

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

TRUNOG T. TUONG

## **Effet du mouvement de rotation sur les cavités électromagnétiques**

*Annales de l'I. H. P., section A*, tome 9, n° 3 (1968), p. 303-326

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPA\\_1968\\_\\_9\\_3\\_303\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1968__9_3_303_0)

© Gauthier-Villars, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## **Effet du mouvement de rotation sur les cavités électromagnétiques**

par

**TRUONG T. TUONG**

---

**RÉSUMÉ.** — Un calcul approché du champ électromagnétique dans les cavités dont le diélectrique est en mouvement de rotation relatif ou non par rapport à la cavité qui elle-même peut tourner ou non par rapport au repère inertiel, est fait sur la base des hypothèses de E. J. Post, A. Yildiz et C. Tang. Diverses conséquences théoriques sont extraites jusqu'au deuxième ordre par rapport à la vitesse de rotation.

---

### **I. INTRODUCTION**

1. Les cavités électromagnétiques ont eu un regain d'intérêt durant ces dernières années : l'attention est concentrée sur l'influence de la rotation sur le comportement du champ électromagnétique stationnaire dans une telle cavité, en particulier sur la possibilité de détecter les effets du second ordre de la rotation. Plusieurs auteurs ont tenté d'élaborer une théorie qui peut prévoir de telles conséquences. Nous ne ferons pas ici une énumération extensive de ces travaux. Notre but est seulement très limité; il consiste à reprendre les idées de Post-Yildiz et Tang [1] [2] sur la question et de mener les calculs jusqu'au deuxième ordre par rapport à la vitesse de rotation.

L'approximation du premier ordre s'est révélée adéquate pour expliquer les expériences faites dans le domaine optique, au début du siècle, rejoignant

les solutions « optiques » usuelles et les approximations faites par Post-Yildiz-Tang se trouvent être justifiées. La seconde approximation révèle une « structure fine » des fréquences de vibrations dans la cavité pourvu que l'on néglige la polarisation induite par le champ de forces sur le diélectrique. Un tel effet repose sur l'ensemble des hypothèses formulées par les auteurs cités, leur validité dépend des résultats expérimentaux. Cependant, les calculs ont été faits dans un domaine de rotation très large pour des longueurs d'ondes centimétriques ou millimétriques sans descendre jusque dans le domaine optique : nous pensons que moyennant une vitesse de rotation suffisamment grande, un effet du second ordre peut être facilement détectable qui confirmera ou infirmera les approximations faites, ainsi que les hypothèses de départ. Le problème des réalisations expérimentales ne sera pas soulevé ici.

Dans le modèle de Post-Yildiz-Tang, l'idée est d'introduire un traitement général de l'influence de la rotation sur le champ électromagnétique stationnaire dans un référentiel qui peut être en rotation uniforme ou non. Dans le cas où le référentiel est inertiel, c'est le milieu matériel en rotation uniforme qui sera le facteur perturbant. Dans le cas où l'on observe le champ électromagnétique dans le repère en rotation, le milieu matériel peut être en rotation relative ou non par rapport à ce repère. Il est donc naturel de rechercher une formulation covariante quadridimensionnelle des équations de Maxwell et des équations constitutives de la matière. Le couplage entre le champ électromagnétique et le milieu matériel se trouve donc décrit d'une manière covariante.

Mais il n'est pas suffisant de ne considérer que le champ électromagnétique et les propriétés constitutives de la matière d'une façon générale.

Nous ne connaissons pas justement les propriétés constitutives de la matière sous l'influence de la rotation. On peut diviser ces dernières en deux catégories : celles dues à une induction fictive à cause du mouvement relatif du repère par rapport au milieu matériel (propriétés cinématiques dont l'exemple le plus simple est la f.é.m. induite par le mouvement) celles dues au champ d'accélération qui change les propriétés physiques des vecteurs polarisation et magnétisation (par exemple symétrie cylindrique). Dans l'idée de Post-Yildiz-Tang, on écarte les propriétés de la deuxième catégorie. Cette hypothèse peut se justifier par l'argument suivant : on peut toujours choisir le diélectrique adéquat pour que de tels effets soient d'ordre supérieurs à ceux qu'on veut observer. Mais il est intéressant de noter que le choix contraire aurait pu être tout aussi riche de renseignements sur la rotation pourvu qu'un modèle mathématique du milieu matériel, qui sera probablement de nature statistique à l'image du modèle d'Ising pour le

ferromagnétisme soit connu dans un repère inertiel. Post-Yildiz-Tang, postulant donc la covariance générale, sont donc amenés à la conclusion suivante : négligeant les effets physiques, il existe une relation, ou plus exactement, une transformation biunivoque entre les quantités physiques existant dans les deux repères. La covariance exige que de telles quantités soient de nature tensorielle, la transformation cherchée est une transformation des champs du tenseur définie sur deux espaces physiques différents. Si donc on connaît une telle transformation connaissant les quantités dans un repère, on peut connaître la même quantité dans l'autre repère et jouant sur la covariance on peut résoudre les équations de Maxwell dans ce repère et trouver le comportement du champ stationnaire.

Nous arrivons maintenant à un point important qui est la recherche de cette transformation qu'on doit définir comme une application difféomorphique entre deux espaces de métriques différentes; l'un d'eux étant l'espace minkowskien de la Relativité Restreinte. Il existe différentes méthodes pour rechercher une telle application. La plus ancienne a été celle de Langevin [4] qui fait usage du repère inertiel instantané; divers auteurs de la Relativité Générale ont utilisé le même argument pour déduire une « métrique du disque tournant ». Nous ne ferons pas ici une étude critique de ces méthodes. Post-Yildiz-Tang simplement postulent, avec une réserve prudente, que la première approximation d'une telle application, c'est-à-dire n'englobant que le terme en  $\Omega$ , la vitesse de rotation uniforme, est une rotation galiléenne, c'est-à-dire où le temps est conservé.

Dans une étude récente [4] sur les fondements opérationnels de la Relativité Générale, M. Saul A. Basri a montré que, dans le cadre des équations d'Einstein, il est possible de déterminer la métrique du disque tournant sans avoir recours à d'autres hypothèses que les principes fondamentaux de la mesure spatiale et temporelle. Il a montré d'autre part, que la transformation cherchée : passage du repère en rotation au repère inertiel est simplement la rotation galiléenne qui est postulée par Post-Yildiz-Tang. Nous pensons ici qu'une telle justification théorique est suffisante pour appuyer le traitement de Post-Yildiz-Tang. Les conséquences qu'on peut tirer de tout cela seront confirmées ou infirmées par l'expérience.

D'autre part, que peut-on dire du couplage matière-champ d'accélération ? Un tel couplage n'est certainement pas nul, rigoureusement parlant, mais il est d'ordre gravitationnel donc infiniment petit par rapport aux observables, dont nous nous proposons de faire une évaluation. La contribution du champ électromagnétique au champ gravitationnel est aussi négligeable; elle est de même nature que le couplage matière-champ d'accélération.

2. Ayant donc défini le contexte général du problème, nous allons rappeler les principaux résultats obtenus par Post-Yildiz-Tang avant de présenter une solution des équations qu'ils ont obtenue. L'esprit général de cette étude n'est pas une étude mathématique rigoureuse de l'influence mutuelle des trois quantités physiques : champ d'accélération, champ électromagnétique et milieu matériel. Mais c'est uniquement un essai d'évaluation des effets observables aux grandes vitesses de rotation dans l'utilisation des cavités électromagnétiques ordinaires.

Post [2] avait découvert que l'on peut écrire les équations de Maxwell en n'utilisant que des dérivées ordinaires pourvu que l'on traite le tenseur  $F_{\lambda\nu}(\vec{E}, \vec{B})$  comme un tenseur antisymétrique,  $\mathfrak{G}^{\lambda\nu}(\vec{D}, \vec{H})$  comme un pseudotenseur antisymétrique de poids 1. En effet, si l'on se restreint aux métriques riemaniennes, ce qui est le cas de la Relativité Générale, les coefficients de Christoffel s'annulent avec ces hypothèses. Post appelle cette représentation l'invariance naturelle des équations de Maxwell. Pour un champ libre, en l'absence des sources, on peut donc écrire

$$(I, 1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_{[\kappa} F_{\lambda\nu]} = 0 \\ \partial_{\nu} \mathfrak{G}^{\lambda\nu} = 0. \end{array} \right. \quad [ ] : \text{antisymétrisation.}$$

Cette formulation a l'avantage de traiter le vide sur le même pied d'égalité que le milieu matériel, car les équations du champ se séparent des relations constitutives de la matière.

