

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

J. MANUCEAU

C^* -algèbre de relations de commutation

Annales de l'I. H. P., section A, tome 8, n° 2 (1968), p. 139-161

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1968__8_2_139_0>

© Gauthier-Villars, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

C*-algèbre de relations de commutation

par

J. MANUCEAU

ABSTRACT — We construct explicitly the abstract C*-algebra generated by Weyl's operators. Its main properties and physically interesting automorphisms are studied.

I. — INTRODUCTION

Dans tout ce qui suit, nous noterons \mathbb{R} (resp. \mathbb{C}), le corps des réels (resp. des complexes).

Soit H un espace préhilbertien, σ la partie imaginaire du produit scalaire. σ est une forme symplectique de H , c'est-à-dire, une forme \mathbb{R} -bilinéaire

$$(\sigma(\alpha\psi + \alpha'\psi', \varphi) = \alpha\sigma(\psi, \varphi) + \alpha'\sigma(\psi', \varphi'),$$

$$\sigma(\psi, \alpha\varphi + \alpha'\varphi') = \alpha\sigma(\psi, \varphi) + \alpha'\sigma(\psi, \varphi'),$$

pour tout $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$ et pour tout $\psi, \psi', \varphi, \varphi' \in H$), antisymétrique

$$(\sigma(\psi, \varphi) = -\sigma(\varphi, \psi)$$

pour tout $\varphi, \psi \in H$) et régulière ($\sigma(\psi, \varphi) = 0$ pour tout $\psi \in H$, implique $\varphi = 0$). Un système de Weyl (ou représentation des relations de commutation) est une application W de H dans le groupe unitaire des opérateurs bornés agissant sur un espace de Hilbert et vérifiant les deux propriétés :

a) $W(\psi)W(\varphi) = e^{-i\sigma(\psi, \varphi)}W(\psi + \varphi)$ pour tout $\psi, \varphi \in H$,

b) $\lambda \in \mathbb{R} \rightarrow W(\lambda\psi)$ est faiblement (ou fortement) continue pour tout $\psi \in H$.

Nous voyons donc que les systèmes de Weyl ne dépendent que de la structure symplectique de H . Cela nous amène à considérer par la suite un espace symplectique, c'est-à-dire, un espace vectoriel réel H muni d'une forme symplectique σ . Cet espace sera noté (H, σ) . Dans certains cas nous serons amenés à considérer des structures préhilbertiennes σ -permises sur (H, σ) . Une structure préhilbertienne σ -permise est donnée par un opérateur linéaire J de H vérifiant : $J^2 = -1$, $\sigma(J\psi, J\varphi) = \sigma(\psi, \varphi)$ et $-\sigma(J\psi, \psi) \geq 0$ pour tout $\psi, \varphi \in H$. Alors en posant $i\psi = J\psi$ où i est le nombre imaginaire pur et $s(\psi, \varphi) = \sigma(J\psi, \varphi)$ pour tout $\psi, \varphi \in H$, H devient un espace vectoriel complexe et $h = s + i\sigma$ une forme hermitienne non dégénérée de H . (H, h) est donc un espace préhilbertien et la partie imaginaire de h est précisément σ , justifiant ainsi la terminologie.

Le but principal de cet article est de construire une C^* -algèbre associée à un espace symplectique (H, σ) (nous l'appellerons « C^* -algèbre des relations de commutation » et la noterons $\overline{\Delta(H, \sigma)}$), telle qu'il y ait une bijection entre l'ensemble des systèmes de Weyl de (H, σ) et certaines représentations de $\overline{\Delta(H, \sigma)}$.

Le deuxième chapitre est consacré à la construction de $\overline{\Delta(H, \sigma)}$; le troisième sera consacré aux principales propriétés de cette C^* -algèbre.

Nous étudions dans le quatrième chapitre certains automorphismes de $\overline{\Delta(H, \sigma)}$ ayant un intérêt physique. Une étude analogue a déjà été faite dans [2]. Nous en avons repris les démonstrations, plus simples dans le cadre présent.

2. — DÉFINITION DE $\overline{\Delta(H, \sigma)}$

2.1. Préliminaires.

Soit (H, σ) un espace symplectique. Un sous-espace vectoriel E de H est dit régulier si σ restreinte à $E \times E$ est régulière. Soit \mathcal{S} l'ensemble de tous les sous-espaces vectoriels réguliers de H , de dimension finie.

2.1.1. \mathcal{S} est un système filtrant (i. e. pour tout $E_1, E_2 \in \mathcal{S}$, il existe $E_3 \in \mathcal{S}$ tel que $E_1 \cup E_2 \subset E_3$) et absorbant

$$\left(\text{i. e. } H = \bigcup_{E \in \mathcal{S}} E \right)$$

de H .

Cette proposition sera établie quand nous aurons prouvé que pour tout sous-espace vectoriel de dimension finie E de H , il existe un élément F de \mathcal{S} tel que $E \subset F$.

Soit E un sous-espace vectoriel de dimension finie de H et e_1 un élément de E . Puisque σ est régulière, il existe $f_1 \in H$ tel que $\sigma(e_1, f_1) = 1$; on prendra f_1 dans E si possible. Notons E_1 le sous-espace vectoriel de H engendré par le couple (e_1, f_1) et E'_1 le sous-espace orthogonal à E_1 (i. e. l'ensemble des $x \in H$ tels que $\sigma(x, e_1) = \sigma(x, f_1) = 0$). Il est clair que E_1 et E'_1 sont réguliers et que $H = E_1 \oplus E'_1$. Montrons que $E = E_1 \cap E \oplus E'_1 \cap E$: si $x \in E$ alors $x = x_1 + x_2$ où $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E'_1$. Il reste à démontrer que $x_1 \in E$ et $x_2 \in E$. Si $f_1 \in E$, alors $x_1 = \alpha e_1 + \beta f_1$ où $\alpha = \sigma(x_1, f_1)$ et $\beta = \sigma(e_1, x_1)$ ce qui implique $x_1 \in E$ et $x_2 = x - x_1 \in E$. Si $f_1 \notin E$, alors $\sigma(x, e_1) = 0$ et comme $\sigma(x_2, e_1) = 0$ nous en déduisons que $\sigma(x_1, e_1) = 0$ donc $x_1 = \alpha e_1 \in E$ où $\alpha = \sigma(x_1, f_1)$ et $x_2 = x - x_1 \in E$. Si $E'_1 \cap E \neq \{0\}$ nous recommençons cette construction en prenant E'_1 au lieu de H et $E'_1 \cap E$ au lieu de E . Comme E est de dimension finie, en répétant cette construction un nombre fini de fois nous obtiendrons un élément F de \mathcal{S} (engendré par $e_1, f_1, e_2, f_2, \dots, e_n, f_n$) tel que $E \subset F$.

2.2. Définition de $\Delta(H, \sigma)$.

Notons $\Delta(H, \sigma)$ l'ensemble des fonctions qui appliquent H dans \mathbb{C} et qui s'annulent sur tous les éléments de H sauf sur un nombre fini d'entre eux.

2.2.1. $\Delta(H, \sigma)$ muni des lois, de l'involution et de la norme suivantes :

$$(a + b)(\psi) = a(\psi) + b(\psi)$$

$$(\alpha \cdot a)(\psi) = \alpha \cdot a(\psi)$$

$$(a \cdot b)(\psi) = \sum_{\varphi \in H} a(\varphi)b(\psi - \varphi)e^{-i\sigma(\varphi, \psi)} = \sum_{\varphi \in H} a(\psi - \varphi)b(\varphi)e^{i\sigma(\varphi, \psi)}$$

$$a^*(\psi) = \overline{a(-\psi)}$$

$$\|a\|_1 = \sum_{\varphi \in H} |a(\varphi)|, \quad \forall a, b \in \Delta(H, \sigma), \quad \forall \psi \in H, \quad \forall \alpha \in \mathbb{C},$$

est une algèbre normée involutive.

Les sommes qui interviennent dans les égalités ci-dessus ont un sens car un nombre fini seulement de termes sont non nuls. La proposition

est facile à établir ; montrons seulement que $(a \cdot b)^* = b^* \cdot a^*$ et que $\|a \cdot b\|_1 \leq \|a\|_1 \cdot \|b\|_1$:

$$\begin{aligned} (a \cdot b)^*(\psi) &= \overline{(a \cdot b)(-\psi)} = \sum_{\varphi} \overline{a(\varphi)b(-\psi-\varphi)} e^{-i\sigma(\varphi, \psi)} = \sum_{\varphi} \overline{a(-\varphi)b(\varphi-\psi)} e^{i\sigma(\varphi, \psi)} \\ &= (b^* \cdot a^*)(\psi) \text{ et } \|a \cdot b\|_1 = \sum_{\psi \in \mathbf{H}} \left| \sum_{\varphi \in \mathbf{H}} a(\varphi)b(\psi-\varphi) e^{-i\sigma(\varphi, \psi)} \right| \\ &\leq \sum_{\psi \in \mathbf{H}} \sum_{\varphi \in \mathbf{H}} |a(\varphi)| |b(\psi-\varphi)| \leq \|a\|_1 \cdot \|b\|_1. \end{aligned}$$

Notons δ_ψ l'élément de $\Delta(\mathbf{H}, \sigma)$ qui vérifie : $\delta_\psi(\varphi) = 0$ si $\psi \neq \varphi$ et $\delta_\psi(\psi) = 1$.

