

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

JEAN GREA

**Remarques concernant les relations pouvant  
exister entre la mécanique quantique et une  
théorie subquantique possible**

*Annales de l'I. H. P., section A*, tome 8, n° 3 (1968), p. 275-286

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPA\\_1968\\_\\_8\\_3\\_275\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1968__8_3_275_0)

© Gauthier-Villars, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## **Remarques concernant les relations pouvant exister entre la mécanique quantique et une théorie subquantique possible**

par

**Jean GREA**

(Institut de Physique Nucléaire de Lyon).

---

**ABSTRACT.** — We try to discuss under which conditions it is possible to determine an equivalent statistical potential to a given quantic one. A first method already used is shown to be non physical. The brownian motion formalism is used afterwards which gives some possibilities for introducing hidden variables in a some more physical meaning. This is to be discussed in a next paper.

---

### **INTRODUCTION**

Dès l'apparition de la mécanique quantique, de nombreux auteurs ont tenté de réduire le nombre des postulats nécessaires à son établissement. En particulier, une des voies choisies consiste à interpréter le formalisme d'une manière déterministe et à l'assimiler à une extension de la mécanique classique.

Signalons récemment le succès de cette tentative en mécanique statistique classique. Plusieurs auteurs ont montré que la mécanique quantique et son équation d'évolution pouvaient s'en déduire simplement [1, 4, 5].

Nous rappellerons que dans le formalisme de Gibbs, on peut obtenir univoquement la description d'un système subquantique équivalent à un

système quantique donné, mais en introduisant des hypothèses non physiques et en ne considérant que des champs dont les fonctions appartiennent à un sous-espace non dense dans l'espace hilbertien des états.

Nous verrons, par contre, qu'il est possible d'obtenir un ensemble de systèmes subquantiques équivalent à un système quantique donné dès qu'on admet la nature brownienne des processus subquantiques.

## I. — RAPPEL DES ÉQUATIONS D'ÉVOLUTION EN MÉCANIQUE STATISTIQUE DE GIBBS

Notations : L'espace des phases

$$\Gamma(p, q) = \{\vec{p}\} \oplus \{\vec{q}\} \quad (1)$$

On notera :

$\rho(p, q, t)$  la fonction densité d'état dans  $\Gamma(p, q)$ ,

$L_2(\Gamma)$  l'espace de Hilbert des fonctions de carré sommable sur  $\Gamma$  au sens de Lebesgue,

$L_2^{\mathbb{R}}(\Gamma)$  sera la restriction de l'espace précédent aux fonctions à variables réelles.

L'équation d'évolution d'un état  $M(p, q)$  dans l'espace  $\Gamma$  de dimensions finies est :

$$\vec{v}_M \equiv (\vec{\nabla}_p H, -\vec{\nabla}_q H)$$

où  $H$  est l'hamiltonien réel du système dans l'état  $M$ . Il est équivalent de considérer le groupe de transformations à un paramètre  $t$  de  $\Gamma$  dans  $\Gamma$ , telles que :

$$\begin{aligned} M_t(p, q) &= T^t M_0(p, q) = M_0(T_p^{-t}, T_q^{-t}) \\ T^{t+s} &= T^t T^s = T^s T^t \\ T^0 &= I \end{aligned} \quad (2)$$

Le théorème de Liouville affirme alors que  $T^t$  est une transformation définie sur  $\Gamma$  qui conserve la mesure de Lebesgue sur  $\Gamma$ .

$$\int_{\mathcal{M}_0} dpdq = \int_{\mathcal{M}_t} dpdq \quad \text{avec} \quad \mathcal{M}_t = T^t \mathcal{M}_0 \subset \Gamma \quad (3)$$

Alors, quelle que soit  $f_0(p, q)$  différentiable sur  $\Gamma$  (donc sommable) et appartenant à  $L_2^{\mathbb{R}}(\Gamma)$ , on a :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [H, f] = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (f \vec{V}_M) \tag{4}$$

où  $[.]$  représente les crochets de Poisson.

