ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

S. DESER

Décomposition covariante et énergie du champ gravitationnel

Annales de l'I. H. P., section A, tome 8, nº 3 (1968), p. 269-273

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1968__8_3_269_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. VIII, n° 3, 1968, p. 269-273.

Section A :
Physique théorique.

Décomposition covariante et énergie du champ gravitationnel (*)

par

S. DESER

(Institut Henri Poincaré, Paris
et Brandeis University, Weltham, Massachusetts).

RÉSUMÉ. — La décomposition covariante d'un tenseur symétrique permet une démonstration transparente, pour les systèmes à symétrie dans le temps, du résultat que l'énergie du champ gravitationnel est définie positive. Plus exactement, il est démontré que l'énergie, comme fonctionnelle de la géométrie, n'est stationnaire qu'à l'espace plat, près duquel elle est définie positive.

ABSTRACT. — The covariant decomposition of a symmetric tensor leads, for systems with a moment of time symmetry, to a transparent derivation of the result that the energy of the gravitational field is positive definite. More precisely, we show that the energy, as a functional of the geometry, has only one extremum—flat space—about which it is positive-definite.

Dans un article récent [*1*], nous avons défini la notion de décomposition covariante d'un champ tensoriel symétrique, généralisant aux espaces Riemanniens sa décomposition (quand $g_{ij} = \delta_{ij}$) en « purs » spins 2, 1 et 0. L'application qui nous intéressait principalement était le problème du signe de l'énergie du champ gravitationnel. Il s'agit de démontrer que ce signe est positif (et tel que $E = 0$ implique que l'espace-temps est plat), sans avoir à résoudre explicitement (ce qui n'est généralement pas possible) les équations de contrainte $G^0_\mu = 0$ en fonction d'une composante dite

(*) Supported in part by US Air Force, OSR Grant, AF 368-67.

« de contrainte » de la métrique [Les détails de la décomposition et du problème étant donnés dans [*1*], nous y renvoyons le lecteur, rappelant seulement ici les équations qui nous seront nécessaires].

Depuis l'apparition de [*1*], le problème a été résolu par D. Brill et l'auteur [*2*], utilisant une méthode variationnelle, où la décomposition covariante entre d'une manière essentielle pour la partie « cinétique » de l'énergie du champ. Nous appliquons cette même méthode ici, mais en utilisant la décomposition pour la partie « potentiel ». On obtient ainsi une démonstration élémentaire, dans le cas où l'énergie cinétique s'annule momentanément. Nous utiliserons ici le fait que, contrairement au tenseur métrique g_{ij}, qui ne peut être décomposé (étant le « tenseur unité » par rapport auquel la décomposition est définie), sa variation δg_{ij} le peut bien. La signification physique des diverses parties de la décomposition se dégagera en même temps.

L'énergie du champ gravitationnel (avec ou sans sources) est définie par une intégrale de flux (¹),

$$16\pi E = \oint dS_i(g_{ij,j} - g_{jj,i}) \equiv \oint dS_i g^T_{,i} \tag{1}$$

sur une surface spatiale $t = 0$ à l'infini. Cette définition est valable pour des systèmes isolés (asymptotiquement plats) dont la métrique a le comportement asymptotique

$$g_{\mu\nu} \sim \eta_{\mu\nu} + O(r^{-1}) \quad , \quad \partial_\alpha g_{\mu\nu} \sim O(r^{-2}) \tag{2}$$

dans une direction spatiale [Toutes les définitions usuelles d'énergie gravitationnelle sont équivalentes à (1) sous ces conditions].

D'autre part, les données initiales g_{ij} et leurs conjuguées π^{ij} sont liées par les contraintes $R^\mu = 0$:

$$\mathfrak{R}^0 \equiv \mathfrak{R} - \mathfrak{T} = 0 \tag{3 a}$$

$$\mathfrak{R}^i \equiv \nabla_j \pi^{ij} = 0 \tag{3 b}$$

où

$$\mathfrak{T} \equiv g^{-1/2}\left(\pi_{ij}\pi^{ij} - \frac{1}{2}\pi^i_i\pi^j_j\right).$$

C'est, en principe, à partir de (3 *a*) que la forme de l'énergie est donnée par (1) en résolvant $R^\mu = 0$ pour g^T en fonction des autres variables. La

(¹) La notation est celle de [*1*], indices latins (grecs), allant de 1 à 3 (0 à 3), signature (—, $+++$); unités : $16\pi\gamma = 1 = c$. Toutes opérations covariantes sont par rapport à la 3-métrique g_{ij} (= partie spatiale de $g_{\mu\nu}$) et les densités sont indiquées par les lettres gothiques.

décomposition covariante d'un tenseur symétrique arbitraire, T^{ij}, a surtout été exploitée dans [*1*] et [*2*] pour résoudre les conditions de transversalité (3 *b*) des π^{ij}. Nous nous bornons donc ici au cas complémentaire dit de « symétrie dans le temps » où les π^{ij} s'annulent à l'instant $t = 0$ et il ne reste que les g_{ij}, contraints à satisfaire la seule condition ((3*a*) avec $\pi^{ij} = 0$) que la courbure scalaire R s'annule (2).