2.2.2. $\delta_\psi \cdot \delta_\varphi = e^{-i\sigma(\psi, \varphi)} \delta_{\psi+\varphi}$; δ_0 est l'élément neutre de $\Delta(\mathbf{H}, \sigma)$; $(\delta_\psi)^* = \delta_{-\psi} = (\delta_\psi)^{-1}$. De plus l'ensemble $\delta = \{ \delta_\psi \mid \psi \in \mathbf{H} \}$ est une base de $\Delta(\mathbf{H}, \sigma)$.

Pour démontrer la première partie de la proposition il suffit d'utiliser les définitions. δ est un système libre car

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{\psi_i} = 0 \Leftrightarrow \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{\psi_i} \right\|_1 = \sum_{i=1}^n |\alpha_i| = 0 \Leftrightarrow \alpha_i = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

δ est un système générateur à cause de la définition même de $\Delta(\mathbf{H}, \sigma)$.

2.2.3. $\Delta(\mathbf{H}, \sigma)$ est simple.

Montrons que toute représentation π non dégénérée de $\Delta(\mathbf{H}, \sigma)$ est fidèle. A cause de ([3], 2.2.7) nous pouvons supposer que π admet un vecteur totalisateur ψ_0 . Il est clair que $\pi(\delta_0)$ est l'identité puisque

$$\pi(\delta_0)\pi(a)\psi_0 = \pi(a)\psi_0$$

pour tout $a \in \Delta(\mathbf{H}, \sigma)$. Nous allons démontrer par récurrence que

$$\pi(\delta) = \{ \pi(\delta_\psi) \mid \psi \in \mathbf{H} \}$$

est un système libre. Pour tout $\psi \in \mathbf{H}$, $\pi(\delta_\psi) \neq 0$ car $\pi(\delta_{-\psi}) = \pi(\delta_\psi)^{-1}$. Supposons que tous les sous-systèmes de $\pi(\delta)$ de n éléments soient libres et que

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i \delta_{\psi_i} = 0$$

Cette dernière égalité implique

$$\pi(\delta_0) = \sum_{i=1}^n b_i \delta_{\varphi_i}$$

où $\varphi_i = \psi_i - \psi_{n+1}$ et $b_i = -a_i e^{i\sigma(\psi_{n+1}, \varphi_i)}$. D'où, pour tout $\psi \in H$,

$$\pi(\delta_\psi) \pi(\delta_0) \pi(\delta_{-\psi}) = \pi(\delta_0),$$

c'est-à-dire

$$\sum_{i=1}^n b_i \pi(\delta_{\varphi_i}) = \sum_{i=1}^n b_i e^{-2i\sigma(\psi, \varphi_i)} \pi(\delta_{\varphi_i}).$$

L'hypothèse de récurrence implique $e^{-2i\sigma(\psi, \varphi_i)} = 1$ pour tout $\psi \in H$, donc $\varphi_1 = \dots = \varphi_n = 0$ et $\psi_1 = \dots = \psi_{n+1}$.

La complétée $\Delta_1(H, \sigma)$ de $\Delta(H, \sigma)$ est une algèbre de Banach involutive. Elle est formée de toutes les fonctions a qui appliquent H dans \mathbb{C} et en

vérifiant $\sum_{\psi \in H} |a(\psi)| < +\infty$ (cette dernière condition implique évidemment que a s'annule sur tous les éléments de H sauf sur un sous-ensemble au plus dénombrable d'entre eux).

2.2.4. $\Delta_1(H, \sigma) \subset M_1(H, \sigma)$.

Rappelons que $M_1(H, \sigma)$ a été défini dans [I]. Il n'y a pas d'inclusion au sens ensembliste, mais nous allons construire un monomorphisme isométrique de $\Delta_1(H, \sigma)$ dans $M_1(H, \sigma)$. Considérons l'homomorphisme défini par $T : \delta_\psi \in \Delta(H, \sigma) \rightarrow \delta_\psi \in M_1(H, \sigma)$. C'est cette confusion de notation que nous justifions. Montrons que T est isométrique. Pour tout

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{\psi_i} \in M_1(H, \sigma),$$

soit E un élément de \mathcal{S} (ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension finie et réguliers de H) contenant $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$. Nous savons que

$$\left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{\psi_i} \right\|_1 = \sup_{\substack{f \in \mathcal{C}_\infty(E) \\ \|f\|_\infty = 1}} \left| \sum_{i=1}^n \alpha_i f(\psi_i) \right| \leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i|.$$

Montrons que cette borne est atteinte.

Posons $\alpha_j = |\alpha_j| e^{i\theta_j}$ pour tout $j = 1, \dots, n$. Considérons une structure

préhilbertienne σ -permise quelconque sur E (elles induisent toutes la même topologie puisque $\dim E < +\infty$). E étant maintenant un espace vectoriel topologique séparé nous pouvons construire des voisinages V_j des ψ_j disjoints deux à deux. Soit g_j la fonction continue à valeurs réelles qui est égale à θ_j sur ψ_j et nulle en dehors de V_j ; alors $f_j = e^{-i\theta_j}$ est une fonction continue telle que $\|f_j\|_\infty = 1$, $f_j(\psi_j) = e^{-i\theta_j}$ et $f_j(\psi) = 1$ si $\psi \notin V_j$. Donc $f = f_1, f_2, \dots, f_n$ est la fonction de $\mathcal{C}_\infty(E)$ telle que $\|f\|_\infty = 1$ et

$$\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{\psi_i} \right) (f) = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|.$$

T est donc bien isométrique. Il s'étend à $\Delta_1(H, \sigma)$ en un monomorphisme isométrique.

2.3. Définition de $\overline{\Delta(H, \sigma)}$.

Soit $\mathcal{R}(H, \sigma)$ l'ensemble des représentations non dégénérées π de $\Delta(H, \sigma)$ vérifiant : $\lambda \in \mathbb{R} \rightarrow \pi(\delta_{\lambda\psi})$ est faiblement (ou fortement) continue quel que soit $\psi \in H$.

2.3.1. Pour tout $a \in \Delta(H, \sigma)$, le nombre

$$\|a\| = \sup_{\pi \in \mathcal{R}} \|\pi(a)\|$$

est fini. L'application $a \rightarrow \|a\|$ est une norme sur $\Delta(H, \sigma)$ vérifiant :

$$\|ab\| \leq \|a\| \cdot \|b\|, \quad \|a^*\| = \|a\| \quad \text{et} \quad \|a^*a\| = \|a\|^2$$

quels que soient $a, b \in \Delta(H, \sigma)$.

Nous avons déjà vu dans 2.2.3 que pour toute représentation π non dégénérée de $\Delta(H, \sigma)$ et pour tout $\psi \in H$, $\pi(\delta_\psi)$ est unitaire ; par conséquent $\|\pi(\delta_\psi)\| = 1$. Ceci implique, pour tout

$$\sum_{i=1}^n a_i \delta_{\psi_i} \in \Delta(H, \sigma), \quad \left\| \pi \left(\sum_{i=1}^n a_i \delta_{\psi_i} \right) \right\| \leq \sum_{i=1}^n |a_i| = \left\| \sum_{i=1}^n a_i \delta_{\psi_i} \right\|_1 < +\infty.$$

L'application $a \rightarrow \|a\|$ est une norme sur $\Delta(H, \sigma)$ (2.2.3). Comme pour tout $\pi \in \mathcal{R}(H, \sigma)$, nous avons $\|\pi(a^*)\| = \|\pi(a)\|$ et $\|\pi(a^*a)\| = \|\pi(a)\|^2$ nous en déduisons : $\|a^*\| = \|a\|$ et $\|a^*a\| = \|a\|^2$. De plus, quel que soit $\pi \in \mathcal{R}(H, \sigma)$, $\|\pi(a \cdot b)\| \leq \|\pi(a)\| \cdot \|\pi(b)\| \leq \|a\| \cdot \|b\|$; donc

$$\|a \cdot b\| \leq \|a\| \cdot \|b\|.$$

Il est clair que l'algèbre $\overline{\Delta(H, \sigma)}$ complétée de $\Delta(H, \sigma)$ pour la norme définie dans 2.3.1 est une C*-algèbre. Elle est appelée : « C*-algèbre des relations de commutation ». La raison en apparaîtra au paragraphe suivant.