## II. — DÉTERMINATION DU SYSTÈME QUANTIQUE ÉQUIVALENT A UN SYSTÈME SUBQUANTIQUE

Nous appellerons système subquantique associé à un système quantique un système, en général statistique, dont les propriétés se traduisent « macroscopiquement » par celles du système quantique. Cette définition se précisera par la suite.

Considérons l'opérateur de Liouville :

$$\mathfrak{L} \equiv i[H, \cdot] \tag{5}$$

L'opérateur

$$\tau \equiv [H, \cdot] \equiv \sum_{i=1}^N \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i}$$

où  $H$  est la fonction réelle hamiltonienne du système est formellement self-adjoint [9]. Alors les solutions de  $(\tau - i)f = 0$  sont précisément les conjugués complexes des solutions de  $(\tau + i)f = 0$ . C'est-à-dire l'opérateur  $\mathfrak{L}$  dans  $L_2$  a des indices de défaut égaux. Par conséquent, toute extension symétrique maximale est self-adjointe [10]. Pour une telle extension, l'opérateur  $\mathfrak{U}^t = e^{i\mathfrak{L}t}$  est unitaire. Nous pouvons alors considérer l'équation de Liouville.

$$i \frac{\partial f}{\partial t} + \mathfrak{L}f = 0 \quad f \in L_2(\Gamma) \tag{6}$$

comme l'équation d'évolution des états  $f$  subquantiques dont la projection sur  $L_2(\{\vec{q}\})$  peut être associée aux fonctions  $\psi$  solutions de l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} - H\psi = 0 \quad \psi \in L_2(\{q\}) \tag{7}$$

En effet, si  $f$  vérifie (6),  $f^*$  la vérifie aussi, ainsi que  $\rho = ff^*$  qui représente bien une densité d'états dans l'espace  $\Gamma$  à un facteur de normalisation près. De plus, on peut dire que la fonction  $f$  représente un champ ondulatoire comme  $\psi$ . Pour le voir, limitons-nous, pour simplifier l'écriture, au spectre discret de  $\mathcal{L}$ . Soient  $\{\varphi_j^0\}$  l'ensemble de ses fonctions propres associées aux valeurs propres supposées non dégénérées  $\{\lambda_j\}$ . Alors la solution de (6) correspondante pour  $t = t_0$  à  $\varphi_j^0$  est :

$$\Phi_j^0(p, q, t) = e^{i\lambda_j t} \varphi_j^0 \quad (9)$$

avec  $\varphi_j^0 = A_j^0(p, q) e^{-i\theta_j^0(p, q)}$  où  $A_j^0(p, q)$  est fonction de  $L_2^{\mathbb{R}}(\Gamma)$  et  $\theta_j^0 \in C^0([0, 2\pi])$ .

La vitesse de phase de l'onde  $\Phi_j^0$  est :

$$\vec{v}_M(p, q) \cdot \vec{\nabla} \theta_j^0(p, q) = \lambda_j \quad (10)$$

Cela nous permet de prendre pour définition de l'état d'équilibre sub-quantique, l'état décrit par :

$$(\Phi_j)_{t=0} = \Phi_j^0 \quad \text{avec} \quad \Phi_j^0 \in L_2^{\mathbb{R}}(\Gamma) \quad \text{et} \quad \lambda_j = 0 \quad (11)$$

En effet, si  $\Phi(p, q, t)$  est réelle pour  $t = 0$ , elle le restera pour tout  $t$ .

