par Sachs. Deux théorèmes analogues ont déjà été démontrés pour le champ non-radiatif à symétrie axiale, et, en relativité restreinte, pour le champ électromagnétique.

De la structure du champ « non-radiatif » donné par le premier théorème on déduit celle des transformations de Bondi-Metzner-Sachs relatives à ce champ.

En outre, dans le cas d'un champ qui n'est pas nécessairement « non-radiatif », on démontre l'existence de transformations plus générales que celles de Bondi-Metzner-Sachs, dans le sens qu'elles conservent un comportement asymptotique du champ qui comprend, comme cas particulier, le comportement asymptotique minkowskien.

SUMMARY. — This work establishes two theorems of the « non-radiative » case of a gravitational field without the hypothesis of axial symmetry studied by Sachs. Two similar theorems have already being proven for the « non-radiative » field with axial symmetry and, in special Relativity, for the electromagnetic field.

For the structure of the « non-radiative » field given by the first theorem one deduces the structure of the Bondi-Metzner-Sachs transformations for this field.

Further, for the case of a field, which is not necessarily « non-radiative »,

we show the existence of transformations more general than those of Bondi-Metzner-Sachs in the sens that they conserve an asymptotic behaviour of the field, which includes as a particular case the Minkowski asymptotic behaviour.

I. INTRODUCTION

Dans un travail précédent [1], deux théorèmes concernant le champ gravitationnel retardé, solution des équations du vide et « non-radiatif », ont été démontrés dans le cas du champ à symétrie axiale étudié par Bondi [2]. Ici, dans les paragraphes 2 et 3, en appliquant la même méthode, nous établissons ces théorèmes dans le cas général traité par Sachs [3] et Newman, Penrose et Unti [4], c'est-à-dire dans le cas où le champ, toujours solution des équations du vide, ne possède pas de symétrie.

Énumérons brièvement les hypothèses faites dans ce travail.

Le champ gravitationnel retardé a la forme indiquée par Sachs [3] quand on utilise les coordonnées de Bondi [2] : $x^0 = u$, u est le temps retardé, $x^1 = r$, r est le paramètre distance lumineuse, $x^2 = \theta$, $x^3 = \phi$. Nous supposons que dans le domaine (D) défini par $r > r_1$ les composantes $g_{\mu\nu}$ du tenseur métrique sont développables en séries entières de $\frac{1}{r}$. Rappelons que, par définition, un tel champ est « non-radiatif » dans (D) s'il est solution des équations du vide et si en tout point $M \in (D)$, les composantes $R_{\mu'\nu'\rho'\sigma'}$ du tenseur de courbure par rapport à un système de repères orthonormés $(M, e^{\alpha}_{(\mu')})$ ont un développement ne contenant pas de terme proportionnel à $\frac{1}{r}$. Cette définition du champ « non-radiatif » est imposée par le fait qu'il n'y a pas de perte d'énergie par rayonnement si et seulement si un tel terme n'existe pas. Écrivons le développement de $R_{\mu'\nu'\rho'\sigma'} \equiv R_{\alpha\beta\gamma\delta} e^{\alpha}_{(\mu')} e^{\beta}_{(\nu')} e^{\gamma}_{(\rho')} e^{\delta}_{(\sigma')}$ sous la forme :

$$R_{\mu'\nu'\rho'\sigma'} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_{\mu'\nu'\rho'\sigma'}^n}{r^n}$$

la relation

(1-1) $\frac{1}{r} R_{\mu'\nu'\rho'\sigma'} = 0$

en tout point $M \in (D)$ définit le champ « non-radiatif » dans (D). Dans le

cas considéré par Sachs et avec la notation ⁽¹⁾ de Van der Burg [5] que nous adoptons, la condition (1-1) est équivalente à

$$(1-2) \quad \begin{cases} c_{00} = 0 \\ d_{00} = 0 \end{cases}$$

Dans le paragraphe 2 nous reprenons, avec de nouvelles notations, l'étude des équations du champ gravitationnel retardé quelconque en coordonnées radiatives. Dans le paragraphe 3, nous démontrons les théorèmes A et B et leurs conséquences pour le champ « non-radiatif ».

Donnons l'énoncé de ces théorèmes :

THÉORÈME A.

Si le champ est non radiatif dans (D), les composantes $g_{\alpha\beta}$ du tenseur métrique et $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ du tenseur de courbure s'écrivent sous la forme suivante, en tout point de (D) :

$$(1-3) \quad g_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_{ij}^n}{r^n}, \quad g_{iA} = r \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_{iA}^n}{r^n}, \quad g_{AB} = r^2 \frac{g_{AB}^n}{r^n};$$

$$(1-4) \quad \left\{ \begin{aligned} R_{ijkl} &= \frac{1}{r^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_{ijkl}^n}{r^n}, & R_{Aijk} &= \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_{Aijk}^n}{r^n}, \\ R_{ABik} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_{ABik}^n}{r^n}, & R_{AiBj} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_{AiBj}^n}{r^n}, \\ R_{ABCi} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_{ABCi}^n}{r^n}, & R_{ABCD} &= r^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_{ABCD}^n}{r^n}, \end{aligned} \right.$$

avec $i, j, k, l = 0, 1, A, B, C, D = 2, 3, \alpha, \beta, \gamma, \delta = 0, 1, 2, 3$, et où les $g_{\alpha\beta}^n$ et les $R_{\alpha\beta\gamma\delta}^n$ sont des polynômes en u dont le degré est inférieur ou égal à n .

THÉORÈME B.

Si le champ est « non-radiatif » dans le domaine (Ω) défini par :

$$(1\Omega) \quad {}_1u < u < {}_2u \quad , \quad {}_1r < r,$$

(¹) Si f est une fonction des $x^\alpha, f_\alpha, f_{\alpha\beta}, \dots$ signifient respectivement $\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}, \dots$

et stationnaire dans le domaine

$$(\Omega') \quad {}_1u < u < {}_2u' \quad , \quad {}_1r < r \quad \text{avec} \quad {}_2u' < {}_2u,$$

il est stationnaire dans le domaine (Ω) .

Nous montrons que le théorème A pour les composantes du tenseur de courbure rapportées à un système de repères orthonormés est analogue au théorème A établi dans [7] pour le champ électromagnétique.

Dans les paragraphes 4 et 5 nous supposons que, dans le domaine (D) le champ ne satisfait pas nécessairement les équations du vide. Au paragraphe 4 nous rappelons la définition des transformations de Bondi-Metzner-Sachs qui est celle donnée dans [3]. Nous démontrons, pour celles qui sont développables en séries entières, par quelle puissance de $\frac{1}{r}$ débute leur développement, ceci indépendamment du comportement asymptotique du tenseur métrique. Dans le paragraphe 5 nous démontrons la condition nécessaire et suffisante suivante qui constitue le théorème D : une condition nécessaire et suffisante pour qu'un changement de coordonnées radiatives ait pour limite quand $r \rightarrow \infty$ celle d'une transformation de Bondi-Metzner-Sachs est qu'il laisse invariant le comportement asymptotique du tenseur métrique qui suit :

$$\lim_{r=\infty} \left(\frac{g_{22}}{r^2} \right) = -1 \quad , \quad \lim_{r=\infty} \left(\frac{g_{33}}{r^2} \right) = -\sin^2 \theta \quad , \quad \lim_{r=\infty} \left(\frac{g_{23}}{r^2} \right) = 0,$$

$$\lim_{r=\infty} (g_{01}) = 1,$$

$$\lim_{r=\infty} \left(\frac{g_{00}}{r^2} \right) = 0 = \lim_{r=\infty} \left(\frac{g_{0A}}{r^2} \right).$$

Nous prouvons alors l'existence d'un changement de coordonnées (T') qui comprend comme cas particulier les transformations de Bondi-Metzner-Sachs. La définition des changements de coordonnées (T') est celle des transformations de Bondi-Metzner-Sachs dans laquelle le comportement asymptotique du tenseur métrique est remplacé par le comportement asymptotique plus général indiqué ci-dessus. Nous pensons que l'existence de ces changements de coordonnées (T') est intéressante bien que ce comportement asymptotique ne présente pas un intérêt physique. La démonstration exige que le tenseur métrique et les changements de coordonnées soient de classe c^∞ dans le domaine (D).

Au paragraphe 6 nous supposons de nouveau que le tenseur métrique

satisfait les équations du vide et nous établissons le théorème E : dans le cas d'un champ non-radiatif les coefficients $\bar{u}^n, \bar{r}^n, \bar{\theta}^n, \bar{\phi}^n$ d'une transformation de Bondi-Metzner-Sachs développable en série entière de $\frac{1}{r}$,

$$u = \bar{r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{u}^n(\bar{u}, \bar{\theta}, \bar{\phi})}{\bar{r}^n}, \quad \theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{\theta}^n(\bar{u}, \bar{\theta}, \bar{\phi})}{\bar{r}^n},$$

$$r = \bar{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{r}^n(\bar{u}, \bar{\theta}, \bar{\phi})}{\bar{r}^n}, \quad \Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{\Phi}^n(\bar{u}, \bar{\theta}, \bar{\phi})}{\bar{r}^n},$$

sont les polynômes de la variable \bar{u} dont le degré est au plus égal à n , les coefficients de ces polynômes étant des fonctions de $\bar{\theta}$ et $\bar{\phi}$.

Enfin, en appendice, nous avons, dans un premier paragraphe, indiqué les notations utilisées pour les calculs du paragraphe 5 et dans un deuxième paragraphe démontré la loi de transformation des fonctions c_0 et d_0 dans une transformation de Bondi-Metzner-Sachs, loi qui est nécessaire à la démonstration du théorème B.

II. LA STRUCTURE DES ÉQUATIONS DU CHAMP

Dans ce paragraphe, nous ne faisons pas l'hypothèse (1-2). Nous reprenons l'étude de la structure des équations d'Einstein du vide traitée dans [3] résumée dans [5]. Nous faisons de légères modifications dans la notation des développements en séries des $g_{\mu\nu}$ utilisée dans [5] ceci pour des raisons qui paraîtront évidentes ultérieurement. Nous écrivons les développements de γ , δ et β sous la forme :

$$(2-1) \quad \gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma^n}{r^n},$$

$$(2-2) \quad \delta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta^n}{r^n},$$

$$(2-3) \quad \beta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^n}{r^n}.$$

Nous remplaçons les développements de U, W et de V par ceux de

$$(2-4) \quad \mathfrak{U} \equiv rU, \quad \mathfrak{W} \equiv rW, \quad \mathfrak{V} \equiv \frac{V}{r},$$

$$(2-5) \quad \mathfrak{U} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathfrak{U}^n}{r^n}, \quad \mathfrak{W} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathfrak{W}^n}{r^n}, \quad \mathfrak{V} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathfrak{V}^n}{r^n}.$$

Rappelons que les $\overset{n}{\gamma}$, $\overset{n}{\delta}$, $\overset{n}{\beta}$, $\overset{n}{\mathfrak{U}}$, $\overset{n}{\mathfrak{W}}$, $\overset{n}{\mathfrak{V}}$ sont des fonctions des variables u, θ, ϕ . Les coefficients $\overset{n}{\gamma}$ et $\overset{n}{\delta}$ du développement de γ et δ jouent le rôle principal dans l'étude des équations du champ. Nous allons construire avec ces $\overset{n}{\gamma}$ et $\overset{n}{\delta}$ certaines fonctions que nous appellerons fonctions ψ . Leur introduction dans les calculs simplifie ceux-ci de façon appréciable.

Définition (1) d'une fonction ψ . — C'est une série entière de $\frac{1}{r}$,

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overset{n}{\psi}}{r^n},$$

dont le coefficient $\overset{n}{\psi}$ de $\frac{1}{r^n}$ est, pour $n \geq 1$ une somme de produits tels que

$$a \cdot \overset{i_1}{\Gamma} \cdot \overset{i_2}{\Gamma} \dots \overset{i_j}{\Gamma} \dots \overset{i_p}{\Gamma}, \quad \text{avec} \quad i_1 + i_2 + \dots + i_j + \dots + i_p = n,$$

où a est une fonction des variables θ et ϕ et où $\overset{i_j}{\Gamma}$ est soit $\overset{i_j}{\gamma}$ soit $\overset{i_j}{\delta}$ soit une dérivée partielle d'ordre quelconque de ces fonctions par rapport à θ et ϕ , si elle existe; $\overset{0}{\psi}$ correspondant à $n = 0$ est une fonction des variables θ et ϕ .

PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS ψ .

L'addition, la multiplication, la dérivation des séries donnent les résultats suivants :

La somme de fonctions ψ est une fonction ψ . Le produit de fonctions ψ est une fonction ψ . Une dérivée partielle d'ordre p (si elle existe) par rapport aux variables θ et ϕ d'une fonction ψ est une fonction ψ . La dérivée partielle

(1) Nous apportons une rectification à la définition d'une fonction ψ donnée dans [1] : aux valeurs susceptibles d'être prises par $\overset{i_j}{\Gamma}$ déjà indiquées dans [1] : $\overset{i_j}{\gamma}$, $\overset{i_j}{\delta}$, $\overset{i_j}{\beta}$, il faut ajouter : toute dérive partielle par rapport à θ de $\overset{j}{\gamma}$, si elle existe.

d'ordre p par rapport à r d'une fonction ψ est le produit d'une fonction ψ par $\frac{1}{r^p}$.

Remarquons, comme première application de cette définition, que γ , δ , e^γ , e^δ sont des fonctions ψ .

Nous utilisons les équations du champ sous la forme donnée dans [5]. Nous considérons d'abord la première équation principale, équation (2) de [5],

$$(2-6) \quad \beta_1 = \frac{1}{2} r (\gamma_1^2 \operatorname{ch}^2 2\delta + \delta_1^2).$$

On introduit (2-1), (2-2), (2-3) dans (2-6). Les propriétés des fonctions ψ montrent immédiatement que le second membre de (2-6) est le produit par $\frac{1}{r}$ d'une fonction ψ que nous désignons par ${}_a\psi$. L'identification du coefficient du terme en $\frac{1}{r^{n+1}}$ de chaque membre donne

$$-n\beta = -n{}_a\psi,$$

β est donc la fonction ${}_a\psi$ bien déterminée par la donnée de γ et δ :

$$(2-7) \quad \beta = {}_a\psi$$

Remarquons que $\beta = 0$.

