ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

PIERRE HILLION

Analyse de Fourier sur le groupe $SU(2,1)$

Annales de l'I. H. P., section A, tome 8, nº 1 (1968), p. 53-79
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1968__8_1_53_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. VIII, n° 1, 1968, p. 53-79.

Section A :
Physique théorique.

Analyse de Fourier sur le groupe SU(2, 1)

par

Pierre HILLION
Institut Henri Poincaré, Paris.

RÉSUMÉ. — L'étude des représentations unitaires continues du groupe SU(2, 1) dans les espaces $L^2(X, \mu, \omega)$ où X est l'espace homogène $SU(2,1)/G_0$, G_0 désignant un sous-groupe fermé, μ une mesure quasi-invariante sur X et ω une densité invariante fournit d'une part les séries principales, principales dégénérées et supplémentaires et d'autre part des représentations, en particulier la régulière et la quasi-régulière dont la réduction s'effectue par les techniques de l'analyse de Fourier par rapport aux sous-groupes de Cartan, aboutissant aux formules de Plancherel. On suggère une application possible à la théorie des particules élémentaires.

I. — INTRODUCTION

Plusieurs auteurs ont insisté sur l'utilisation possible des groupes de Lie G non compacts dans la physique des particules élémentaires, ce qui pose, comme l'a noté Stein [*1*] les problèmes suivants :

1) Classification et détermination des représentations unitaires irréductibles par rapport à la structure de G.
2) Réduction d'une représentation générale en ses parties irréductibles.
3) Réduction d'une représentation irréductible restreinte à un sous-groupe.

De tels problèmes ont été complètement résolus seulement dans quelques cas, par exemple pour les groupes SL(2, C) [*2*] et SU(1,1) [*3*]. Ici nous abordons les deux premiers problèmes pour le groupe SU(2,1) en étudiant les espaces homogènes $X = G/G_0$ où G_0 est un sous-groupe fermé de G, par la méthode globale de Gel'fand-Naimark [4]. Graev [5] a montré l'existence de deux séries principales, l'une discrète, l'autre continue ce qui résulte de l'existence de deux classes non isomorphes, l'une compacte, l'autre non compacte de sous-groupes de Cartan et il a donné [6] une réalisation non analytique de ces séries sans insister toutefois sur leur rapport avec la structure de SU(2,1). De ce point de vue, nous retrouvons une partie de ses résultats et nous mettons en plus en évidence trois séries discrètes dégénérées et une série supplémentaire.

Les représentations locales de SU(2,1) ont été étudiées par plusieurs auteurs [7] mais ils n'ont pas montré lesquelles pouvaient s'étendre au groupe entier de telle sorte que la comparaison des résultats obtenus ici avec les précédents serait d'un grand intérêt pour l'étude de la complétion des représentations unitaires irréductibles. Nous espérons poursuivre cette question ultérieurement, c'est pourquoi la partie la plus originale de ce travail est l'analyse de Fourier qui apparaît dans la réduction en particulier des représentations régulière et quasi-régulière avec obtention des théorèmes de Plancherel correspondants.

Rappelons que dans la méthode globale de Gel'fand-Naimark, les représentations $g \to Tg$ dans $L^2(G/G_0, \omega, \mu)$ où ω et μ sont respectivement une densité invariante et une mesure quasi-invariante sur G/G_0 sont caractérisées par un multiplicateur analytique $\alpha(x, g)$

$$Tgf(x) = \alpha(x, g)f(x\dot{g}) \tag{1}$$

$x \in X = G/G_0$, $f \in L^2(G/G_0, \omega, \mu)$, $x\dot{g}$ désignant le transformé de x sur X sous $G . \alpha(x, g)$ satisfait à la relation :

$$\alpha(x, g_1 g_2) = \alpha(x\dot{g}_1, g_2)\alpha(x, g_1) \tag{2}$$

et l'on a :

$$\alpha(x, g) = \alpha(x)^{-1}\alpha(x\dot{g})\beta_x^{-1/2}(g)\chi_x(g) \tag{3}$$

où β et χ sont respectivement la fonction modulaire et le caractère du sous-groupe G_0, $\alpha(x)$ est déterminé par la condition que $\alpha(x, g)$ soit analytique et alors :

$$\omega(x) = C|\alpha(x)|^2 \tag{4}$$

où C est une constante arbitraire positive

$$\left(\|f\|^2 = \int_X |f(x)|^2\omega(x)d\mu(x)\right).$$

Dans le second paragraphe, on étudie la structure de SU(2,1) et dans le troisième on obtient les représentations unitaires irréductibles continues. Les deux derniers paragraphes sont consacrés d'une part, à la décomposition des représentations régulière et quasi-régulière et d'autre part, à la réduction de deux représentations particulières.

2. — ÉTUDE DE LA STRUCTURE DE SU(2,1)

2.1 La décomposition d'Iwasawa.

A partir de la base de Weyl canonique de l'algèbre de Lie A_2 (dans la notation habituelle de Cartan) : $e_{ij}(i, j = 1, 2, 3)$ matrice avec 1 à l'intersection de la ième ligne et de la $j$ième colonne et avec :

$$h_1 = \begin{vmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad h_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{vmatrix}$$

on obtient immédiatement la décomposition d'Iwasawa

$$su(2,1) = s(u_2 \times u_1) \oplus h_{p0} \oplus n_0$$

de l'algèbre de Lie $su(2, 1)$:

$$s(u_2 \times u_1) = \mathbb{R}\left\{\frac{h_1}{2}, \quad \frac{h_1 - h_2}{2}, \quad \frac{e_{12} - e_{21}}{2}, \quad \frac{e_{12} + e_{21}}{2}\right\}$$

$$h_{p0} = \mathbb{R}\,\{\, i(e_{13} - e_{31})\}$$

$$n_0 = \mathbb{R}\,\{\, X_\alpha = h_1 + h_2 + e_{13} + e_{31}, \; X_\beta = e_{12} - e_{21} + i(e_{23} - e_{32}), \; X_\gamma = i(e_{12} + e_{21}) + e_{23} + e_{32}\}$$

où $\mathbb{R}$ désigne le corps des réels.