Le milieu matériel dans un repère inertiel est représenté par le tenseur constitutif  $\chi^{\lambda\rho\nu\kappa}$  qui doit avoir les propriétés de symétrie liée à la symétrie des tenseurs  $F_{\lambda\nu}$  et  $\mathfrak{G}^{\lambda\nu}$ . En effet, Post montre que l'on peut écrire

$$(I, 2) \quad \mathfrak{G}^{\lambda\nu} = 1/2 \chi^{\lambda\nu\sigma\kappa} F_{\sigma\kappa}$$

$\chi^{\lambda\nu\sigma\kappa}$  obéit aux relations de symétrie suivante :

$$(I, 3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \chi^{\lambda\nu\sigma\kappa} = -\chi^{\nu\lambda\sigma\kappa} = -\chi^{\lambda\nu\kappa\sigma} = \chi^{\sigma\kappa\lambda\nu} \\ \chi^{[\lambda\nu\sigma\kappa]} = 0 \end{array} \right.$$

et se comporte comme une densité tensorielle contravariante de poids + 1

$$(I', 4) \quad \chi^{\lambda'\sigma'\nu'\kappa'} = |\Delta|^{-1} A_{\lambda}^{\lambda'} A_{\sigma}^{\sigma'} A_{\nu}^{\nu'} A_{\kappa}^{\kappa'} \chi^{\lambda\sigma\nu\kappa}$$

Une telle relation implique donc linéarité de l'interaction entre le champ et la matière. Il faut ajouter aussi que nous nous restreignons aux interactions instantanées et locales.

Yildiz-Tang sont partis de ce modèle de la matière et de la formulation invariante naturelle de Post en introduisant les idées suivantes : pour

résoudre le problème. Il est évident que l'on ne connaît que  $\chi^{\lambda\nu\sigma\kappa}$  dans un repère inertiel. Supposant donc que la notion de corps solide rigide se maintienne encore dans un univers non euclidien qu'en particulier que les parois de la cavité que l'on considère ne soient pas déformées par la rotation, on peut user de la covariance pour écrire les mêmes conditions aux limites pour une paroi infiniment conductrice. En d'autres termes, Yildiz-Tang admettant l'existence de la rigidité dans un repère arbitraire, postulent la covariance des conditions aux limites.

La seconde idée est de séparer la part due à la matière de la part due au vide dans le tenseur constitutif et d'appliquer la transformation à la partie affectée par la rotation par rapport au repère que l'on considère. Trois cas sont donc possibles; ils sont expliqués en détail par Yildiz et Tang dans leur travail, ainsi que par Post dans son article sur l'Effet Sagnac [3].

Utilisant donc les coordonnées cylindriques qui sont appropriées dans ce cas où la symétrie axiale est évidente, la matrice  $A_{\lambda}^{\lambda'}$  est la suivante, les formules du changement de coordonnées sont :

$$(I, 5) \quad r' = r \quad z' = z \quad t' = t \quad \psi' = \psi + \Omega t$$

$$A_{\lambda}^{\lambda'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Omega \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det |A_{\lambda}^{\lambda'}| = 1$$

Dans un repère inertiel, les composantes du tenseur constitutif sont séparément (vide et matière)

$$(I, 6) \quad \chi_0^{\lambda\nu\sigma\kappa} \begin{cases} \chi_0^{0101} = \chi_0^{0303} = -r\varepsilon_0 & \chi_0^{0202} = -\frac{\varepsilon_0}{r} \\ \chi_0^{2323} = \chi_0^{1212} = \frac{1}{\mu_0 r} & \chi_0^{3131} = r/\mu_0 \end{cases}$$

$$\chi_m^{\lambda\nu\sigma\kappa} \begin{cases} \chi_m^{0101} = \chi_m^{0303} = -r\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1) & \chi_m^{0202} = -\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)/r \\ \chi_m^{2323} = \chi_m^{1212} = \frac{1 - \mu_r}{\mu_0 \mu_r r} & \chi_m^{3131} = r \frac{1 - \mu_r}{\mu_0 \mu_r} \end{cases}$$

L'effet de la rotation est d'ajouter une composante supplémentaire

$$(I, 6') \quad \chi_r^{\lambda\nu\sigma\kappa} \begin{cases} \chi_r^{0112} = \chi_r^{1201} = \Omega r \varepsilon' \\ \chi_r^{0323} = \chi_r^{2303} = -\Omega r \varepsilon' \\ \chi_r^{2323} = \chi_r^{1212} = -\Omega^2 r \varepsilon' \end{cases}$$

$\varepsilon' = \varepsilon$ . Lorsqu'on observe le champ dans le repère en rotation par rapport auquel la cavité reste fixe, le milieu matériel reste fixe dans le repère inertiel (expérience de Dufour-Prunier).

$\varepsilon' = \varepsilon_0$ . Lorsqu'on observe le champ dans le repère en rotation la cavité y étant fixée, cette fois le milieu est au repos dans le repère en rotation (expérience de Harras-Pogany).

$\varepsilon' = (\varepsilon - \varepsilon_0)$ . Lorsqu'on observe le champ dans le repère inertiel et lorsque le milieu matériel est en rotation par rapport au repère d'observation.

On peut s'attendre aux effets purs des surfaces limites en rotation si, dans le dernier cas, on laisse le milieu stationnaire dans le repère d'observation. Un tel cas n'est pas traité ici; il est à noter que la surface de discontinuité devient ici une double discontinuité électromagnétique et mécanique, il est difficile de se donner un modèle réel qui peut décrire les phénomènes physiques.

3. A présent, nous sommes en mesure d'écrire explicitement les équations du champ dans une cavité. Les composantes des tenseurs  $F_{\lambda\nu}$  et  $\mathfrak{G}^{\lambda\nu}$  sont

$$(F_{\lambda\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & F_{32} & F_{31} & F_{30} \\ F_{23} & 0 & F_{21} & F_{20} \\ F_{13} & F_{12} & 0 & F_{10} \\ F_{03} & F_{02} & F_{01} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_\psi & E_r \\ -B_z & 0 & B_r & E_\psi \\ B_\psi & -B_r & 0 & E_z \\ -E_r & -E_\psi & -E_z & 0 \end{pmatrix}$$

(I, 7)

$$(\mathfrak{G}^{\lambda\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{G}^{32} & \mathfrak{G}^{31} & \mathfrak{G}^{30} \\ \mathfrak{G}^{23} & 0 & \mathfrak{G}^{21} & \mathfrak{G}^{20} \\ \mathfrak{G}^{13} & \mathfrak{G}^{12} & 0 & \mathfrak{G}^{10} \\ \mathfrak{G}^{03} & \mathfrak{G}^{02} & \mathfrak{G}^{01} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -H_z & H_\psi & -D_r \\ H_z & 0 & -H_r & -D_\psi \\ -H_\psi & H_r & 0 & -D_z \\ D_r & D_\psi & D_z & 0 \end{pmatrix}$$

Les équations du champ et les équations constitutives sous leur forme tensorielle sont les suivantes :

$$(I, 8) \quad \partial_{[\kappa} F_{\lambda\nu]} = 0 \quad ; \quad \partial_\nu \mathfrak{G}^{\lambda\nu} = 0 \quad ; \quad \mathfrak{G}^{\lambda\nu} = 1/2 (\chi_0^{\lambda\nu\sigma\kappa} + \chi_m^{\lambda\nu\sigma\kappa} + \chi_r^{\lambda\nu\sigma\kappa}) F_{\sigma\kappa}$$

avec

$$\partial_0 = \partial_t \quad \partial_1 = \partial_z \quad \partial_2 = \partial_\psi \quad \partial_3 = \partial_r.$$

On obtient (voir Yildiz-Tang [I]) :

$$\begin{aligned}
 \partial_r B_r + \partial_\psi \partial_\psi + \partial_z B_z = 0 \quad 0 = \quad & \partial_z(\varepsilon r E_z - \Omega r \varepsilon' B_r) + \partial_\psi \frac{\varepsilon}{r} E_\psi + \partial_r \\
 & + \partial_r(\varepsilon r E_s + \Omega r \varepsilon' B_z) \\
 \partial_\psi E_z - \partial_z E_\psi + \partial_t B_r = 0 \quad 0 = \quad & -\partial_t(\varepsilon r E_z - \Omega r \varepsilon' B_r) + \partial_\psi \\
 & \left[ -\frac{1}{\mu r} B_r - \Omega r \varepsilon'(E_z - \Omega B_r) \right] - \partial_r \frac{r}{\mu} B_\psi \\
 \text{(I, 9)} \quad -\partial_z E_r - \partial_t B_\psi + \partial_r E_z = 0 \quad 0 = \quad & -\partial_t \frac{\varepsilon}{r} E_\psi - \partial_z \left[ -\frac{B_r}{\mu r} - \Omega r \varepsilon'(E_z - \Omega B_r) \right] \\
 & - \partial_r \left[ -\frac{1}{\mu r} B_z + \Omega r \varepsilon'(E_r + \Omega B_z) \right] \\
 \partial_t B_z + \partial_r E_\psi - \partial_\psi E_t = 0 \quad 0 = \quad & \partial_t(\varepsilon r E_r + \Omega r \varepsilon' B_z) + \partial_z \frac{r}{\mu} B_\psi + \partial_\psi \\
 & \left[ -\frac{1}{\mu r} B_z + \Omega r \varepsilon'(E_r - \Omega B_z) \right]
 \end{aligned}$$

Ces 8 équations ne sont pas indépendantes : deux d'entre elles sont des combinaisons linéaires des 6 autres.