Considérons maintenant simultanément les deuxième et troisième équations principales, équations (3) et (4) de [5] qui s'écrivent en tenant compte de (2-4)

$$(2-8) \quad \left\{ r^3 \left[e^{2(\gamma-\beta)} \left(\mathfrak{U}_1 - \frac{\mathfrak{U}}{r} \right) \operatorname{ch} 2\delta + e^{-2\beta} \left(\mathfrak{W}_1 - \frac{\mathfrak{W}}{r} \right) \operatorname{sh} 2\delta \right] \right\}_1 \\ = 2r^2 \left[\beta_{12} + 2\delta_1 \delta_2 - \frac{2\beta_2}{r} - 4\gamma_1 \delta_2 \operatorname{sh} 2\delta \operatorname{ch} 2\delta \right. \\ \left. - (\gamma_{12} - 2\gamma_1 \gamma_2 + 2\gamma_1 \cotg \theta) \operatorname{ch}^2 2\delta \right] \\ + 2 \frac{r^2 e^{2\gamma}}{\sin \theta} \left[-\delta_{13} - 2\delta_1 \gamma_3 + (\gamma_{13} + 2\gamma_1 \gamma_3) \operatorname{sh} 2\delta \operatorname{ch} 2\delta + 2\gamma_1 \delta_3 (1 + 2 \operatorname{sh}^2 2\delta) \right]$$

$$(2-9) \quad \left\{ r^3 \left[d^{-2\beta} \left(\mathfrak{U}_1 - \frac{\mathfrak{U}}{r} \right) \operatorname{sh} 2\delta + e^{-2\gamma} \left(\mathfrak{W}_1 - \frac{\mathfrak{W}}{r} \right) \operatorname{ch} 2\delta \right] \right\}_1 \\ = 2r^2 e^{-2\gamma} \left[-\delta_{12} + 2\delta_1 \gamma_2 - 2\delta_1 \cotg \theta - (\gamma_{12} - 2\gamma_1 \gamma_2 + 2\gamma_1 \cotg \theta) \operatorname{sh} 2\delta \operatorname{ch} 2\delta \right. \\ \left. - 2\gamma_1 \delta_2 (1 + 2 \operatorname{sh}^2 2\delta) \right] + \frac{2r^2}{\sin \theta} \left[\beta_{13} + 2\delta_1 \delta_3 - \frac{2\beta_3}{r} \right. \\ \left. + 4\gamma_1 \delta_3 \operatorname{sh} 2\delta \operatorname{ch} 2\delta + (\gamma_{13} + 2\gamma_1 \gamma_3) \operatorname{ch}^2 2\delta \right].$$

On introduit (2-1), (2-2) et (2-7) dans (2-8) et (2-9). $e^{2(\gamma-\beta)} \operatorname{ch} 2\delta$, $e^{-2\beta} \operatorname{sh} 2\delta$, $e^{-2\gamma} \operatorname{ch} 2\delta$ sont des fonctions ψ dont nous écrivons le développement sous la forme suivante :

$$e^{2(\gamma-\beta)} \operatorname{ch} 2\delta = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{r^n},$$

$$e^{-2\beta} \operatorname{sh} 2\delta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^n}{r^n},$$

$$e^{-2\gamma} \operatorname{ch} 2\delta = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu^n}{r^n}.$$

En tenant compte de ces développements les premiers membres de (2-8) et (2-9) s'écrivent respectivement:

$$\left\{ r^2 \left[- \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{r^n} \right) \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \frac{\mathfrak{U}^n}{r^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^n}{r^n} \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \frac{\mathfrak{W}^n}{r^n} \right] \right\}_1,$$

$$\left\{ r^2 \left[- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^n}{r^n} \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \frac{\mathfrak{U}^n}{r^n} - \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu^n}{r^n} \right) \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \frac{\mathfrak{W}^n}{r^n} \right] \right\}_1,$$

ou encore

$$(2-10) \quad \left\{ \begin{array}{l} r \left[- 2 \frac{\mathfrak{U}^1}{r} + (n+2) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(n+1)\mathfrak{U}^n + \sum_{i+j=n} (j+1)(\lambda^i \mathfrak{U}^j + \mu^i \mathfrak{W}^j)}{r^n} \right] \\ r \left[- 2 \frac{\mathfrak{W}^1}{r} + (n+2) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(n+1)\mathfrak{W}^n + \sum_{i+j=n} (j+1)(\nu^i \mathfrak{W}^j + \mu^i \mathfrak{U}^j)}{r^n} \right] \end{array} \right.$$

Remarquons que le coefficient du terme en $\frac{1}{r^2}$ est nul dans chacun des crochets de (2-10).

Appliquons les propriétés des fonctions ψ dans les seconds membres de (2-8) et (2-9). Il s'ensuit que chacun d'eux est le produit

d'une fonction ψ par r dont le développement respectif débute par :

$$(2-11) \quad \left\{ \begin{array}{l} r \left[\frac{2\gamma_2^1 + 4\gamma^1 \cotg \theta + \frac{2\delta_3^1}{\sin \theta}}{r} + \frac{4\gamma_2^2 + 8\gamma^2 \cotg \theta + 4\frac{\delta_3^2}{\sin \theta}}{r^2} + \dots \right] \equiv r_b \psi \\ r \left[\frac{2\delta_2^1 + 4\delta^1 \cotg \theta - \frac{2\gamma_3^1}{\sin \theta}}{r} + \frac{4\delta_2^2 + 8\delta^2 \cotg \theta - 4\frac{\gamma_3^2}{\sin \theta}}{r^2} + \dots \right] \equiv r_c \psi. \end{array} \right.$$

Nous allons démontrer que l'identification des coefficients des puissances successives de $\frac{1}{r}$ dans (2-10) et (2-11) donne le résultat suivant :

a) seuls les coefficients $\overset{2}{\mathcal{U}}$ et $\overset{2}{\mathcal{W}}$ du développement de \mathcal{U} et de \mathcal{W} ne sont pas déterminés par (2-8) et (2-9) ;

b) $\overset{n}{\mathcal{U}}$, pour $n \neq 2$, est égal à une somme de termes de trois types. Les uns ne contiennent que des γ^i et δ^i avec $i \leq n$ et forment le coefficient $\overset{n}{a}\psi$ d'une fonction $a\psi$. D'autres contiennent $\overset{2}{\mathcal{U}}$ en facteur et des γ^i et δ^i , avec $i \leq n - 2$, qui font apparaître le coefficient $\overset{n-2}{e}\psi$ d'une fonction $e\psi$. Les derniers contiennent $\overset{2}{\mathcal{W}}$ en facteur et des γ^i et δ^i , avec $i \leq n - 2$, qui mettent en évidence le coefficient $\overset{n-2}{f}\psi$ d'une fonction $f\psi$. Les fonctions $a\psi$, $e\psi$, $f\psi$ sont des fonctions ψ bien déterminées par la donnée de γ et de δ .

$$(2-12) \quad \overset{n}{\mathcal{U}} = \overset{n}{a}\psi + \overset{2}{\mathcal{U}} \overset{n-2}{e}\psi + \overset{2}{\mathcal{W}} \overset{n-2}{f}\psi,$$

d'où l'expression de \mathcal{U} :

$$(2-13) \quad \mathcal{U} = a\psi + \frac{\overset{2}{\mathcal{U}}}{r^2} e\psi + \frac{\overset{2}{\mathcal{W}}}{r^2} f\psi.$$

c) De façon analogue, $\overset{n}{\mathcal{W}}$, pour $n \neq 2$, s'écrit sous la forme suivante

$$(2-14) \quad \overset{n}{\mathcal{W}} = \overset{n}{g}\psi + \overset{2}{\mathcal{U}} \overset{n-2}{h}\psi + \overset{2}{\mathcal{W}} \overset{n-2}{i}\psi,$$

d'où l'expression de \mathcal{W} :

$$(2-15) \quad \mathcal{W} = g\psi + \frac{\overset{2}{\mathcal{U}}}{r^2} h\psi + \frac{\overset{2}{\mathcal{W}}}{r^2} i\psi.$$

Le résultat *a*) est évident. Démontrons les résultats *b*) et *c*) c'est-à-dire démontrons que (2-12) et (2-14) sont vérifiés pour $n \neq 2$.

Identifions successivement les coefficients des termes indépendants de r , des termes en $\frac{1}{r}$, des termes en $\frac{1}{r^{n-1}}$ pour $n \geq 3$, dans (2-10) et (2-11).

$$(2-16) \quad \begin{cases} {}^1\mathfrak{U} = - \left(\gamma_2 + 2\gamma \cotg \theta + \frac{1}{\sin \theta} \delta_3 \right) = {}_a^1\psi, \\ {}^1\mathfrak{W} = - \left(\delta_2 + 2\delta \cotg \theta - \frac{1}{\sin \theta} \gamma_3 \right) = {}_a^1\psi. \end{cases}$$

$$(2-17) \quad \begin{cases} 0 = \gamma_2 + 2\gamma \cotg \theta + \frac{1}{\sin \theta} \delta_3, \\ 0 = \delta_2 + 2\delta \cotg \theta - \frac{1}{\sin \theta} \gamma_3. \end{cases}$$

$$(2-18) \quad \begin{cases} (n+1) {}^n\mathfrak{U} + \sum_{i+j=n} (j+1) (\lambda^i \mathfrak{U}^j + \mu^i \mathfrak{W}^j) = \frac{1}{n-2} {}^n_b\psi, \\ (n+1) {}^n\mathfrak{W} + \sum_{i+j=n} (j+1) (\nu^i \mathfrak{W}^j + \mu^i \mathfrak{U}^j) = \frac{1}{n-2} {}^n_c\psi. \end{cases} \quad \text{avec } n \geq 3.$$

(2-12) et (2-14) sont vérifiés pour $n = 1$ par (2-16). Montrons qu'ils sont vérifiés pour $n \geq 3$. Raisonnons par récurrence.

Montrons d'abord que (2-13) et (2-15) sont vérifiés pour $n = 3$. Faisons $n = 3$ dans (2-18)

$$\begin{cases} 4 {}^3\mathfrak{U} + 3(\lambda^1 \mathfrak{U}^2 + \mu^1 \mathfrak{W}^2) + 2(\lambda^2 \mathfrak{U} + \mu^2 \mathfrak{W}) = {}^3_b\psi \\ 4 {}^3\mathfrak{W} + 3(\nu^1 \mathfrak{W}^2 + \mu^1 \mathfrak{U}^2) + 2(\nu^2 \mathfrak{W} + \mu^2 \mathfrak{U}) = {}^3_c\psi \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} {}^3\mathfrak{U} = \frac{1}{4} {}^3_b\psi - \frac{1}{2} (\lambda^1 \mathfrak{U} + \mu^1 \mathfrak{W}) - \frac{3}{4} \lambda^1 \mathfrak{U}^2 - \frac{3}{4} \mu^1 \mathfrak{W}^2 \\ {}^3\mathfrak{W} = \frac{1}{4} {}^3_c\psi - \frac{1}{2} (\nu^1 \mathfrak{W} + \mu^1 \mathfrak{U}) - \frac{3}{4} \nu^1 \mathfrak{W}^2 - \frac{3}{4} \mu^1 \mathfrak{U}^2. \end{cases}$$

En tenant compte de (2-16) et du fait que λ, μ, ν sont des fonctions ψ on a bien

$${}^3\mathfrak{U} = {}_a^3\psi + {}^2\mathfrak{U}_e \psi + {}^2\mathfrak{W}_f \psi$$

avec :

$${}_a\psi^3 \equiv \frac{1}{4} {}_b\psi^3 - \frac{1}{2} (\lambda^2 {}_a\psi^1 + \mu^2 {}_a\psi^1)$$

$${}_e\psi^1 \equiv -\frac{3}{4} \lambda^1$$

$${}_f\psi^1 \equiv -\frac{3}{4} \nu^1.$$

Montrons maintenant que si les relations

$$(2-19) \quad \begin{cases} {}_a\psi^{n-1} = {}_a\psi^{n-1} + {}_e\psi^{2n-3} + {}_f\psi^{2n-3} \\ {}_g\psi^{n-1} = {}_g\psi^{n-1} + {}_h\psi^{2n-3} + {}_i\psi^{2n-3} \end{cases}$$

sont vérifiées pour $n \geq 3$, (2-18) entraîne (2-13) et (2-15). Introduisons (2-19) dans (2-18) :

$$(n+1) {}_a\psi^n + \sum_{i+j=n} (j+1) [\lambda^i {}_a\psi^j + {}_e\psi^{2j-2} + {}_f\psi^{2j-2}] + \mu ({}_g\psi^j + {}_h\psi^{2j-2} + {}_i\psi^{2j-2}) = \frac{1}{n-2} {}_b\psi^n$$

$$(n+1) {}_g\psi^n + \sum_{i+j=n} (j+1) [\nu^i {}_g\psi^j + {}_h\psi^{2j-2} + {}_i\psi^{2j-2}] + \mu ({}_a\psi^j + {}_e\psi^{2j-2} + {}_f\psi^{2j-2}) = \frac{1}{n-2} {}_c\psi^n.$$

De la définition des fonctions ψ on déduit immédiatement la proposition.

Démontrons que (2-17) entraîne $\overset{2}{\gamma} = 0$ $\overset{2}{\delta} = 0$. (2-17) s'écrit :

$$\sin \theta \frac{\partial (\overset{2}{\gamma} \sin^2 \theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (\overset{2}{\delta} \sin^2 \theta)}{\partial \Phi} = 0$$

$$\sin \theta \frac{\partial (\overset{2}{\delta} \sin^2 \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial (\overset{2}{\gamma} \sin^2 \theta)}{\partial \Phi} = 0$$

$\overset{2}{\gamma} \sin^2 \theta$ et $\overset{2}{\delta} \sin^2 \theta$ sur l'hypersurface $u = \text{cte}$, sont donc nécessairement solution de l'équation du second ordre :

$$\frac{\partial^2 z(\theta, \phi)}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 z(\theta, \phi)}{\partial \phi^2} + \cotg \theta \frac{\partial z(\theta, \phi)}{\partial \theta} = 0$$

c'est-à-dire $\Delta z(\theta, \phi) = 0$ où Δ est le laplacien sur la sphère $u = \text{cte}$, $r = \text{cte}$. On sait que toute fonction scalaire z régulière sur une variété riemannienne compacte V_n et solution de $\Delta z = 0$ se réduit identiquement à une constante

sur V_n [6]. Donc les solutions γ^2 et δ^2 de (2-17) sur la sphère sont nécessairement de la forme $\frac{k}{\sin^2 \theta}$ où k est une constante. Les solutions pour lesquelles k est non nulle présentent une singularité essentielle pour $\theta = 0$. Donc seules sont acceptables les solutions $\gamma^2 = \delta^2 = 0$.

La quatrième équation principale, équation (5) de [5] s'écrit en tenant compte de (2-4)

$$\begin{aligned}
 (2-20) \quad \mathcal{U} + r^1 \mathcal{U} = & 2 \frac{e^{2\beta}}{\sin^2 \theta} [(\beta_{23} + \beta_2 \beta_3 + \delta_2 \delta_3) \text{sh } 2\delta \\
 & + (\delta_{23} + \delta_3 \cotg \theta + \delta_2 \gamma_3 - \gamma_2 \delta_3 + \delta_2 \beta_3 + \beta_2 \delta_3) \text{ch } 2\delta] \\
 & - e^{2(\beta-\gamma)} [(\beta_{22} + \beta_2^2 + \beta_2 \cotg \theta + 2\gamma_2^2 + 2\delta_2^2 - 1 - \gamma_{22} - 3\gamma_2 \cotg \theta \\
 & - 2\beta_2 \gamma_2) \text{ch } 2\delta + (\delta_{22} + 3\delta_2 \cotg \theta + 2\beta_2 \delta_2 - 4\gamma_2 \delta_2) \text{sh } 2\delta] \\
 & - \frac{e^{2(\beta+\gamma)}}{\sin^2 \theta} [(\beta_{33} + \beta_3^2 + 2\gamma_3^2 + 2\delta_3^2 + \gamma_{33} + 2\beta_3 \gamma_3) \text{ch } 2\delta \\
 & + (\delta_{33} + 2\beta_3 \delta_3 + 4\gamma_3 \delta_3) \text{sh } 2\delta] - \frac{1}{4} e^{-2\beta} [e^{2\gamma} (\mathcal{U}^2 + r^2 \mathcal{U}_1^2 - 2r \mathcal{U} \mathcal{U}_1) \\
 & + e^{-2\gamma} (\mathcal{W}^2 + r^2 \mathcal{W}_1^2 - 2r \mathcal{W} \mathcal{W}_1) \text{ch } 2\delta \\
 & + 2 \text{sh } 2\delta (\mathcal{U} \mathcal{W} + r^2 \mathcal{U}_1 \mathcal{W}_1 - r \mathcal{U}_1 \mathcal{W} - r \mathcal{W}_1 \mathcal{U})] \\
 & + \frac{1}{2} (r \mathcal{U}_{12} + \mathcal{U}_1 r \cotg \theta + 3 \mathcal{U}_2 + 3 \mathcal{U} \cotg \theta) + \frac{1}{2 \sin \theta} (r \mathcal{W}_{13} + 3 \mathcal{W}_3).
 \end{aligned}$$

On y introduit (2-4) et (2-5) dans le premier membre de (2-20) et (2-4), (2-7), (2-13) et (2-15) dans le second membre.

Le premier membre s'écrit :

$$\mathcal{U} + r \mathcal{U}_1 \equiv 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (1-n) \frac{\mathcal{U}^n}{r^n}.$$

En utilisant la propriété des fonctions ψ dans le second membre de (2-20), on trouve que ce dernier est égal à une somme de termes, du second degré par rapport à $\left(\frac{\mathcal{U}}{r^2}\right)$, $\left(\frac{\mathcal{W}}{r^2}\right)$ et leurs dérivées par rapport à θ et ϕ , les coefficients étant des fonctions ψ .