Les éléments de l'algèbre nilpotente n_0 satisfont les relations suivantes :

$$[X_\alpha, X_\beta] = 0 = [X_\alpha, X_\gamma], \quad [X_\beta, X_\gamma] = 2X_\alpha, \qquad X_\alpha^2 = X_\beta^3 = X_\gamma^3 = 0, \qquad X_\beta^2 = -iX_\alpha, \quad X_\gamma^2 = -iX_\alpha. \tag{6}$$

Nous avons alors les sous-groupes suivants :

$$S(U_2 \times U_1) = \exp(s(u_2 \times u_1)) = SU_2 \times A_u \quad A_u = \exp\left\{\frac{\mathbb{R}}{2}(h_1 - h_2)\right\}$$

$$A_p = \exp(h_{p0}), \quad N = \exp(n_0), \quad D_1 = A_u A_p, \quad K = ND_1, \quad S' = A_p N$$

on considère aussi le sous-groupe N' analogue à N mais construit sur les racines négatives de $H' = D_1N'$. $S(U_2 \times U_1)$ est le sous-groupe compact maximal, D_1 un sous-groupe de Cartan dont A_u et A_p sont respectivement les parties compacte et non compacte, K le normaliseur de N dans SU(2,1) et S un sous-groupe résoluble. A cause de leur importance dans les calculs des paragraphes suivants, nous donnons la forme explicite des éléments de certains de ces sous-groupes :

$$a_u(\phi) = e^{\frac{1}{2}(h_1 - h_2)\varphi} = \begin{vmatrix} e^{i\varphi/2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\varphi/2} \end{vmatrix} \qquad a_p(\theta) = e^{i(e_{13}-e_{31})\theta} = \begin{vmatrix} \operatorname{ch}\theta & 0 & i \operatorname{sh}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ i \operatorname{sh}\theta & 0 & \operatorname{ch}\theta \end{vmatrix} \tag{7}$$

$$n = e^{x_1 X_\alpha + x_2 X_\beta + x\chi X_\gamma} = \begin{vmatrix} 1+iv & \zeta & v \\ -\bar\zeta & 1 & i\zeta \\ v & -i\zeta & 1-iv \end{vmatrix} \qquad n' = \begin{vmatrix} 1-i\bar v & i\bar\zeta & \bar v \\ i\zeta & 1 & -\zeta \\ \bar v & -\bar\zeta & 1+i\bar v \end{vmatrix} \tag{8}$$

avec $v = x + i\dfrac{|\zeta|^2}{2}$ $x \in R$, $\zeta \in C$. La barre désigne la conjugaison complexe.

Il est alors assez facile de montrer que les éléments h, h', s des groupes K, H', S sont caractérisés par les relations :

$$k : \begin{cases} ik_{12} + k_{32} = 0 \\ ik_{21} + k_{23} = 0 \\ k_{11} - k_{33} = i(k_{13} + k_{31}) \end{cases} \qquad h' : \begin{cases} -ih_{12} + h_{32} = 0 \\ -ih_{21} + h_{23} = 0 \\ h_{11} - h_{33} = -i(h_{13} + h_{31}) \end{cases}$$

$$s : \begin{cases} is_{12} + s_{32} = 0 \\ is_{21} + s_{23} = 0 \\ s_{11} - s_{33} = i(s_{13} + s_{31}) \\ s_{11}s_{33} - s_{31}s_{13} = 1 \end{cases}$$

De la décomposition d'Iwasawa de SU(2,1), on établit les homéomorphismes suivants :

$$\begin{aligned} SU(2,1) &\cong S(U_2 \times U_1) \times A_p \times N \cong S(U_2 \times U_1) \times S \\ &\cong SU_2 \times D_1 \times N \cong SU_2 \times K \end{aligned} \tag{9}$$

Il est en outre facile de prouver les décompositions algébriques suivantes :

$$SU(2,1) = N \times D_1 \times N' = K \times N' \tag{10}$$

$$SU(2,1) = SU_2 \times D_1 \times SU_2 \tag{11}$$

Cette dernière relation ressemble à celle utilisée par Bargmann [3] pour paramétriser SU(1, 1), toutefois elle ne lui est pas entièrement similaire parce que $su(2,1)$ n'est pas une algèbre de Lie normale [8] (car alors dans (11), SU_2 serait remplacé par $S(U_2 \times U_1)$.