Remarquons que l'on peut, de différentes façons, et cela sans introduire de principes qui ne soient déjà inclus en mécanique classique, décrire un phénomène irréversible grâce à (6). Par exemple ([2], p. 5, 6, 8) si l'on développe en série de Fourier la fonction  $\rho$  (qui vérifie (6)) sur les fonctions propres de  $\mathcal{L}$ , les coefficients de ce développement expriment les corrélations entre particules du système et son évolution est traduite par des lois dynamiques sur ces coefficients de corrélation, loi qu'on obtient à partir de (6) (cf. [2], chap. 11 et 12, § 1, 2 et 3). Alors la présence dans l'Hamiltonien d'un terme potentiel qui couple les différents degrés de liberté du système permet d'obtenir simplement les équations d'évolution du système vers un état d'équilibre statistique.

Nous examinons maintenant sous quelles hypothèses on a pu déterminer univoquement un potentiel quantique, étant donné un système statistique et réciproquement.

Tout d'abord, on rend l'équation (6) invariant  $t$  et cela à deux conditions. On adjoint l'équation obtenue par la transformation  $t \rightarrow -t$  (transfor-

mation que l'on peut appeler passive) et qui s'écrit  $i \frac{\partial f}{\partial t} - \mathcal{L}f = 0$ , puis on choisit des conditions initiales invariantes  $t$ . Il faut alors remarquer que physiquement, cela revient à se limiter aux systèmes stationnaires en équilibre ou au voisinage de l'équilibre statistique. De plus, une conséquence physique de cette invariance est que l'équation obtenue :

$$-\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \mathcal{L}^2 f = 0 \tag{12}$$

décrit à la fois les systèmes de l'Hamiltonien  $H$  et  $-H$ , c'est-à-dire que (12) est invariante dans la transformation  $H \rightarrow -H$  que l'on peut appeler la transformation active associée à la transformation passive  $t \rightarrow -t$ .

Il est maintenant possible, sous certaines conditions, de trouver pour le système décrit par (6) et (12) un potentiel équivalent à celui du système quantique décrit par (7) et qui fournisse les mêmes niveaux d'énergie.

La densité de Lagrangien équivalent par le principe variationnelle à l'équation (12) est :

$$l = c \left\{ \frac{\partial f \partial f^\times}{\partial t} - [Hf][Hf] \right\} \tag{13}$$

d'où l'expression de l'énergie du système :

$$E = 2c \int_{\Gamma} [Hf][Hf^\times] dpdq = 2c \int_{\Gamma} f^\times \mathcal{L}^2 f dpdq \tag{14}$$

Conformément à la remarque faite lors de l'établissement de l'équation (12), l'énergie du système est de la forme  $E = \langle f, \mathcal{L}^2 f \rangle$  et ne dépend pas du temps. La détermination du potentiel subquantique revient alors à la recherche de l'opérateur  $\mathcal{H}$  tel que

$$\langle \psi(q), \mathcal{H}\psi(q) \rangle = \langle f(p, q), \mathcal{L}^2 f(p, q) \rangle$$

Cette détermination n'est rendue possible que par l'introduction de l'hypothèse suivante : les propriétés du système statistique subquantique sont celles de l'ensemble canonique perturbé adiabatiquement, c'est-à-dire celles décrites par les champs de la forme

$$\Phi^0 = \sqrt{A} e^{\frac{1}{2kT} \sum_{n=1}^N p_n^2 / 2m} W(q) \tag{15}$$

Cette hypothèse n'est pas naturelle pour deux raisons. En premier lieu, il n'y a aucune raison physique pour se limiter aux états appartenant à

l'espace  $H_0(P_N) \otimes L_2(\{\vec{q}\})$  où  $H_0(P_N)$  est l'espace des fonctions engendrées par le polynôme d'Hermite à  $N$  variables de degré zéro. L'ensemble de ces états n'étant pas dense dans  $L_2(\Gamma)$ , espace des solutions de (12). D'autre part, au point de vue formel, l'état initial choisi ne correspond pas, contrairement à l'équation (9) à une fonction propre de  $\mathcal{L}$ . En effet, la seule fonction propre de cette forme est proportionnelle à

$$e^{-H/kT} = e^{-\frac{1}{kT} \left( \sum_{n=1}^N p_n^2/2m \right)} e^{-U(q)/kT}$$

et correspond à la distribution de Maxwell-Boltzmann.