L'identification des puissances successives de $\frac{1}{r}$ de chaque membre de cette équation principale montre que celle-ci ne détermine pas le coefficient \mathcal{U}_1 . Par contre, elle détermine tous les autres coefficients \mathcal{U}^n en fonction

de $\overset{2}{\mathcal{U}}, \overset{2}{\mathcal{W}}, \gamma, \delta$ avec $i \leq n$, le résultat étant donné par la formule :

$$(2-21) \quad \overset{n}{\mathcal{U}} = \overset{n}{j}\psi + \overset{2}{\mathcal{U}}_{n,h}\overset{n-2}{\psi} + \overset{2}{\mathcal{U}}_{2,i}\overset{n-2}{\psi} + \overset{2}{\mathcal{U}}_{3,m}\overset{n-2}{\psi} + \overset{2}{\mathcal{W}}_n\overset{n-2}{\psi} + \overset{2}{\mathcal{W}}_{2,o}\overset{n-2}{\psi} + \overset{2}{\mathcal{W}}_{3,p}\overset{n-2}{\psi} \\ + (\overset{2}{\mathcal{U}})^2_{a,q}\overset{n-4}{\psi} + (\overset{2}{\mathcal{W}})^2_{r,s}\overset{n-4}{\psi} + \overset{2}{\mathcal{U}}\overset{2}{\mathcal{W}}_{s,p}\overset{n-4}{\psi},$$

où les fonctions ψ sont déterminées par la donnée de γ, δ . Dans la suite, pour alléger les notations, nous désignerons par F, toute fonction de la forme

$$(2-22) \quad F = E + G \frac{\overset{1}{\mathcal{U}}}{r} + H \frac{\overset{2}{\mathcal{U}}}{r^2} + I \frac{\overset{2}{\mathcal{U}}_A}{r^2} + J \frac{\overset{2}{\mathcal{W}}}{r^2} + K \frac{\overset{2}{\mathcal{W}}_A}{r^2} + L \frac{(\overset{2}{\mathcal{U}})^2}{r^4} \\ + M \frac{\overset{2}{\mathcal{U}}\overset{2}{\mathcal{W}}}{r^4} + N \frac{(\overset{2}{\mathcal{W}})^2}{r^4}.$$

où E, G, H, I, J, K, L, M et N sont des fonctions ψ . Notons que $\overset{1}{\mathcal{U}}$ est une fonction F, d'après (2-21)

$$(2-23) \quad \overset{1}{\mathcal{U}} = {}_a F.$$

De même les fonctions $\psi, \mathcal{U}, \mathcal{W}$ sont aussi des fonctions F.

Considérons maintenant simultanément les cinquième et sixième équations principales, équations (6) et (7) de [5]. Les premiers membres de ces équations s'écrivent respectivement :

$$(2-24) \quad \begin{cases} (r\gamma)_{01} \operatorname{ch} 2\delta + 2r(\gamma_0\delta_1 + \delta_0\gamma_1) \operatorname{sh} 2\delta, \\ (r\delta)_{01} - 2r\gamma_0\gamma_1 \operatorname{sh} 2\delta \operatorname{ch} 2\delta. \end{cases}$$

Écrivons les fonctions $\psi, \operatorname{ch} 2\delta, \operatorname{sh} 2\delta, \operatorname{sh} 2\delta \operatorname{ch} 2\delta$ sous la forme suivante :

$$\operatorname{ch} 2\delta \equiv 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^{n+1}}{r^{n+1}}, \\ 2 \operatorname{sh} 2\delta \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^n}{r^n}, \\ 2 \operatorname{sh} 2\delta \operatorname{ch} 2\delta \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau^n}{r^n}.$$

Introduisons ces développements dans (2-24). On obtient

$$\left\{ \begin{aligned} & \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n\gamma_0}{r^{n+1}} \right) \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho}{r^{n+1}} \right) + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_0}{r^n} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n\delta}{r^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_0}{r^n} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n\gamma}{r^n} \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma}{r^n} \right) \\ & \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n\delta_0}{r^{n+1}} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_0}{r^n} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\gamma}{r^n} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau}{r^n}, \end{aligned} \right.$$

ce qui s'écrit encore

$$(2-25) \quad \left\{ \begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{-n\gamma_0}{r^{n+1}} + \sum_{i+j=n+1} \frac{-i\gamma_0 \rho}{r^{n+3}} + \sum_{p+q+l=n+2} \frac{-q(\gamma_0\delta + \delta_0\gamma)\sigma}{r^{n+2}} \right] \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{-n\delta_0}{r^{n+1}} + \sum_{p+q+l=n+2} \frac{q\gamma_0\gamma\sigma}{r^{n+2}} \right]. \end{aligned} \right.$$

Considérons maintenant les seconds membres ⁽¹⁾ des cinquième et sixième équations principales.

En y introduisant (2-7), (2-4), (2-13), (2-15) et (2-23), on trouve qu'ils sont respectivement le produit d'une fonction ${}_bF$ et ${}_cF$ par $\frac{1}{r}$. Nous allons démontrer que l'identification des coefficients des puissances successives de $\frac{1}{r}$ des membres de ces équations donne, pour $n \geq 1$, les $\gamma_0 \equiv \frac{\partial \gamma}{\partial u}^{n+1}$ et les $\delta_0 \equiv \frac{\partial \delta}{\partial u}^{n+1}$ en fonction des γ^i , avec $i \leq n$, de 2u , 2w , ${}^1\gamma_0$, et de ${}^1\delta_0$. D'une façon plus précise, nous obtiendrons :

$$(2-26) \quad \left\{ \begin{aligned} \gamma_0 &= {}_dF + {}_i\psi\gamma_0 + {}_u\psi\delta_0 \\ \delta_0 &= {}_eF + {}_v\psi\gamma_0 + {}_w\psi\delta_0 \end{aligned} \right.$$

où les ${}_dF$, ${}_eF$, ${}_i\psi$, ${}_u\psi$, ${}_v\psi$, ${}_w\psi$ sont des fonctions bien définies par la donnée de ${}^1\gamma_0$ et ${}^1\delta_0$.

(1) Nous n'écrivons pas ces seconds membres à cause de leur longueur. Le calcul est analogue à celui effectué dans les seconds membres des équations principales précédentes. Les équations principales sont données sous leur forme complète p. 121-122 dans [5].

Soulignons que γ_0^1 et δ_0^1 ne sont pas déterminés par ces équations principales.

Établissons (2-26). L'identification des termes en $\frac{1}{r^2}$, en $\frac{1}{r^3}$, en $\frac{1}{r^4}$ (compte tenu de $\gamma^2 = \delta^2 = 0$), en $\frac{1}{r^{n+1}}$ donne successivement :

$$(2-27) \quad \begin{cases} -\gamma_0^2 \equiv {}_b\mathbb{F} \equiv 0, \\ -\delta_0^2 \equiv {}_c\mathbb{F} \equiv 0; \end{cases}$$

$$(2-28) \quad \begin{cases} -2\gamma_0^3 - (\gamma_0^1 \delta^1 + \delta_0^1 \gamma^1) \sigma \equiv {}_b\mathbb{F}^2, \\ -2\delta_0^3 + \gamma_0^1 \gamma^1 \tau \equiv {}_c\mathbb{F}^2; \end{cases}$$

$$(2-29) \quad \begin{cases} -3\gamma_0^4 - (\gamma_0^1 \delta^1 + \delta_0^1 \gamma^1) \sigma^2 \equiv {}_b\mathbb{F}^3, \\ -4\delta_0^4 + \gamma_0^1 \gamma^1 \tau \equiv {}_c\mathbb{F}^3; \end{cases}$$

$$(2-30) \quad \begin{cases} -n\gamma_0^{n+1} + \sum_{i+j=n-1} -i\gamma_0^{i+1} \rho^{j+1} + \sum_{p+q+l=n+1} -q(\gamma_0^p \delta^q + \delta_0^q \gamma^l) \sigma \equiv {}_b\mathbb{F}^n, \\ -n\delta_0^{n+1} + \sum_{p+q+l=n+1} q\gamma_0^p \gamma^q \tau \equiv {}_c\mathbb{F}^n, \quad \text{pour } n \geq 4. \end{cases}$$

(2-27), (2-28), (2-29) montrent immédiatement que (2-26) est vérifié pour $n = 1, 2, 3$.

Prouvons que (2-26) est réalisé pour $n \geq 4$, en raisonnant par récurrence. Vérifions d'abord que (2-26) est vrai pour $n = 4$. (2-30) s'écrit pour $n = 4$ compte tenu de $\gamma^2 = \delta^2 = 0$,

$$(2-31) \quad \begin{cases} -4\gamma_0^5 - 2\gamma_0^3 \rho - (\gamma_0^1 \delta^1 + \delta_0^1 \gamma^1) \sigma - 3(\gamma_0^1 \delta^3 + \delta_0^1 \gamma^3) \sigma - (\gamma_0^1 \delta^1 + \delta_0^1 \gamma^1) \sigma^3 \equiv {}_b\mathbb{F}^4, \\ -4\delta_0^5 + (\gamma_0^1 \gamma^1 + 3\gamma_0^3 \gamma^1) \tau + \gamma_0^1 \gamma^1 \tau \equiv {}_c\mathbb{F}^4. \end{cases}$$

En remplaçant dans (2-31) γ_0^3 et δ_0^3 tirés de (2-28) on a la vérification immédiatement. Montrons ensuite que si l'on a

$$(2-32) \quad \begin{cases} \gamma_0^n = {}_a\mathbb{F}^{n-1} + {}_i\psi \gamma_0^{n-1} + {}_u\psi \delta_0^{n-1}, \\ \delta_0^n = {}_e\mathbb{F}^{n-1} + {}_v\psi \gamma_0^{n-1} + {}_w\psi \delta_0^{n-1}, \end{cases}$$

pour $n = 2, 3, \dots, n$, alors (2-30) entraîne (2-26). Introduisons (2-32) dans (2-30). On obtient :

$$\begin{aligned} {}_b^n \mathbf{F} &\equiv -n\gamma_0 + \sum_{i+j+1=n} -i({}_a^i \mathbf{F} + {}_i^i \psi \gamma_0 + {}_u^i \psi \delta_0) \rho \\ &+ \sum_{p-1+q+l} -q\sigma [({}_a^{p-1} \mathbf{F} + {}_i^{p-1} \psi \gamma_0 + {}_u^{p-1} \psi \delta_0) \delta + ({}_e^{p-1} \mathbf{F} + {}_v^{p-1} \psi \gamma_0 + {}_w^{p-1} \psi \delta_0) \gamma], \\ {}_c^n \mathbf{F} &\equiv -n\delta_0 + \sum_{p-1+q+l=n} q({}_a^{p-1} \mathbf{F} + {}_i^{p-1} \psi \gamma_0 + {}_u^{p-1} \psi \delta_0) \gamma \tau. \end{aligned}$$

On en déduit de suite que γ_0 et δ_0 se mettent bien sous la forme (2-26).

En faisant $n = 1, 2, 3, \dots$ successivement dans (2-26), on obtient les γ^i et δ^i , avec $i \neq 1$, par intégration par rapport à u .

Nous sommes ainsi arrivés au résultat suivant : les six équations principales déterminent les $\gamma^i, \delta^i, \mathcal{U}^i, \mathcal{W}^i, \mathcal{V}^i$, excepté les $\gamma^1, \delta^1, \mathcal{U}^2, \mathcal{W}^2, \mathcal{V}^1$, à des fonctions arbitraires de θ et ϕ près. Mais seuls γ^1 et δ^1 sont des fonctions arbitraires des trois variables u, θ, ϕ , car $\mathcal{U}^2, \mathcal{W}^2$ et \mathcal{V}^1 doivent satisfaire les trois équations du champ « supplémentaires », équations (13), (14), (15) de [5].

Ces équations supplémentaires s'écrivent, compte tenu de la définition de $\mathcal{U}^2, \mathcal{W}^2, \mathcal{V}^1, \gamma^1$ et de δ^1 :

$$(2-33) \quad \mathcal{V}_0^1 = 2(\gamma_0^2 + \delta_0^2) - \left[\left(\gamma_2 + 2\gamma \cotg \theta + \frac{\delta_3}{\sin \theta} \right)_2 + \left(\gamma_2 + 2\gamma \cotg \theta + \frac{\delta_3}{\sin \theta} \right) \cotg \theta + \frac{1}{\sin \theta} \left(\delta_2 + 2\delta \cotg \theta - \frac{1}{\sin \theta} \gamma_3 \right)_3 \right]_0,$$

$$(2-34) \quad 3\mathcal{U}_0^2 = 7(\gamma_0^1 \gamma_2 + \delta_0^1 \delta_2) + 3(\gamma \gamma_{20} + \delta \delta_{20}) + 16(\gamma \gamma_0 + \delta \delta_0) \cotg \theta + \frac{8}{\sin \theta} (\gamma_0 \delta_3 - \gamma_3 \gamma_0) + \mathcal{V}_2^1 - \frac{\lambda_3}{\sin \theta},$$

$$(2-35) \quad 3\mathcal{W}_0^2 = \frac{1}{\sin \theta} \mathcal{V}_3^1 + \lambda_2 + 8(\gamma_2 \delta_0 - \gamma_0 \delta_2) + 8(\gamma \delta_0 - \gamma_0 \delta) \cotg \theta + \frac{7}{\sin \theta} (\gamma_0 \gamma_3 + \delta_0 \delta_3) + \frac{3}{\sin \theta} (\delta \delta_{30} - \gamma \gamma_{30}),$$

avec

$$\lambda \equiv \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \cotg \theta \right) \left(\delta_2 + 2\delta \cotg \theta - \frac{\gamma_3}{\sin \theta} \right) - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\gamma_2 + 2\gamma \cotg \theta + \frac{\delta_3}{\sin \theta} \right).$$

Quand on a choisi $\overset{1}{\gamma}$ et $\overset{1}{\delta}$, le deuxième membre de (2-33) est connu et par conséquent cette équation détermine le coefficient $\overset{1}{\mathcal{U}}$ à une fonction arbitraire de θ et ϕ près, après intégration par rapport à u . Mais alors les seconds membres de (2-34) et (2-35) sont connus et ces dernières équations déterminent $\overset{2}{\mathcal{U}}$ et $\overset{2}{\mathcal{W}}$ à des fonctions de θ et ϕ près.

III. LE CAS DU CHAMP « NON-RADIATIF »

Nous supposons maintenant que le champ gravitationnel est « non-radiatif », c'est-à-dire que nous faisons l'hypothèse (1-2) qui, ici, se traduit avec la notation $\overset{1}{\gamma} \equiv c$, $\overset{1}{\delta} \equiv d$ par

$$(3-1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \overset{1}{\gamma}_{00} = 0, \\ \overset{1}{\delta}_{00} = 0. \end{array} \right.$$

Ce qui entraîne que $\overset{1}{\gamma}$ et $\overset{1}{\delta}$ sont des polynômes en u de degré un au plus.

$$\begin{aligned} \overset{1}{\gamma} &= p(\theta, \phi)u + q(\theta, \phi), \\ \overset{1}{\delta} &= r(\theta, \phi)u + s(\theta, \phi). \end{aligned}$$

On déduit de (3-1), (2-33), (2-34), (2-35) que

$$(3-2) \quad \overset{1}{\mathcal{U}}_{00} = 0, \quad \overset{2}{\mathcal{U}}_{000} = 0, \quad \overset{2}{\mathcal{W}}_{000} = 0.$$

(3-1) et la définition de $\overset{n}{\psi}$ entraîne $\overset{0}{\psi}_0 = 0$, $\overset{1}{\psi}_{00} = 0$, car $\overset{1}{\psi}$ est linéaire par rapport à $\overset{1}{\gamma}$, et $\overset{1}{\delta}$; $\overset{2}{\psi}_{000} = 0$, car $\overset{2}{\gamma}$ et $\overset{2}{\delta}$ étant nuls, $\overset{2}{\psi}$ est un polynôme homogène et du second degré par rapport à $\overset{1}{\gamma}$ et $\overset{1}{\delta}$; compte tenu de ce qui précède et de (2-22) qui donne $\overset{2}{F} = \overset{2}{\psi} + \overset{1}{\psi}\overset{1}{\mathcal{U}} + \overset{0}{\psi}\overset{2}{\mathcal{U}} + \overset{0}{\psi}\overset{2}{\mathcal{U}}_{\text{A}} + \overset{0}{\psi}\overset{2}{\mathcal{W}} + \overset{0}{\psi}\overset{2}{\mathcal{W}}_{\text{A}}$, on a :

$$\overset{2}{F}_{000} = 0.$$

On fait maintenant $n = 2$ dans (2-26). On prend la dérivée $(n + 1)^{\text{ème}}$ c'est-à-dire troisième par rapport à u de chaque membre et on obtient d'après ce qui précède :

$$\overset{3}{\gamma}_{0000} = 0, \quad \overset{3}{\delta}_{0000} = 0 \quad \text{ce qui entraîne} \quad \overset{3}{\psi}_{0000} = 0 \quad \text{et} \quad \overset{3}{F}_{0000} = 0.$$

En répétant les mêmes opérations pour $n = 3, 4, \dots$ dans (2-26), on arrive au résultat suivant

$$(3-3) \quad \frac{\partial^{n+1}\gamma^n}{\partial u^{n+1}} = 0, \quad \frac{\partial^{n+1}\delta^n}{\partial u^{n+1}} = 0, \quad \frac{\partial^{n+1}\psi^n}{\partial u^{n+1}} = 0, \quad \frac{\partial^{n+1}\mathbb{F}^n}{\partial u^{n+1}} = 0.$$

\mathcal{U} , \mathcal{W} et \mathcal{V} étant des fonctions F nous avons

$$\frac{\partial^{n+1}\mathcal{U}^n}{\partial u^{n+1}} = 0, \quad \frac{\partial^{n+1}\mathcal{W}^n}{\partial u^{n+1}} = 0, \quad \frac{\partial^{n+1}\mathcal{V}^n}{\partial u^{n+1}} = 0.$$

Nous obtenons donc la conclusion suivante :

Dans le cas d'un champ « non-radiatif », les $\gamma^n, \delta^n, \beta^n, \mathcal{U}^n, \mathcal{W}^n, \mathcal{V}^n$, des développements de $\gamma, \delta, \beta, \mathcal{U}, \mathcal{W}, \mathcal{V}$ sont des polynômes en u dont le degré est inférieur ou égal à n .