2.2 Décompositions avec sous-groupe de Cartan compact.

Il est facile d'établir les résultats suivants sur l'algèbre de Lie $su(2,1)$:

$$\begin{aligned} su(2,1) &= d_0 \oplus sO(3,C) \\ &= su(1,1) \oplus d_0 \oplus su(1,1) \\ &= u_1 \oplus su(1,1) \oplus m_0 \oplus m'_0 \end{aligned} \tag{12}$$

où m_0 et m'_0 sont les sous-algèbres abéliennes des algèbres nilpotentes n, n'.

$$(m_0 = \mathbb{R}\{X_\alpha, X_\beta\}) \text{ et de façon similaire pour } m'_0.$$

$$d_0 = \mathbb{R}\{h_1, h_2\}$$

$$sO(3,C) = \mathbb{R}\{i(e_{13} - e_{31}),\ e_{13} + e_{31},\ e_{12} + e_{21},\ i(e_{12} - e_{21}),\ e_{23} + e_{32},\ i(e_{23} - e_{32})\}$$

$$su(1,1) = \mathbb{R}\{i(e_{12} - e_{21}),\ e_{23} + e_{32},\ e_{13} + e_{31}\},$$

$$su(1,1) = \mathbb{R}\{-e_{12} + e_{21},\ i(e_{23} - e_{32}),\ i(e_{13} - e_{31})\}$$

$$u_1 \oplus su(1,1) = \mathbb{R}\{2h_1 + h_2,\ h_2,\ e_{23} + e_{32},\ i(e_{23} - e_{32})\}$$

Ceci, compte tenu de l'homomorphisme $SO_0(2,1\,;\,R) \simeq SU(1,1)$ et de l'isomorphisme $SO_0(3,C) \simeq SO_0(2,1\,;C)$ où l'indice zéro indique la composante connexe fournit les décompositions algébriques suivantes :

$$\begin{aligned} SU(2,1) &= D_0 \times SO_0(2,1)\,;C) \\ &= SO_0(2,1\,;R) \times D_0 \times SO_0(2,1\,;\mathbb{R}) \\ &= S[U(1,1) \times U_1] \times M \times M' \\ &= SU(1,1) \times A_0 \times M \times M' \end{aligned} \tag{12'}$$

où D_0 est un sous-groupe de Cartan compact et diagonal, A_0 un sous-groupe compact diagonal à un paramètre, M, M', les groupes simplement connexes avec les algèbres de Lie m_0, m'_0. On établit aussi la seconde relation (12') en remarquant que $g \in SU(2,1)$, $\gamma \in SO(2,1\,;R)$ satisfont respectivement $g\Sigma_3\bar{g}^T = \Sigma_3$

$$\gamma\Sigma_3\gamma^T = \Sigma_3 \qquad \text{avec} \qquad \Sigma_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

La première relation (12′) est intéressante car elle montre comment le groupe de Lorentz est homomorphe à un sous-groupe de SU(2, 1), en outre, de la troisième relation (12′), on déduit que tout élément $g \in \mathrm{SU}(2,1)$ peut s'écrire :

$$g = lmm' = a_0 l_1 mm', \quad l \in \mathrm{S}[\mathrm{U}_{(1,1)} \times \mathrm{U}_1], \quad l_1 \in \mathrm{SU}(1,1), \quad a_0 \in \mathrm{A}_0, \quad m \in \mathrm{M}, \quad m' \in \mathrm{M}' \tag{13}$$

avec

$$a_0 = \begin{vmatrix} e^{2i\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\varphi} \end{vmatrix} \qquad l_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & h_2 \\ 0 & \bar{h}_2 & h_1 \end{vmatrix}$$

$$m = \begin{vmatrix} 1 - \frac{y_1{}^2}{2} + ix_1 & y_1 & x_1 + iy_{\frac{1}{2}}{}^2 \\ -y_1 & 1 & iy_1 \\ x_1 + i\frac{y_1{}^2}{2} & -iy_1 & 1 + y_{\frac{1}{2}}{}^2 - ix_1 \end{vmatrix} \tag{13′}$$

$$|h_1|^2 - |h_2|^2 = 1$$

m' est déduit de n' de la même façon que m de n en annulant la partie imaginaire de ζ.

3. — LES REPRÉSENTATIONS UNITAIRES CONTINUES IRRÉDUCTIBLES

3.1 Les séries discrètes dégénérées $d^{\pm}_{0,0}$.

L'espace hermitien symétrique $\mathrm{X}_u = \mathrm{SU}(2,1)/\mathrm{S}(\mathrm{U}_2 \times \mathrm{U}_1)$ est homéomorphe [8] au domaine borné symétrique : $1 - |z_u|^2 - |\mathrm{W}_u|^2 > 0$ et également d'après (9) au sous-groupe résoluble S. La correspondance $\mathrm{X}_u \to \mathrm{S}$ est obtenue en écrivant chaque élément $s \in \mathrm{S} : s = \hat{s}\mathrm{Z}_u$ où $\hat{s}$ est une matrice semi-triangulaire ($\hat{s}_{31} = \hat{s}_{32} = 0$) et Z_u une matrice semi-triangulaire inférieure ($(\mathrm{Z}_u)_{21} = 0$) à diagonale unité. On identifie Z_u avec ses composantes non nulles z_u, W_u qui définissent un point de X_u. On a alors :

$$\hat{s}_{33} = s_{33} = \operatorname{ch}\theta - ie^{\theta}v, z_u = \frac{ve^{\theta} - i\operatorname{sh}\theta}{\operatorname{ch}\theta - ive^{\theta}}, \quad \mathrm{W}_u = \frac{-i\zeta e^{\theta}}{\operatorname{ch}\theta - ive^{\theta}} \tag{14}$$

et ainsi

$$1 - |z_u|^2 - |\mathrm{W}_u|^2 = |s_{33}|^{-2} < 0 \tag{14′}$$

SU(2,1) opère transitivement sur $\mathscr{D} : Z_u g = t'Z'_u$ où t' est semi-triangulaire, explicitement l'on a :

$$t'_{33} = \Sigma_j (Z_u)_{3j} g_{j3}, \; z'_u = \frac{\Sigma_j (Z_u)_{3j} g_{j1}}{\Sigma_j (Z_u)_{3j} g_{j3}}, \quad W'_u = \frac{\Sigma_j (Z_u)_{3j} g_{j2}}{\Sigma_j (Z_u)_{3j} g_{j3}} \tag{15}$$