La méthode variationnelle détermine les extréma de E (comme fonctionnelle des données initiales) et démontre qu'il n'y a qu'un seul : l'espace plat, dont on sait indépendamment [*3*] qu'il est un minimum. Les variations doivent évidemment respecter l'équation de contrainte, que nous écrivons

$$R \equiv g_{ij}R^{ij} = 0 \tag{4 a}$$

A cause de cette équation, nous pouvons aussi nous servir de l'identité de Bianchi, $\nabla_j G^{ij} \equiv 0$, sous la forme

$$\nabla_j R^{ij} = 0. \tag{4 b}$$

Les conditions (4*a*, *b*) astreignent donc R^{ij} à être sans trace et transverse. Rappelons maintenant les propriétés essentielles de la décomposition covariante :

$$T^{ij} = T^{ijTT} + \left(\nabla^i\nabla^j + \nabla^j\nabla^i - \frac{2}{3}g^{ij}\nabla_k T^k\right) + \frac{1}{2}(g^{ij}\Delta + \nabla^i\nabla^j)\psi \tag{5 a}$$

où

$$\nabla_j T^{ijTT} \equiv 0 \equiv T^{ijTT}g_{ij}. \tag{5 b}$$

T^{ijTT} est la partie transverse-trace nulle du tenseur arbitraire T^{ij} et le vecteur T^i et la scalaire Ψ sont donnés par des équations elliptiques en fonction de $\nabla_j T^{ij}$ et T^i_i (par ex. $\nabla\Psi = T^i_i$). La décomposition est évidemment orthogonale dans le sens qu'un vecteur « TT » l'est à tout tenseur ayant la forme (3) $\nabla^i W^j$ ou $g^{ij}\chi$:

$$\int d^3r\sqrt{g}\,T^{ijTT}\nabla_i W_j = 0 = \int d^3r\sqrt{g}\,\chi\, g_{ij}T^{ijTT} \tag{6}$$

l'intégration s'étendant sur tout l'espace $t = 0$.

---

(2) Une caractérisation alternative de tels systèmes est qu'ils admettent une surface minimale $\left(\pi^i_i = 0\right)$ sur laquelle la scalaire R de courbure intrinsèque s'annule.

(3) La décomposition, étant covariante, peut agir indifféremment sur T^{ij}, T_{ij} ou sur une densité $\mathfrak{T}^{ij}$, $\mathfrak{T}_{ij}$, de poids quelconque. L'intégrale dans (6) s'entend toujours avec la puissance explicite de $\sqrt{g}$ nécessaire pour rendre l'intégrande totale une densité scalaire.

Retenant le fait que $R^{ij} = R^{ij\mathrm{TT}}$ jouit de la propriété (6), prenons maintenant la variation de (4 *a*), qui doit rester nulle [4] :

$$\delta \mathfrak{R} \equiv \delta \mathfrak{g}^{ij} R_{ij} + \mathfrak{g}^{ij} \delta R_{ij} = 0 \tag{7}$$

En prenant l'intégrale de (7), nous avons

$$- \int d^3 r \mathfrak{g}^{ij} \delta R_{ij} = \int \delta \mathfrak{g}^{ij} R_{ij} d^3 r = \int d^3 r \delta \mathfrak{g}^{ij\mathrm{TT}} R_{ij} \tag{8}$$

où la possibilité de décomposer le tenseur $\delta \mathfrak{G}^{ij}$, nous a permis d'utiliser (6). Or, de l'identité de Palatini,

$$\delta R_{ij} = \nabla_k (\delta \Gamma^k_{ij}) - \nabla_j (\delta \Gamma^k_{ik}) \tag{9}$$

le membre gauche de (8) se réduit à la forme

$$\begin{aligned} - \int d^3 r \mathfrak{g}^{ij} \delta R_{ij} &= \int d^3 r [\nabla_k (\mathfrak{g}^{ij} \delta \Gamma^k_{ij}) - \nabla_j (\mathfrak{g}^{ij} \delta \Gamma^l_{il})] \\ &= \oint d S_k [\mathfrak{g}^{ij} \delta \Gamma^k_{ij} - \mathfrak{g}^{ik} \delta \Gamma^l_{il}] = \oint d S_k [\delta g_{kj,j} - \delta g_{jj,k}] \end{aligned} \tag{10}$$