Les composantes non nulles du tenseur métrique sont données par l'expression (1) de [5]. Écrites en fonction de $\gamma, \delta, \beta, \mathcal{U}, \mathcal{W}, \mathcal{V}$, elles sont :

$$(3-4) \quad \begin{cases} g_{00} = \mathcal{V}e^{2\beta} - \mathcal{U}^2e^{2\gamma} \operatorname{ch} 2\delta - \mathcal{W}^2e^{-2\gamma} \operatorname{ch} 2\delta - \mathcal{U}\mathcal{W} \operatorname{sh} 2\delta & g_{01} = e^{2\beta}, \\ g_{02} = r(e^{2\gamma}\mathcal{U} \operatorname{ch} 2\delta + \mathcal{W} \operatorname{sh} 2\delta), & g_{03} = r(e^{-2\gamma}\mathcal{W} \operatorname{ch} 2\delta + \mathcal{U} \operatorname{sh} 2\delta) \sin \theta, \\ g_{22} = -r^2e^{2\gamma} \operatorname{ch} 2\delta, & g_{33} = -r^2e^{-2\gamma} \operatorname{ch} 2\delta \sin^2 \theta, \quad g_{23} = -r^2 \operatorname{sh} 2\delta \sin \theta. \end{cases}$$

On voit, en tenant compte de (2-7), (2-13), (2-15), (2-23) que les $g_{ik}, \frac{g_{iA}}{r}, \frac{g_{AB}}{r^2}$, sont des fonctions F. Donc si on écrit les développements des $g_{\alpha\beta}$ sous la forme (1-3) on en déduit le théorème suivant compte tenu de (3-3) :

Si le champ est « non-radiatif » dans le domaine (D) les coefficients $g_{\alpha\beta}^n$ qui apparaissent dans le développement (1-3) des composantes $g_{\alpha\beta}$ du tenseur métrique en tout point $M \in (D)$ sont des polynômes en u dont le degré est inférieur ou égal à n .

Nous avons donc démontré le théorème A pour le tenseur métrique.

Nous avons une propriété analogue pour les $g^{\alpha\beta}$ toujours dans le cas « non-radiatif ». Les $g^{\alpha\beta}$ non nuls sont :

$$(3-5) \quad \begin{cases} g^{01} = e^{-2\beta}, & g^{11} = -\mathcal{V}, & g^{12} = \frac{\mathcal{U}e^{-2\beta}}{r}, & g^{13} = \frac{\mathcal{W}e^{-2\beta}}{r \sin \theta}, \\ g^{22} = \frac{-e^{-2\gamma} \operatorname{ch} 2\delta}{r^2}, & g^{23} = \frac{-\operatorname{sh} 2\delta}{r^2 \sin \theta}, & g^{33} = \frac{-e^{2\gamma} \operatorname{ch} 2\delta}{r^2 \sin^2 \theta}. \end{cases}$$

Leurs développements peuvent s'écrire comme suit :

$$(3-6) \quad g^{ik} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{ik}}{r^n}, \quad g^{iA} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{iA}}{r^n}, \quad g^{AB} = \frac{1}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{AB}}{r^n}.$$

On déduit de (3-3) que, dans le cas d'un champ « non-radiatif », les $g^{\alpha\beta}$ sont des polynômes en u dont le degré est inférieur ou égal à n . En tenant compte de la propriété des $g_{\alpha\beta}$, $g^{\alpha\beta}$, le calcul des composantes du tenseur de courbure donne le théorème A pour le tenseur de courbure :

Si le champ est « non-radiatif » dans le domaine (D), les coefficients $R_{\alpha\beta\gamma\delta}^n$ qui apparaissent dans le développement (1-4) des composantes $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ du tenseur de courbure sont des polynômes en u dont le degré est inférieur ou égal à n .

Pour comparer ces résultats à ceux du théorème A établi dans [7] pour le champ électromagnétique en relativité restreinte, il faut donner, en tout point $M \in (D)$, les composantes du tenseur de courbure par rapport à un repère orthonormé défini au point M. Nous pouvons prendre la famille de repères orthonormés utilisée par Bondi dans [2]. Désignons par $(M; e_{(\mu')})$ ces repères que nous allons définir. Appelons rayons les lignes coordonnées de la variable r . Le repère $(M; e_{(\mu')})$ est le repère qui, transporté par parallélisme le long du rayon passant par M a pour limite le repère $(m; T^\rho, R^\rho, S^\rho, P^\rho)$ quand $r \rightarrow \infty$:

$$(3-7) \quad T^\rho = (1, 0, 0, 0), \quad R^\rho = (-1, 1, 0, 0), \quad S^\rho = \left(0, 0, \frac{1}{r}, 0\right), \\ P^\rho = \left(0, 0, 0, \frac{1}{r \sin \theta}\right).$$

Exprimons le transport par parallélisme de $e_{(\mu')}$ le long d'un rayon :

$$(3-8) \quad \nabla_1 e_{(\mu')}^\rho = 0$$

Pour $\rho = 0$, on a :

$$\partial_1 e_{(\mu')}^0 = 0$$

d'où $e_{(\mu')}^0 = f(u, \theta, \phi)$ et d'après (3-7) on a :

$$e_{(0')}^0 = 1, \quad e_{(1')}^0 = -1, \quad e_{(2')}^0 = 0, \quad e_{(3')}^0 = 0.$$

Pour $\rho = 1, 2, 3$, on a :

$$(3-9) \quad \begin{cases} \partial_1 e^1_{(\mu')} + \Gamma_{1^0} e^0_{(\mu')} + \Gamma_{1^1} e^1_{(\mu')} + \Gamma_{1^2} e^2_{(\mu')} + \Gamma_{1^3} e^3_{(\mu')} = 0 \\ \partial_1 e^2_{(\mu')} + \Gamma_{1^0} e^0_{(\mu')} + \Gamma_{1^2} e^2_{(\mu')} + \Gamma_{1^3} e^3_{(\mu')} = 0 \\ \partial_1 e^3_{(\mu')} + \Gamma_{1^2} e^2_{(\mu')} + \Gamma_{1^3} e^3_{(\mu')} = 0. \end{cases}$$

Calculons la solution développable en série entière de $\frac{1}{r}$ de (3-9) qui satisfait (3-7).

Écrivons ses développements sous la forme :

$$(3-10) \quad e^1_{(\mu')} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^1_{(\mu')^n}}{r^n}, \quad e^A_{(\mu')} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^A_{(\mu')^n}}{r^n},$$

où les $e^z_{(\mu')}$ sont des fonctions de u, θ, ϕ .

Mettons les développements de $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ sous la forme :

$$(3-11) \quad \Gamma_{j^i k} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma_{j^i k}^n}{r^n}, \quad \Gamma_{j^i A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma_{j^i A}^n}{r^n}, \quad \Gamma_{i^A j} = \frac{1}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma_{i^A j}^n}{r^n}, \quad \Gamma_{i^A B} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma_{i^A B}^n}{r^n}.$$

Introduisons (3-10) et (3-11) dans (3-9)

$$(3-12) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{r} \left[\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{n e^1_{(\mu')^n}}{r^n} + \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{1^0}^n}{r^n} e^0_{(\mu')^n} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Gamma_{1^1}^n}{r^n} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^1_{(\mu')^n}}{r^n} \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{1^A}^n}{r^n} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^A_{(\mu')^n}}{r^n} \right] = 0 \\ & \frac{1}{r^2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} -(n+1) \frac{e^2_{(\mu')^n}}{r^n} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Gamma_{1^2}^n}{r^n} e^0_{(\mu')^n} + \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{1^2}^n}{r^n} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2_{(\mu')^n}}{r^n} \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{1^3}^n}{r^n} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^3_{(\mu')^n}}{r^n} \right] = 0 \\ & \frac{1}{r^2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} -(n+1) \frac{e^3_{(\mu')^n}}{r^n} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Gamma_{1^3}^n}{r^n} e^0_{(\mu')^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{1^3}^n}{r^n} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2_{(\mu')^n}}{r^n} \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{1^3}^n}{r^n} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^3_{(\mu')^n}}{r^n} \right] = 0. \end{aligned} \right.$$

Ce système devient :

$$(3-13) \left\{ \begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^n} \left[-n e_{(\mu')}^n + \Gamma_{10}^n e_{(\mu')}^0 + \sum_{p+q+1=n}^{p+1} \Gamma_{1A}^{p+1} e_{(\mu')}^q \right] \\ & \qquad \qquad \qquad + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{r^n} \sum_{p+q+2=n}^{p+2} \Gamma_{11}^{p+2} e_{(\mu')}^q = 0 \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^n} \left[-n e_{(\mu')}^2 + \sum_{p+q+1=n}^{p+1} \Gamma_{12}^{p+1} e_{(\mu')}^q \right] + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{r^n} \Gamma_{12}^n e_{(\mu')}^0 = 0 \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^n} \left[-n e_{(\mu')}^3 + \sum_{p+q+1=n}^{p+1} \Gamma_{1A}^{p+1} e_{(\mu')}^q \right] + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{r^n} \Gamma_{13}^n e_{(\mu')}^0 = 0 \end{aligned} \right.$$

où $p, q = 0, 1, 2, \dots$

L'identification des coefficients des termes en $\frac{1}{r^n}$ dans les membres des deux dernières équations (3-13) donne un système qui, pour $n = 1, 2, 3, \dots$, détermine successivement les $e_{(\mu')}^n$.

On voit de suite que la première équation (3-13) détermine ensuite les coefficients $e_{(\mu')}^1$.

Dans le cas où le champ est « non-radiatif » on déduit du théorème A que les $\Gamma_{\beta\gamma}^n$ sont des polynômes en u dont le degré est au plus égal à n . De la structure des équations (3-13) il s'ensuit que les $e_{(\mu')}^n$ sont alors des polynômes en u dont le degré est au plus égal à n .

Écrivons les composantes au point M du tenseur métrique et du tenseur de courbure par rapport au repère $(M; e_{(\mu')})$

$$(3-14) \left\{ \begin{aligned} g_{\mu'\nu'} &= g_{ij} e_{(\mu')}^i e_{(\nu')}^j + g_{iA} (e_{(\mu')}^i e_{(\nu')}^A + e_{(\mu')}^A e_{(\nu')}^i) + g_{AB} e_{(\mu')}^A e_{(\nu')}^B, \\ R_{\mu'\nu'\rho'\sigma'} &= R_{ijkl} e_{(\mu')}^i e_{(\nu')}^j e_{(\rho')}^k e_{(\sigma')}^l + \dots \end{aligned} \right.$$

Les développements (1-3), (1-4) et (3-10) et leur propriété dans le cas du champ « non-radiatif » permettent d'écrire (3-14) sous la forme

$$(3-15) \left\{ \begin{aligned} g_{\mu'\nu'} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_{\mu'\nu'}^n}{r^n}, \\ R_{\mu'\nu'\rho'\sigma'} &= \frac{1}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_{\mu'\nu'\rho'\sigma'}^n}{r^n} \end{aligned} \right.$$

où les $\overset{n}{g}_{\mu'\nu'}$, $\overset{n}{R}_{\mu'\nu'\rho'\sigma'}$ sont des polynômes en u dont le degré est au plus égal à n . Ces résultats pour le tenseur de courbure sont donc analogues à ceux du champ électromagnétique étudié dans [7] en relativité restreinte puisque les composantes du champ électromagnétique « non-radiatif » peuvent s'écrire en un point M :

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overset{n}{F}_{\mu\nu}}{r^n}$$

où r est la distance du point M à l'origine des coordonnées galiléennes utilisées.

Faisons une remarque. Les hypothèses faites sur les $e_{(\mu)}$ pour obtenir le théorème A sous la forme (3-15) sont : les $e_{(\mu)}$ sont linéairement indépendants, ils ont une décomposition de la forme (3-10) où les $e_{(\mu)}$ ne sont pas tous nuls, ils sont transportés par parallélisme le long des rayons. Le résultat (3-15) est donc encore valable pour tout système $e_{(\mu)}$ satisfaisant ces hypothèses. C'est le cas pour les vecteurs du repère « quasi-orthonormé » de Sachs [3].

Le degré des polynômes en u $\overset{n}{g}_{\alpha\beta}$ qui apparaissent dans (1-3) n'est pas en général invariant par rapport aux transformations de Bondi-Metzner-Sachs. En effet, considérons le champ de Schwarzschild d'abord avec un système de coordonnées « radiatives » dans lequel les $g_{\alpha\beta}$ sont indépendants de u . Tous les $\overset{n}{g}_{\alpha\beta}$ sont alors des polynômes en u dont le degré est zéro. Mais après une transformation de Bondi-Metzner-Sachs correspondant à une transformation de Lorentz, la métrique dépend de u et par conséquent les coefficients $\overset{n}{g}_{\alpha\beta}$ ne sont plus tous de degré zéro. Cependant nous démontrerons dans le paragraphe 2 de l'appendice le lemme suivant :

LEMME. — Si $\overset{1}{\gamma}$ et $\overset{1}{\delta}$ sont indépendants de u , leurs transformées $\overset{1}{\bar{\gamma}}$ et $\overset{1}{\bar{\delta}}$ par une transformation quelconque de Bondi-Metzner-Sachs sont indépendantes de u . Si l'un au moins des deux coefficients $\overset{1}{\gamma}$ et $\overset{1}{\delta}$ est un polynôme en u dont le degré est un, l'une au moins de leurs transformées $\overset{1}{\bar{\gamma}}$, $\overset{1}{\bar{\delta}}$ par une transformation quelconque de Bondi-Metzner-Sachs est encore un polynôme en u dont le degré est un.

Ceci entraîne que dans le cas d'un champ « non-radiatif » certains coefficients sont des polynômes en u dont le degré est invariant par rapport à

ces transformations. C'est le cas de $g_{01}^2 = -\frac{1}{2}[(\dot{\gamma}^1)^2 + (\dot{\delta}^1)^2]$. Nous pouvons donc conclure que si le champ est « non-radiatif » et que si $\dot{\gamma}^1$ et $\dot{\delta}^1$ ne sont pas tous deux indépendants de u , ce champ est nécessairement non stationnaire ⁽¹⁾.

Cette dernière remarque nous permet de préciser le théorème A dans le cas d'un champ stationnaire : En effet $\dot{\gamma}_0^1$ et $\dot{\delta}_0^1$ étant nécessairement nuls, on peut supprimer un indice zéro de dérivation dans les formules (3-3).

On en déduit que les $g_{\mu\nu}^n$ et $R_{\mu\nu\rho\sigma}^n$ définis par (3-15) sont des polynômes en u dont le degré est au plus égal à $n - 1$, mais cette propriété ne caractérise pas le champ stationnaire puisqu'elle n'est pas suffisante.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème B. Nous supposons que le champ est « non-radiatif » dans le domaine

$$(\Omega) \quad {}_1u < u < {}_2u, \quad {}_1r < r$$

et stationnaire dans le domaine

$$(\Omega') \quad {}_1u < u < {}_2u' \quad {}_1r < r \quad \text{avec} \quad {}_2u' < {}_2u,$$

Nous pouvons introduire un système de coordonnées de Bondi tel que les $g_{\mu\nu}$ soient indépendants de u dans le domaine (Ω') . Le champ étant non-radiatif dans (Ω) , les coefficients $g_{\mu\nu}^n$ sont en tout point de ce domaine des polynômes en u . Mais le tenseur métrique est indépendant de u dans la partie (Ω') de (Ω) et par conséquent le degré de tous ces polynômes est zéro. Le champ est donc stationnaire dans le domaine (Ω) . Le théorème (B) est démontré.