Si $\pi \in \mathcal{R}(H, \sigma)$, $\|\pi(a)\| \leq \|a\|$ quel que soit $a \in \Delta(H, \sigma)$. Par conséquent il existe une représentation unique π' de $\overline{\Delta(H, \sigma)}$ telle que $\pi' \upharpoonright \Delta(H, \sigma) = \pi$. Pour cela dans tout ce qui va suivre nous supposons que les éléments de $\mathcal{R}(H, \sigma)$ sont définis sur $\overline{\Delta(H, \sigma)}$.

3. — PROPRIÉTÉS DE $\overline{\Delta(H, \sigma)}$

3.1. Représentations des relations de commutation.

Soit $\mathcal{W}(H, \sigma)$ l'ensemble des systèmes de Weyl de (H, σ) .

3.1.1. Pour tout $\pi \in \mathcal{R}(H, \sigma)$, l'application W définie par $W(\psi) = \pi(\delta_\psi)$ pour tout $\psi \in H$, est un élément de $\mathcal{W}(H, \sigma)$.

Cette proposition se déduit immédiatement des définitions de $\mathcal{R}(H, \sigma)$ et $\mathcal{W}(H, \sigma)$. Réciproquement nous avons

3.1.2. Quel que soit $W \in \mathcal{W}(H, \sigma)$, il existe un et un seul élément π de $\mathcal{R}(H, \sigma)$ qui vérifie : $\pi(\delta_\psi) = W(\psi)$ pour tout $\psi \in H$.

Unicité : s'il existe $\pi \in \mathcal{R}(H, \sigma)$ vérifiant $\pi(\delta_\psi) = W(\psi)$ alors, pour tout

$$\sum_{i=1}^n a_i \delta_{\psi_i} \in \Delta(H, \sigma), \quad \pi\left(\sum_{i=1}^n a_i \delta_{\psi_i}\right) = \sum_{i=1}^n a_i W(\psi_i)$$

ce qui implique l'unicité de π .

Existence : pour tout $\sum_{i=1}^n a_i \delta_{\psi_i} \in \Delta(H, \sigma)$ (où $\psi_i \neq \psi_j$ si $i \neq j$), l'application π définie par

$$\pi\left(\sum_{i=1}^n a_i \delta_{\psi_i}\right) = \sum_{i=1}^n a_i W(\psi_i)$$

est un élément de $\mathcal{R}(H, \sigma)$. En effet, l'égalité ci-dessus définit bien π car les δ_ψ sont linéairement indépendants. Les propriétés $\pi(a + b) = \pi(a) + \pi(b)$ et $\pi(a \cdot b) = \pi(a) \cdot \pi(b)$ pour tout $a, b \in \Delta(H, \sigma)$ se déduisent de la définition

de π , valable même si les ψ_i , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, ne sont pas tous différents :

$\pi(\alpha\delta_\psi + \beta\delta_\psi) = \pi((\alpha + \beta)\delta_\psi) = (\alpha + \beta)W(\psi) = \alpha W(\psi) + \beta W(\psi)$, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et $\psi \in H$. La propriété $\pi(\alpha a) = \alpha\pi(a)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ et $a \in \Delta(H, \sigma)$ est évidente. Enfin, $\pi(a)^* = \pi(a^*)$ quel que soit $a \in \Delta(H, \sigma)$ car $W(\psi)^* = W(-\psi)$; en effet, par définition même de $\mathcal{W}(H, \sigma)$,

$$W(\psi)W(-\psi) = W(-\psi)W(\psi) = W(0)$$

qui est l'identité, puisque dans le groupe unitaire $W(0)W(0) = W(0)$.

Ces deux dernières propositions réalisent une bijection entre $\mathcal{R}(H, \sigma)$ et $\mathcal{W}(H, \sigma)$ qui à $\pi \in \mathcal{R}(H, \sigma)$ fait correspondre $W_\pi \in \mathcal{W}(H, \sigma)$ définie par $W_\pi(\psi) = \pi(\delta_\psi)$. On voit aisément que

3.2.3. *Pour tout $\pi \in \mathcal{R}(H, \sigma)$, π est cyclique (resp. irréductible) si et seulement si W_π est cyclique (resp. irréductible).*

Au lieu des systèmes de Weyl de (H, σ) nous sommes donc ramenés à étudier les représentations π de $\overline{\Delta(H, \sigma)}$ telles que $\lambda \in \mathbb{R} \rightarrow \pi(\delta_{\lambda\psi})$ soit continue pour tout $\psi \in H$ (i. e. $\pi \in \mathcal{R}(H, \sigma)$).

3.2. Formes positives de $\overline{\Delta(H, \sigma)}$.

Soit \mathcal{F} , l'ensemble de toutes les fonctions f appliquant H dans \mathbb{C} et vérifiant

$$\sum_{k,j=1}^n \bar{a}_k a_j e^{i\sigma(\psi_k, \psi_j)} f(\psi_j - \psi_k) \geq 0$$

pour tout $a_k \in \mathbb{C}$, $\psi_k \in H$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ et $n \in \mathbb{N}$.

3.2.1. *Pour tout $f \in \mathcal{F}$, il existe une forme positive continue unique ω_f , telle que $\omega_f(\delta_\psi) = f(\psi)$ pour tout $\psi \in H$.*

Unicité : s'il existe une forme positive ω_f de $\Delta(H, \sigma)$ telle que $\omega_f(\delta_\psi) = f(\psi)$ alors, pour tout

$$\sum_{i=1}^n a_i \delta_{\psi_i} \in \Delta(H, \sigma), \quad \omega_f\left(\sum_{i=1}^n a_i \delta_{\psi_i}\right) = \sum_{i=1}^n a_i f(\psi_i)$$

ce qui implique l'unicité de ω_f .

Existence : pour tout $\sum_{i=1}^n a_i \delta_{\psi_i} \in \Delta(\mathbb{H}, \sigma)$ (où $\psi_j \neq \psi_i$ si $j \neq i$), l'application ω_f (qui applique $\Delta(\mathbb{H}, \sigma)$ dans \mathbb{C}) définie par

$$\omega_f\left(\sum_{i=1}^n a_i \delta_{\psi_i}\right) = \sum_{i=1}^n a_i f(\psi_i)$$

est une forme positive continue. En effet, l'égalité ci-dessus définit bien ω_f car les δ_ψ sont linéairement indépendants. La propriété

$$\omega_f(a + b) = \omega_f(a) + \omega_f(b)$$

pour tout $a, b \in \Delta(\mathbb{H}, \sigma)$ résulte de la définition de ω_f valable même si les $\psi_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}$, ne sont pas tous distincts :

$$\omega_f(\alpha \delta_\psi + \beta \delta_\psi) = \omega_f((\alpha + \beta)\delta_\psi) = (\alpha + \beta)f(\psi) = \alpha f(\psi) + \beta f(\psi).$$

La propriété $\omega_f(\alpha a) = \alpha \omega_f(a)$ est évidente. ω_f est une forme positive puisque

$$\begin{aligned} \omega_f\left(\left(\sum_{i=1}^n a_i \delta_{\psi_i}\right)^* \left(\sum_{i=1}^n a_i \delta_{\psi_i}\right)\right) &= \omega_f\left(\sum_{k,j=1}^n \bar{a}_k a_j e^{i\sigma(\psi_k, \psi_j)} \delta_{\psi_j - \psi_k}\right) \\ &= \sum_{k,j=1}^n \bar{a}_k a_j e^{i\sigma(\psi_k, \psi_j)} f(\psi_j - \psi_k) \end{aligned}$$

et puisque $f \in \mathcal{F}$ ([3], 2.1.2, (3) et (4)) impliquent $\overline{f(\psi)} = f(-\psi)$ et $|f(\psi)| \leq f(0)$ pour tout $\psi \in \mathbb{H}$. Cette dernière inégalité prouve la continuité de ω_f car

$$\left| \omega_f\left(\sum_{i=1}^n a_i \delta_{\psi_i}\right) \right| \leq \sum_{i=1}^n |a_i| \cdot |f(\psi_i)| \leq f(0) \cdot \left\| \sum_{i=1}^n a_i \delta_{\psi_i} \right\|_1.$$

Pour tout $f \in \mathcal{F}$ soit π_f la représentation associée à ω_f par la construction de Guelfand-Naimark ([3], 2.4.4).

3.2.2. Soit f un élément de \mathcal{F} ; pour que $\pi_f \in \mathcal{R}(\mathbb{H}, \sigma)$ il faut et il suffit que l'application $\lambda \in \mathbb{R} \rightarrow f(\lambda\psi + \varphi)$ soit continue quels que soient $\psi, \varphi \in \mathbb{H}$. Alors, ω_f peut être étendue en une forme positive de $\overline{\Delta(\mathbb{H}, \sigma)}$.