Le champ recherché est un champ stationnaire; il est donc invariant dans le choix d'une origine angulaire  $\psi_0$ , d'une origine axiale  $z_0$  et d'une origine temporelle : chaque composante du champ est donc proportionnelle au facteur  $e^{i(n\psi + hz - \omega t)}$ . Seule la dépendance radiale sera déterminée par les équations où l'on a fait la substitution

$$\partial_t \rightarrow -i\omega \quad \partial_z \rightarrow ih \quad \partial_\psi \rightarrow in$$

En éliminant de proche en proche les composantes  $E_r$ ,  $B_r$ ,  $E_\psi$ ,  $B_\psi$  on aboutit au système suivant :

$$\text{(I, 10a)} \quad \begin{cases} \frac{d^2 B_z}{dr^2} \frac{B_z}{r} + \alpha_1 \frac{d B_z}{dr} \frac{B_z}{r} + \beta_1 \frac{d E_z}{dr} + \gamma_1 \frac{B_z}{r} + \delta_1 E_z = 0 \\ \frac{d^2 E_z}{dr^2} + \alpha_2 \frac{d E_z}{dr} + \beta_2 \frac{d B_z}{dr} \frac{B_z}{r} + \gamma_2 E_z + \delta_2 \frac{B_z}{r} = 0 \end{cases}$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{r} \left[ 1 - \frac{2ar^2}{1-ar^2} \left( 1 - \frac{\mu\varepsilon\omega^2(1-b)}{\Delta_2} \right) \right] \quad \alpha_2 = 1/r$$

$$\beta_1 = \frac{nh}{i\omega} \frac{ar}{1-ar^2} \frac{\mu\varepsilon\omega^2(1-b)}{\Delta_1} \quad \beta_2 = -\frac{ih\omega}{n} ar^3 \frac{1}{\Delta_2} \left( \frac{n^2}{r^2} + nc \right)$$

$$\gamma_1 = \frac{-1}{1-ar^2} \left[ \Delta_2 + \left( \frac{n^2}{r^2} + nc \right) \frac{\Delta_2}{\Delta_1} + 4a \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \right] \quad \gamma_2 = - \left[ \Delta_1 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \left( \frac{n^2}{r^2} + nc \right) \right]$$

$$\delta_1 = \frac{nh}{i\omega} \frac{2a}{1-ar^2} \frac{\mu\varepsilon\omega^2(1-b)}{\Delta_2} \quad \delta_2 = \frac{2ih}{\mu\varepsilon\omega(1-b)} \frac{1}{\Delta_2} \left[ \Delta_1(na+c) - c\mu\varepsilon\omega^2(1-b)ar^2 \right]$$



$$\begin{aligned} \Delta_1 &= h^2 - \mu\varepsilon\omega^2(1-b) & \Delta_1 &= \Delta_2 - h^2ar^2 \\ a &= \Omega^2\mu\varepsilon' \left(1 + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right) & b &= \frac{\Omega n \varepsilon'}{\omega \varepsilon} & c &= \Omega\omega\mu\varepsilon' \left(1 - \frac{\Omega n}{\omega}\right) \end{aligned}$$

$$(I, 10b) \quad \left\{ \begin{aligned} E_r &= \frac{1}{\Delta_1} \left[ -ih \frac{d}{dr} E_z + \frac{\omega}{n} \left( \frac{n^2}{r^2} + nc \right) B_z \right] \\ B_r &= \frac{1}{\Delta_2} \left[ -\mu\varepsilon\omega(1-b) \frac{n}{r} E_z - ih(1-ar^2) \frac{d}{dr} \frac{B_z}{r} + 2rhai \frac{B_z}{r} \right] \\ E_\psi &= \frac{1}{\Delta_2} \left[ (1-ar^2) \left( nhE_z + i\omega \frac{d}{dr} \frac{B_z}{r} \right) - 2ia\omega r^2 \frac{B_z}{r} \right] \\ B_\psi &= \frac{1}{\Delta_1} \left[ -i\omega\mu\varepsilon(1-b) \frac{d}{dr} E_z + \frac{B_z}{r} (n-cr^2) \frac{h}{r} \right] \end{aligned} \right.$$

Yildiz et Tang ont dégagé ce couplage particulier dû à la rotation du champ électrique au champ magnétique. Diverses solutions obtenues dans des cas particuliers ( $h = 0$ ,  $\frac{d}{dr} = 0$  ou approximation optique) sont mentionnées dans leur travail. E. J. Post n'a pas résolu le système des équations de Maxwell mais partant des mêmes hypothèses, il a résolu l'équation d'ondes dans l'approximation optique. Aussi, les coefficients de couplage apparaissent comme des fonctions rationnelles du rayon  $r$ . Tous les termes ne jouent certainement pas le même rôle. Si nous nous cantonnons dans le domaine des microondes, pour les vitesses de rotation envisageables maintenant et pour une dimension de cavités raisonnables (interférence à 1 m de diamètre), le terme petit sans dimension qui apparaît comme infiniment petit naturel est  $ar^2$ . Notre méthode est de développer les coefficients en  $ar^2$ , puis de résoudre les équations par une méthode de perturbation. Deux approximations seront faites, les expressions du champ sont calculables jusqu'au deuxième ordre, ainsi que l'allure des fréquences d'oscillation pour un mode donné. Le développement des coefficients donne :

$$(I, 11a) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{r} - ar^2 \left[ \frac{2}{r} \left( 1 - \frac{\mu\varepsilon\omega^2(1-b)}{\Delta_2} \right) \right] + \dots \\ \beta_1 &= ar^2 \left[ \frac{nh}{i\omega r} \mu\varepsilon\omega^2(1-b) \right] + \dots \\ \gamma_1 &= \left( -\Delta_1 - nc - \frac{n^2}{r^2} \right) + ar^2 \left[ \left( \mu\varepsilon\omega^2(1-b) \left( 1 + \frac{nc}{\Delta_1} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{r^2} \left( \frac{n^2\mu\varepsilon\omega^2(1-b)}{\Delta_1} - 4 \right) \right) \right] \\ \delta_1 &= ar^2 \left[ \frac{hn}{i\omega r^2} \frac{\mu\varepsilon\omega^2(1-b)}{\Delta_1} \right] + \dots \end{aligned} \right.$$

$$(I, 11b) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 = 1/r \\ \beta_2 = ar^2 \frac{i\omega}{n} \left[ \frac{hr}{\Delta_1} \left( \frac{n^2}{r^2} + nc \right) \right] + \dots \\ \gamma_2 = \left( -\Delta_1 - nc - \frac{n^2}{r^2} \right) - ar^2 \left( \frac{n^2}{r^2} + nc \right) \frac{h^2}{\Delta_1} + \dots \\ \delta_1 = \frac{2ihc}{\mu\epsilon\omega(1-b)} + ar^2 \left[ \frac{2ihc}{\mu\epsilon\omega(1-b)} \frac{h^2}{\Delta_1} \frac{2ihn}{\mu\epsilon\omega(1-b)r^2} - \frac{2ihc\omega}{\Delta_1} \right] + \dots \end{array} \right.$$

## II. APPROXIMATION DU PREMIER ORDRE

1. Le rôle du repère non inertielle apparaît clairement dans cette approximation. L'effet est de nature purement cinématique, on peut la rapprocher avec les effets de la transformation de Lorentz faite au premier ordre par rapport à  $\beta$ , le rapport de la vitesse linéaire et de la vitesse de la lumière dans le vide sur le champ électromagnétique. Mais si les effets sont symétriques pour la transformation de Lorentz, ils ne le sont plus pour le cas de la rotation. Ce résultat n'est pas encore confirmé par l'expérience, auquel cas nous serions fixés sur la validité de cette « rotation galiléenne » dans le vocabulaire de Post-Yildiz-Tang. Le fait que nous obtenons une réponse en accord avec l'expérience quant aux fréquences de vibration n'est pas une confirmation suffisante. Le développement suivant a pour objet de décrire le champ électromagnétique modifié par la rotation au premier ordre.

Les équations de Yildiz-Post-Tang se réduisent à la forme suivante :

$$(II, 1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2}{dr^2} \frac{B_z}{r} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \frac{B_z}{r} + \left( m_1^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) \frac{B_z}{r} = 0 \\ \left( \frac{d^2}{dr^2} E_z + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} E_z + \left( m_1^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) E_z \right) = \frac{2ihc}{i\mu\epsilon\omega(1-b)} \cdot \frac{B_z}{r} \\ m_1^2 = \mu\epsilon\omega^2(1 - \epsilon'/\epsilon) - h^2 - \mu\epsilon'(\omega - \Omega n)^2. \end{array} \right.$$

Nous remarquons que le couplage du premier ordre n'est pas symétrique, que le champ axial électrique ne contribue pas à une modification spatiale du champ axial magnétique, alors que ce dernier figure au deuxième membre de l'équation en  $E_z$ . Les autres composantes peuvent être calculées à partir de  $E_z$  et de  $\frac{B_z}{r}$  avec les formules générales : elles montrent qu'en général, l'altération due à la rotation peut être calculée explicitement. *Il est intéres-*

sant de noter que la nature « *besselienn*e » du champ reste, ce fait est dû à la petitesse de la fréquence de rotation par rapport à la fréquence de vibration de la cavité.