Donnons une autre démonstration de ce théorème. Un champ « non-radiatif » dépend, d'après le théorème A, de la coordonnée u par l'intermédiaire des fonctions élémentaires u^λ , $\lambda = 0, 1, 2, \dots$. Il s'ensuit qu'au passage d'un champ stationnaire à un champ non-stationnaire, il y aurait nécessairement une onde de choc. Mais on sait qu'il n'y a pas d'onde de choc dans le cas d'un champ « non-radiatif » [7] donc le champ est stationnaire.

(1) Le champ gravitationnel est dit stationnaire dans un domaine de la variété espace-temps s'il existe, dans ce domaine, un champ de vecteurs de Killing orientés dans le temps.

De ces théorèmes, nous pouvons déduire les conclusions déjà établies pour le champ à symétrie axiale dans [1] :

- a) les quantités c_0 et d_0 ne sont pas suffisantes pour décrire en détail le rayonnement gravitationnel ;
- b) le champ créé par des corps en mouvement purement gravitationnel doit être radiatif.

IV. LES TRANSFORMATIONS DE BONDI-METZNER-SACHS

Dans ce paragraphe le tenseur métrique n'est pas nécessairement solution des équations du vide. Nous prenons comme définition des transformations de Bondi-Metzner-Sachs celle qui est donnée dans [3].

Nous allons la rappeler mais d'abord énumérons les hypothèses faites sur la variété riemannienne V_4 .

1. Hypothèses.

a) Il existe un domaine ⁽¹⁾ (Ω) de V_4 susceptible d'être rapporté à un système de coordonnées radiatives $(\bar{u}, \bar{r}, \bar{\theta}, \bar{\phi})$, ce domaine étant défini par :

$$(4-1) \quad \bar{u}_1 < \bar{u} < \bar{u}_2, \quad \bar{r}_1 < \bar{r}, \quad 0 \leq \bar{\theta} \leq \pi, \quad 0 \leq \bar{\phi} \leq 2\pi.$$

Nous savons qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système de coordonnées définies sur (Ω) soit un système de coordonnées radiatives est que les composantes $g_{\alpha\bar{\beta}}$ du tenseur métrique dans ce système de coordonnées satisfont en tout point de (Ω) :

$$(4-2) \quad g_{\bar{1}\bar{1}} = 0, \quad g_{\bar{1}\bar{2}} = 0, \quad g_{\bar{1}\bar{3}} = 0, \quad g_{\bar{2}\bar{2}} \cdot g_{\bar{3}\bar{3}} - (g_{\bar{2}\bar{3}})^2 = \bar{r}^4 \sin^2 \bar{\theta}.$$

Les $g_{\alpha\bar{\beta}}$ non nuls peuvent alors prendre la forme (3-4).

b) Le comportement asymptotique des $g_{\alpha\bar{\beta}}$ non nuls définis sur (Ω) dans ce système de coordonnées est :

$$(4-3) \quad \lim_{\bar{r}=\infty} \left(\frac{g_{\bar{2}\bar{2}}}{\bar{r}^2} \right) = -1, \quad \lim_{\bar{r}=\infty} \left(\frac{g_{\bar{3}\bar{3}}}{\bar{r}^2} \right) = -\sin^2 \bar{\theta}, \quad \lim_{\bar{r}=\infty} \left(\frac{g_{\bar{2}\bar{3}}}{\bar{r}^2} \right) = 0, \quad \lim_{\bar{r}=\infty} (g_{\bar{0}\bar{1}}) = 1,$$

$$\lim_{\bar{r}=\infty} (g_{\bar{0}\bar{0}}) = 1, \quad \lim_{\bar{r}=\infty} \left(\frac{g_{\bar{0}\bar{A}}}{\bar{r}} \right) = 0.$$

⁽¹⁾ (Ω) désignera dans la suite un domaine défini par (4-1).

Il exprime que la métrique est Minkowskienne quand $\bar{r} \rightarrow \infty$.

c) Les $g_{\alpha\beta}$ sont en tout point de (Ω) développables en séries entières de $\frac{1}{r}$.

Les propriétés (a), (b), (c) sont caractérisées par l'existence des six fonctions $\bar{\gamma}, \bar{\delta}, \bar{\beta}, \bar{\mathbb{U}}, \bar{\mathbb{W}}, \bar{\mathbb{V}}$ et de leur développement donné par (2-1), (2-2), (2-3), (2-4), (2-5), dont dépendent les $g_{\alpha\beta}$ non nuls donnés par (3-4).

2. Définition.

Nous désignons par transformation de Bondi-Metzner-Sachs tout changement de système de coordonnées définies sur (Ω)

$$(4-4) \quad \begin{cases} u = u(\bar{u}, \bar{r}, \bar{\theta}, \bar{\phi}) \\ r = r(\bar{u}, \bar{r}, \bar{\theta}, \bar{\phi}) \\ \theta = \theta(\bar{u}, \bar{r}, \bar{\theta}, \bar{\phi}) \\ \Phi = \Phi(\bar{u}, \bar{r}, \bar{\theta}, \bar{\phi}) \end{cases}$$

qui conserve les propriétés (a), (b), (c) des composantes du tenseur métrique dans le nouveau système de coordonnées (u, r, θ, ϕ) . Toute transformation de Bondi-Metzner-Sachs dont les fonctions u, r, θ, ϕ sont développables en séries entières de $\frac{1}{r}$ sera notée (T) dans la suite.

Remarquons que l'hypothèse ${}_1\bar{r} < \bar{r}$ tirée de (4-1) et l'hypothèse b) supposent l'existence d'un domaine ⁽¹⁾ à l'infini (ω) de (Ω) . Ce domaine (ω) est défini comme suit :

Le point M appartient à (ω) si la coordonnée \bar{r} d'un système de coordonnées radiatives définies en ce point est supérieure à tout nombre positif A donné arbitrairement grand. Réciproquement si M appartient à (ω) la coordonnée r de tout système de coordonnées radiatives définies en ce point surpasse tout nombre A positif donné.

3. Forme du développement des fonctions u, r, θ, Φ dans (4-4).

L'étude des changements de coordonnées (T) est faite dans [3]. On y cherche d'abord par quelle puissance de $\frac{1}{r}$ débute nécessairement les développements de u, r, θ, ϕ dans (4-4). Donnons-en une démonstration diffé-

⁽¹⁾ (ω) désignera le domaine à l'infini de (Ω) , dans la suite.

rente qui est indépendante du comportement asymptotique du tenseur métrique. Par hypothèse les coordonnées u, r, θ, ϕ sont admissibles, c'est-à-dire que u, r, θ, ϕ sont des fonctions de classe c^2 au moins dont le Jacobien

$$(4-5) \quad \Delta = \begin{vmatrix} u_{\bar{0}} & u_{\bar{1}} & u_{\bar{2}} & u_{\bar{3}} \\ r_{\bar{0}} & r_{\bar{1}} & r_{\bar{2}} & r_{\bar{3}} \\ \theta_{\bar{0}} & \theta_{\bar{1}} & \theta_{\bar{2}} & \theta_{\bar{3}} \\ \phi_{\bar{0}} & \phi_{\bar{1}} & \phi_{\bar{2}} & \phi_{\bar{3}} \end{vmatrix}$$

est défini et non nul en tout point de (Ω) . Les fonctions u, r, θ, ϕ étant développables en séries entières de $\frac{1}{r}$ ont une limite finie ou non quand \bar{r} tend vers l'infini. Il en est de même de leurs dérivés partielles du premier ordre. La définition même des coordonnées radiatives impose que la limite des fonctions u, θ, ϕ soit finie. Les développements de u, θ, ϕ débutent donc par un terme indépendant de \bar{r} . La définition d'un point à l'infini entraîne que la limite de r quand \bar{r} tend vers l'infini est $+\infty$. Mais le développement en série par rapport à $\frac{1}{r}$ de la fonction r ne doit pas contenir de puissance de \bar{r} supérieure à un. En effet le calcul montre que la limite du jacobien (4-5) quand \bar{r} tend vers l'infini est celle du produit de $r_{\bar{1}}$ par son cofacteur, si nous supposons que la limite de ce cofacteur est non nulle. Remarquons que si l'une des trois quantités $\lim_{\bar{r}=\infty} (\text{cofacteur de } r_{\bar{1}})$, $\lim_{\bar{r}=\infty} \left(\frac{r}{\bar{r}}\right)$, $\lim_{\bar{r}=\infty} \left(\frac{g_{01}}{g_{\bar{0}\bar{1}}}\right)$ est finie et non nulle, les deux autres le sont aussi. Il ne reste à prouver cette propriété que pour $\frac{g_{01}}{g_{\bar{0}\bar{1}}}$. Elle s'établit à partir de

$$\lim_{\bar{r}=\infty} \{ \det |g_{\alpha\bar{\beta}}| \} = \lim_{\bar{r}=\infty} \{ \Delta^2 \det |g_{\alpha\beta}| \},$$

après avoir tenu compte de (4-2), pour $g_{\alpha\bar{\beta}}$ et $g_{\alpha\beta}$.

Tout changement de coordonnées (T) doit donc avoir le développement (1) suivant :

$$(4-6) \quad u = \bar{r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u}{\bar{r}^n} \quad \theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta}{\bar{r}^n} \quad r = \bar{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r}{\bar{r}^n} \quad \Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Phi}{\bar{r}^n}$$

(1) Cette notation présente l'avantage suivant : les facteurs des g_{ik} , des $r^{-1}g_{iA}$ et des $r^{-2}g_{AB}$ dans le second membre de (5-9) sont des séries entières de $\frac{1}{r}$ dont le coefficient du terme en $\frac{1}{\bar{r}^n}$ a pour indice n ; on peut vérifier cette propriété dans (A, 2).

où les $\bar{u}, \bar{r}, \bar{\theta}, \bar{\phi}$ sont des fonctions des variables $\bar{u}, \bar{\theta}, \bar{\phi}$. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME C.

Si V_4 possède un domaine (Ω) et si sur (Ω) existe un changement de coordonnées radiatives $(\bar{u}, \bar{r}, \bar{\theta}, \bar{\phi})$ en coordonnées radiatives (u, r, θ, ϕ) , si le rapport de g_{01} à $g_{0\bar{1}}$ a une limite finie non nulle quand $\bar{r} \rightarrow \infty$ et si, en outre, on suppose que u, r, θ, ϕ sont développables en séries entières de $\frac{1}{r}$, ces développements ont nécessairement la forme (4-6).

V. LES CHANGEMENTS DE COORDONNÉES (T')

Nous montrerons dans ce paragraphe que les changements de coordonnées (T) sont un cas particulier de changements de coordonnées (T') que nous définirons après avoir établi le théorème D.

1. Théorème D.

Nous supposons les conditions d'applications du théorème (C) réalisées. Nous supposons donc que V_4 possède un domaine (Ω) , qu'il existe un changement (R) de système de coordonnées radiatives tel que les nouvelles coordonnées u, r, θ, ϕ soient développables en séries entières de $\frac{1}{r}$ (d'après le théorème (C) ces développements sont donc de la forme (4-6)). Nous supposons en outre que sur (Ω) est défini un tenseur métrique dont le comportement asymptotique ⁽¹⁾ des composantes non nulles est :

$$(5-1) \begin{cases} \lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} \left(\frac{g_{22}}{\bar{r}^2} \right) = -1, & \lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} \left(\frac{g_{33}}{\bar{r}^2} \right) = -\sin^2 \bar{\theta}, & \lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} \left(\frac{g_{23}}{\bar{r}^2} \right) = 0, & \lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} (g_{0\bar{1}}) = 1, \\ \lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} \left(\frac{g_{00}}{\bar{r}^2} \right) = 0 = \lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} \left(\frac{g_{0A}}{\bar{r}^2} \right). \end{cases}$$

Alors, une condition nécessaire et suffisante pour que les coefficients u, r, θ, ϕ relatifs au changement de coordonnées (R) soient ceux d'un changement

(¹) Ce comportement asymptotique est plus général que celui donné par (4-3).

de coordonnées (T) est que (R) laisse invariant le comportement asymptotique (5-1) du tenseur métrique.

Rappelons d'abord la forme des coefficients ${}^1 u, r, \overset{\circ}{\theta}, \overset{\circ}{\phi}$ relatifs à un changement de coordonnées (T) donnée dans [3].

Les fonctions $\overset{\circ}{\theta}$ et $\overset{\circ}{\phi}$ sont indépendantes de $\bar{u} : \overset{\circ}{\theta} = \overset{\circ}{\theta}(\bar{\theta}, \bar{\phi}), \overset{\circ}{\phi} = \overset{\circ}{\phi}(\bar{\theta}, \bar{\phi})$, et sont les transformations conformes sur la sphère à deux dimensions $(\bar{\theta}, \bar{\phi})$ dont le rayon est l'unité. Les fonctions $\overset{\circ}{\theta}$ et $\overset{\circ}{\phi}$ qui caractérisent ces transformations sont les solutions du système :

$$(5-2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \overset{\circ}{\theta}_2 = \varepsilon \overset{\circ}{\phi}_3 \frac{\sin \overset{\circ}{\theta}}{\sin \bar{\theta}} \\ \frac{\overset{\circ}{\theta}_3}{\sin \bar{\theta}} = \varepsilon \overset{\circ}{\phi}_2 \sin \overset{\circ}{\theta} \end{array} \right. \quad \text{où} \quad \varepsilon = \pm 1.$$

$\overset{\circ}{r}$ est alors donné par

$$(5-3) \quad (\overset{\circ}{r})^4 = \frac{\sin^2 \bar{\theta}}{(\overset{\circ}{\theta}_2 \overset{\circ}{\phi}_3 - \overset{\circ}{\theta}_3 \overset{\circ}{\phi}_2)^2 \sin^2 \overset{\circ}{\theta}}$$

$\overset{1}{u}$ est de la forme :

$$(5-4) \quad \overset{1}{u} = \frac{\bar{u}}{\overset{\circ}{r}} + \alpha(\bar{\theta}, \bar{\phi}),$$

où α est une fonction des variables $\bar{\theta}, \bar{\phi}$, de classe au moins c^2 arbitraire. Démontrons maintenant le théorème (D) et prouvons d'abord que la condition est suffisante. Pour tout vecteur X appartenant à l'espace tangent du point $M \in (\Omega)$, nous avons :

$$g_{\alpha\beta} \bar{X}^\alpha \bar{X}^\beta = g_{\alpha\beta} X^\alpha X^\beta$$

ou

$$\frac{g_{\alpha\beta}}{r^2} \bar{X}^\alpha \bar{X}^\beta = \frac{r^2}{r^2} \frac{g_{\alpha\beta}}{r^2} X^\alpha X^\beta.$$

En tout point M du domaine à l'infini (ω) de (Ω) on a, compte tenu de l'invariance du comportement asymptotique (5-1) du tenseur métrique :

$$(5-5) \quad (X^2)^2 + \sin^2 \bar{\theta} (\bar{X}^3)^2 = (\overset{\circ}{r})^2 [(X^2)^2 + \sin^2 \overset{\circ}{\theta} (X^3)^2].$$

Ceci exprime que les transformations $\overset{0}{\theta} = \overset{0}{\theta}(\bar{u}, \bar{\theta}, \bar{\phi})$, $\overset{0}{\phi} = \overset{0}{\phi}(\bar{u}, \bar{\theta}, \bar{\phi})$ sont les transformations conformes sur la sphère à deux dimensions $(\bar{\theta}, \bar{\phi})$ dont le rayon est l'unité. Il s'ensuit qu'elles sont indépendantes de la variable \bar{u} et qu'elles sont solution de (5-2); $\overset{0}{r}$ est alors donné par (5-3).

Il nous reste à prouver que $\overset{1}{u}$ satisfait (5-4). Nous avons :

$$(5-6) \quad \lim_{\bar{r}=\infty} \left\{ \frac{\det |g_{\alpha\beta}|}{\bar{r}^4} \right\} = \lim_{\bar{r}=\infty} \left\{ \left(\frac{D(u, r, \theta, \phi)}{D(\bar{u}, \bar{r}, \bar{\theta}, \bar{\phi})} \right)^2 \frac{\det |g_{\alpha\beta}|}{\bar{r}^4} \right\} \\ = \lim_{\bar{r}=\infty} \left\{ \left(\frac{D(u, r, \theta, \phi)}{D(\bar{u}, \bar{r}, \bar{\theta}, \bar{\phi})} \right)^2 (-g_{01}) \right\} \overset{0}{r}^4 \sin^2 \overset{0}{\theta},$$

d'où nous déduisons, compte tenu de l'invariance du comportement asymptotique du tenseur métrique :

$$\sin^2 \bar{\theta} = \left[\overset{1}{u}_0 \overset{0}{r} (\overset{0}{\theta}_2 \overset{0}{\phi}_3 - \overset{0}{\theta}_3 \overset{0}{\phi}_2) \right]^2 \sin^2 \overset{0}{\theta} (\overset{0}{r})^4,$$

et en tenant compte de (5-3) nous obtenons :

$$\left(\overset{1}{u}_0 \overset{0}{r} \right)^2 = 1.$$

$\overset{1}{u}_0$ et $\overset{0}{r}$ étant positifs par hypothèse, $\overset{1}{u}$ satisfait (5-4).