Si $\pi_f \in \mathcal{R}(\mathbb{H}, \sigma)$, alors l'application

$$\lambda \in \mathbb{R} \rightarrow e^{i\lambda\sigma(\psi, \varphi)} (\delta_0 | \pi_f(\delta_{\lambda\psi}) \delta_\varphi) = f(\lambda\psi + \varphi)$$

est continue pour tout $\varphi, \psi \in H$ (rappelons que \hat{a} est l'image canonique de $a \in \Delta(H, \sigma)$ dans l'espace de représentation H_{π_f} de π_f). Réciproquement supposons que l'application $\lambda \in \mathbb{R} \rightarrow f(\lambda\psi + \varphi)$ soit continue pour tout $\psi, \varphi \in H$. Quel que soit $\mu \in H_{\pi_f}$, nous savons qu'il existe un élément

$$a = \sum_{i=1}^n a_i \delta_{\psi_i} \in \Delta(H, \sigma) \quad \text{tel que} \quad \left\| \sum_{i=1}^n a_i \hat{\delta}_{\psi_i} - \mu \right\| \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \left\| \pi_f(\delta_{\lambda\psi})\mu - \mu \right\| &\leq 2 \left\| \mu - \hat{a} \right\| + \left\| \pi_f(\delta_{\lambda\psi})\hat{a} - \hat{a} \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2 \left\{ \omega_f(a^*a) \right. \\ &\quad \left. - \Re e \omega_f(a^* \delta_{\lambda\psi} a) \right\} = \frac{\varepsilon}{2} - 2 \left\{ \sum_{k,j=1}^n \bar{a}_k a_j e^{i\sigma(\psi_k, \psi_j)} f(\psi_j - \psi_k) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k,j=1}^n \bar{a}_k a_j e^{i\sigma(\psi_k, \psi_j)} e^{i\lambda\sigma(\psi_k + \psi_j, \psi)} f(\lambda\psi + \psi_j - \psi_k) \right\} \end{aligned}$$

qui peut être majoré par ε en choisissant λ suffisamment petit, d'après l'hypothèse. La dernière partie de la proposition résulte du fait que

$$\omega_f(a) = (\hat{\delta}_0 | \pi_f(a)\hat{\delta}_0)$$

pour tout $a \in \Delta(H, \sigma)$ et de 2.2.

Notons \mathcal{F}_0 l'ensemble des éléments $f \in \mathcal{F}$ tels que $\pi_f \in \mathcal{R}$.

3.2.3. Pour toute structure préhilbertienne σ -permise de (H, σ) , pour tout opérateur hermitien (pour la structure préhilbertienne choisie) B de H et pour tout $f \in \mathcal{F}_0$, l'application $\lambda \in \mathbb{R} \rightarrow \pi_f(\delta_{e^{i\lambda B}\psi})$ (resp. $\psi \in H \rightarrow \pi_f(\delta_\psi)$) est faiblement (ou fortement) continue quel que soit $\psi \in H$, si et seulement si l'application $\lambda \in \mathbb{R} \rightarrow f(e^{i\lambda B}\psi + \varphi)$ (resp. f) est continue pour tout $\varphi, \psi \in H$.

La démonstration de cette proposition est tout à fait analogue à celle de 3.2.2.

Notons \mathcal{F}_B (resp. \mathcal{F}') l'ensemble des éléments f de \mathcal{F}_0 tels que l'application $\lambda \in \mathbb{R} \rightarrow f(\lambda\psi + \varphi)$ (resp. f) soit continue quels que soient $\psi, \varphi \in H$. Évidemment $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}_A \subset \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$. Les représentations associées aux éléments de \mathcal{F}_0 , sont toutes les représentations cycliques des relations de commutation.

Considérons une structure préhilbertienne σ -permise particulière de (H, σ) et soit s la partie réelle du produit scalaire correspondant. Soit f_s

la fonction définie par $f_s(\psi) = e^{-\frac{1}{2}s(\psi, \psi)}$ pour tout $\psi \in H$. Il est démontré dans [I] que $f_s \in \mathcal{F}'$. La représentation π_{f_s} (notée aussi π_s) est appelée « représentation de Fock » (ou « représentation de Schrödinger » si $\dim H < +\infty$). On sait que π_s est irréductible, ou, ce qui est équivalent, ω_{f_s} (notée aussi ω_s) est un état pur.

Supposons que $\dim H < +\infty$. J. von Neumann a démontré que toutes les représentations $\pi \in \mathcal{R}(H, \sigma)$ sont des sommes directes de représentations unitairement équivalentes à π_s [II]. Ceci implique : pour tout $x \in H$ et tout $\pi \in \mathcal{R}(H, \sigma)$, $\|\pi(x)\| = \|\pi_s(x)\| = \|x\|$ et toutes les représentations de Schrödinger sont unitairement équivalentes.

Dans le cas où la dimension de H est infinie nous pouvons avoir des représentations de Fock non unitairement équivalentes.

3.3. $\overline{\Delta(H, \sigma)}$ est limite inductive de C*-algèbres.

Le système \mathcal{S} étant absorbant il est évident que $\Delta(H, \sigma) = \bigcup_{E \in \mathcal{S}} \Delta(E, \sigma)$.

3.3.1. Pour tout $E \in \mathcal{S}$, $\overline{\Delta(E, \sigma)} \subset \overline{\Delta(H, \sigma)}$.

Comme $\Delta(E, \sigma) \subset \Delta(H, \sigma)$, pour établir la proposition il suffit de prouver que la norme de $\overline{\Delta(H, \sigma)}$ (notée $\|\alpha\|$) restreinte à $\Delta(E, \sigma)$ est la même que celle de $\overline{\Delta(E, \sigma)}$ (notée $\|\alpha\|_E$). Pour tout $\pi \in \mathcal{R}(H, \sigma)$, il est clair que $\pi_E = \pi|_{\Delta(E, \sigma)} \in \mathcal{R}(E, \sigma)$. Or, d'après 3.2, pour tout $a \in \Delta(E, \sigma)$,

$$\|\pi(a)\| = \|\pi_E(a)\| = \|a\|_E$$

ce qui prouve :

$$\|a\| = \sup_{\pi \in \mathcal{R}(H, \sigma)} \|\pi(a)\| = \|a\|_E.$$

De 3.3.1 il résulte que si E et F sont deux éléments de \mathcal{S} tels que $E \subset F$, alors $\overline{\Delta(E, \sigma)} \subset \overline{\Delta(F, \sigma)}$. En outre, pour tout $\pi \in \mathcal{R}(H, \sigma)$ et tout $a \in \Delta(H, \sigma)$, $\|a\| = \|\pi(a)\|$. Cette dernière conséquence nous montre que $\overline{\Delta(H, \sigma)} \subset \overline{M_1(H, \sigma)}$ (2.2.4 et [I]).

3.3.2. $\overline{\Delta(H, \sigma)}$ est la limite inductive de l'ensemble de C*-algèbres $\{\overline{\Delta(E, \sigma)} \mid E \in \mathcal{S}\}$.

La notion de limite inductive a été définie dans [5]. Pour établir cette proposition, il suffit de remarquer que

$$\Delta(H, \sigma) = \bigcup_{E \in \mathcal{S}} \Delta(E, \sigma) \subset \bigcup_{E \in \mathcal{S}} \overline{\Delta(E, \sigma)} \subset \overline{\Delta(H, \sigma)}$$



(3.3.1 et 2.1.1) ce qui prouve que $\overline{\Delta(\mathbb{H}, \sigma)}$ est la complétion de $\bigcup_{E \in \mathcal{S}} \overline{\Delta(E, \sigma)}$.

3.3.3. $\overline{\Delta(\mathbb{H}, \sigma)}$ n'est pas séparable.

Soit π_s une représentation de Fock particulière de $\Delta(\mathbb{H}, \sigma)$. Pour tout $\psi \in \mathbb{H}$ et non nul,

$$\begin{aligned} \|\delta_0 - \delta_\psi\|^2 &= \|\pi_s(\delta_0 - \delta_\psi)\|^2 \\ &= \sup_{a \in \Delta(\mathbb{H}, \sigma)} \frac{\omega_s(a^*(\delta_0 - \delta_\psi)(\delta_0 - \delta_\psi)a)}{\omega_s(a^*a)} \geq 2 \sup_{\varphi \in \mathbb{H}} \left\{ 1 - \operatorname{Re} e^{2i\sigma(\psi, \varphi)} e^{-\frac{1}{2}s(\psi, \psi)} \right\}. \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des boules ouvertes de centre δ_ψ et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$ quand ψ parcourt \mathbb{H} , forme un ensemble non dénombrable d'ouverts de $\overline{\Delta(\mathbb{H}, \sigma)}$ deux à deux disjoints. Ceci prouve que $\overline{\Delta(\mathbb{H}, \sigma)}$ n'est pas séparable.

3.3.4. Pour toute structure préhilbertienne σ -permise et pour toute représentation π de $\overline{\Delta(\mathbb{H}, \sigma)}$ telle que $\psi \rightarrow \pi(\delta_\psi)$ soit faiblement continue, nous avons :

$$\overline{\pi(\overline{\Delta(\mathbb{H}, \sigma)})} = \overline{\pi(\overline{\Delta(\overline{\mathbb{H}}, \sigma)})}$$

où $\overline{\mathbb{H}}$ est la complétée de \mathbb{H} .