Nous pouvons écrire explicitement les expressions du champ.

$$(II, 2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{B_z}{r} = pI_n(m_1 r) + qN_n(m_1 r) \\ E_z = p'I_n(m_1 r) + q'N_n(m_1 r) \\ \quad \quad \quad - \frac{2thc}{\mu\epsilon\omega(1-b)} \int_{R_1}^{R_2} \mathfrak{G}(m_1 r_1 m_1 r') i p I_n + q N_n dr' \end{array} \right.$$

$\mathfrak{G}$  étant la fonction de Green de l'opérateur de Bessel de paramètre  $m_1$ .

$$(II, 3) \quad \mathfrak{G} = \mathfrak{G}(r, r') = -\frac{1}{\Delta_n(r')} [Y(r-r')N_n(r')J_n(r) + Y(r'-r)J_n(r)r'N_n(r)]$$

Remarquons que

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_n(r) = \text{Wronskien de } I_n \text{ et } N_n \\ Y(r-r') = \begin{cases} 1 & \text{pour } r > r' \\ 0 & \text{pour } r < r' \end{cases} \end{array} \right.$$

2 modes de vibrations sont possibles : on peut choisir  $p, q = 0$  et retrouver le mode magnétique des cavités stationnaires, ou prendre  $q, p \neq 0$  un mode mixte qui n'existe pas dans le cas stationnaire.

Nous pouvons écrire maintenant les conditions aux limites dans le référentiel où sont calculés  $\frac{B_z}{r}, E_z$ . Nous considérons ici une configuration cylindrique limitée par deux cylindres de rayons  $R_1, R_2$ , alors :

$$(II, 4) \quad \left. \frac{d}{dr} \frac{B_z}{r} \right|_{r=R_1, R_2} = 0 \quad \text{et} \quad E_z \Big|_{r=R_1, R_2} = 0.$$

Ces quatre conditions donnent quatre équations homogènes en  $p, q, p', q'$ . Toute solution non triviale est obtenue si le déterminant du système est nul. *L'annulation d'un tel déterminant est une équation transcendante dont l'inconnu est  $m_1$ .* Soit  $\{x_K\}$  l'ensemble des racines de cette équation. Le choix de  $K$ , de  $h$  et de  $n$  constitue le choix d'un mode de vibration de la cavité. Mais si ce choix même a une valeur unique de la fréquence (en module) de vibration dans le cas des cavités ordinaires, on observe un dédoublement de la fréquence à cause de la rotation.

Écrivant que  $m_1 = x_k$  nous avons la relation suivante :

$$(II, 5a) \quad m_1^2 = \mu\epsilon\omega^2(1 - \epsilon'/\epsilon) - h^2 + \mu\epsilon'(\omega - \Omega n)^2 = x_k^2.$$

Posant

$$(II, 5b) \quad \begin{cases} \omega_k^2 = \frac{x_k^2 + h^2}{\mu\epsilon} \\ \omega'^2 = (\omega - \Omega\omega)^2 \end{cases}$$

on a :

$$(II, 5c) \quad (1 - \epsilon'/\epsilon)\omega^2 + \frac{\epsilon'}{\epsilon}\omega'^2 = \omega_k^2.$$

Dans le plan  $(\omega, \omega')$ , c'est l'équation d'une conique dégénérée ou non.

$$(II, 6a) \quad \epsilon' < \epsilon \quad \frac{\omega^2}{\omega_k^2 \left( \frac{1}{1 - \epsilon'/\epsilon} \right)} + \frac{\omega'^2}{\omega_k^2 \frac{\epsilon}{\epsilon'}} = 1 \quad (\text{ellipse})$$

$$(II, 6b) \quad \epsilon' > \epsilon \quad - \frac{\omega^2}{\omega_k^2 \left( \frac{1}{\epsilon'/\epsilon - 1} \right)} + \frac{\omega'^2}{\omega_k^2 \frac{\epsilon}{\epsilon'}} = 1 \quad (\text{hyperbole})$$

$$(II, 6c) \quad \epsilon = \epsilon' \quad \omega'^2 = \omega_k^2 \quad (2 \text{ droites})$$

Connaissant les courbes de dispersion  $(\omega', \omega)$ , nous pouvons construire  $(\omega, \Omega n)$  en utilisant les relations précédentes. Mais il ne faut retenir que  $|\omega|$  car c'est la seule quantité sensible au détecteur de fréquence. Pour  $\Omega < 0$ , le phénomène est identique, le sens de la rotation ne change pas le phénomène. Pour chaque  $\Omega n$ , il existe donc deux fréquences de vibration; la différence est

$$(II, 7a) \quad \omega_{1,2} = \epsilon'/\epsilon\Omega n \pm \sqrt{(\epsilon'/\epsilon\Omega n)^2 + (\omega_k^2 - \epsilon'/\epsilon\Omega^2 n^2)}$$

$$(II, 7b) \quad \Delta\omega = |\omega_1 + \omega_2| = 2\epsilon'/\epsilon\Omega n$$

indépendante des nombres d'ondes axial et radial, ce qui veut dire que les conditions aux limites dans la direction radiale et axiale n'interviennent pas. Seul le nombre d'ondes azimutal compte. Nous retrouvons ici la solution optique de Yildiz-Tang [1] et « l'effet Zeeman des photons de C. V. Heer » [5].

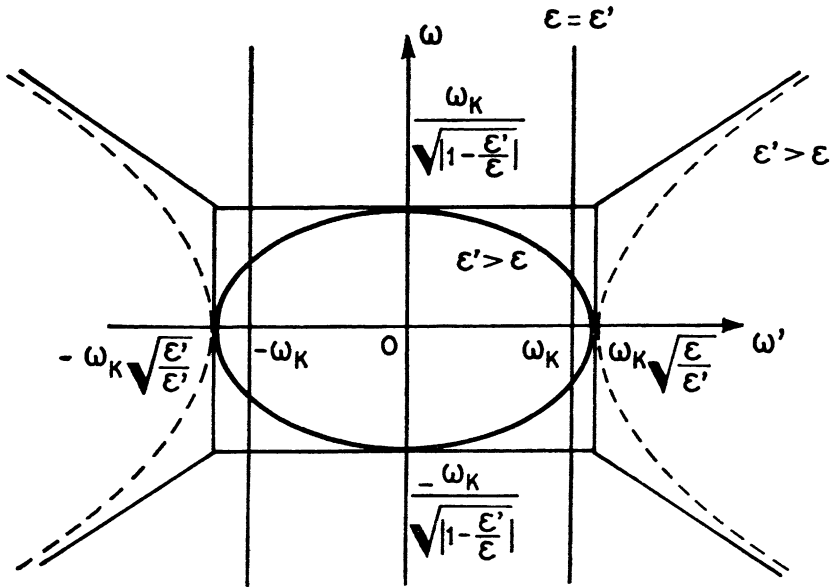


FIG. 1. — Courbes de dispersion avec le changement de variable  $\omega^{2'} = (\omega - \Omega n)^2$ .

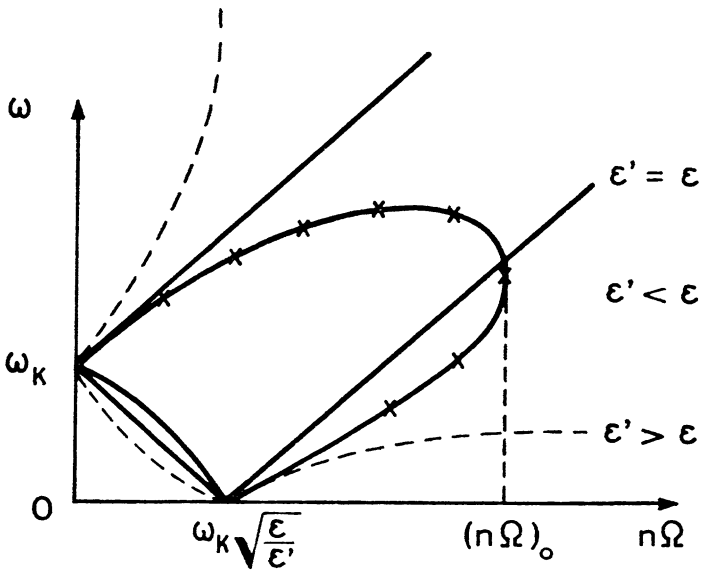


FIG. 2. — Allure des courbes de dispersion pour la première approximation.