Démontrons maintenant que la condition est nécessaire. Ceci est immédiat. Toute solution de (5-2) entraîne (5-5) qui avec (5-1) donne :

$$(5-7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{r=\infty} \left(\frac{g_{22}}{r^2} \right) = -1, \quad \lim_{r=\infty} \left(\frac{g_{33}}{r^2} \right) = -\sin^2 \theta, \quad \lim_{r=\infty} \left(\frac{g_{23}}{r^2} \right) = 0, \\ \lim_{r=\infty} \left(\frac{g_{00}}{r^2} \right) = 0 = \lim_{r=\infty} \left(\frac{g_{0A}}{r^2} \right). \end{array} \right.$$

De même (5-1), (5-2), (5-3), (5-4), (4-2) appliqué à $g_{\alpha\beta}$, (5-7) introduits dans $g_{01} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^0} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^1} g_{\alpha\beta}$ entraînent $\lim_{r=\infty} (g_{01}) = 1$.

2. Définition des changements de coordonnées (T')

Les hypothèses faites sur V_4 sont :

a) Il existe un domaine $(\Omega) \subset V_4$ sur lequel est défini un tenseur métrique qui n'est pas nécessairement solution des équations du vide. Les coordonnées

qui définissent (Ω) étant radiatives, les composantes $g_{\alpha\beta}^-$ satisfont (4-2) en tout point de (Ω) .

b) Le comportement asymptotique du tenseur métrique sur (Ω) est donné par (5-1).

c) Les $g_{\alpha\beta}^-$ sont, en tout point de (Ω) , développables en séries entières de $\frac{1}{r}$.

Les hypothèses a), b), c) sont encore caractérisées par l'existence des six fonctions $\bar{\gamma}$, $\bar{\delta}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\mathcal{U}}$, $\bar{\mathcal{W}}$, $\bar{\mathcal{V}}$ et de leurs développements dont dépendent les $g_{\alpha\beta}^-$ non nuls donnés par (3-4). Les développements de $\bar{\gamma}$, $\bar{\delta}$, $\bar{\beta}$ sont encore donnés par (2-1), (2-2), (2-3) dont toutes les quantités seront barrées, alors que ceux de $\bar{\mathcal{U}}$, $\bar{\mathcal{W}}$, $\bar{\mathcal{V}}$ sont :

$$\bar{\mathcal{U}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{\mathcal{U}}}{\bar{r}^n}, \quad \bar{\mathcal{W}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{\mathcal{W}}}{\bar{r}^n}, \quad \bar{\mathcal{V}} = \frac{-1}{\bar{\mathcal{V}}\bar{r}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{\mathcal{V}}}{\bar{r}^n}.$$

Nous désignons par changement de coordonnées (T') tout changement de coordonnées défini sur (Ω) :

$$(5-8) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = u(\bar{u}, \bar{r}, \bar{\theta}, \bar{\phi}) \\ r = r(\bar{u}, \bar{r}, \bar{\theta}, \bar{\phi}) \\ \theta = \theta(\bar{u}, \bar{r}, \bar{\theta}, \bar{\phi}) \\ \phi = \phi(\bar{u}, \bar{r}, \bar{\theta}, \bar{\phi}) \end{array} \right.$$

qui conserve les hypothèses a) b) c) et qui soit tel que u, r, θ, ϕ soient développables en séries entières de $\frac{1}{r}$.

Soulignons que la définition d'un changement de coordonnées (T') ne diffère de celle d'un changement de coordonnées (T) que par le fait qu'elle conserve la forme du comportement asymptotique

$$\lim_{\bar{r}=\infty} \left(\frac{g_{00}^-}{\bar{r}^2} \right) = 0 = \lim_{\bar{r}=\infty} \left(\frac{g_{0A}^-}{\bar{r}^2} \right)$$

au lieu de :

$$\lim_{\bar{r}=\infty} (g_{00}^-) = 1, \quad \lim_{\bar{r}=\infty} \left(\frac{g_{0A}^-}{\bar{r}} \right) = 0$$

3. Étude des changements de coordonnées (T').

Supposons qu'il existe un changement de coordonnées (T') donné par (5-8). Désignons par $g_{\alpha\beta}$ les composantes du tenseur métrique en un point $M \in (\Omega)$ dans le nouveau système de coordonnées radiatives. En vertu du théorème (C), (5-8) satisfait (4-6) et d'après la condition suffisante du théorème (D) les coefficients u, r, θ, ϕ dans (4-6) satisfont (5-4), (5-3), (5-2). La détermination des autres coefficients (u, r, θ, ϕ pour $n \geq 1$) et la preuve de l'existence des transformations (T') s'obtiennent par la méthode utilisée dans [3] pour les transformations (T). Elle utilise l'identification des coefficients de $\frac{1}{r^n}$ dans les développements des membres de :

$$(5-9) \quad g_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\bar{\alpha}}} \cdot \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\bar{\beta}}} g_{\rho\sigma}.$$

Sous certaines conditions, on peut en effet, développer en série entière de $\frac{1}{r}$ chaque membre de (5-9). Par hypothèse les $g_{\alpha\beta}$ non nuls admettent un développement en série entière qui débute par :

$$(5-10) \quad \left\{ \begin{aligned} g_{00} &= \frac{-1}{\bar{U}r} + \left(\frac{0}{\bar{U}} + \frac{1-1}{2\bar{\beta}\bar{U}} - \frac{0}{\bar{U}^2} - \frac{0}{\bar{W}^2} \right) + \dots; & g_{01} &= 1 + \frac{2\bar{\beta}}{r} + \dots; \\ \frac{g_{02}}{r} &= \frac{0}{\bar{U}} + \left(2\frac{1}{\bar{\gamma}}\frac{0}{\bar{U}} + \frac{1}{\bar{U}} - 2\frac{0}{\bar{W}}\frac{1}{\bar{\delta}} \right) \frac{1}{r} + \dots; \\ \frac{g_{03}}{r} &= \frac{0}{\bar{W}} \sin \bar{\theta} + \left(-2\frac{1}{\bar{\gamma}}\frac{0}{\bar{W}} + \frac{1}{\bar{W}} + 2\frac{0}{\bar{U}}\frac{1}{\bar{\delta}} \right) \sin \bar{\theta} \cdot \frac{1}{r} + \dots; \\ \frac{g_{22}}{r^2} &= -1 - \frac{2\bar{\gamma}}{r} + \dots; & \frac{g_{33}}{r^2} &= -\sin^2 \bar{\theta} + \frac{2\bar{\gamma}}{r} \sin^2 \bar{\theta} + \dots; \\ & & \frac{g_{23}}{r^2} &= -\frac{2\bar{\delta}}{r} \sin \bar{\theta} + \dots; \end{aligned} \right.$$

De même, le $g_{\alpha\beta}$ ont un développement analogue en $\frac{1}{r}$, les quantités étant non barrées. Supposons en outre que sur (ω) , les $g_{\alpha\beta}$ sont développables en série de Taylor par rapport aux variables $\theta, \phi, u, \frac{1}{r}$. Ceci exige que le

tenseur métrique et les changements de coordonnées (T'), en plus de leur analyticité en $\frac{1}{r}$, soient de classe c^∞ sur (Ω) . Alors on peut développer les $g_{\alpha\beta}$ en tout point $M \in (\Omega)$ en série entière de $\frac{1}{r}$ en utilisant (4-6). On a :

$$(5-11) \left\{ \begin{aligned} g_{00} &= \overset{-1}{\mathcal{U}}(u, \theta, \phi)r + \{ \overset{-1}{\mathcal{U}}(u, \theta, \phi)r + [\overset{-1}{\mathcal{U}}_0 u + \overset{-1}{\mathcal{U}}_2 \theta + \overset{-1}{\mathcal{U}}_3 \phi]r \\ &\quad + \overset{0}{\mathcal{U}} + 2\overset{1}{\beta}\overset{0}{\mathcal{U}} - \overset{0}{\mathcal{U}}^2 - \overset{0}{\mathcal{W}}^2 \} + \dots; \\ g_{01} &= 1 + \frac{2\overset{1}{\beta}}{\overset{0}{r}} \cdot \frac{1}{\overset{0}{r}} + \dots; \quad \frac{g_{02}}{\overset{0}{r}} = \overset{0}{\mathcal{U}} \\ &\quad + \left\{ \frac{1}{\overset{0}{r}} (2\overset{1}{\gamma}\overset{0}{\mathcal{U}} + \overset{1}{\mathcal{U}} + 2\overset{0}{\mathcal{W}}\delta) + \overset{0}{\mathcal{U}}_0 u + \overset{0}{\mathcal{U}}_2 \theta + \overset{0}{\mathcal{U}}_3 \phi \right\} \frac{1}{\overset{0}{r}} + \dots; \\ \frac{g_{03}}{\overset{0}{r}} &= \overset{0}{\mathcal{W}} \sin \theta + \left\{ \frac{1}{\overset{0}{r}} (-2\overset{1}{\gamma}\overset{0}{\mathcal{W}} + \overset{1}{\mathcal{W}} + 2\overset{0}{\mathcal{U}}\delta) \sin \theta \right. \\ &\quad \left. + \sin \theta \overset{0}{\mathcal{W}}_0 u + (\overset{0}{\mathcal{W}}_2 \sin \theta + \overset{0}{\mathcal{W}} \cos \theta)\theta + \overset{0}{\mathcal{W}}_3 \sin \theta \phi \right\} \frac{1}{\overset{0}{r}} + \dots; \\ \frac{g_{22}}{\overset{0}{r}^2} &= -1 - \frac{2\overset{1}{\gamma}}{\overset{0}{r}\overset{0}{r}} + \dots; \quad \frac{g_{33}}{\overset{0}{r}^2} = -\sin^2 \theta \\ &\quad + 2 \left(\sin \theta \frac{\overset{0}{\gamma}}{\overset{0}{r}} + \theta \cos \theta \right) \frac{\sin \theta}{\overset{0}{r}} + \dots; \quad \frac{g_{23}}{\overset{0}{r}^2} = \frac{-2\delta \sin \theta}{\overset{0}{r}} + \dots; \end{aligned} \right.$$

(4-6) et (5-11) permettent enfin d'obtenir le développement en série du second membre de (5-9).

Détermination des coefficients u, r, θ, ϕ pour $n \geq 1$.

Elle s'effectue en appliquant cette méthode d'identification à $g_{1A}^{-1}, g_{11}^{-1}, g_{22}^{-1}, g_{33}^{-1} - (g_{23}^{-1})^2$ qui satisfont (4-2). De l'identification des termes en $\frac{1}{r^n}$ dans (5-9) où $g_{\alpha\beta}^{-1} = g_{1A}^{-1}$ nous déduisons les deux relations :

$$(5-12) \quad \overset{n}{\theta}\overset{0}{\theta}_A + \overset{n}{\phi}\overset{0}{\phi}_A \sin^2 \theta = \overset{n}{G}_A^{i+1 j k l}(u, r, \theta, \phi) \quad \text{avec} \quad i, j, k, l \leq n - 1,$$

où $\overset{n}{G}_A$ sont deux fonctions des u, r, θ, ϕ et des coefficients des développe-

ments de $\gamma, \delta, \beta, \mathcal{U}, \mathcal{W}, \mathcal{V}$. De même de l'identification des termes en $\frac{1}{r^{n+1}}$ dans (5-9) où $g_{\alpha\beta} = g_{11}$ nous obtenons :

$$(5-13) \quad (r)^2 u^{n+1} = H(u, r, \theta, \phi) \quad \text{avec} \quad i, k, l \leq n; j \leq n-1;$$

où H est une fonction des u, r, θ, ϕ et des développements de $\gamma, \delta, \beta, \mathcal{U}, \mathcal{W}, \mathcal{V}$. Ensuite, dans

$$(5-14) \quad g_{22} \cdot g_{33} - (g_{23})^2 = r^4 \sin^2 \bar{\theta}$$

on remplace g_{22}, g_{33} et g_{23} par leur développement donné par le second membre de (5-9). De l'identification des termes en $\frac{1}{r^n}$ de (5-14) on a :

$$(5-15) \quad \frac{r}{r} = I(u, r, \theta, \phi) \quad \text{avec} \quad i, k, l \leq n; j \leq n-1,$$

où I est une fonction des u, r, θ, ϕ et des développements de $\gamma, \delta, \beta, \mathcal{U}, \mathcal{W}, \mathcal{V}$. Comme pour les transformations (T), démontrons que les coefficients u, r, θ, ϕ pour $n \geq 1$ sont déterminés par la donnée de u, r, θ, ϕ et de $\gamma, \delta, \beta, \mathcal{U}, \mathcal{W}, \mathcal{V}$. En effet, pour $n = 1$, (5-12) donne θ et ϕ en fonction de u, r, θ, ϕ et la connaissance de $u, r, \theta, \phi, \theta, \phi$ dans (5-13) et (5-15) détermine u et r , r n'étant pas nul. Plus généralement la connaissance de u, r, θ, ϕ ($i \leq n$) dans (5-12) détermine θ et ϕ et celle de u, r, θ, ϕ ($i \leq n$) dans (5-13) et (5-15) détermine u et r . Remarquons que les relations (5-12) et (5-13) pour $n = 1$ sont celles qui ont été obtenues pour les transformations (T). Les valeurs de θ et ϕ sont donc celles qui ont été trouvées pour les transformations (T),

$$(5-16) \quad \begin{cases} \theta = -r \left(u_2 \theta_2 + \frac{u_3 \theta_3}{\sin^2 \bar{\theta}} \right) \\ \phi = -r \left(u_2 \phi_2 + \frac{u_3 \phi_3}{\sin^2 \bar{\theta}} \right) \end{cases}$$

Il n'en est pas de même pour r puisque pour $n = 1$, $\bar{\mathcal{U}}, \mathcal{U}$ et \mathcal{W} apparaissent dans (5-15).

Remarquons en outre que ce changement de coordonnées dont nous venons de déterminer les coefficients est inversible sur un domaine (Ω) puisque son jacobien est non nul sur le domaine à l'infini (ω), d'après (5-3).

Existence des transformations (T').

Nous nous intéressons ici à l'existence des séries formelles définissant (T') sans nous préoccuper de la convergence de ces séries. Cette existence est prouvée en utilisant la méthode d'identification des coefficients de $\frac{1}{r^n}$ du développement des membres de (5-9) où $g_{\alpha\beta}$ prend successivement les autres valeurs : g_{ik} , g_{0A} , g_{AB} . Toutes les relations ainsi obtenues ne servent qu'à déterminer les six fonctions $\bar{\gamma}$, $\bar{\delta}$, $\bar{\beta}$, \bar{U} , \bar{W} , \bar{V} en fonction de ces six fonctions non barrées et des coefficients de (T').

En effet, l'identification des termes en $\frac{1}{r^n}$ ($n \geq 1$) appliquée successivement à g_{01} , $\frac{g_{23}}{r^2}$, $\frac{g_{22}}{r^2}$ détermine successivement $\bar{\beta}$, $\bar{\delta}$ et $\bar{\gamma}$. Cette identification appliquée à $\frac{g_{33}}{r^2}$ est alors identiquement satisfaite à cause de (5-14), appliquée ensuite simultanément à $\frac{g_{02}}{r}$ et $\frac{g_{03}}{r}$ mais pour $n \geq 0$, elle donne \bar{U} et \bar{W} et enfin appliquée à g_{00} et cette fois pour $n \geq -1$, elle détermine \bar{V} .