Si $\psi \in \overline{\mathbb{H}} - \mathbb{H}$, $\pi(\delta_\psi)$ peut être approché (pour la topologie faible), d'après l'hypothèse, par des éléments de la forme $\pi(\delta_\varphi)$. Par conséquent $\pi(\overline{\Delta(\mathbb{H}, \sigma)})$ est dense dans $\pi(\overline{\Delta(\overline{\mathbb{H}}, \sigma)})$, ce qui établit la proposition.

3.4. Décomposition de $\overline{\Delta(\mathbb{H}, \sigma)}$ en produit tensoriel.

Soit \mathcal{A} et \mathcal{B} deux C^* -algèbres, $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ leur produit tensoriel algébrique ($\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ est donc une algèbre involutive), π_1 et π_2 deux représentations fidèles de \mathcal{A} et \mathcal{B} respectivement. Pour tout

$$\sum_{i=1}^n a_i \times b_i \in \mathcal{A} \times \mathcal{B},$$

posons

$$\left\| \sum_{i=1}^n a_i \times b_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n \pi_1(a_i) \times \pi_2(b_i) \right\|.$$

Il est clair que l'application $\alpha \in \mathcal{A} \times \mathcal{B} \rightarrow \|\alpha\|$ est une norme et que l'algèbre $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ complétée de $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ pour cette norme, est une C^* -algèbre. T. Turumaru (*Tôhoku Math. Journ.*, 4, 1953, 242) et A. Wulfsohn

(*Bull. Sci. Math.*, **87**, 1963, 13) ont montré que cette norme est indépendante du choix de π_1 et π_2 .

Deux sous-espaces vectoriels réguliers E et F de H seront dits orthogonaux, si pour tout $\psi \in E$ et tout $\varphi \in F$, $\sigma(\psi, \varphi) = 0$. Ceci implique évidemment $E \cap F = \{0\}$. Remarquons en outre que $E \otimes F$ est régulier.

3.4.1. Si E et F sont deux sous-espaces vectoriels réguliers et orthogonaux de H, alors $\overline{\Delta(E \oplus F, \sigma)} = \overline{\Delta(E, \sigma)} \otimes \overline{\Delta(F, \sigma)}$.

Tout d'abord, il est évident que l'application

$$\gamma : \sum_{i=1}^n a_i \delta_{\psi_i + \varphi_i} \in \Delta(E \oplus F, \sigma) \rightarrow \sum_{i=1}^n a_i \delta_{\psi_i} \times \delta_{\varphi_i} \in \Delta(E, \sigma) \times \Delta(F, \sigma),$$

est un isomorphisme algébrique. Il suffit donc de démontrer que γ est une isométrie puisque $\Delta(E \oplus F, \sigma)$ et $\Delta(E, \sigma) \times \Delta(F, \sigma)$ sont denses respectivement dans $\overline{\Delta(E \oplus F, \sigma)}$ et $\overline{\Delta(E, \sigma)} \otimes \overline{\Delta(F, \sigma)}$. Pour pouvoir calculer les normes des éléments des deux algèbres, nous allons construire des représentations de Fock particulières de $\Delta(E \otimes F, \sigma)$, de $\Delta(E, \sigma)$ et de $\Delta(F, \sigma)$. Soit J_1 (resp. J_2) un opérateur définissant une structure préhilbertienne σ -permise de E (resp. F). L'opérateur $J = J_1 \oplus J_2$ ($J(\psi \oplus \varphi) = J_1\psi \oplus J_2\varphi$ pour tout $\psi \oplus \varphi \in E \oplus F$), définit une structure préhilbertienne σ -permise de $E \oplus F$; si s est la partie réelle du produit scalaire, elle est telle que : $\psi \in E$ et $\varphi \in F$ implique $s(\psi, \varphi) = 0$. Posons $s_1 = s|E$ et $s_2 = s|F$; pour tout $\psi \oplus \varphi$ et $\psi' \oplus \varphi' \in E \oplus F$, nous avons :

$$s(\psi \oplus \varphi, \psi' \oplus \varphi') = s_1(\psi, \psi') + s_2(\varphi, \varphi').$$

Soit π_s (resp. π_{s_1}, π_{s_2}) la représentation de Fock de $E \oplus F$ (resp. E, F) et H_s (resp. H_{s_1}, H_{s_2}) l'espace de représentation de π_s (resp. π_{s_1}, π_{s_2}), les éléments de H_s images canoniques des éléments de $\Delta(E \oplus F, \sigma)$ (resp. $\Delta(E, \sigma), \Delta(F, \sigma)$) (voir la construction de Gelfand-Naimark ([3], 2.4.4)) seront notés

$$\sum_{i=1}^n a_i \widehat{\delta_{\psi_i + \varphi_i}} \left(\text{resp. } \sum_{i=1}^n a_i \widehat{\delta_{\psi_i}^1}, \sum_{i=1}^n a_i \widehat{\delta_{\varphi_i}^2} \right).$$

Nous allons prouver que H_s est isomorphe à $H_{s_1} \otimes H_{s_2}$; il suffit pour cela de montrer que l'application

$$\sum_{i=1}^n a_i \widehat{\delta_{\psi_i \oplus \varphi_i}} \in H_s \rightarrow \sum_{i=1}^n a_i \widehat{\delta_{\psi_i}^1} \otimes \widehat{\delta_{\varphi_i}^2} \in H_{s_1} \otimes H_{s_2}$$

est une isométrie. En effet :

$$\begin{aligned}
 \left\| \sum_{i=1}^n a_i \widehat{\delta_{\psi_i + \varphi_i}} \right\|^2 &= \sum_{i,j=1}^n \bar{a}_i a_j \omega_s(\delta_{\psi_i + \varphi_i}^* \cdot \delta_{\psi_j + \varphi_j}) \\
 &= \sum_{i,j=1}^n \bar{a}_i a_j e^{i\sigma(\psi_j, \psi_i)} e^{-\frac{1}{2}s(\psi_i - \psi_j, \psi_i - \psi_j)} \\
 &\quad e^{i\sigma(\varphi_i, \varphi_j)} e^{-\frac{1}{2}s(\varphi_i - \varphi_j, \varphi_i - \varphi_j)} \\
 &= \sum_{i,j=1}^n \bar{a}_i a_j \omega_{s_1}(\delta_{\psi_i}^* \delta_{\psi_j}) \omega_{s_2}(\delta_{\varphi_i}^* \delta_{\varphi_j}) \\
 &= \sum_{i,j=1}^n \bar{a}_i a_j (\widehat{\delta_{\psi_i}^1} \otimes \widehat{\delta_{\varphi_i}^2} | \widehat{\delta_{\psi_j}^1} \otimes \widehat{\delta_{\varphi_j}^2}) \\
 &= \left\| \sum_{i=1}^n a_i \widehat{\delta_{\psi_i}^1} \otimes \widehat{\delta_{\varphi_i}^2} \right\|^2.
 \end{aligned}$$

Le caractère isométrique de γ se déduit immédiatement de :

$$\begin{aligned}
 &\left\| \pi_s \left(\sum_{i=1}^n a_i \delta_{\psi_i + \varphi_i} \right) \left(\sum_{j=1}^m b_j \widehat{\delta_{\psi_j' + \varphi_j'}} \right) \right\| \\
 &= \left\| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j \widehat{\delta_{\psi_j' + \psi_i + \varphi_j' + \varphi_i}} \right\| \\
 &= \left\| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j \widehat{\delta_{\psi_j' + \psi_i}^1} \otimes \widehat{\delta_{\varphi_j' + \varphi_i}^2} \right\| \\
 &= \left\| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j \pi_{s_1}(\delta_{\psi_i}) \widehat{\delta_{\psi_j'}^1} \otimes \pi_{s_2}(\delta_{\varphi_i}) \widehat{\delta_{\varphi_j'}^2} \right\| \\
 &= \left\| \left[\sum_{i=1}^n a_i \pi_{s_1}(\delta_{\psi_i}) \otimes \pi_{s_2}(\delta_{\varphi_i}) \right] \left(\sum_{j=1}^m b_j \widehat{\delta_{\psi_j'}^1} \otimes \widehat{\delta_{\varphi_j'}^2} \right) \right\|
 \end{aligned}$$

Un sous-ensemble $\{(e_i, f_i) \mid i \in I\}$ de $H \times H$ est dit symplectique si $\sigma(e_i, f_i) = 1$ pour tout $i \in I$ et $\sigma(e_i, e_j) = \sigma(f_i, f_j) = \sigma(e_i, f_j)$ si $i \neq j$. Si de

plus l'ensemble $\bigcup_{i \in I} \{e_i, f_i\}$ est une base de H nous dirons que c'est une base symplectique.

3.4.2. Si H admet une base symplectique $\{(e_i, f_i) \mid i \in I\}$, $\overline{\Delta(H, \sigma)}$ se décompose en un produit infini de C*-algèbres.