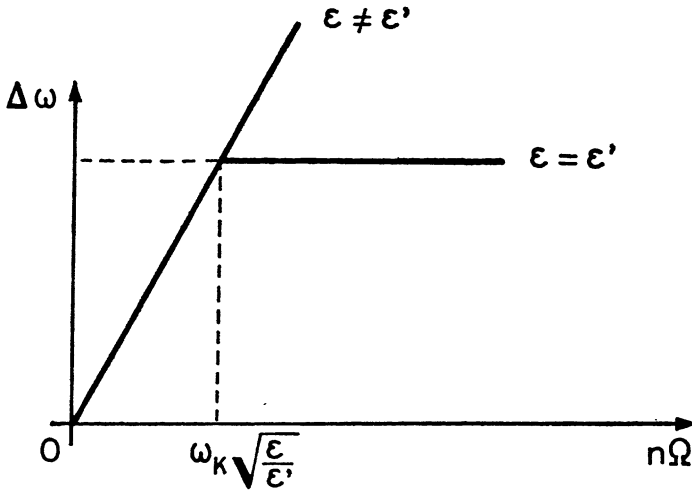


FIG. 3. — Courbes de battement des fréquences dans la première approximation.

2. Le résultat des expériences optiques a été expliqué par cette relation par ces auteurs et plus récemment par E. J. Post [3] : le rapport  $\epsilon'/\epsilon$  décrit le mouvement de la matière par rapport au référentiel fixe. La séparation des fréquences  $\Delta\omega$  est, en outre, linéaire par rapport à  $n\Omega$ . Les expériences de Macek [6] avec un laser confirme ce résultat : à noter que pour les expériences optiques,  $n$  est très élevé et  $\Omega$  est faible; mais on peut fort bien concevoir des expériences avec des ondes très courtes millimétriques ou centimétriques pour lesquelles il est nécessaire d'utiliser de très grandes vitesses de rotation; nous pouvons voir, d'autre part, que le nombre  $n$  est déterminé par les conditions d'excitation de la cavité.

Ce résultat obtenu par les équations de Yildiz-Tang-Post montre d'autre part que la *séparation des fréquences est due uniquement aux conditions aux limites*. L'interprétation usuelle basée sur la différence de chemin optique paraît être en défaut ici, puisque logiquement en prenant une cavité toroïdale de section méridienne rectangulaire et en y mettant une membrane méridienne infiniment conductrice, on obtient la même séparation des fréquences sans que l'onde propageant dans le sens de la rotation et l'onde propageant dans le sens contraire n'interfèrent pour donner lieu à une différence de marche. Dans l'optique de Post-Yildiz-Tang, seule une onde stationnaire vibrant sur deux fréquences différentes est observable à cause des conditions aux limites.

Jusqu'ici on ne connaît pas d'autres expériences qui soient capables

de décrire les effets autres que ceux du premier ordre. Le traitement covariant des équations de Maxwell semble être le moyen le plus plausible pour explorer les effets de la rotation.

Nous constatons, d'autre part, que pour  $\varepsilon = \varepsilon'$ , la solution obtenue avec l'approximation du premier ordre devient la solution rigoureuse. Le milieu n'induit pas d'autre effet que l'effet cinématique, car nous avons négligé tout effet dynamique sur le milieu matériel; cette hypothèse simplificatrice peut ne plus être exact pour certains matériaux dont la polarisabilité est hautement sensible à un champ de forces appliquées. Il n'existe donc pas d'effet du second ordre lorsque la matière est immobile dans le repère où l'on observe les phénomènes, compte tenu de la simplification admise. La séparation des fréquences reste constante après une certaine limite  $\Omega n = \omega_0$ . C'est un fait remarquable qui reste à être vérifié par l'expérience.

3. En conclusion de l'étude, au premier ordre, nous pouvons dire :

— L'hypothèse de Post-Yildiz-Tang mène à une concordance avec l'expérience quant à la séparation des fréquences. Cette seule quantité observable sous la forme d'un battement entre deux fréquences dépend linéairement de la fréquence de rotation et aussi de cette fréquence apparente  $n\Omega$  produit du nombre d'onde azimutal et de la fréquence de rotation.

— La covariance semble être le cadre correct pour résoudre le problème des conditions aux limites pour une frontière mouvante.

— La rotation galiléenne semble être une première approximation de la transformation qui relie l'univers inertiel à l'univers du repère en rotation.

— Il n'existe pas de fréquence propre au champ magnétique ou de fréquence propre au champ électrique. Tous deux oscillent sur deux fréquences différentes au niveau de la première approximation; on ne peut dire laquelle est celle du champ électrique et laquelle est celle du champ magnétique.

### III. DEUXIÈME APPROXIMATION

1. Dans cette partie, le rôle du milieu matériel en mouvement est mis en évidence. En effet, pour  $\varepsilon \neq \varepsilon'$ ,  $\alpha = \Omega^2 \mu \varepsilon' (1 - \varepsilon'/\varepsilon)$  est différent de zéro et l'on peut inclure dans le développement des coefficients  $\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2 \gamma_1 \gamma_2 \delta_1 \delta_2$  les termes en  $ar^2$ . On s'attend ainsi à des effets du second ordre par rapport à  $\Omega$ , effets qui sont certainement dépendants des nombres

d'ondes azimutal et axial. Nous verrons que le paramètre naturel qui s'impose est le rapport  $\frac{\Omega n}{\omega}$ ; cela pour deux raisons : en prenant un terme de plus dans l'expression des coefficients, aucun changement majeur discontinu n'est possible à cause des fonctions simples différentiables, mais de petites altérations telles que de petites modifications dans le comportement du champ et de petites variations des courbes de dispersion sont seules envisageables. Il est donc naturel de considérer ce qui se passe au voisinage de l'approximation d'ordre 1 vis-à-vis d'un paramètre qui est le rapport  $\frac{\Omega n}{\omega}$ ; le choix d'un tel paramètre est évidemment motivé par le désir d'étudier l'effet du second ordre sur les courbes de dispersion. Notre but est de montrer que, dans le cadre des hypothèses admises, un effet du second ordre est observable.

La matière telle que nous l'avons supposée reste le siège d'un champ de polarisation et de magnétisation proportionnelle au champ appliqué; nous avons négligé les effets dynamiques issus du champ de forces valides qui sont peut-être du second ordre par rapport à la rotation; nous avons écarté également les phénomènes d'absorption possibles par la matière. On peut toujours admettre que le choix du diélectrique puisque seul 2 semble jouer un rôle dominant ici, est tel que ces effets parasites qui, dans certains cas peuvent être exaltés sans doute, n'existent pas, ce qui simplifie énormément les calculs approximatifs que voici.

2. Nous distinguons donc 2 cas selon que  $\frac{\Omega n}{\omega} \leq 1$  : ce qui correspond aux points intéressants des courbes de dispersion, à savoir les points de contact avec les axes ( $\omega\omega$ ,  $\omega\Omega$ ). Pour  $\frac{\Omega n}{\omega} < 1$ , on a les coefficients suivants :

$$(III, 1ab) \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = 1/r + \left[ -2ar^2 \left( 2 + \frac{h^2}{m^2} \right) \right] \frac{1}{r} \\ \beta_1 = -ar^2 \frac{nh}{i\omega r} \left( 1 + \frac{h^2}{m^2} \right) \\ \gamma_1 = \left[ \left( m_1^2 - \frac{ah^2n^2}{m^2} \right) - (n^2 + 4)a - \frac{n^2}{r^2} \right] \\ \delta_1 = -\frac{ahn}{i\omega} \left( 1 + \frac{h^2}{m^2} \right) \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 = 1/r \\ \beta_2 = -ar \frac{i\omega hn}{m^2} \\ \gamma_2 = \left[ \left( m_1^2 - \frac{ah^2n^2}{m^2} \right) - \frac{n^2}{r^2} \right] \\ \delta_2 = \frac{2ihc}{\mu\epsilon\omega(1-b)} + a \frac{2ihn}{\mu\epsilon\omega} \end{array} \right.$$



$$(III, 2) \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2}{dr^2} \frac{B_z}{r} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \frac{B_z}{r} + \left( m_{2B}^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) \frac{B_z}{r} - 2ar \left( 2 + \frac{h^2}{m^2} \right) \frac{d}{dr} \frac{B_z}{r} - ar^2 \mu \varepsilon \omega^2 \frac{B_z}{r} \\ - ar \frac{nh}{i\omega} \left( 1 + \frac{h^2}{m^2} \right) \frac{d}{dr} E_z - \frac{ahn}{i\omega} \left( 1 + \frac{h^2}{m^2} \right) E_z = 0 \\ \frac{d^2}{dr^2} E_z + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} E_z + \left( m_{2E}^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) E_z \\ - ar \frac{i\omega hn}{m^2} \frac{d}{dr} \frac{B_z}{r} + \left( \frac{2ihc}{\mu \varepsilon \omega (1-b)} + \frac{2aih n}{\mu \varepsilon \omega} \right) \frac{B_z}{r} = 0 \end{aligned} \right.$$

$$(III, 3) \text{ Avec } \left\{ \begin{aligned} m^2 &= \mu \varepsilon \omega^2 - h^2 \quad \text{et} \quad m_1^2 = \mu \varepsilon \omega^2 (1 - \varepsilon'/\varepsilon) - h^2 + \mu \varepsilon' (\omega - \Omega n)^2 \\ m_{2B}^2 &= m_1^2 - a \frac{h^2 n^2}{m^2} \\ m_{2E}^2 &= m_1^2 - a \frac{h^2 n^2}{m^2} - (n^2 + 4)a. \end{aligned} \right.$$