De $sg = u's' = \hat{s} Z_u g$ on déduit la relation suivante utile dans la suite :

$$u'\hat{s}' = \hat{s}t' \tag{16}$$

SU(2,1) et $S(U_2 \times U_1)$ étant unimodulaires (par rapport à la mesure de Haar), il existe sur X_u une mesure invariante que l'on obtient par l'introduction des deux vecteurs complexes $V_1 = \hat{s}_{33} z_u$, $V_2 = \hat{s}_{33} W_u$ en prouvant l'invariance de $(V_1 \wedge V_2) dV_1 dV_2$ compte tenu de (15) et (16) (qui donne $u'_{33}\hat{s}'_{33} = \hat{s}_{33} t'_{33}$) et où le symbole $\wedge$ est celui du produit vectoriel. Il vient alors, dz étant mis pour $dxdy$:

$$d\mu(Z_u) = \frac{dz_u dW_u}{|z_u|^2 |W_u|^2 \sin^2(\vec{z}_u, \vec{W}_u)} \tag{17}$$

Il reste alors à calculer le multiplicateur $\alpha(x,g)$ $(\beta_x^{-1/2}(g) = 1)$. Or la variété X_u étant de rang [8] unité le seul caractère à considérer est celui du sous-groupe A_u et $\chi(a_u) = u_{33}^{-r}$ où r est un entier arbitraire, d'où en utilisant (15) et (16) :

$$\chi_x(g) = u'_{33} = [\Sigma_j (Z_u)_{3j} g_{j3}] \hat{s}_{33} (\hat{s}'_{33})^{-1}$$

posant $\alpha(Z_u) = \hat{s}_{33}^{-r}$, il vient alors d'après (3) :

$$\alpha(Z_u, g) = [\Sigma_j (Z_u)_{3j} g_{j3}]^{-r} \tag{18}$$

et compte tenu de (2) et (14') :

$$\omega(Z_u) = (1 - |z_u|^2 - |W_u|^2)^r \tag{19}$$

Soit maintenant $f(Z_u)$ une fonction analytique $\in L^2(X_u, \mu, \omega)$ c'est-à-dire telle que :

$$\|f\|^2 = \int_{\mathscr{D}} |f(Z_u)|^2 (1 - |z_u|^2 - |W_u|^2)^r d\mu(Z_u)$$

où pour des raisons de convergence, r est astreint à être positif, alors $g \to Tg$ où

$$Tgf(Z_u) = \alpha(Z_u, g) f(Z_u g) \tag{20}$$

est une représentation unitaire continue, $d_{0,0}^+$, caractérisée par un entier positif. On en obtient une seconde $d_{0,0}^-$ par la correspondance $s \to \overline{Z}_u$, ce qui revient à considérer des fonctions $f(Z_u)$ antianalytiques, en changeant dans (20), $\alpha(Z_u, g)$ et r respectivement en $\overline{\alpha(Z_u, g)}$ et $-r$.

Il reste à prouver l'irréductibilité de $d^{\pm}_{0,0}$ mais il est facile de voir qu'une représentation telle que (1) est irréductible si $\alpha(x_0, g) \equiv 1$ où x_0 est le point de X stabilisée par G_0 est une représentation irréductible d'un sous-groupe de G_0, ce résultat appliqué avec A_u fournit la preuve cherchée.

3.2 **Les séries discrètes** $d^{\pm}_0$.

Il est facile de voir par exemple sur (15) que SU_2 opère linéairement sur Z_u de sorte que l'on peut réaliser la série discrète dans l'espace $L^2(X_u, \mu, \omega) \otimes E$ où E est l'espace linéaire d'une représentation irréductible D^m, où $2m$ est un entier positif, de SU_2. Si $\Phi(Z_u) \in L^2(X_u, \mu, \omega) \otimes E$, alors sous SU_2 on a :

$$\Phi(Z_u) \rightarrow \Phi(Z_u \dot{\hat{u}}) = D^m(\hat{u})\Phi(Z_u) \quad \hat{u} \in SU_2$$

ainsi si l'on écrit chaque élément g de SU(2, 1) sous la forme $g = \hat{u} g_1$, on a la représentation unitaire continue irréductible $g \rightarrow Tg$

$$Tg\Phi(Z_u) = \alpha(Z_u, g) \; D^m(\hat{u})\Phi(Z_u \dot{g}_1) \tag{21}$$

où $\alpha(Z_u, g)$ est l'expression (18), tandis que $Z_u g_1$ est déduit de (15) en y remplaçant g par g_1. La norme de $\Phi(Z_u)$ est :

$$\| \Phi \|^2 = \sum_\lambda \int_{\mathscr{D}} |\Phi_\lambda(Z_u)|^2 (1 - |z_u|^2 - |W_u|^2)^r d\mu(Z_u)$$

caractérisant les $2m + 1$ composantes de Φ.

Si $\Phi(Z_u)$ est analytique, l'on obtient la série d^+_0 caractérisée par les deux entiers positifs, r, $2m$, tandis qu'avec $\Phi(Z_u)$ antianalytique l'on a d^-_0 avec $-r$ et $2m$ entiers positifs ; d^+_0 et d^-_0 correspondent respectivement aux représentations $\overline{H}^+_{\sigma,\tau}(\sigma \leqslant 0)$ et $\overline{H}^+_{\sigma,\tau}(\tau \leqslant 0)$ de Graëv [*6*] ; mais ces dernières ne sont pas analytiques.

3.3 **La série continue** d_1 **et la série supplémentaire** ds.

D'après la seconde relation (9), l'espace homogène $Z = SU(2, 1)/K$ est homéomorphe à la sphère S^3, donc aussi à la frontière $\delta\mathscr{D}$ du domaine $\mathscr{D}$.