Soulignons en quoi ces résultats diffèrent de ceux obtenus pour les transformations (T). Dans le cas des transformations (T), l'identification des termes indépendants de \bar{r} dans (5-9) pour $g_{\alpha\beta} = g_{0A}$ donne les deux relations :

$$(5-17) \quad u_{0A}^0 - (\theta_0^0 \theta_A^0 + \phi_0^0 \phi_A^0 \sin^2 \theta^0) (r^0)^2 = 0,$$

et l'identification des termes en \bar{r} et ensuite des termes indépendants de \bar{r} dans (5-9) pour $g_{\alpha\beta} = g_{00}$ donne :

$$(5-18) \quad u_0^0 = 0,$$

$$(5-19) \quad (u_0^0)^2 + 2r_0^0 u_0^0 - (r^0)^2 [(\theta_0^0)^2 + (\phi_0^0)^2 \sin^2 \theta^0] = 1.$$

Rappelons que (5-17), (5-18), (5-19) qui ne font intervenir que des coefficients des changements de coordonnées (T) sont identiquement vérifiées. Remarquons que les relations (5-17) et (5-18) qui ne font intervenir que

${}^1_0 u, {}^1_0 r, {}^1_0 \theta, {}^1_0 \phi, {}^1_0 \dot{\theta}, {}^1_0 \dot{\phi}$ sont également vérifiées dans le cas des changements de coordonnées (T').

Dans le cas des transformations (T'), l'identification des termes indépendants de \bar{r} dans (5-9) pour $g_{\alpha\beta} = g_{0A}$ donne cette fois, compte tenu de (5-17),

$$(5-20) \quad \begin{cases} {}^1_0 u_2 \dot{\mathcal{U}} + \theta_2^0 \mathcal{U} + \phi_2^0 \mathcal{W} = \dot{\mathcal{U}} \\ {}^1_0 u_3 \dot{\mathcal{U}} + \theta_3^0 \mathcal{U} + \phi_3^0 \mathcal{W} = \dot{\mathcal{W}}, \end{cases}$$

et l'identification des termes en \bar{r} et ensuite des termes indépendants de \bar{r} dans (5-9) pour $g_{\alpha\beta} = g_{00}$ donne :

$$(5-21) \quad \frac{\dot{\mathcal{U}}}{r} = \dot{\mathcal{U}}$$

dans laquelle on a tenu compte de (5-18),

$$(5-22) \quad 2u_0^1 u_0^2 \dot{\mathcal{U}} + 2u_0^1 r_0^1 + (u_0^1)^2 [\dot{\mathcal{U}}r + r(\dot{\mathcal{U}}_0^1 u + \dot{\mathcal{U}}_2^1 \theta + \dot{\mathcal{U}}_3^1 \phi) + \dot{\mathcal{U}} + 2\beta \dot{\mathcal{U}}^1 - (\mathcal{U})^2 - (\mathcal{W})^2] + 2u_0^1 r (\theta_0^1 \mathcal{U} + \phi_0^1 \mathcal{W}) - (r)^2 [(\theta_0^1)^2 + (\phi_0^1)^2 \sin^2 \theta] = \dot{\mathcal{U}}.$$

Donc les relations (5-17), (5-18), (5-19) qui sont identiquement vérifiées dans le cas des transformations (T) sont remplacées, dans le cas des transformations (T') par (5-20), (5-21) et (5-22) qui déterminent cette fois, $\dot{\mathcal{U}}, \dot{\mathcal{W}}, \dot{\mathcal{U}}^{-1}$ et $\dot{\mathcal{U}}^0$.

Comme conséquence de ceci, démontrons que les changements de coordonnées (T') conservent les valeurs particulières $\dot{\mathcal{U}}^{-1} = 0, \dot{\mathcal{U}}^0 = 1, \dot{\mathcal{U}} = \dot{\mathcal{W}} = 0$, c'est-à-dire que si les développements des composantes g_{00} et g_{0A} du tenseur métrique dans un système de coordonnées radiatives satisfont $\dot{\mathcal{U}}^{-1} = 0, \dot{\mathcal{U}}^0 = 1, \dot{\mathcal{U}} = \dot{\mathcal{W}} = 0$, après un changement de coordonnées (T') quelconque les développements des nouvelles composantes satisferont $\dot{\mathcal{U}}^{-1} = 0, \dot{\mathcal{U}}^0 = 0, \dot{\mathcal{U}} = \dot{\mathcal{W}} = 0$. Les changements de coordonnées (T') sont alors les changements de coordonnées (T).

Faisons la démonstration. D'après (5-21) $\dot{\mathcal{U}}^{-1} = 0$ est conservé par les changements de coordonnées (T'), r étant non nul. Examinons le cas où

$\overset{-1}{\mathcal{U}} = 0$. D'après (5-20), $\overset{0}{\theta}_2 \overset{0}{\phi}_3 - \overset{0}{\phi}_2 \overset{0}{\theta}_3$ n'étant pas nul, le système ($\overset{0}{\mathcal{U}} = 0$, $\overset{0}{\mathcal{W}} = 0$) est également conservé par ces changements de coordonnées. Dans l'hypothèse

$$(5-23) \quad \overset{-1}{\mathcal{U}} = 0, \quad \overset{0}{\mathcal{U}} = 0, \quad \overset{0}{\mathcal{W}} = 0,$$

le coefficient r a la même expression que celui des changements de coordonnées (T).

On peut donc tenir compte de (5-19) dans (5-22) qui s'écrit avec (5-3)

$$\left(\frac{1}{r}\right)^2 (\overset{0}{\mathcal{U}} - 1) + 1 = \overset{0}{\mathcal{U}}$$

Ceci prouve que, sous l'hypothèse (5-23), tout changement de coordonnées (T') conserve $\overset{0}{\mathcal{U}} = 1$, ce qui démontre la proposition.

VI. LES TRANSFORMATIONS DE BONDI-METZNER-SACHS DANS LE CAS OU LE TENSEUR MÉTRIQUE SATISFAIT LES ÉQUATIONS DU VIDE

Les changements de coordonnées (T) laissent invariantes les équations du vide du paragraphe 2 : équations principales et équations supplémentaires. Nous savons qu'une solution (γ , δ , β , \mathcal{U} , \mathcal{V} , \mathcal{W}) est déterminée par la donnée de quatre fonctions arbitraires de trois variables : $\gamma(u = {}_0u, \theta, \phi, r)$, $\delta(u = {}_0u, \theta, \phi, r)$, $\gamma_0(u, \theta, \phi)$ et $\delta_0(u, \theta, \phi)$ et la donnée des trois fonctions arbitraires de deux variables θ et ϕ dont dépendent les fonctions $\overset{1}{\mathcal{U}}$, $\overset{2}{\mathcal{U}}$, $\overset{2}{\mathcal{W}}$. Toutes les transformées de ces fonctions par les changements de coordonnées (T) représentent la même solution. Nous avons vu que les coefficients ${}^{n+1}u$, ${}^n r$, ${}^n \theta$, ${}^n \phi$, pour $n > 1$, dépendent du tenseur métrique; donc si ce dernier satisfait les équations du vide, ${}^{n+1}u$, ${}^n r$, ${}^n \theta$ ne dépendent que de $\overset{1}{\gamma}$, $\overset{1}{\delta}$, $\overset{1}{\mathcal{U}}$, $\overset{2}{\mathcal{U}}$ et $\overset{2}{\mathcal{W}}$, si $\gamma(u = {}_0u, r, \theta, \phi)$, $\delta(u = {}_0u, r, \theta, \phi)$ sont données. Nous avons vu dans le paragraphe 2 que $\overset{1}{\beta} = \overset{2}{\gamma} = \overset{2}{\delta} = 0$, et ceci est invariant ⁽¹⁾ par (T).

⁽¹⁾ On démontre que $\overset{1}{\beta} = 0$ est conservé par les changements de coordonnées (T) même si le tenseur métrique n'est pas solution des équations du vide.

Nous allons préciser la structure des coefficients u, r, θ, ϕ , pour $n > 1$, en précisant celle des composantes $g_{\rho\sigma}$ du tenseur métrique dans (5-9).

Rappelons que les $g_{ik}, \frac{g_{iA}}{r}, \frac{g_{AB}}{r^2}$ sont des fonctions F ⁽¹⁾. Nous avons besoin de développer une fonction F des variables u, r, θ, ϕ en séries entières de $\frac{1}{r}$.

Nous utiliserons les deux théorèmes suivants :

1) La dérivée d'ordre n par rapport à r d'une fonction F est égale au produit de $\frac{1}{r^n}$ par une fonction F.

Ceci découle immédiatement de la dérivation d'une fonction ψ et de la définition de F.

2) La dérivée d'ordre n d'une fonction F par rapport à u est une somme de produits dont les facteurs sont des fonctions ψ , les $\frac{\mathcal{U}^2}{r^2}, \frac{\mathcal{W}^2}{r^2}, \frac{\mathcal{V}^1}{r}$, $\left(r^{i-1} \cdot \frac{\partial^i \gamma^1}{\partial u^i}\right), \left(r^{i-1} \cdot \frac{\partial^i \delta^1}{\partial u^i}\right)$, pour $1 \leq i \leq n$ et des dérivées partielles de ces fonctions par rapport à θ et ϕ .

Démontrons-le. Écrivons F sous la forme :

$$(6-1) \quad F = \sum_m \psi_m \mathcal{A}_m,$$

où \mathcal{A}_m est l'une des fonctions suivantes :

$$(6-2) \quad 1, \frac{\mathcal{V}^1}{r}, \frac{\mathcal{U}^2}{r^2}, \frac{\mathcal{U}_A^2}{r^2}, \frac{\mathcal{W}^2}{r^2}, \frac{\mathcal{W}_A^2}{r^2}, \frac{(\mathcal{U}^2)^2}{r^4}, \frac{\mathcal{U}^2 \mathcal{W}^2}{r^4}$$

et où certaines fonctions ψ peuvent être nulles. Notons que l'indice m de la fonction ψ ne précise pas cette fonction. Dans cette démonstration, deux fonctions ψ_m ayant le même indice ne sont pas égales en général. Nous tirons de (6-1)

$$(6-3) \quad F_0 = \sum_m \psi_m \mathcal{A}_0 + \sum_m \psi_0 \mathcal{A}_m.$$

L'expression de \mathcal{A}_0 est donnée par les équations du champ dites supplé-

⁽¹⁾ Les définitions des fonctions F et ψ sont données dans le paragraphe 2.

mentaires (2-33), (2-34) et (2-35) que nous écrivons sous la forme suivante (1):

$$(6-4) \quad \begin{cases} \frac{1}{r} \overset{1}{\mathcal{U}}_0 = \frac{1}{r} [\psi(\overset{1}{\gamma}_0)^2 + \psi(\overset{1}{\delta}_0)^2 + \psi\overset{1}{\gamma}_0 + \psi\overset{1}{\delta}_0] \\ \frac{2}{r^2} \overset{2}{\mathcal{U}}_0 = \frac{1}{r} \left[\psi \frac{\overset{1}{\mathcal{U}}}{r} + \psi\overset{1}{\gamma}_0 + \psi\overset{1}{\delta}_0 + \psi \right] \\ \frac{2}{r^2} \overset{2}{\mathcal{W}}_0 = \frac{1}{r} \left[\psi \frac{\overset{1}{\mathcal{U}}}{r} + \psi\overset{1}{\gamma}_0 + \psi\overset{1}{\delta}_0 + \psi \right]. \end{cases}$$

Pour alléger l'écriture des relations (6-4) nous avons adopté la notation suivante dans les seconds membres : Chacune des fonctions $\overset{1}{\gamma}_0, \overset{1}{\delta}_0, \frac{\overset{1}{\mathcal{U}}}{r}$ désigne en fait une combinaison linéaire d'elle-même et de ses dérivées partielles par rapport à θ et ϕ , les coefficients étant des fonctions ψ . Par exemple $\overset{1}{\gamma}_0$ signifie $\psi\overset{1}{\gamma}_0 + \psi\overset{1}{\gamma}_{0A} + \psi\overset{1}{\gamma}_{0AB} + \dots$ où certaines fonctions ψ peuvent être nulles. Remarquons que les dérivées de $\frac{\overset{1}{\mathcal{U}}}{r}, \frac{\overset{2}{\mathcal{U}}}{r^2}, \frac{\overset{2}{\mathcal{W}}}{r^2}$ par rapport à θ et ϕ obtenues en dérivant les seconds membres de (6-4) s'écrivent, dans cette notation, comme les seconds membres de (6-4). Nous étendons donc cette notation au premier membre de (6-4) et nous l'appliquons également dans la suite de la démonstration. Nous déduisons donc de (6-4)

$$(6-5) \quad \Sigma_m \psi_m \mathcal{A} + \frac{1}{r} \left[\psi(\overset{1}{\gamma}_0)^2 + \psi(\overset{1}{\delta}_0)^2 + {}_1\mathcal{B}\overset{1}{\gamma}_0 + {}_2\mathcal{B}\overset{1}{\delta}_0 + {}_3\mathcal{B} \frac{\overset{1}{\mathcal{U}}}{r} + {}_4\mathcal{B} \right],$$

où les ${}_i\mathcal{B}$ sont des fonctions F de la forme $\psi + \psi \frac{\overset{2}{\mathcal{U}}}{r^2} + \psi \frac{\overset{2}{\mathcal{W}}}{r^2}$. D'autre part la définition et les propriétés d'une fonction ψ , les relations (2-26) déduites des équations du champ et la définition (6-1), permettent d'écrire ψ_0 sous la forme

$$(6-6) \quad \psi_0 = \frac{1}{r} [\psi\overset{1}{\gamma}_0 + \psi\overset{1}{\delta}_0 + \Sigma_m \psi_m \mathcal{A}].$$

Introduisons (6-5) et (6-6) dans (6-3). En remplaçant $\Sigma_m \psi_m \mathcal{A} + \mathcal{B}$ par $\Sigma_m \psi_m \mathcal{A} = F, F_0$ s'écrit :

$$(6-7) \quad F_0 = \frac{1}{r} [\overset{1}{\gamma}_0(\psi\overset{1}{\gamma}_0 + F) + \overset{1}{\delta}_0(\psi\overset{1}{\delta}_0 + F) + S^2],$$

(1) Les fonctions ψ et F entrant dans ces relations et les suivantes sont toutes différentes.

où S^2 est une somme de produits dont les facteurs sont ψ et ${}_m\mathcal{A}$. Prenons les dérivées successives par rapport à u des membres de (6-7). En utilisant à chaque dérivation (6-4), (6-6), (6-7) nous trouvons :

$$(6-8) \quad \frac{\partial^n F}{\partial u^n} = \frac{1}{r^n} \left[\left(r^{n-1} \frac{\partial^n \gamma}{\partial u^n} \right) (\psi \gamma_0 + F) + \left(r^{n-1} \frac{\partial^n \delta}{\partial u^n} \right) (\psi \delta_0 + F) + S^{n+1} \right]$$

où S^{n+1} est une somme de produits dont les facteurs sont, toujours avec les notations utilisées, ψ , ${}_m\mathcal{A}$, γ_0 , δ_0 , $(r \cdot \gamma_{00})$, $(r \cdot \delta_{00})$, ..., $\left(r^{n-2} \cdot \frac{\partial^{n-1} \gamma}{\partial u^{n-1}} \right)$, $\left(r^{n-2} \cdot \frac{\partial^{n-1} \delta}{\partial u^{n-1}} \right)$.

Ceci démontre le théorème.

Remarquons que le théorème précédent est encore valable quand F est remplacé par une dérivée de F par rapport à θ et ϕ .

Développons maintenant une fonction $F(u, r, \theta, \phi)$ en série entière de $\frac{1}{r}$ par un développement de Taylor sur (ω) dont l'équation est $\frac{1}{r} = 0$

$$(6-9) \quad F(u, r, \theta, \phi) = F(u, r\bar{r}, \bar{\theta}, \bar{\phi}) + \left\{ \frac{1}{n!} h^{\alpha_1} \cdot h^{\alpha_2} \dots h^{\alpha_n} F_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} \right\} + \dots$$

avec $h^0 = \bar{r}a$, $h^1 = \bar{r}\rho$, $h^2 = b$, $h^3 = c$; a, ρ, b, c sont données par (A, 1). Tenons compte des théorèmes précédents et de (6-8) dans (6-9) nous obtenons :

$$(6-10) \quad F(u, r, \theta, \phi) = F(u, r\bar{r}, \bar{\theta}, \bar{\phi}) + \left\{ [\gamma_0(\psi \gamma_0 + F) + \delta_0(\psi \delta_0 + F) + S^2] \frac{a}{r} + F \frac{\rho}{r} + F_2 b + F_3 c \right\} + \frac{1}{2} \left\{ [r \gamma_{00}(\gamma_0 + F) + r \delta_{00}(\delta_0 + F) + S^3] \frac{a^2}{r^2} + F \frac{\rho^2}{r^2} + F_{22} b^2 + F_{33} c^2 + \dots \right\} + \dots + \left\{ \frac{1}{n!} h^{\alpha_1} \cdot h^{\alpha_2} \dots h^{\alpha_n} F_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} \right\} + \dots$$

où ${}^0 r h^{0'} = a$, ${}^0 r h^{1'} = \rho$, $h^{2'} = b$, $h^{3'} = c$, et où $F_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}$ est, soit une fonction F , soit le produit par r^q d'une dérivée p ième d'une fonction F par rapport

à l'ensemble des variables u, θ, ϕ ; q est l'ordre de la dérivation par rapport à la variable u ; q et p satisfont :

$$0 \leq q \leq p, \quad 0 \leq p \leq n.$$

$F_{\alpha'_1 \alpha'_2 \dots \alpha'_n}$ est donc une somme de produits dont les facteurs ne peuvent être que :

une fonction ψ , les ${}_m \mathcal{A}$ définis par (6-2), $\left(r^{i-1} \cdot \frac{\partial^i \gamma}{\partial u^i}\right), \left(r^{i-1} \cdot \frac{\partial^i \delta}{\partial u^i}\right)$, avec $1 \leq i \leq n$, et des dérivées partielles de ces fonctions par rapport à θ et ϕ .