Mais le membre droit de (10) est précisément la variation de l'énergie [5] (1), compte tenu des conditions limites (2), qui doivent être respectées par les δg_{ij} également

$$(\delta g_{ij} \sim O(r^{-1}), \qquad \delta(g_{ij,k}) \sim O(r^{-2})).$$

Donc, quand δE s'annule, on a

$$16\pi \delta E = \int \delta \mathfrak{g}^{ij\mathrm{TT}} R_{ij} d^3 r = 0, \tag{11}$$

ce qui implique

$$R_{ij}{}^{\mathrm{TT}} = R_{ij} = 0 \tag{12}$$

car $\delta \mathfrak{g}^{ij\mathrm{TT}}$ est arbitraire, seule la partie scalaire de $\delta \mathfrak{g}^{ij}$ étant déterminée, par $\delta R = 0$, en fonction des autres composantes. Ceci conclut la démonstra-

---

(4) Les variations des g_{ij} et π^{ij} du terme $\mathfrak{T}$ dans (3), nécessaires en principe, ne jouent pas ici, $\mathfrak{T}$ étant quadratique dans les π^{ij}; les coefficients de toute variation $\delta \mathfrak{T}$ seront donc au moins linéaires en π^{ij} et s'annuleront.

(5) Notons qu'ici on ne peut évidemment pas supposer *a priori* que les δg_{ij} décroissent rapidement à l'infini, puisque δE correspond en fait à une variation de g^{T} telle que

$$\delta g^{\mathrm{T}} \sim O(r^{-1}).$$

tion, car l'on sait (6) que $R_{ij} = 0$ et $\pi^{ij} = 0$ impliquent ensemble que l'espace est plat, $R_{\mu\nu\alpha\beta} = 0$ à $t = 0$ (et par conséquent pour tout temps).

La décomposition covariante permet donc, pour les systèmes à symétrie dans le temps, de démontrer en quelques lignes, de la définition (1) et des propriétés (4) (7) de R_{ij}, que l'espace plat est le seul « point » où l'énergie est stationnaire. Quant à la deuxième variation, l'on sait déjà qu'elle est définie positive près de l'espace plat. Sa partie « potentiel » ($\delta\pi^{ij} = 0$) s'écrit

$$\delta^2 E\,|_0 = \frac{1}{4}\int d^3r(\delta g^{TT}_{ij,k})^2$$

dans un système de coordonnées cartésiennes. Tenant compte de l'identité

$$\delta R_{ij} = \frac{1}{2}\nabla^2 \delta g^{TT}_{ij},$$

l'on a la forme amusante

$$\delta^2 E\,|_0 = \int \delta R_{ij}\left(-\frac{1}{\nabla^2}\right)\delta R_{ij} > 0.$$

Quant au sens physique des diverses parties de R_{ij} et δg_{ij}, il est clair que la partie « TT » représente la partie « spin 2 pur », qui contient les excitations dynamiques libres du champ. En effet, le tenseur R_{ij} est pur « TT » quand $R = 0$, et il suffit donc de démontrer que ses deux composantes R^{TT}_{ij} s'annulent. Le coefficient $\delta g_{ij}{}^{TT}$ de $R_{ij}{}^{TT}$ est, de même, la partie physique des variations de la métrique. Par contre, la partie spin 1,

$$\nabla_i \delta g_j + \nabla_j \delta g_i - \frac{2}{3} g_{ij} \nabla_k \delta g^k,$$

qui correspond aux changements de coordonnées (partie jauge) ne contribue pas, à cause de l'invariance de l'énergie vis-à-vis de ces transformations. Finalement, la partie « contrainte » $\delta\Psi$, de spin 0, représente δE même (terme de flux), mais ne contribue pas à l'intérieur, où son coefficient, R, s'annule.

RÉFÉRENCES

[1] S. Deser, *Ann. Inst. H.-Poincaré*, t. 7, 1967, p. 149.
[2] D. Brill et S. Deser, *Phys. Rev. Lett.*, t. 20, 1968, p. 75.
[3] H. Araki, *Ann. of Phys.*, t. 7, 1959, p. 456 et [2].

Manuscrit reçu le 24 octobre 1967.

(6) Voir par exemple [2].