Introduisons les matrices :

$$Z_0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ i & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad Z_k = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ z_k & W_k & 1 \end{vmatrix} \tag{22}$$

De $Z_0 n' = \hat{n}' Z_k$ où d'après (10) $n' \in N'$ et où $\hat{n}'$ est semi-triangulaire, l'on déduit :

$$\hat{n}'_{33} = in'_{13} + n'_{33}, \quad z_k = \frac{i + 2\bar{v}}{1 + 2i\bar{v}}, \quad W_k = \frac{-2\bar{\zeta}}{1 + 2iv} \tag{23}$$

On vérifie immédiatement que $|z_k|^2 + |W_k|^2 = 1$ de sorte que

$$Z_k = \{z_k, W_k\} \in \mathscr{D}.$$

SU(2,1) opère transitivement sur $\delta\mathscr{D}$: $Z_k g = t' Z'_k$ t' semi-triangulaire, il vient :

$$t'_{33} = \Sigma_i (Z_k)_{3i} g_{i3}, \quad z'_k = \frac{\Sigma_i (Z_k)_{3i} g_{i1}}{\Sigma_i (Z_k)_{3i} g_{i3}}, \quad W'_k = \frac{\Sigma_i (Z_k)_{3i} g_{i2}}{\Sigma_i (Z_k)_{3i} g_{i3}} \tag{24}$$

De $g = kn'$ (cf. (10)) et $n'g = k'n'_1$, on tire :

$$\begin{aligned} Z_0 n' g &= Z_0 k' n'_1 = (Z_0 k' Z_0^{-1})(Z_0 n'_1) = \hat{k}' \hat{n}'_1 Z'_k \\ &= \hat{n}' Z_k g = \hat{n}' t' Z'_k \end{aligned} \tag{25}$$

d'où

$$\hat{k}' \hat{n}'_1 = \hat{n}' t' \tag{26}$$

avec

$$\hat{k} = \begin{vmatrix} e^{i\varphi+\theta} & \zeta e^{-2i\varphi} & (i \operatorname{sh}\theta + v e^{-\theta}) e^{i\varphi} \\ 0 & e^{-2i\varphi} & i\bar{\zeta} e^{-\theta} e^{i\varphi} \\ 0 & 0 & e^{i\varphi-\theta} \end{vmatrix} \tag{27}$$

on a $d\mu(Z_k) = d\mu(n') = dx d\zeta$ où $d\mu(n')$ est la mesure de Haar sur N'. De (23), on tire les relations

$$\zeta = i W_k (i Z_k - 1)^{-1}, \qquad x = \frac{1}{4} \operatorname{Im} (i Z_k - 1)^{-1},$$

d'où par un calcul élémentaire :

$$d\mu(Z_k) = \frac{1}{4} (i Z_k - 1)^{-2} dW_k d\, [\operatorname{Im} (i Z_k - 1)^{-1}]$$

K n'étant pas unimodulaire, $d\mu(Z_k)$ est seulement une mesure quasi-invariante. Pour calculer la fonction modulaire de K, on remarque que K est le produit semi-direct $N \times D_1$ de sorte que $d\mu(k) = d\mu(n_v)d\mu(\delta)$ où η_v est l'élément η avec le paramètre $v = v_1 e^{\pm\theta}$, or pour $v = v_1 e^{\theta}$, $d\mu_r(k) = d\mu(\eta_{v_1})$ $d\mu(\delta)e^{\theta}$ et pour $v = v_1 e^{-\theta}$, $d\mu_l(k) = d\mu(\eta_{v_1})d\mu(\delta)e^{-\theta}$, donc compte tenu de (17) :

$$\beta(k) = \frac{d\mu_l(k)}{d\mu_r(k)} = e^{-2\theta} = |\hat{k}_{33}|^2 \tag{29}$$

mais :

$$\chi(K) = \chi(D) = e^{-i(v\varphi + \sigma\theta)} = |\hat{k}_{33}|^{i\sigma}\left(\frac{\hat{k}_{33}}{|\hat{k}_{33}|}\right)^{v}$$

où σ est un nombre réel arbitraire et v un entier. De (26), (24), (23), on tire :

$$\hat{k}'_{33} = [\Sigma_j (Z_k)_{3j} g_{j3}](1 - iz_k)^{-1}(1 - iz'_k) \tag{30}$$

comme $\chi(g) = \chi(\hat{k}'_{33})$, on déduit $\alpha(Z_k, g)$ en portant (29), (30) dans (2) en prenant : $\alpha(Z_k) = (1 - iz_k)^{v - i\sigma + 1}(1 - iz_k)^{-v}$:

$$\alpha(Z_k, g) = |\Sigma_j (Z_k)_{3j} g_{j3}|^{i\sigma - 1 - v}(\Sigma_j (Z_k)_{3j} g_{j3})^{v} \tag{31}$$

tandis que pour il vient d'après (4) :

$$\omega(Z_k) = |1 - iz_k|^2 \tag{32}$$

Dans $L^2(Z, \omega, \mu)$, avec ω et μ donnés par (32) et (28), la représentation $g \to Tg(1)$ avec le multiplicateur (31) est une représentation unitaire continue dont l'irréductibilité est une conséquence du résultat énoncé à la fin du paragraphe 3.1.