En prenant  $\Phi_0$  définie par (15) et  $H = p^2/2m + U(q)$ , un calcul fastidieux mais simple conduit à partir de (14) à l'expression de l'énergie

$$\frac{E}{2kT} = -AC \int_{\Gamma} dp dp \left[ e^{-\frac{1}{kT} \sum_{n=1}^N p_n^2/2m} W^{\times}(q) \right] \left[ \frac{1}{2m} \Delta_q + \frac{1}{4mkT} \left[ \Delta_q U - \frac{1}{2kT} \sum_{n=1}^N \left( \frac{\partial u}{\partial q_n} \right)^2 \right] \right] W(q) \quad (17)$$

On voit alors que la projection sur  $L^2(\{\vec{q}\})$ , de  $\Phi$ , notée  $W(q)$  peut être considérée comme la fonction d'état d'un système quantique dont l'hamiltonien serait :

$$\frac{1}{2m} \Delta_q + \frac{1}{4mkT} \left[ \Delta_q U - \frac{1}{2kT} \sum_{n=1}^N \left( \frac{\partial u}{\partial q_n} \right)^2 \right] \quad (18)$$

et dont le potentiel serait :

$$V(q) + e = \frac{\hbar^2}{4mkT} \left[ \frac{1}{2mkT} \sum_1^N \left( \frac{\partial U}{\partial q_n} \right)^2 - \Delta_q U \right] \quad (19)$$

$e$  étant une constante permettant de nous fixer le zéro d'énergie.

Inversement, pour obtenir  $U[V(q)]$ , posons  $U = (-\text{Log } F)2kT$ . Il vient :

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_q + V(q) \right] F(q) = -eF(q) \quad (20)$$

En choisissant pour valeur de  $-e$  celle du niveau fondamental  $E_0$  du système quantique équivalent, on a :  $HF(q) = E_0 F(q)$  et  $W_0(q) = \exp(-U(q)/2kT)$ .

C'est-à-dire que le potentiel du système subquantique associé à un système quantique dont le potentiel est  $V(q)$  est le logarithme de la fonction propre de l'opérateur hamiltonien correspondant à l'énergie du niveau fondamental. L'énergie du système subquantique est choisie nulle pour la distribution de Maxwell.

### III. — SYSTÈME SUBQUANTIQUE ÉQUIVALENT A UN SYSTÈME QUANTIQUE DONNÉ

On considère un système dans l'état  $\psi(q)$  solution de l'équation (22)

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V \right) \psi \quad (22)$$

On sait que [6], cette équation est équivalente pour les systèmes dynamiques à la donnée de la relation intégrale.

$$\psi(x, t + \Delta t) = \left( \frac{m}{2i\pi\hbar\Delta t} \right)^{3/2} \int_{\mathbb{R}^3} e^{i\frac{L\Delta t}{\hbar}} \psi(x - \Delta x, t) d(\Delta x) \quad (23)$$

l'intégration se faisant sur tout l'espace  $\Delta x$ , où le Lagrangien dynamique s'écrit :

$$L = mv^2/2 - V(x) \quad \text{avec} \quad \vec{v} = \frac{\vec{\Delta x}}{\Delta t}$$

Cela revient à considérer que l'évolution du système est l'effet d'un processus de Mavkov. Alors, on peut interpréter l'équation (23) comme donnant la fonction décrivant le système en  $(x, t + \Delta t)$  en fonction de celle en  $(x - \Delta x, t)$ . La probabilité de transition ou propagateur pour un système libre ( $V = 0$ ) étant alors,

$$P(x, \Delta x, \Delta t) = \left( 4\pi \frac{i\hbar}{2m} \Delta t \right)^{-3/2} e^{-\frac{\Delta x^2}{2m}} \quad (24)$$

Ce propagateur est identique à celui du processus brownien d'une particule libre dans l'approximation  $\beta t \gg 1$ , c'est-à-dire pour un temps beaucoup plus grand que celui des « interactions browniennes » (ce qui revient à examiner le système dans les conditions où il doit fournir les propriétés quantiques) où  $\beta$  est la constante de friction intervenant dans l'équation



de Langevin (7) et la constante de diffusion serait  $D = kT/m = \hbar/2m$ . La forme intégrale de l'équation de Schrodinger dans le cas libre nous fournit immédiatement un système statistique déterministe équivalent au système quantique libre qu'elle décrit.