La notion de produit infini de C*-algèbres a été défini dans [5]. Notons $E_{(i_1, i_2, \dots, i_p)}$ l'espace vectoriel engendré par $\{e_{i_1}, f_{i_1}, \dots, e_{i_p}, f_{i_p}\}$; évidemment $E_{(i_1, i_2, \dots, i_p)} = E_{i_1} \oplus E_{i_2} \oplus \dots \oplus E_{i_p}$. Soit \mathcal{S}' le sous-ensemble de \mathcal{S} formé par les sous-espaces vectoriels $E_{(i_1, i_2, \dots, i_p)}$ de H, (i_1, i_2, \dots, i_p) parcourant l'ensemble des parties finies de I. Puisque $\bigcup_{i \in I} \{e_i, f_i\}$ est une base, il est évident que \mathcal{S}' est un système filtrant, absorbant de H. Par une démonstration analogue à celle de 3.3.2, on montre aisément que $\Delta(H, \sigma)$ est limite inductive des C*-algèbres $\{\Delta(E, \sigma) \mid E \in \mathcal{S}'\}$. La proposition se déduit immédiatement de l'égalité $\overline{\Delta(E_{(i_1, i_2, \dots, i_p)}, \sigma)} = \overline{\Delta(E_{i_1}, \sigma)} \otimes \dots \otimes \overline{\Delta(E_{i_p}, \sigma)}$ (3.4.1 et [5]).

4. — AUTOMORPHISMES ET ANTIAUTOMORPHISMES DE $\overline{\Delta(H, \sigma)}$

4.1. Étude de S(H, σ).

Nous appellerons opérateur symplectique de (H, σ), un opérateur linéaire surjectif T de H vérifiant :

$$(1) \quad \sigma(T\psi, T\varphi) = \sigma(\psi, \varphi) \quad \text{pour tout } \psi, \varphi \in H.$$

Notons S(H, σ), l'ensemble des opérateurs symplectiques de (H, σ). Il est évident que pour tout T ∈ S(H, σ), T⁻¹ ∈ S(H, σ) (grâce à (1), T est injectif, donc inversible). Comme de plus l'opérateur identité I est symplectique, S(H, σ) est un groupe multiplicatif.

4.1.1. Pour tout T ∈ S(H, σ), l'application $\tau_T : \delta_\psi \rightarrow \delta_{T\psi}$ peut s'étendre en un automorphisme unique de $\overline{\Delta(H, \sigma)}$.

Posons par définition

$$\tau_T \left(\sum_{i=1}^n a_i \delta_{\psi_i} \right) = \sum_{i=1}^n a_i \delta_{T\psi_i}$$

Cette application est un automorphisme isométrique de $\Delta(\mathbb{H}, \sigma)$ car :

$$\begin{aligned}
 & - \tau_{\mathbb{T}} \left(\sum_{i=1}^n a_i \delta_{\psi_i} \cdot \sum_{j=1}^m b_j \delta_{\varphi_j} \right) \\
 & = \tau_{\mathbb{T}} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j e^{-i\sigma(\psi_i, \varphi_j)} \delta_{\psi_i + \varphi_j} \right) \\
 & = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j e^{-i\sigma(\mathbb{T}\psi_i, \mathbb{T}\varphi_j)} \delta_{\mathbb{T}\psi_i + \mathbb{T}\varphi_j} \\
 & = \sum_{i=1}^n a_i \delta_{\mathbb{T}\psi_i} \cdot \sum_{j=1}^m b_j \delta_{\mathbb{T}\varphi_j} = \tau_{\mathbb{T}} \left(\sum_{i=1}^n a_i \delta_{\psi_i} \right) \cdot \tau_{\mathbb{T}} \left(\sum_{j=1}^m b_j \delta_{\varphi_j} \right) \\
 & - \tau_{\mathbb{T}} \left(\sum_{i=1}^n a_i \delta_{\psi_i} \right)^* = \sum_{i=1}^n \bar{a}_i \delta_{-\mathbb{T}\psi_i} = \tau_{\mathbb{T}} \left(\left(\sum_{i=1}^n a_i \delta_{\psi_i} \right)^* \right). \\
 & - \tau_{\mathbb{T}}^{-1} = \tau_{\mathbb{T}^{-1}} \text{ (évident).} \\
 & - \left\| \tau_{\mathbb{T}} \left(\sum_{i=1}^n a_i \delta_{\psi_i} \right) \right\|_1 = \left\| \sum_{i=1}^n a_i \delta_{\mathbb{T}\psi_i} \right\|_1 \\
 & = \sum_{i=1}^n |a_i| = \left\| \sum_{i=1}^n a_i \delta_{\psi_i} \right\|_1.
 \end{aligned}$$

Pour montrer que $\tau_{\mathbb{T}}$ est isométrique pour la norme de $\overline{\Delta(\mathbb{H}, \sigma)}$ il suffit de remarquer que si $\pi \in \mathcal{R}$, $\pi \circ \tau_{\mathbb{T}} \in \mathcal{R}$. En effet : pour tout

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^n a_i \delta_{\psi_i} \in \Delta(\mathbb{H}, \sigma), \\
 & \left\| \tau_{\mathbb{T}} \left(\sum_{i=1}^n a_i \delta_{\psi_i} \right) \right\| = \left\| (\pi \circ \tau_{\mathbb{T}}) \left(\sum_{i=1}^n a_i \delta_{\psi_i} \right) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n a_i \delta_{\psi_i} \right\|
 \end{aligned}$$

(voir démonstration de 3.3.1). $\tau_{\mathbb{T}}$ s'étend donc en un automorphisme unique de $\overline{\Delta(\mathbb{H}, \sigma)}$ que nous continuons à noter $\tau_{\mathbb{T}}$.

Soit $\alpha(\overline{\Delta(\mathbb{H}, \sigma)})$ le groupe des automorphismes de $\overline{\Delta(\mathbb{H}, \sigma)}$.

4.1.2. L'application $\tau : \mathbb{T} \in \mathbb{S}(\mathbb{H}, \sigma) \rightarrow \tau_{\mathbb{T}} \in \alpha(\overline{\Delta(\mathbb{H}, \sigma)})$ est un monomorphisme.

Si $T \neq T'$, il existe $\psi \in H$ tel que $T\psi \neq T'\psi$ ce qui implique

$$\tau_T(\delta_\psi) = \delta_{T\psi} \neq \tau_{T'}(\delta_\psi) = \delta_{T'\psi}$$

d'où $\tau_T \neq \tau_{T'}$. De plus, pour tout

$$a = \sum_{i=1}^n a_i \delta_{\psi_i} \in \Delta(H, \sigma)$$

et pour tout $T, T' \in S(H, \sigma)$,

$$(\tau_T \cdot \tau_{T'})(a) = \tau_T\left(\sum_{i=1}^n a_i \delta_{T'\psi_i}\right) = \sum_{i=1}^n a_i \delta_{TT'\psi_i} = \tau_{TT'}(a) \quad \text{et} \quad \tau_i(a) = a.$$

$S(H, \sigma)$ sera donc considéré comme un sous-groupe multiplicatif de $\alpha(\overline{\Delta(H, \sigma)})$. Remarquons que pour toute structure préhilbertienne σ -permise définie par J , le groupe $S^J(H, \sigma)$ des opérateurs unitaires est un sous-groupe de $S(H, \sigma)$. Dans ([2], 2.5) on peut voir un exemple de sous-groupe de $S^J(H, \sigma)$.

4.2. Étude de $AS(H, \sigma)$.

Nous appellerons opérateur antisymplectique de (H, σ) , un opérateur linéaire surjectif T de H vérifiant :

$$\sigma(T\psi, T\varphi) = -\sigma(\psi, \varphi) \quad \text{pour tout} \quad \psi, \varphi \in H.$$

Notons $AS(H, \sigma)$, l'ensemble des opérateurs antisymplectiques de (H, σ) . Il est évident que pour tout $T \in AS(H, \sigma)$, $T^{-1} \in AS(H, \sigma)$ et que

$$S(H, \sigma) \cup AS(H, \sigma)$$

est un groupe.

Nous dirons que ζ est un antiautomorphisme de $\overline{\Delta(H, \sigma)}$ si ζ est une bijection de $\overline{\Delta(H, \sigma)}$ vérifiant :

$$\zeta(\alpha a + \beta b) = \bar{\alpha}\zeta(a) + \bar{\beta}\zeta(b),$$

$$\zeta(a \cdot b) = \zeta(a)\zeta(b)$$

et

$$\zeta(a)^* = \zeta(a^*)$$

pour tout

$$a, b \in \overline{\Delta(H, \sigma)} \quad \text{et} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Notons $A - \alpha(\overline{\Delta(H, \sigma)})$ l'ensemble des antiautomorphismes de $\overline{\Delta(H, \sigma)}$.

4.2.1. Pour tout $T \in \text{AS}(\mathbf{H}, \sigma)$, l'application $\tau_T : \delta_\psi \rightarrow \delta_{T\psi}$ peut s'étendre en un antiautomorphisme unique de $\overline{\Delta(\mathbf{H}, \sigma)}$.