Si nous attribuons à $\frac{\partial^i \gamma}{\partial u^i}$ ou $\frac{\partial^i \delta}{\partial u^i}$ l'indice $(i - 1)$ pour $i \geq 1$, alors $F(u, r, \theta, \phi)$ dans (6-10) est mis sous une forme qui présente la propriété suivante : les facteurs qui apparaissent dans chaque terme de la somme sont tous des séries entières de $\frac{1}{r}$ dont le coefficient du terme en $\frac{1}{r^n}$ a pour indice n . Notons que pour les séries qui apparaissent dans $F_{\alpha'_1 \alpha'_2 \dots \alpha'_n}$, le coefficient du terme en $\frac{1}{r^n}$ dont l'indice est n est multiplié par $\frac{1}{r^n}$. Par exemple

le coefficient du terme est $\frac{1}{r^n}$ du facteur $\psi(u, r, \theta, \phi)$ est :

$$\frac{\psi(u, \theta, \phi)}{(r)^n}.$$

Cette propriété des fonctions F , donc des $g_{ik}, \frac{g_{iA}}{r}, \frac{g_{AB}}{r^2}$, est également vraie pour les autres facteurs qui apparaissent dans les 2^e membres de (5-9), comme on peut le vérifier dans la première partie de l'appendice pour $g_{\alpha\beta} = g_{1A}$. Il résulte donc de cette structure que dans (5-12), (5-13) et (5-15) ⁽¹⁾ les fonctions $\overset{n}{G}_A, \overset{n+1}{H}, \overset{n}{I}$ sont des sommes dont les produits qui en constituent les termes possèdent la propriété suivante :

la somme des indices des facteurs de chaque produit est n pour $\overset{n}{G}_A$ et $\overset{n}{I}$ et $n + 1$ pour $\overset{n+1}{H}$.

⁽¹⁾ La structure des relations (5-12) (5-13) est valable pour les changements de coordonnées (T).

Rappelons que ces facteurs appartiennent à la liste :

$$(6-11) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\psi}{(r)^q}, \frac{1}{r}, \frac{2}{(r)^2}, \frac{2}{(r)^2}, \gamma_0, r, \gamma_{00}, \dots, \delta_0, r, \delta_{00}, \dots, \\ \text{et leurs dérivées partielles par rapport à } \theta \text{ et } \phi. \\ u, r, \theta, \phi \text{ et leurs dérivées partielles par rapport à } \bar{\theta} \text{ et } \bar{\phi}. \end{array} \right.$$

Rappelons aussi que les u, r, θ, ϕ pour $i \geq 1$ se calculent à partir des u, r, θ, ϕ et des fonctions de la première ligne de (6-11) par la méthode qui a été exposée au paragraphe 5 pour les changements de coordonnées (T'). Il en résulte donc que dans les G_A^n, H, I , les u, r, θ, ϕ peuvent être remplacés par leur valeur en fonction de u, r, θ, ϕ . La structure des relations (5-12), (5-13), (5-15) donne alors le résultat suivant :

Dans le cas où le tenseur métrique est solution des équations du vide chaque coefficient u, r, θ, ϕ d'un changement de coordonnées (T) défini sur (Ω) est une somme de termes constitués par des produits. Les facteurs de ces produits appartiennent à la liste (6-11) dans laquelle l'indice i ne prend que la valeur zéro. La somme des indices des facteurs d'un produit quelconque est égale à n .

Dans le cas particulier du champ « non-radiatif » ce résultat devient en tenant compte de (3-1), (3-2), (3-3) et (5-3) :

THÉORÈME E.

Dans le cas d'un champ « non-radiatif » défini sur (Ω) les coefficients u, r, θ, ϕ dans (4-6) d'un changement de coordonnées (T) sont des polynômes en \bar{u} dont le degré est au plus égal à n , les coefficients de ces polynômes ⁽¹⁾ étant des fonctions de $\bar{\theta}$ et $\bar{\phi}$.

⁽¹⁾ Rappelons que u est un polynôme en \bar{u} dont le degré est n quel que soit (T) pour $n = 1, n = 2$.

APPENDICE

1. FORME DES EXPRESSIONS (5-9).

Précisons d'abord les notations utilisées.

Nous écrivons (4-6) comme suit :

$$u = \bar{r} \left[\frac{1}{r} u + a \right]$$

$$r = \bar{r} [r + \rho]$$

$$\theta = \bar{\theta} + b$$

$$\Phi = \bar{\Phi} + c$$

où

$$(A, 1) \quad \left\{ \begin{array}{l} a \equiv \frac{2}{r^2} u + \frac{3}{r^3} u + \dots \\ \rho \equiv \frac{1}{r} r + \frac{2}{r^2} r + \dots \\ b \equiv \frac{1}{r} \theta + \frac{2}{r^2} \theta + \dots \\ c \equiv \frac{1}{r} \Phi + \frac{2}{r^2} \Phi + \dots \end{array} \right.$$

et nous posons :

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{r}} = a' \quad \text{avec} \quad a' \equiv -\frac{2}{r^2} u - \frac{2u}{r^3} - \dots,$$

$$\frac{\partial r}{\partial \bar{r}} = r + \rho' \quad \text{avec} \quad \rho' \equiv -\frac{2}{r^2} r - \frac{2r}{r^3} - \dots,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \bar{r}} = \frac{1}{r} b' \quad \text{avec} \quad b' \equiv -\frac{1}{r} \theta - \frac{2\theta}{r^2} - \dots,$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \bar{r}} = \frac{1}{r} c' \quad \text{avec} \quad c' \equiv -\frac{1}{r} \Phi - \frac{2\Phi}{r^2} - \dots,$$

(5-9) devient pour $g_{\alpha\beta}^- = g_{1\alpha}^-$:

$$(A, 2) \quad \frac{g_{1\alpha}^-}{r} = a' \left(\frac{u_{\Lambda}^-}{r} + a_{\Lambda}^- \right) g_{00} + \left[a' (r_{\Lambda}^0 + \rho_{\Lambda}^-) + (r + \rho') \left(\frac{u_{\Lambda}^-}{r} + a_{\Lambda}^- \right) \right] g_{01} + [a' (\theta_{\Lambda}^0 + b_{\Lambda}^-) + b' \left(\frac{u_{\Lambda}^-}{r} + a_{\Lambda}^- \right)] (r + \rho) \frac{g_{02}}{r} + \left[a' (\Phi_{\Lambda}^0 + c_{\Lambda}^-) + c' \left(\frac{u_{\Lambda}^-}{r} + a_{\Lambda}^- \right) \right] (r + \rho) \frac{g_{03}}{r} + b' (\theta_{\Lambda}^0 + b_{\Lambda}^-) (r + \rho)^2 \frac{g_{23}}{r^2} + c' (\Phi_{\Lambda}^0 + c_{\Lambda}^-) (r + \rho)^2 \frac{g_{33}}{r^2} + [b' (\Phi_{\Lambda}^0 + c_{\Lambda}^-) + c' (\theta_{\Lambda}^0 + b_{\Lambda}^-)] (r + \rho)^2 \frac{g_{23}}{r^2}.$$

Les seconds membres des autres $g_{\alpha\beta}^-$ s'explicitent de façon analogue.

2. TRANSFORMÉES DES FONCTIONS γ_0^1 ET δ_0^1 DANS UN CHANGEMENT DE COORDONNÉES DE BONDI-METZNER-SACHS QUELCONQUE ET DÉMONSTRATION DU LEMME DU PARAGRAPHE 2.

L'identification des termes en $\frac{1}{r}$ dans (5-9) pour $g_{\alpha\beta}^- = g_{22}^-$ donne $\frac{1}{\gamma}$ en fonction de $\frac{1}{\gamma}$ et $\frac{1}{\delta}$ après avoir remplacé $\frac{1}{r}$ par sa valeur tirée de l'expression analogue à (5-15) pour les transformations (T). De même l'identification des termes en $\frac{1}{r}$ dans (5-9) pour $g_{\alpha\beta}^- = g_{33}^-$ donne $\frac{1}{\delta}$ en fonction de $\frac{1}{\gamma}$ et $\frac{1}{\delta}$. On obtient en tenant compte de (5-2) :

$$(A, 3) \quad \left[\begin{aligned} & r \left[(\theta_2^0)^2 - (\Phi_2^0)^2 \sin^2 \theta \right] \gamma + r \left[2\theta_2^0 \Phi_2^0 \sin \theta \right] \delta + \frac{1}{2} \left\{ -u_2^0 r_2^0 + \frac{u_3^0 r_3^0}{\sin^2 \theta} \right. \\ & \left. + (r)^2 \left[\theta_2^0 \frac{1}{2} + \Phi_2^0 \Phi_2^0 \sin^2 \theta - \frac{\theta_3^0 \theta_3^0}{\sin^2 \theta} - \Phi_3^0 \Phi_3^0 \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} \right] + \sin \theta \cos \theta \frac{1}{\theta} \left[(\Phi_2^0)^2 - \frac{(\Phi_3^0)^2}{\sin^2 \theta} \right] \right\} = \frac{1}{\gamma} \\ & r \left[2\varepsilon \theta_2^0 \Phi_2^0 \sin \theta \right] \gamma - r \varepsilon \left[(\theta_2^0)^2 - (\Phi_2^0)^2 \sin^2 \theta \right] \delta + \frac{1}{2} \left\{ u_2^0 r_2^0 + u_3^0 r_3^0 - (r)^2 \right. \\ & \left. \left[+ \theta_3^0 \frac{1}{2} + \theta_2^0 \frac{1}{3} + \Phi_3^0 \Phi_2^0 \sin^2 \theta + \frac{1}{\Phi_3^0} \Phi_2^0 \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta \frac{1}{\theta} \Phi_2^0 \Phi_3^0 \right] \right\} = -\frac{1}{\delta}. \end{aligned} \right.$$

Écrivons (A, 3) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} A \gamma r + B \delta r + C &= \frac{1}{\gamma} & \text{où} & & A &\equiv [(\theta_2^0)^2 - (\Phi_2^0)^2 \sin^2 \theta] \\ -\varepsilon B \gamma r + \varepsilon A \delta r + D &= \frac{1}{\delta} & & & B &\equiv 2\theta_2^0 \Phi_2^0 \sin \theta. \end{aligned}$$

Dérivons les membres de (A, 3) par rapport à \bar{u} , nous obtenons :

$$(A, 4) \quad \begin{aligned} A \gamma_0^1 + B \delta_0^1 + C_0 &= \frac{1}{\gamma_0} \\ -\varepsilon B \gamma_0^1 + \varepsilon A \delta_0^1 + D_0 &= \frac{1}{\delta_0^1}. \end{aligned}$$

Démontrons que si ${}^1 u, {}^0 r, {}^0 \theta, {}^0 \Phi$ sont solutions de (5-2), (5-3), (5-4) alors C_0 et D_0 sont identiquement nuls.

En utilisant ${}^1 \theta$ et ${}^1 \Phi$ donnés par (5-16) et (5-2) et (5-3), $2C$ et D s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2C \equiv -2r u_2^1 + \frac{2r u_3^1}{\sin^2 \theta} - r u_{22}^1 + r \frac{u_{33}^1}{\sin^2 \theta} + r \cotg \theta u_2^1 \\ D \equiv r_3 u_2^1 + r_2 u_3^1 + r u_{32}^1 - r \cotg \theta u_3^1 \end{array} \right.$$

On a donc pour $2C_0$ et D_0 en tenant compte de (5-4)

$$(A, 5) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2C_0 \equiv \frac{r_{22}^0}{r} - \frac{r_{33}^0}{r \sin^2 \theta} - \cotg \theta \frac{r_2^0}{r} \\ D_0 \equiv -\frac{r_{23}^0}{r} + \frac{r_3^0}{r} \cotg \theta \end{array} \right.$$

Montrons que C_0 et D_0 sont identiquement nuls si nous remplaçons dans (A-5) r par une solution de (5-2) et (5-3). La forme de cette solution peut être obtenue en se rappelant que ${}^0 \theta = \theta(\bar{\theta}, \Phi)$, ${}^0 \Phi = \Phi(\bar{\theta}, \Phi)$ sont les transformations conformes sur la sphère dont le rayon est l'unité. Les transformations conformes sur la sphère sont représentées par les fonctions analytiques d'une variable complexe

$$(A, 6) \quad Z = f(z) \quad \text{avec} \quad z = \cotg \frac{\theta}{2} e^{i\Phi}, \quad Z = \cotg \frac{{}^0 \theta}{2} e^{i{}^0 \Phi}.$$

Nous savons que les seuls automorphismes sur la sphère sont les homographies

$$(A, 7) \quad f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

où a, b, c, d sont des paramètres complexes que l'on peut supposer tels que $ad - bc = \pm 1$,

En différenciant (A-6) nous obtenons ${}^0 \theta_2$ et ${}^0 \Phi_2$ en fonction de f^* conjugué de f et f' . dérivée de f par rapport à z . Nous en déduisons :

$$(A, 8) \quad \frac{{}^0 \theta_2}{r} = \frac{\sin^2 \frac{{}^0 \theta}{2} (ff^* + 1)}{\sqrt{f'f'^*}}$$

Finalement en tenant compte de (A-7) dans (A-8) nous obtenons la forme de r^0

$$(A-9) \quad r^0 = A \cos \bar{\theta} + B \sin \bar{\theta} \cos \Phi + C \sin \bar{\theta} \sin \Phi + D,$$

où A, B, C, D sont quatre constantes réelles.

Nous vérifions de suite que C_0 et D_0 sont identiquement nuls si nous tenons compte de (A-9) dans (A-5).

(A-4) s'écrit donc

$$\begin{aligned} A\gamma_0^1 + B\delta_0^1 &= \frac{1}{\gamma_0^1} \\ -\varepsilon B\gamma_0^1 + \varepsilon A\delta_0^1 &= \frac{1}{\delta_0^1} \end{aligned}$$

Le déterminant $\begin{vmatrix} A & B \\ -B & A \end{vmatrix}$ est nul si et seulement si $A = B = 0$ c'est-à-dire si $\theta_2^0 = \phi_2^0 \sin \theta = 0$ ce qui est impossible d'après (5-3). On en déduit que $\gamma_0^1 = \delta_0^1 = 0$ est conservé dans un changement de coordonnées (T). Cette invariance entraîne le lemme du paragraphe 3.

REMERCIEMENTS

J'exprime mes vifs remerciements à M. A. Papapetrou, Directeur de Recherches, qui m'a proposé ce travail et qui m'a sans cesse guidée dans sa réalisation.

RÉFÉRENCES

- [1] I. MORET-BAILLY et A. PAPAPETROU, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, vol. VI, n° 3, 1967, p. 205.
- [2] H. BONDI, M. VAN DER BURG et A. METZNER, *Proc. Roy. Soc.*, t. A **269**, 1962, p. 21.
- [3] R. SACHS, *Proc. Roy. Soc.*, t. A **270**, 1962, p. 103.
- [4] E. NEWMAN et R. PENROSE, *J. Math. Phys.*, t. **3**, 1962, p. 566.
- [5] M. G. J. VAN DER BURG, *Proc. Roy. Soc.*, t. A **269**, p. 112.
- [6] A. LICHTNEROWICZ, *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*, Masson, Paris, 1955, p. 126.
- [7] A. PAPAPETROU, *J. Math. Phys.*, vol. 6, n° 9, 1965, p. 1405.

Manuscrit reçu le 19 juillet 1968.