Lorsqu'on tente la même démarche pour un système soumis au potentiel  $V(x)$ , on constate que la forme intégrale ne s'obtient pas directement comme équation d'un processus brownien en présence d'un champ. Par exemple, dans l'approximation d'un système à deux dimensions couplé harmoniquement faiblement, le propagateur s'écrit, pour la limite  $\beta t \gg 1$  sous la forme :

$$P(x_0, \Delta x, \Delta t) = \left( \frac{m}{2i\pi\hbar\Delta t} \right)^{-3/2} e^{i \left[ \frac{m\Delta x^2}{2\hbar\Delta t} + \frac{V(x_0)\Delta t}{\hbar} + \frac{m x_0 \Delta x \varepsilon}{\hbar\Delta t} \right]}$$

$$= \left( \frac{m}{2i\pi\hbar\Delta t} \right)^{-3/2} e^{i \left[ \frac{m\Delta x^2}{2\hbar\Delta t} + \frac{V\Delta t}{\hbar} + \frac{\Delta V}{\hbar\omega} \right]} \quad (25)$$

où  $1 \gg \varepsilon \approx \frac{\omega}{\beta}$  est l'infiniment petit principal du développement et

$$V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2.$$

Alors que celui qui correspond à (23) pour  $V \neq 0$  est :

$$P_q(x_0, \Delta x, \Delta t) = \left( \frac{m}{2i\pi\hbar\Delta t} \right)^{-3/2} e^{i \left[ \frac{m\Delta x^2}{2\hbar\Delta t} - \frac{V\Delta t}{\hbar} \right]} \quad (25 \text{ bis})$$

Pour mettre en évidence les termes d'incompatibilité introduits par la présence de  $V$  entre (25) et (25 bis), nous allons utiliser le formalisme différentiel équivalent à (23).

En effet, on sait que le formalisme intégral du mouvement brownien (24) est équivalent à celui de l'équation aux dérivées partielles de Fokker-Plank [7]

$$\frac{\partial W(v, x, t)}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}_x W + \vec{F} \cdot \vec{\nabla}_x W = \beta \vec{\nabla}_v \cdot (\vec{v} W + v^2 \vec{\nabla}_v W) \quad (26)$$

où  $W(v, x, t)$  est la fonction de répartition et  $\vec{F}$  la force extérieure dérivant d'un potentiel classique.

Dans l'approximation  $\beta t \gg 1$ , cette équation se réduit [7] à l'équation de Smoluchowsky de solution.

$$W(v, x, t) = \left( \frac{1}{2\pi v_0^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{v^2}{2v_0^2}} \psi(x, t) \quad (27)$$

C'est-à-dire que les fonctions d'état du système subquantique associé au système quantique donné appartiennent naturellement à l'espace

$$H_0(P_N) \otimes L_2(\{\vec{q}\})$$

D'autre part  $\psi(x, t)$  vérifie l'équation

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi - \frac{i\hbar}{m\beta} (\vec{\nabla}_x \cdot \vec{F} + \vec{F} \cdot \vec{\nabla}) \psi \quad (28)$$

où si l'on remplace  $\vec{F}$  par  $-\vec{\nabla}_x U$ , c'est-à-dire si on introduit le potentiel classique

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + \frac{i\hbar}{m\beta} (\Delta U + \vec{\nabla} U \cdot \vec{\nabla}) \psi \quad (29)$$