Le champ garde donc sa nature bessélienne dans toute direction radiale. Le coefficient de l'opérateur de Bessel est modifié séparément pour le champ magnétique axial aussi bien que pour le champ électrique axial. D'autre part, un couplage plus compliqué du champ magnétique axial avec le champ électrique existe au second ordre, alors que ce dernier n'ajoute que deux termes supplémentaires au couplage par le champ magnétique axial au champ électrique axial. Nous allons traiter les termes additifs du second ordre comme un opérateur de perturbation. La solution générale sera obtenue en ajoutant à la solution donnée par les fonctions de Bessel une fonction de perturbation d'amplitude faible comparée à la solution exacte du premier ordre. En négligeant dans les termes, produit de l'opérateur perturbation avec la fonction de perturbation, comme en mécanique quantique, nous pouvons écrire explicitement, grâce à la fonction de Green de l'opérateur de Bessel l'expression des champs axiaux  $\frac{B_z}{r}$ ,  $E_z$ . Une telle approximation peut être considérée comme suffisante, car la détermination du champ à l'intérieur d'une cavité avec les moyens actuels ne peut pas révéler de si petites variations. L'essentiel est de noter que l'allure générale est donnée par les fonctions de Bessel; ce qui veut dire que la nature du phénomène reste à peu de chose près la même. Les autres composantes du champ peuvent être calculées à partir des formules générales une fois connues  $E_z$ ,  $\frac{B_z}{r}$ .

Pour  $\frac{\Omega n}{\omega} > 1$ ;  $-\frac{\mu\varepsilon\omega^2(1-b)}{\Delta_1} \sim 1$ ; prenant seulement les termes importants

$$(III, 4ab) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = 1/r - 4ar \\ \beta_1 = iar \frac{nh}{\omega} \\ \gamma_1 = [m_1^2 - (n^2 + 4)a] - \frac{n^2}{r^2} \\ \quad + ar^2\omega^2\mu\varepsilon' \frac{\Omega^2 n^2}{\omega^2} \\ \delta_1 = -a \frac{hn}{i\omega} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 = 1/r \\ \beta_2 = -ar^3 ih\Omega \\ \gamma_2 = \left[ m_1^2 - \frac{n^2}{r^2} \right] + ar^2 h^2 \frac{\Omega n}{\omega} \\ \delta_2 = -\frac{2ihc}{\mu\varepsilon'\omega(n\Omega)} - ar^2 2ih\Omega \end{array} \right.$$

$$(III, 5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2}{dr^2} \frac{B_z}{r} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \frac{B_z}{r} + \left( m_{2B}^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) \frac{B_z}{r} + (-4ar) \frac{d}{dr} \frac{B_z}{r} + ar^2 \mu\varepsilon' \Omega^2 n^2 \frac{B_z}{r} \\ \quad + iar \frac{nh}{\omega} \frac{d}{dr} E_z - a \frac{hn}{i\omega} E_z = 0 \\ \frac{d^2}{dr^2} E_z + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \frac{E_z}{r} + \left( m_{2E}^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) E_z + ar^2 h^2 \frac{\Omega n}{\omega} E_z \\ \quad - ar^3 ih\Omega \frac{d}{dr} \frac{B_z}{r} - \left[ \frac{2ihc}{\mu\varepsilon'\omega n\Omega} + ar^2 2ih\Omega \right] \frac{B_z}{r} = 0 \end{array} \right.$$

$$(III, 6) \quad \left\{ \begin{array}{l} m_{2B}^2 = m_1^2 - (n^2 + 4)a \\ m_{2E}^2 = m_1^2 \\ m_1^2 = \mu\varepsilon\omega^2(1 - \varepsilon'/\varepsilon) - h^2 + \mu\varepsilon'(\omega - \Omega n)^2 \end{array} \right.$$

Les mêmes remarques que précédemment sont valables dans ce cas aussi. Le phénomène reste le même, décrit par les fonctions de Bessel, plus un terme de correction petit par rapport au premier ordre. Mais le paramètre a changé un peu; nous verrons dans ce qui suit comment ce changement altère les courbes de dispersion.

Expression des champs axiaux pour  $\frac{\Omega n}{\omega} \ll 1$  :

$$(III, 7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{B_z}{r} = p I_n(m_{2B}r) + q N_n(m_{2B}r) + \psi \\ E_z = p' I_n(m_{2E}r) + q' N_n(m_{2E}r) + \Phi \\ \quad + \frac{-2ihc}{\mu\varepsilon\omega(1-b)} \int_{R_1}^{R_2} \mathfrak{G}(m_{2E}r, m_{2E}r') (p I_n(m_{2B}r') + q N_n(m_{2B}r')) dr' \end{array} \right.$$

Les fonctions  $\psi$ ,  $\Phi$  vérifient les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \left( m_{2B}^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) \right\} &= \psi \left\{ 2ar \left( 2 + \frac{h^2}{m^2} \right) \frac{d}{dr} - ar^2 \mu \varepsilon^2 \omega^2 \right\} \\
 &\quad (pI_n(m_{2B}r) + qN_n(m_{2B}r)) \\
 &\quad + \left\{ ar \frac{nh}{i\omega} \left( 1 + \frac{h^2}{m^2} \right) \frac{d}{dr} + \frac{ahn}{i\omega} \left( 1 + \frac{h^2}{m^2} \right) \right\} \\
 \text{(III, 8)} \quad &\quad \left[ \left( p'I_n(m_{2E}r) + q'N_n(m_{2E}r) - \frac{2ihc}{\mu\varepsilon\omega(1-b)} \int_{R_1}^{R_2} \mathfrak{G}(pI_n + qN_n) dr' \right) \right] \\
 \left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \left( m_{2E}^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) \right\} &\Phi = \left\{ \frac{i\omega hn}{m^2} ar \frac{d}{dr} + \frac{2ahn}{i\mu\varepsilon\omega} \right\} \\
 &\quad (pI_n(m_{2B}r) + qN_n(m_{2B}r))
 \end{aligned}$$

Ce sont des équations de Bessel avec second membre connu. Les fonctions  $\psi$ ,  $\Phi$  peuvent donc s'exprimer à l'aide de la fonction de Green et des seconds membres de ces équations et des 4 constantes  $p$ ,  $q$ ,  $p'$ ,  $q'$ .

$$\begin{aligned}
 \psi &= \int_{R_1}^{R_2} \mathfrak{G}(m_{2B}r, m_{2B}r') \left\{ 2ar' \left( 2 + \frac{h^2}{m^2} \right) \frac{d}{dr'} - ar'^2 \mu \varepsilon \omega^2 \right\} \\
 &\quad (pI_n(m_{2B}r') + qN_n(m_{2B}r')) dr' \\
 &\quad + \int_{R_1}^{R_2} \mathfrak{G}(m_{2B}r, m_{2B}r') \left\{ ar' \frac{nh}{i\omega} \left( 1 + \frac{h^2}{m^2} \right) \frac{d}{dr'} + \frac{ahn}{i\omega} \left( 1 + \frac{h^2}{m^2} \right) \right\} \\
 &\quad (p'I_n(m_{2E}r') + q'N_n(m_{2E}r')) dr' \\
 \text{(III, 9)} \quad &\quad + \int_{R_1}^{R_2} \mathfrak{G}(m_{2B}r, m_{2B}r') \frac{2hc}{i\mu\varepsilon\omega(1-b)} \left( 1 + \frac{h^2}{m^2} \right) \\
 &\quad \left[ \left\{ ar' \frac{nh}{i\omega} \frac{d}{dr'} + \frac{ahn}{i\omega} \right\} \int_{R_1}^{R_2} \mathfrak{G}(pI_n(m_{2B}r'') + qN_n) dr'' \right] dr' \\
 \Phi &= \int_{R_1}^{R_2} \mathfrak{G}(m_{2E}r, m_{2E}r') \left\{ \frac{i\omega hn}{m^2} ar' \frac{d}{dr'} + \frac{2ahn}{i\mu\varepsilon\omega} \right\} \\
 &\quad (pI_n(m_{2B}r') + qN_n(m_{2B}r')) dr'
 \end{aligned}$$

Les fonctions  $\psi$ ,  $\Phi$  dépendent des constantes qui rendent les conditions aux limites possibles. D'autre part, les paramètres  $m_{2B}$ ,  $m_{2E}$  sont présents.

Nous allons rencontrer la même situation pour  $\frac{\Omega n}{\omega} \gg 1$ ; ce qui permet d'étudier les relations de dispersion.