Mais remarquons d'après (7) que si e est l'identité de SU(2, 1) on a $e = a_u(4\pi)$, $-e = a_u(2\pi)$ de sorte que T_e est univaluée (bivaluée) si $T_{-e} = 1 (T_{-e} = -1)$. Ces deux cas peuvent être différenciés en introduisant $\varepsilon = 0, 1$ et en écrivant la série continue sous la forme :

$$T_g^{\varepsilon} f(Z_k) = (\Sigma_j (Z_k)_{3j} g_{j3})^{\frac{i\sigma - 1 - v + \varepsilon}{2}} \overline{(\Sigma_j (Z_k)_{3j} g_{j3})}^{\frac{i\sigma - 1 - v - \varepsilon}{2}} (\Sigma_j (Z_k)_{3j} g_{j3})^{v} f(Z_k g) \tag{33}$$

on note d_1^0 et d_1^1 les séries correspondantes.

Remarquons que d'après (10) au lieu de réaliser d_1 sur $L^2(S^3)$ on pourrait obtenir dans $L^2(N')$. On notera l'analogie entre les résultats obtenus dans ce paragraphe et ceux de la série principale [2] de SL(2, C), ceci tient au fait d'une part, que D_1 et le sous-groupe de Cartan de SL(2, C) ont les mêmes caractères et par ailleurs, que les deux séries peuvent être réalisées dans $L^2(S^3)$.

On utilise alors cette analogie pour écrire immédiatement la série supplémentaire d_s parce que les calculs sont formellement identiques. Si $Z_k^1 - Z_k^2$ désigne la distance entre deux points $Z_k \in \delta\mathscr{D}$, l'on a :

$$T_g f(Z_k) = |\Sigma_j(Z_k)_{3j} g_{j3}|^{-1-\tau} f(Z_k g) \qquad 0 < \tau < 1$$

où $f(Z_k)$ est une fonction continue sur $\delta\mathscr{D}$ avec la norme :

$$\| f \|^2 = \int_{\delta\mathscr{D}} \overline{f(Z_k^1)} f(Z_k^2) | Z_k^1 - Z_k^2 |^{-1+\tau} d\mu(Z_k^1) d\mu(Z_k^2)$$

où $d\mu(Z_k)$ est la mesure définie au paragraphe précédent.

3.4 La série discrète dégénérée $d'_{0,0}$.

L'espace homogène $X_0 = SU(2, 1)/S[U(1, 1) \times U_1]$ est un domaine symétrique $\mathscr{D}' : 1 + |z_0|^2 - |W_0|^2 < 0$. Considérons l'application $M \times M' \to SU(2, 1)$ qui associe à tout couple $\{m, m'\}$ (cf. (13)) l'élément $g^{(m)} = mm' \in SU(2, 1)$, alors $g^{(m)}$ définit le point $\{z_0 = g_{12}^{(m)}(g_{11}^{(m)})^{-1}, W_0 = g_{13}^{(m)}(g_{11}^{(m)})^{-1}\}$ avec sous SU(2, 1) :

$$z'_0 = \frac{g_{12} + g_{22} z_0 + g_{32} W_0}{g_{11} + g_{21} z_0 + g_{31} W_0} \qquad W'_0 = \frac{g_{13} + g_{23} z_0 + g_{33} W_0}{g_{11} + g_{21} z_0 + g_{31} W_0} \tag{15'}$$

en écrivant $g^{(m)}$ sous la forme $\hat{g}^{(m)} Z_0$ avec

$$Z_0 = \begin{vmatrix} 1 & z_0 & W_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

On peut alors refaire les calculs du paragraphe 3.1 avec les modifications suivantes :

a) remplacer u, s, t par l, m, p où p est une matrice triangulaire inférieure en faisant jouer à la composante (11) de ces matrices le rôle de la composante (33),

b) au lieu du sous-groupe A_u, on a A_0 mais ces deux groupes ont même caractère,

c) les fonctions $f(Z_0)$ ne sont pas analytiques et r est un entier quelconque,

d) l'expression (20) est encore valable avec $Z_0 g$ donné par (15') et

$$\alpha(Z_0 g) = (g_{11} + g_{21} z_0 + g_{31} W_0)^{-r}$$

avec

$$\omega(Z_0) = (1 + |z_0|^2 - |W_0|^2)^2.$$

Ainsi la série discrète dégénérée d_0' est caractérisée par un entier arbitraire. On voit immédiatement sur (15') que SU(1,1) opère linéairement dans $\mathscr{D}'$ de sorte que si $D^m(e)$ est une représentation finie de SU(1,1), la relation (21) avec des modifications évidentes fournit une représentation de SU(2,1) qui n'est pas unitaire parce que dans la norme $\| \Phi \|^2$, $\Sigma_\lambda^\pm |\Phi_\lambda(Z_0)|^2$ n'est pas définie positive. Ce type de représentations pourrait néanmoins être intéressant à considérer d'un point de vue physique.

4. — LES REPRÉSENTATIONS RÉGULIÈRES ET QUASI-RÉGULIÈRE

4.1 Remarque préliminaire.

Les représentations que l'on va maintenant considérer sont généralement réductibles et on étudie en particulier leur réalisation dans l'espace $C_c^\infty(X)$, dense dans $L^2(X)$, des fonctions indéfiniment différentiables à support compact sur l'espace homogène X. On utilisera continuellement les deux résultats suivants :

i) les laplaciens $\Delta^{(1)}$, $\Delta^{(2)}$, dans le centre de l'algèbre enveloppante universelle de $su(2,1)$, en termes d'opérateurs différentiels correspondants aux représentations unitaires continues $g \to Tg$ dans $L^2(X)$ sont essentiellement self-adjoints (leur fermeture $\bar{\Delta}^{(1)}$, $\bar{\Delta}^{(2)}$ est self-adjointe) dans un domaine dense commun le domaine de Garding. Ceci est évident par le lemme de Schür si $g \to Tg$ est irréductible, car alors les Δ sont des multiples de l'opérateur unité et a été prouvé pour une représentation unitaire continue d'un groupe de Lie semi-simple [*9*] ;
ii) soit E la résolution de l'identité pour l'opérateur self-adjoint T dans un espace de Hilbert séparable H et P l'opérateur projection $\Sigma_k E(\mu_k)$ défini sur les valeurs propres μ_k de T, alors H peut être décomposé en deux sous-espaces orthogonaux $H_1 = (I - P)H$, $H_2 = PH$ tels que dans H_1, T a un spectre purement continu et dans H_2 purement discret [*10*].