Si on identifie les 2<sup>e</sup> nombres de (22) et (29), nous constatons que le potentiel U du système subquantique dépend alors non seulement du potentiel quantique donné, mais aussi de l'état décrivant ce système quantique. Ce phénomène est équivalent à celui qu'on rencontre en mécanique statistique classique où les grandeurs macroscopiques (entropie, etc.) ne déterminent pas le système microscopique considéré. De même, lors de l'étude des états des molécules diatomiques traitées par la méthode de R. M. Sternheimer [8], on retrouve le fait que l'Hamiltonien dépend de la fonction d'onde décrivant le système.

A titre d'exemples, nous avons obtenu pour un potentiel quantique harmonique les potentiels subquantiques pour l'état fondamental et le premier état excité (voir appendice).

Finalement, si nous tentons d'écrire le processus du mouvement brownien dans un système de coordonnées canoniques (afin d'utiliser le formalisme statistique de Gibbs), c'est-à-dire si nous posons que la force de Langevin  $\vec{F} = -m\beta\vec{v} + m\vec{A} + m\vec{F}'$  dérive d'un potentiel, ce dernier doit être solution de l'équation

$$\left[ (-\beta\vec{v} + \vec{\nabla}\Phi) \cdot \vec{\nabla}_v + v\vec{\nabla}_r + \frac{\partial}{\partial t} \right] \vec{\nabla}_v V = -m\beta\vec{v} + \vec{\nabla}_r V \quad (30)$$

Dans l'approximation du mouvement sans friction et à potentiel indépendant du temps, il vient :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} + v \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial v} = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad (31)$$

La méthode d'élimination qui, ici, n'aboutit pas, conduit cependant à n'introduire la vitesse que par l'intermédiaire de la fonction :

$$y = \exp\left(\frac{Cv^2}{2} - C\Phi\right) \quad (32)$$

On retrouve ici la distribution d'équilibre.

## CONCLUSION

Notre but, très limité dans ce premier article, a été de préciser les conditions dans lesquelles on pouvait espérer établir un formalisme déterministe classique non relativiste d'une mécanique subquantique équivalente à la mécanique quantique.

Nous nous sommes restreints aux considérations concernant le potentiel. Nous avons pu alors montrer qu'une première démarche (4) ne pouvait être poursuivie pour les raisons physiques et mathématiques données dans la première partie. Par contre, le formalisme brownien utilisé dans la seconde partie, nous fournit la possibilité de caractériser physiquement un ensemble de systèmes équivalents statistiquement à un système quantique donné.

Enfin, cette étude n'a été faite que relativement à un prochain article traitant du cadre mathématique dans lequel peuvent apparaître les « variables cachées » de telles descriptions subquantiques. Les structures choisies sont plus générales que celles nécessaires aux hypothèses qui ont permis la conclusion du théorème de Von Neumann.

Je remercie M. Flato pour les nombreuses remarques dont il m'a fait part et sa constante sollicitude à mon égard. J'exprime ma vive reconnaissance au professeur J. M. Jauch pour sa lecture critique de mon manuscrit.

---

APPENDICE

Nous partons de l'équation (29).

Le potentiel subquantique  $W(x)$  est défini par :

$$\frac{i\hbar}{m\beta} (\vec{\nabla}_x \cdot \vec{F} + \vec{F} \cdot \vec{\nabla}_x) \psi = V\psi = \frac{2kT}{m\beta^2} (\Delta W + \vec{\nabla}_x W \cdot \vec{\nabla}_x) \psi \quad (1)$$

où  $V$  est le potentiel quantique donné. Nous considérons  $V$  de la forme

$$V(x) = m^2\omega^2 x^2/2$$

L'équation (1) à une dimension peut s'écrire :

$$\frac{2kT}{m\beta^2} \frac{d}{dx} \left( \frac{dW}{dx} \psi \right) = \frac{m\omega^2 x^2}{2} \psi \quad (3)$$

Les solutions de l'équation de Schrödinger correspondantes sont de la forme :

$$\psi = \mathfrak{K} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} \sum_{\kappa} c_{\kappa} H_{\kappa} \left( \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \right) \quad (4)$$

Nous nous sommes limités aux états  $\psi_0$  et  $\psi_1$ .