Expression des champs axiaux pour  $\frac{\Omega n}{\omega} \gg 1$ .

Les paramètres  $m_{2B}^2$ ,  $m_{2E}^2$  sont relatifs aux équations.

$$(III, 10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{B_z}{r} = pI_n(m_{2B}r) + qN_n(m_{2B}r) + \chi \\ E_z = p'I_n(m_{2E}r) + q'N_n(m_{2E}r) + \xi \\ \quad + \frac{2ihc}{\mu\varepsilon'\omega\Omega n} \int_{R_1}^{R_2} \mathfrak{G}(m_{2E}r', m_{2E}r')(pI_n(m_{2B}r') + qN_n(m_{2B}r')) dr' \end{array} \right.$$

Les fonctions  $\chi$ ,  $\xi$  vérifient les équations suivantes :

$$(III, 11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \left( m_{2B}^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) \chi \\ = \left\{ 4ar \frac{d}{dr} - ar^2 \mu\varepsilon' \Omega^2 n^2 \right\} (pI_n(m_{2B}r) + qN_n(m_{2B}r)) \\ \quad \left\{ -iar \frac{nh}{\omega} \frac{d}{dr} + a \frac{hn}{i\omega} \right\} (p'I_n(m_{2E}r) + q'N_n(m_{2E}r)) \\ \quad \left\{ ar \frac{nh}{i\omega} \frac{d}{dr} + a \frac{hn}{i\omega} \right\} \frac{-2hc}{i\mu\varepsilon'\Omega n \omega} \int_{R_1}^{R_2} \mathfrak{G}(m_{2E}r', m_{2E}r')(pI_n + qN_n) dr' \\ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \left( m_{2E}^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) \xi = -ar^2 h^2 \frac{\Omega n}{\omega} \\ \quad \left\{ p'I_n + q'N_n + \frac{2ihc}{\mu\varepsilon'\omega\Omega n} \int_{R_1}^{R_2} \mathfrak{G}(pI_n + qN_n) dr' \right\} \\ \quad \left\{ ar^3 ih\Omega \frac{d}{dr} + ar^2 2ih\Omega \right\} (pI_n(m_{2B}r) + qN_n(m_{2B}r)). \end{array} \right.$$

De la même manière, on peut écrire explicitement  $\chi$ ,  $\xi$ .

$$(III, 12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \chi = \int_{R_1}^{R_2} \mathfrak{G}(m_{2B}r', m_{2B}r') \left\{ 4ar' \frac{d}{dr'} - ar'^2 \mu\varepsilon' \Omega^2 n^2 \right\} (pI_n + qN_n) dr' \\ \quad + \int_{R_1}^{R_2} \mathfrak{G}(m_{2B}r', m_{2B}r') \left\{ ar' \frac{nh}{i\omega} \frac{d}{dr'} + a \frac{hn}{i\omega} \right\} (p'I_n + q'N_n) dr' \\ \quad + \int_{R_1}^{R_2} \mathfrak{G}(m_{2B}r', m_{2B}r') \\ \quad \left( \left\{ ar' \frac{nh}{i\omega} \frac{d}{dr'} + a \frac{hn}{i\omega} \right\} \frac{2ihc}{\mu\varepsilon'\omega\Omega n} \int_{R_1}^{R_2} \mathfrak{G}(pI_n + qN_n) dr'' \right) dr' \\ \xi = \int_{R_1}^{R_2} \mathfrak{G}(m_{2E}r', m_{2E}r') \\ \quad \left[ -ar'^2 h^2 \frac{\Omega n}{\omega} \left\{ p'I_n + q'N_n + \frac{2ihc}{\mu\varepsilon'\Omega n \omega} \int_{R_1}^{R_2} \mathfrak{G}(pI_n + qN_n) dr'' \right\} \right] dr' \\ \quad + \int_{R_1}^{R_2} \mathfrak{G}(m_{2E}r', m_{2E}r') \left\{ ar'^3 ih\Omega \frac{d}{dr'} + ar'^2 2ih\Omega \right\} (pI_n + qN_n) dr' \end{array} \right.$$

Ces termes  $\chi$ ,  $\xi$  ne montrent que la complexité des modifications apportées par la rotation. Une deuxième approximation ne révèle rien d'intéressant. Les opérateurs de perturbation sont tous indéfiniment différentiables et ne posent aucune discontinuité intéressante à exploiter.

3. Considérant uniquement les géométries limitées par des surfaces cylindriques, les bornes d'intégration des intégrales sont  $R_1$ ,  $R_2$  dans le cas général d'une cavité toroïdale. Les champs axiaux  $E_z$ ,  $\frac{B_z}{r}$  dépendent de quatre paramètres  $p$ ,  $q$ ,  $p'$ ,  $q'$ ; en écrivant les conditions aux limites, on trouve un système d'équations homogènes en  $p$ ,  $q$ ,  $p'$ ,  $q'$  comme dans le cas de la première approximation. L'annulation du déterminant qui donne la condition pour obtenir une solution non triviale donne en même temps une équation transcendante en  $m_{2E}$ , puisque  $m_{2B}^2$  est linéairement lié à  $m_{2E}^2$ . Une telle équation admet une famille finie ou non de racines  $x_K$ ,  $K = 0, 1, 2, \dots$ . En choisissant

$$(III, 13) \quad m_{2E} = x_K$$

Nous choisissons le mode de vibration radiale de la cavité; la relation de dispersion est obtenue immédiatement dans ce cas-là. A noter que les paramètres radiaux du champ axial électrique n'est plus le même pour le champ axial magnétique : les nœuds de  $\frac{B_z}{r}$  le long d'une direction radiale ne sont plus les mêmes que ceux de  $E_z$ .

$$\text{Pour } \frac{\Omega n}{\omega} \ll 1;$$

$$(III, 14) \quad \left\{ \begin{array}{l} m_{2E}^2 = x_K^2 \quad \text{ou} \quad (1 - \varepsilon'/\varepsilon) \left( \omega^2 - \frac{h^2 \varepsilon'}{m^2 \varepsilon} n^2 \Omega^2 \right) + (\varepsilon'/\varepsilon) (\omega - \Omega n)^2 = \omega_K^2 \\ m_{2B}^2 = x_K^2 - (n^2 + 4)a \quad \omega_K^2 = \frac{1}{\mu \varepsilon} (x_K^2 - h^2) \end{array} \right.$$

$$\text{Pour } \frac{\Omega n}{\omega} \gg$$

$$(III, 15) \quad \left\{ \begin{array}{l} m_{2E}^2 = x_K^2 \quad \text{ou} \quad (1 - \varepsilon'/\varepsilon) \omega^2 + \varepsilon'/\varepsilon (\omega - \Omega n)^2 = \omega_K^2 \\ m_{2B}^2 = x_K^2 - (n^2 + 4)a. \end{array} \right.$$

Il apparaît donc, pour  $\frac{\Omega n}{\omega} \ll 1$ , qu'une nouvelle séparation des fréquences est obtenue, l'équation obtenue est du quatrième ordre par rapport à  $\omega$ .

Néanmoins le terme  $\frac{h^2}{m} \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} n^2 \Omega^2 \sim \frac{h^2}{\mu\varepsilon} \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \frac{\Omega^2 n^2}{\omega^2}$ ,  $h^2$  étant petit, devant  $\mu\varepsilon\omega^2$ ;

l'équation donnant la fréquence en fonction de la rotation est,  $\left(\frac{\Omega n}{\omega} \ll 1\right)$

$$(III, 16) \quad \omega^4 - 2\omega^3 \Omega n \varepsilon' / \varepsilon + \omega^2 \left( \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \Omega^2 n^2 - \omega_{\kappa}^2 \right) - (1 - \varepsilon' / \varepsilon) \frac{h^2}{\mu\varepsilon} \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} n^2 \Omega^2 = 0$$

ce que l'on peut écrire encore comme intersection des courbes d'équation :

$$(III, 17) \quad \begin{cases} \gamma_1 = (1 - \varepsilon' / \varepsilon) \frac{h^2}{\mu\varepsilon} \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} n \Omega + 2\omega^3 \varepsilon' / \varepsilon \\ \gamma_2 = \frac{1}{\Omega n} (\omega^4 + \omega^2 (\varepsilon' / \varepsilon \Omega^2 n^2 - \omega_{\kappa}^2)) \end{cases}$$

Nous ferons varier le paramètre  $\Omega n$  à partir de zéro;  $y_2$  admet comme zéros : l'origine et les points,  $\pm \sqrt{\omega_{\kappa}^2 - \varepsilon' / \varepsilon \Omega^2 n^2}$ ; comme  $\Omega n$  reste au voisinage de 0, il n'y a pas de changement sensible pour  $\omega_{\kappa}$  qui est grand vis-à-vis de  $\Omega n$ . L'allure de  $y_2$  est connue et on a la forme suivante : pour  $\Omega n \rightarrow 0$ , la limite est la demi-droite négative  $oy_2$  et les deux droites  $\pm \omega_{\kappa}$ .