Ce dernier résultat appliqué à $\Delta^{(1)}$ (opérateur de Casimir) montre que chaque $\Psi(x) \in L^2(X)$ admet la décomposition :

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \Psi_1(X) + \Psi_2(X) \\ \| \Psi \|^2 &= \| \Psi_1 \|^2 + \| \Psi_2 \|^2 \end{aligned} \tag{34}$$

Mais, pour les représentations irréductibles, parce que Δ_1, Δ_2 sont réalisés par les transformations infinitésimales $g \to \mathrm{T}g$, leurs spectres sont caractérisés par les couples de nombres (σ, ν), (m, r) des multiplicateurs $\alpha(x, g)$, ainsi $\Psi_1(x)$, $\Psi_2(x)$ peuvent être développés respectivement sur les composantes irréductibles $\phi_{\nu\sigma}(x)$, $\phi_{rm}(x)$ des représentations unitairement équivalentes aux séries d_1, $d_0^{\pm}$, quand il existe une application isométrique entre $\mathrm{L}^2(\mathrm{X})$ et l'espace des fonctions $\phi_{\nu\sigma}(x)$, $\phi_{rm}(x)$ convenablement normées, c'est-à-dire que l'on peut écrire :

$$\begin{cases} \Psi_1(x) = \displaystyle\sum_{\nu} \int_{-\infty}^{+\infty} a_{\nu\sigma}\phi_{\nu\sigma}(x)d\sigma \\ \Psi_2(x) = \Sigma_r \Sigma_m b_{rm}\phi_{rm} \end{cases} \tag{34'}$$

où $a_{\nu\sigma}$, b_{rm} sont les coefficients du développement. Dans la seconde relation (34'), $r > 0$, $r < 0$, correspondent respectivement aux représentations unitairement équivalentes à $d_{0,rm}^{+}$ et $d_{0,rm}^{-}$. On prouvera dans chacun des cas particuliers que l'on étudiera, l'existence d'une application isométrique en prenant les transformées de Fourier de $\Psi_1(\delta_1 x)$ et $\Psi_2(\delta_0 x)$ ($\delta_1 \in \mathrm{D}_1$, $\delta_0 \in \mathrm{D}_0$) respectivement sur les sous-groupes de Cartan non compact D_1 et compact D_0.

Avec les relations (34) et (34') il est facile de décomposer comme on le verra dans les paragraphes qui suivent les représentations unitaires réductibles $g \to \mathrm{T}g$ sous $\mathrm{L}^2(\mathrm{X})$ mais la détermination du spectre de l'opérateur différentiel Δ_1, essentiellement self-adjoint, hyperbolique d'après les propriétés de l'algèbre de Lie (non compacte) $su(2,1)$, pour aboutir à (34) est un calcul laborieux que l'on n'abordera pas ici. Naturellement la représentation de $su(2,1)$ par des opérateurs différentiels X_i dans $\mathrm{L}^2(\mathrm{X})$ est définie, par la limite dans la topologie forte

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{\mathrm{U}(\tau)f(x) - f(x)}{\tau}.$$

4.2 La représentation quasi-régulière.

La représentation quasi-régulière est réalisée dans l'espace $\mathrm{L}^2(\mathrm{H})$ où H désigne l'espace affine fondamental SU(2, 1)/N qui est aussi l'espace du sous-groupe H′ d'après la première relation (10). Or SU(2, 1) opère transitivement sur l'espace complexe $\mathscr{K}$:

$$z_{n,1}{}^2 + z_{n,2}{}^2 - z_{n,3}{}^2 = 0 :$$

$$z_{ni} \to z'_{ni} = \Sigma_j z_{nj} g_{ij} \quad i, j = 1, 2, 3, \quad g = \{ g_{ij} \} \in \mathrm{SU}(2,1) \tag{35}$$

N est le stabilisateur du point $(1, 0, -i)$ et H est aussi obtenu en identifiant sur $\mathscr{K}$, $z_{n,i}$ et $W_{n,i}$ si : $z_{n,1} - iz_{n,3} = W_{n,1} - iW_{n,3}$, $z_{n,2} = W_{n,2}$. L'application bi-univoque $z_{n,i} \leftrightarrow h' \in H'$ est définie en remarquant que la somme de la première et la troisième ligne de la diagonale de h' donne, parce que $h'\Sigma_3 h' = \Sigma_3$:

$$|h_{11}|^2 + |h_{31}|^2 + |h_{12}|^2 - |h_{13}|^2 - |h_{33}|^2 = 0$$

par ailleurs, compte tenu de la relation $h_{11} - h_{33} = -i(h_{13} + h_{31})$; il est alors facile de vérifier que $Z_n = \{z_{ni}\} \in \mathscr{K}$ avec :

$$z_{n,1} = h_{11} - ih_{31}, \quad z_{n,2} = h_{12}, \quad z_{n,3} = h_{33} + ih_{13} \tag{36}$$

N étant unimodulaire, il existe une mesure invariante sur H (l'élément de volume $d\mu(Z_n)$ de $\mathscr{K}$) et la représentation quasi-régulière $g \to Tg$ dans $L^2(H)$ s'écrit :

$$Tgf(Z_n) = f(\Sigma_j z_{nj} g_{ij}) \tag{37}$$

Pour réduire (37), on écrit suivant (34) : $f(Z_n) = f_1(Z_n) + f_2(Z_n)$ et il reste à déterminer (34').