A) *Cas de l'état fondamental* :  $\varphi = \exp(-mx^2\omega^2/2\hbar)$ .

L'équation (3) s'écrit :

$$\frac{2kT}{m\beta^2} \left[ \frac{d^2 W_0}{dx^2} - \frac{m\omega}{\hbar} \frac{dW_0}{dx} \right] = \frac{m\omega^2 x^2}{2} \quad (5)$$

Si on appelle  $r_1$  et  $r_2$  les racines de l'équation caractéristique, le potentiel s'écrit :

$$W_0 = A \exp(r_1 x) + B \exp(r_2 x) \quad (6)$$

avec

$$r_i = \frac{m\omega}{\hbar} \pm \sqrt{\frac{m^2\omega^2}{\hbar^2} + \frac{m^2\omega^2\beta^2}{kT}}$$

B) *Cas du premier état excité* :

$$\psi_1 = 2 \exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right) q \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$$

L'équation (3) s'écrit

$$\frac{2kT}{m\beta^2} \frac{d}{dx} \left[ \frac{dW_1}{dx} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} 2x \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \right] = x^3 e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} m\omega^2 \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \quad (7)$$

Or, on sait que

$$\sqrt{\frac{\hbar^3 \omega}{m}} \int_0^x \left( \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \right)^3 e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} d\left(x \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\right) = - \sqrt{\frac{\hbar^3 \omega}{m}} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} \left( m \frac{\omega x^2}{\hbar} + 4 \right) \quad (8)$$

Il vient :

$$\frac{dW_1}{dx} = \frac{A}{x} (Bx^2 + 4)$$

avec

$$A = -\frac{\hbar^2 \beta^2}{4kT} \quad \text{et} \quad B = \frac{m\omega}{\hbar}$$

Le potentiel est donc de la forme :

$$W_1 = kx^2/2 + k' \text{Log } x \quad (9)$$

On rappelle que [4] en employant l'équation (20) (potentiel subquantique associé au système canonique perturbé adiabatiquement) le potentiel  $W'$  s'écrit :

$$W' = (mkT/\hbar)x^2.$$

On peut vérifier, enfin, par inversion, qu'il n'existe aucun état non trivial qui permette de rendre compatible les formes des potentiels déterminés par (20) et (29).

## RÉFÉRENCES

- [1] D. BOHM, *Causality and chance in modern physics*, Harper, 1957.
- [2] PRIGOGINE, *Étude thermodynamique des phénomènes irréversibles*, Dunod, 1957.
- [3] H. FREISSSTADT, *Nuovo Cimento*, t. 5, 1957, p. 1.
- [4] G. DELLA RICCIA and N. WIENER, *Quantum theory and Brownian motion*.  
Reprint of the Indiana University Bloomington.
- [5] G. G. COMISAR, *Phys. Rev.*, t. 138 B, 1965, p. 1332.
- [6] R. P. FEYNMAN, *Rev. mod. Phys.*, t. 2 C, 1948, p. 367.
- [7] S. CHANDRASEKHAR, *Rev. Mod. Phys.*, t. 15, 1943, p. 1.
- [8] R. M. STERNHEIMER, *Phys. Rev.*, t. 127, 1962, p. 812.
- [9] N. DUNFORD and J. T. SCHWARTZ, *Linear operators*, chap. 13.2.1, p. 1287.
- [10] N. DUNFORD and J. T. SCHWARTZ, *Linear operators*, chap. 12.4.30, p. 1238  
et chap. 13.2.14, p. 1295.

*Manuscrit reçu le 29 novembre 1967.*