Nous connaissons aussi la courbe  $y_1$ ; elle est invariante dans sa forme lorsque  $\Omega n$  varie au voisinage de 0, positivement.

Des intersections de ces deux courbes, nous tirons les conclusions suivantes (voir fig. 4) :

pour  $\varepsilon' / \varepsilon < 1$  :  $\Omega n$  augmente légèrement à partir de 0,  $y_1$  se déplace vers le haut, les racines sont  $\alpha, \beta$ ; ils se déplacent dans le sens  $\alpha \rightarrow \alpha' \rightarrow \alpha''$ ;  $\beta \rightarrow \beta' \rightarrow \beta''$  à mesure que  $\Omega n$  augmente;

pour  $\varepsilon' / \varepsilon > 1$  :  $\Omega n$  translate  $y_1$  dans le sens des  $y$  négatifs; une autre paire de racines ( $\delta, \gamma$ ) progressant dans le sens  $\gamma \rightarrow \gamma''$  et  $\delta \rightarrow \delta''$  apparaît en plus de la paire ( $\alpha, \beta$ ). Cet effet anormal n'existe donc que pour  $\varepsilon' / \varepsilon > 1$ . La présence de quatre fréquences complique énormément les phénomènes de battement; mais, qualitativement, il est assez facile de détecter le fait. Physiquement, ce cas se réalise lorsque l'on observe le champ stationnaire dans un repère inertiel et lorsque le milieu matériel possède un coefficient diélectrique négatif  $\varepsilon < 0$  en rotation par rapport au repère inertiel.

Les courbes de dispersion subissent donc une distorsion non linéaire pour tout autre cas. L'effet du second ordre n'apporte qu'une variation non linéaire par rapport à la rotation  $\Omega$  : le battement n'est plus une fonction linéaire de la rotation, mais l'écart reste faible.

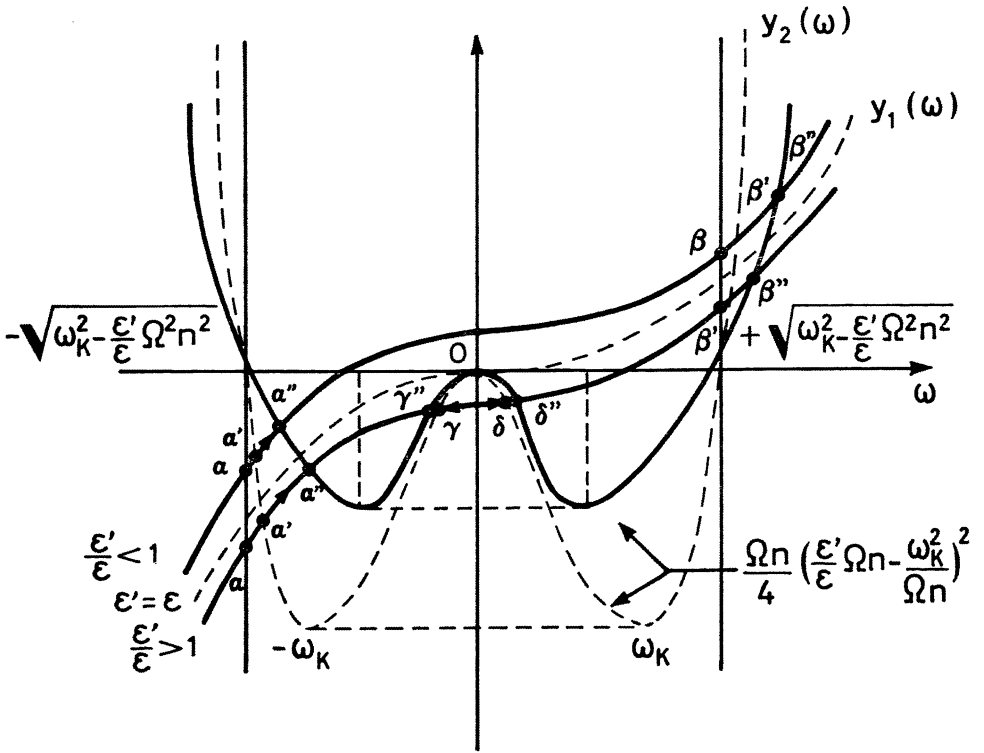


FIG. 4. — Intersection de  $y_1, y_2$ , pour  $n\Omega$  petit.

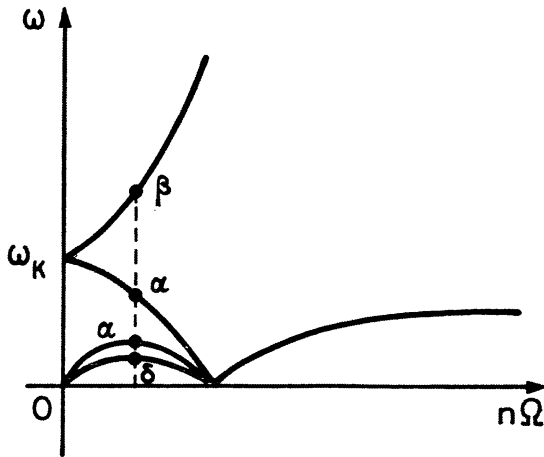


FIG. 5. — Courbe de dispersion  $\epsilon'/\epsilon > 1$ .

Pour le cas exceptionnel signalé plus haut, il apparaît deux autres fréquences pour de très faibles rotations comme le montre la figure 5.

Nous avons vu que pour  $\frac{\Omega n}{\omega} \gg 1$ , l'on rejoint les courbes de la première approximation; il en résulte que les deux branches supplémentaires doivent être tangentes à la courbe de la première approximation; la distance  $\alpha\beta$  n'est plus  $2n\Omega\frac{\epsilon'}{\epsilon}$ ; mais il faut lui ajouter un terme correctif, non linéaire par rapport à  $\Omega n$ .

Remarquons que, maintenant, les déviations du second ordre sont fonction du nombre d'ondes axial  $h$ , aussi bien que de  $K$ , le nombre d'ondes radial. Une observation optique paraît incapable de donner un résultat positif, car le champ n'est pas borné par des parois orthogonales à l'axe de rotation. Il serait intéressant de relever expérimentalement une courbe des battements en fonction de  $\Omega n$ , pour une cavité donnée, pour estimer la déviation par rapport au battement linéaire.

#### IV. CONCLUSIONS

La solution approchée du modèle de Post-Yildiz-Tang des cavités électromagnétiques en rotation est présentée dans cette étude; elle correspond à une configuration du type microondes des cavités électromagnétiques ordinaires. Le champ électromagnétique stationnaire est calculé explicitement. Les conditions aux limites usuelles sont appliquées et donnent lieu à des relations de dispersion : la fréquence de vibration pour un mode donné est exprimée comme une fonction multiforme de  $n\Omega$ ,  $n$  étant le nombre d'ondes azimutal.

Les conséquences théoriques sont dégagées dans le cadre de cette théorie principalement sur les modifications possibles des courbes de dispersion. Le rôle de la nature du milieu matériel a été simplifié. Néanmoins, il est possible de partir d'un modèle de la matière, de lui adjoindre les effets dus à un champ d'accélération et de redériver les équations du champ stationnaire. Les conditions aux limites ne peuvent pas être covariantes simplement comme l'ont admis Yildiz-Tang. La surface de discontinuité physique entre le milieu matériel et la cavité, lorsque cette dernière est en mouvement relatif par rapport au milieu matériel, est le siège de distributions de courants et de charge qui résultent de l'interaction entre les deux milieux. Nous ne connaissons pas le détail de cette discontinuité qui cor-



respond à un problème difficile et non résolu encore : la solution est peut-être un modèle statistique encore.

Les effets du second ordre sont sans doute très difficiles à observer, néanmoins nous espérons que leur observation confirme ou infirme le traitement de l'influence de la rotation sur les cavités électromagnétiques donné par E. J. Post, A. Yildiz et C. H. Tang.

## RÉFÉRENCES

- [1] Asim MILDIZ and Ch. TANG, *Physical Review*, vol. 146, 4, 1966, p. 145.
- [2] E. J. POST, *Formal Structure of Electromagnetics*. North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1962.
- [3] E. J. POST, The Sagnac Effet, *Review of Modern Physics*, t. 39, avril 1967, p. 2.
- [4] Saul A. BASRI, Operation foundation of Einstein general theory of relativity. *Review of Modern Physics*, t. 37, avril 1965, p. 2.
- [5] C. V. HEER, *Physical Review*, t. 134, 1964, A 799.
- [6] MACEK et K. DAVIS, *Journal of Applied Physics*, 1963.

(Manuscrit reçu le 24 avril 1968).

---

*Directeur de la publication : C. BERMAN.*

---

IMPRIMÉ EN FRANCE

DÉPÔT LÉGAL ÉD. N° 1581a.

IMPRIMERIE BARNÉOUD S. A. LAVAL, N° 5768. 12-1968.