Posons par définition

$$\tau_T \left(\sum_{i=1}^n a_i \delta_{\psi_i} \right) = \sum_{i=1}^n \bar{a}_i \delta_{T\psi_i}$$

et la démonstration de 4.2.1 se fait de façon analogue à celle de 4.1.1.

4.2.2. L'application

$$\tau : T \in \text{S}(\mathbf{H}, \sigma) \cup \text{AS}(\mathbf{H}, \sigma) \rightarrow \tau_T \in \alpha(\overline{\Delta(\mathbf{H}, \sigma)}) \cup \mathbf{A} - \alpha(\overline{\Delta(\mathbf{H}, \sigma)})$$

est un monomorphisme.

Cette proposition se démontre de la même façon que 4.1.2.

Dans ([2], 3.3) on peut voir un exemple de sous-ensemble de $\text{AS}(\mathbf{H}, \sigma)$.

4.3. Groupe d'automorphismes associé à un opérateur hermitien de \mathbf{H} .

Ce paragraphe généralise légèrement ([2], 5). Soit i un opérateur de \mathbf{H} définissant une structure préhilbertienne σ -permise, s la partie réelle du produit scalaire et \mathbf{B} un opérateur hermitien de \mathbf{H} . Nous savons que le sous-groupe $\{e^{it\mathbf{B}} \mid t \in \mathbb{R}\}$ du groupe des opérateurs unitaires $\text{S}^i(\mathbf{H}, \sigma)$ de \mathbf{H} , induit un sous-groupe $\{\tau_{e^{it\mathbf{B}}} \mid t \in \mathbb{R}\}$ de $\alpha(\overline{\Delta(\mathbf{H}, \sigma)})$ (4.1.1 et 4.1.2).

4.3.1. Soit \mathbf{B} un opérateur hermitien de \mathbf{H} et f un élément de $\mathcal{F}_{\mathbf{B}}$ tel que $f(e^{i\mathbf{B}t}\psi) = f(\psi)$ pour tout $\psi \in \mathbf{H}$ et tout $t \in \mathbb{R}$ et tel que $\lambda \in \mathbb{R} \rightarrow f(e^{i\mathbf{B}}\psi + \varphi)$ soit continue pour tout $\psi, \varphi \in \mathbf{H}$. Alors il existe une représentation unique unitaire continue U_f de \mathbb{R} , telle que

$$\pi_f(\tau_{e^{it\mathbf{B}}}(a)) = U(t)\pi_f(a)U(t)^* \quad \text{et} \quad U(t)\hat{a} = \widehat{\tau_{e^{it\mathbf{B}}}(a)}$$

\hat{a} étant l'image canonique de $a \in \overline{\Delta(\mathbf{H}, \sigma)}$, dans l'espace de représentation \mathbf{H}_{π_f} .

Il est évident par définition que $\omega_f(\tau_{e^{it\mathbf{B}}}(a)) = \omega_f(a)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $a \in \overline{\Delta(\mathbf{H}, \sigma)}$. Cette propriété s'étend à $\overline{\Delta(\mathbf{H}, \sigma)}$ puisque ω_f et $\tau_{e^{it\mathbf{B}}}$ sont continus. Par conséquent la forme positive ω_f est invariante par le groupe d'automorphismes $\{\tau_{e^{it\mathbf{B}}} \mid t \in \mathbb{R}\}$. La proposition se démontre comme ([2], 5.1.1).

Le théorème de Stone ([8]) implique $U_f(t) = e^{itC_f}$ où C_f est un opérateur hermitien de \mathbf{H}_{π_f} que nous appellerons « opérateur infinitésimal

associé à B et à f ». Il est clair que $\hat{\delta}_0$ (vecteur « vide ») est vecteur propre de C_f à valeur propre 0 puisque $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{U(t) - I}{t} \hat{\delta}_0 = 0$. Notons A_f l'opérateur de champs associé à π_f (i. e. $\pi_f(\delta_\psi) = e^{iA_f(\psi)}$). Comme pour ([2], 5.1.2) nous avons

$$4.3.2. \quad [C_f, A_f(\psi)]_- \subseteq -iA_f(iB\psi).$$

Remarquons que l'opérateur « nombre de particules » est l'opérateur infinitésimal N_f associé à 1 et à f ([2], 3.2) et que les opérateurs « impulsion-énergie » sont les quatre opérateurs infinitésimaux \mathcal{H}_f^μ ($\mu = 0, 1, 2$ et 3) associés respectivement aux opérateurs $i \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ et à f quand $H = K_m^+$ (solutions de l'équation de Klein-Gordon à énergie positive) est muni du produit scalaire

$$h(\psi, \varphi) = \int \psi_F(\bar{k})^* \varphi_F(\bar{k}) d\Omega_m(\bar{k})$$

([10], chap. IV et V) ([2], 5.4).

4.4. Groupe des automorphismes de jauge de deuxième espèce de $\overline{\Delta(H, \sigma)}$.

Soit H' le dual algébrique H, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions \mathbb{R} -linéaires sur H à valeurs dans \mathbb{R} . Si π est un élément de \mathcal{R} , le théorème de Stone (voir [6]) implique $\pi(\delta_\psi) = e^{iA(\psi)} \delta_\psi$ où $A(\psi)$ est hermitien. A qui est \mathbb{R} -linéaire, est appelé « opérateur de champ ». La transformation de jauge de deuxième espèce la plus générale de A, est de la forme : $A \rightarrow A_\chi = A + \chi$ où $\chi \in H'$. Pour obtenir une telle transformation pour tous les éléments de \mathcal{R} , nous allons définir un élément de $\alpha(\overline{\Delta(H, \sigma)})$ qui transformera δ_ψ en $\zeta_\chi(\delta_\psi) = e^{i\chi(\psi)} \delta_\psi$, car

$$\pi(\zeta_\chi(\delta_\psi)) = \pi(e^{i\chi(\psi)} \delta_\psi) = e^{i[A(\psi) + \chi(\psi)]} = e^{iA_\chi(\psi)}$$

4.4.1. Pour tout $\chi \in H'$, l'application $\zeta_\chi : \delta_\psi \rightarrow e^{i\chi(\psi)} \delta_\psi$ peut s'étendre en un automorphisme unique de $\overline{\Delta(H, \sigma)}$.

Posons par définition

$$\zeta_\chi \left(\sum_{j=1}^m a_j \delta_{\psi_j} \right) = \sum_{j=1}^m a_j e^{i\chi(\psi_j)} \delta_{\psi_j}.$$

Cette application est un automorphisme isométrique de $\Delta(\mathbf{H}, \sigma)$ car :

$$\begin{aligned}
 - \zeta_\chi \left(\sum_{j=1}^n a_j \delta_{\psi_j} \cdot \sum_{k=1}^m b_k \delta_{\varphi_k} \right) &= \zeta_\chi \left(\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m a_j b_k e^{-i\sigma(\psi_j, \varphi_k)} \delta_{\psi_j + \varphi_k} \right) \\
 &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m a_j b_k e^{-i\sigma(\psi_j, \varphi_k)} e^{i\chi(\psi_j + \varphi_k)} \delta_{\psi_j + \varphi_k} \\
 &= \sum_{j=1}^n a_j e^{i\chi(\psi_j)} \delta_{\psi_j} \cdot \sum_{k=1}^m b_k e^{i\chi(\varphi_k)} \delta_{\varphi_k} \\
 &= \zeta_\chi \left(\sum_{j=1}^n a_j \delta_{\psi_j} \right) \cdot \zeta_\chi \left(\sum_{k=1}^m b_k \delta_{\varphi_k} \right) \\
 - \zeta_\chi \left(\sum_{j=1}^n a_j \delta_{\psi_j} \right)^* &= \sum_{j=1}^n \bar{a}_j e^{-i\chi(\psi_j)} \delta_{-\psi_j} = \zeta_\chi \left(\left(\sum_{j=1}^n a_j \delta_{\psi_j} \right)^* \right) \\
 - \zeta_\chi^{-1} &= \zeta_{-\chi} \text{ (évident)} \\
 - \left\| \zeta_\chi \left(\sum_{j=1}^n a_j \delta_{\psi_j} \right) \right\|_1 &= \left\| \sum_{j=1}^n a_j e^{i\chi(\psi_j)} \delta_{\psi_j} \right\|_1 \\
 &= \sum_{j=1}^n |a_j| = \left\| \sum_{j=1}^n a_j \delta_{\psi_j} \right\|_1.
 \end{aligned}$$

On montre comme dans 4.1.1 que ζ_χ peut être étendu en un automorphisme unique de $\overline{\Delta(\mathbf{H}, \sigma)}$ que nous continuerons à noter ζ_χ .

4.4.2. L'application $\zeta : \chi \in \mathbf{H}' \rightarrow \zeta_\chi \in \alpha(\overline{\Delta(\mathbf{H}, \sigma)})$ est un monomorphisme.

Supposons que $\zeta_\chi = \zeta_{\chi'}$. Alors, pour tout $\psi \in \mathbf{H}$ $e^{i\chi(\psi)} \delta_\psi = e^{i\chi'(\psi)} \delta_\psi$ ce qui implique $e^{i\chi(\psi)} = e^{i\chi'(\psi)}$ pour tout $\psi \in \mathbf{H}$. ([2], 6.1.1) montre enfin que $\chi = \chi'$. De plus, il est évident que $\zeta_{\chi + \chi'} = \zeta_\chi \cdot \zeta_{\chi'}$ et que $\zeta_0 = \mathcal{I}$.

\mathbf{H}' peut être considéré comme un sous-groupe abélien de $\alpha(\overline{\Delta(\mathbf{H}, \sigma)})$.

Remarquons que si χ_φ est défini par $\chi_\varphi(\psi) = -2\sigma(\varphi, \psi)$ pour tout $\psi \in \mathbf{H}$, alors si $a \in \overline{\Delta(\mathbf{H}, \sigma)}$,

$$\zeta_{\chi_\varphi}(a) = \delta_\varphi \cdot a \cdot \delta_{-\varphi}$$

car

$$\delta_\varphi \delta_\psi \delta_{-\varphi} = e^{-2i\sigma(\varphi, \psi)} \delta_\psi.$$

ζ_{χ_φ} est donc un automorphisme interne. Ces automorphismes sont très

importants car ils sont implémentables pour toutes les représentations de $\Delta(\overline{H}, \sigma)$ (i. e. pour toute représentation, π de $\Delta(\overline{H}, \sigma)$, il existe un opérateur unitaire U de l'espace de représentation tel que $\pi(\zeta_{\chi_\varphi}(a)) = U\pi(a)U^{-1}$ pour tout $a \in \Delta(\overline{H}, \sigma)$).

4.4.3. Pour toute structure préhilbertienne σ -permise et pour tout $\chi \in H^*$ (H^* étant l'ensemble des éléments continus de H'), ζ_χ est implémentable pour toutes les représentations π telles que $\psi \rightarrow \pi(\delta_\psi)$ soit fortement (ou faiblement) continu.

Montrons tout d'abord que π peut être étendu en une représentation π' de $\Delta(\overline{H}, \sigma)$ (\overline{H} étant l'espace de Hilbert complété de H) telle que

$$\psi \in \overline{H} \rightarrow \pi'(\delta_\psi)$$

soit fortement (ou faiblement) continu. Soit \mathcal{H} l'espace de représentation de π . Pour tout $\xi \in H$, l'application $\psi \in H \rightarrow \pi(\delta_\psi)\xi$ est uniformément continue par hypothèse.

D'après ([7], 3.15.6), elle peut-être étendue à \overline{H} . Pour tout $\psi \in \overline{H}$ et $\xi \in \mathcal{H}$, notons $\pi'(\delta_\psi)\xi$ le vecteur $\lim_{\varphi \rightarrow \psi} \pi(\delta_\varphi)\xi$.

$\pi'(\delta_\psi)$ est donc un opérateur unitaire de \mathcal{H} . π' peut être considéré comme une application linéaire sur $\Delta(\overline{H}, \sigma)$ en posant,

$$\pi' \left(\sum_{i=1}^n a_i \delta_{\psi_i} \right) = \sum_{i=1}^n a_i \pi'(\delta_{\psi_i})$$

pour tout

$$\sum_{i=1}^n a_i \delta_{\psi_i} \in \Delta(\overline{H}, \sigma).$$

π' est une représentation car pour tout $\psi, \varphi \in \overline{H}$,

$$\pi'(\delta_\psi \delta_\varphi) = \pi'(\delta_\psi) \pi'(\delta_\varphi)$$

et

$$\pi'(\delta_\psi)^* = \pi'(\delta_{-\psi})$$

En effet, pour tout $\varepsilon > 0$ et $\xi \in \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned} & \| \pi'(\delta_\psi \delta_\varphi) \xi - \pi'(\delta_\psi) \pi'(\delta_\varphi) \xi \| \\ & \leq \| e^{-i\sigma(\psi, \varphi)} \pi'(\delta_{\psi+\varphi}) \xi - e^{-i\sigma(\psi', \varphi')} \pi(\delta_{\psi'+\varphi'}) \xi \| \\ & \quad + \| \pi(\delta_\varphi) \xi - \pi'(\delta_\varphi) \xi \| + \| \pi(\delta_\psi) \pi'(\delta_\varphi) \xi - \pi'(\delta_\psi) \pi'(\delta_\varphi) \xi \| \end{aligned}$$

où ψ' et $\varphi' \in H$.

D'après l'hypothèse ψ' et φ' peuvent être choisis tels que

$$\| \pi'(\delta_\psi \delta_\varphi) \xi - \pi'(\delta_\psi) \pi'(\delta_\varphi) \xi \| \leq \varepsilon$$

Comme ξ et ε sont arbitraires nous avons

$$\pi'(\delta_\psi \delta_\varphi) = \pi'(\delta_\psi) \pi'(\delta_\varphi)$$

Cette égalité implique

$$\pi'(\delta_\psi)^{-1} = \pi'(\delta_{-\psi})$$

donc

$$\pi'(\delta_\psi)^* = \pi'(\delta_{-\psi})$$

puisque $\pi'(\delta_\psi)$ est unitaire.

3.1.2 indique que π' admet une extension unique π'' à $\overline{\Delta(\bar{H}, \sigma)}$.

Supposons maintenant que $\chi \in H^*$. D'après le théorème de Riesz (voir ([7], 6.3.2)) il existe un vecteur $\psi \in \bar{H}$ tel que $\chi(\varphi) = -2\sigma(\psi, \varphi)$ pour tout $\varphi \in \bar{H}$. Donc d'après ce que nous avons vu plus haut,

$$\zeta_\chi(a) = \delta_\psi \cdot a \cdot \delta_{-\psi}$$

pour tout $a \in \overline{\Delta(\bar{H}, \sigma)}$. La démonstration s'achève en remarquant que si $a \in \overline{\Delta(\bar{H}, \sigma)}$, alors $\pi(\zeta_\chi(a)) = \pi'(\delta_\psi) \pi(a) \pi'(\delta_\psi)^*$. La réciproque de 4.4.3 est

4.4.4. *Pour toute structure préhilbertienne σ -permise et pour tout $\chi \in H^*$ vérifiant : ζ_χ est implémentable pour une représentation π telle que $\psi \rightarrow \pi(\delta_\psi)$ soit fortement (ou faiblement) continue, alors $\chi \in H^*$.*

Par hypothèse $e^{i\chi(\psi)} \pi(\delta_\psi) = U \pi(\delta_\psi) U^*$ où U est un opérateur unitaire de l'espace de représentation \mathcal{H} . Si $\xi \in \mathcal{H}$ et $\| \xi \| = 1$ alors,

$$e^{i\chi(\psi)} = (U^* \pi(\delta_\psi) \xi | \pi(\delta_\psi) U^* \xi)$$

fonction continue en ψ par hypothèse ([2], 6.1.2) implique $\chi \in H^*$.

REMERCIEMENTS

Durant ce travail, j'ai bénéficié de fructueuses discussions avec MM. les Professeurs D. Kastler et A. Guichardet. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma gratitude.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] D. KASTLER, The C*-algebras of a free boson field. I. Discussion of Basic Facts. *Commun. Math. Phys.*, **1**, 1965, 14-18.
- [2] J. MANUCEAU, Étude de quelques automorphismes de la C*-algèbre du champ de bosons libres. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **8**, 1968, 117-138.
- [3] J. DIXMIER, *Les C*-algèbres et leurs représentations*. Gauthier-Villars, 1964, Paris.
- [4] H. ARAKI, Hamiltonian Formalism and the Canonical Commutation Relations in Quantum Field Theory. *J. Math. Phys.*, **1**, 1960, 492.
- [5] Z. TAKEDA, Inductive limit and infinite direct product of operator algebras. *Tôhoku Math. J.*, **7**, 1955, 67-86.
- [6] M. A. NAIMARK, *Normed Rings*. Noordhoff-Groningen, 1959, The Netherlands.
- [7] J. DIEUDONNÉ, *Fondements de l'analyse moderne*. Gauthier-Villars, 1963, Paris.
- [8] M. H. STONE, On one-parameter unitary groups in Hilbert space. *Annals of Mathematics* (2), **33**, 1932, 643-648.
- [9] G. F. DELL'ANTONIO, S. DOPLICHER and D. RUELLE, A theorem on canonical commutation and anticommutation relations. *Commun. Math. Phys.*, **2**, 1966, 223-230.
- [10] D. KASTLER, *Introduction à l'électrodynamique quantique*. Dunod, 1961, Paris.
- [11] J. Von NEUMANN, Die Eindichtigkeit der Schrödingerschen Operators. *Math. Ann.*, **104**, 1931, 570.

Manuscrit reçu le 18 septembre 1967.