Considérons d'abord $f_1(Z_n)$: de $H' = DN'$ on a pour tout $f_1(h') \in C_c^\infty(H')$ la relation intégrale (H' n'est pas unimodulaire) :

$$\int_{H'} f_1(h')\rho^{-1}(h')d\mu(h') = \int_{H'/D_1} d\mu(n') \int_{D_1} f_1(\delta h')d\mu(\delta) \quad \delta \in D_1 \tag{38}$$

où $\rho(h')$ est un poids satisfaisant $\rho(\delta_0 h') = \beta(\delta_0)\rho(h'), \forall \delta_0 \in D_1$ où β est la fonction modulaire de H'. Cette relation est satisfaite pour $\rho(h') = \beta(\delta)$ si δ est l'élément particulier de D_1 défini par $h' = \delta n'$. Mais un calcul similaire à celui du paragraphe 3.3 donne $\beta(h') = |h_{33} - ih_{31}|^2$ d'où :

$$\rho(h') = \beta(\delta) = |\delta_{33} - i\delta_{31}|^2 = e^{-2\theta} \tag{39}$$

Introduisons la transformée de Fourier $\Psi_1(Z_n ; \nu, \sigma)$ sur D_1 de $\rho^{1/2}(\delta h') \times f_1(\delta Z_n)(h' \leftrightarrow Z_n)$:

$$\Psi_1(Z_n ; \nu, \sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\delta Z_n)\rho^{1/2}(\delta Z_n)\chi^{-1}(\delta)d\mu(\delta) \tag{40}$$

d'où l'inverse ($\chi(\delta) = e^{i(\nu\varphi + \sigma\theta)}$), ν entier, σ réel ($d\mu(\delta) = d\theta d\phi$)

$$\rho^{1/2}(\delta Z_n) f_1(\delta Z_n) = \frac{1}{2\pi} \sum_\nu \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_1(Z_n ; \nu, \sigma)\chi(\delta)d\sigma \tag{40'}$$

le théorème classique de Plancherel sur les groupes abéliens donne ;

$$\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(\delta Z_n)|^2 \rho(\delta Z_n) d\mu(\delta) = \sum_{\nu} \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi_1(Z_n ; \nu, \sigma)|^2 d\sigma$$

dont l'intégration sur N', compte tenu de (38) et de $h' \leftrightarrow Z_n$ montre que (40) est une application de $L^2(H)$ sur l'espace des fonctions $\Psi_1(Z_n ;\ \nu, \sigma)$ avec la norme :

$$\| \Psi_1 \|^2 = \sum_{\nu} \int_{N'} \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi_1(Z_n ; \nu, \sigma)|^2 d\sigma d\mu(n') < \infty \qquad (40'')$$

La représentation induite dans cet espace par (37) est :

$$\begin{aligned} Tg\Psi_1(Z_n ; \nu, \sigma) &= \int_{D_1} f_1(\delta Z_n g) \rho^{1/2}(\delta Z_n) \chi^{-1}(\delta) d\mu(\delta) \\ &= \Psi_1(Z_n g ; \nu, \sigma)[\rho(Z_n g)/\rho(Z_n)]^{-1/2} \end{aligned} \qquad (41)$$

car $\rho(\delta h') = \rho(\delta h' g)\rho(h')\rho(h'g)^{-1}$.

Mais de (40), on tire $\Psi_1(\delta Z_n ;\ \nu,\ \sigma) = \chi(\delta)\Psi_1(Z_n ;\ \nu,\ \sigma)$ de sorte que $|\Psi_1(Z_n ;\ \nu,\ \sigma)|$ est une fonction sur le sous-groupe N'. Ainsi puisque $[\rho(Z_n g)/\rho(Z_n)]^{-1} = d\mu(n'g)/d\mu(n')$, Tg préserve la norme

$$\| \Psi_1, \nu, \sigma \|^2 = \int_{N'} |\Psi_1(Z_n ; \nu, \sigma)|^2 d\mu(n').$$

Ainsi, (41) est une représentation unitaire irréductible équivalente à $d_1 ; \nu, \sigma$ et de (40'), on déduit la décomposition de $f_1(Z_n)$:

$$f_1(Z_n) = \rho^{-1/2}(Z_n) \sum_{\nu} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_1(Z_n ; \nu, \sigma) d\sigma \qquad (42)$$

Pour $f_2(Z_n)$ on procède de la même façon en remarquant d'abord que la première relation (9) implique un homéomorphisme (c'est même un difféomorphisme analytique [8]) $Z_n \xrightarrow{\gamma} \{ u, a_p \}$ entre H et la variété produit $S(U_2 \times U_1) \times A_p$, de sorte que pour tout $f_2(Z_n) \in C_c^\infty(H)$, on a en posant $F_2(a_p, u) = (f_2 \circ \gamma)\{ u, a_p \}$ la relation intégrale

$$\int_{G/N} f_2(Z_n) \rho_1{}^{-1}(Z_n) d\mu(Z_n) = \int_{S(U_2 \times U_1) \times A_p} F_2(a_p, u) d\mu(a_p) d\mu(u) \qquad (43)$$

où $d\mu(a_p)$, $d\mu(u)$ sont les mesures de Haar respectivement sur A_p et $S(U_2 \times U_1)$ avec $\rho_1(Z_n) = \beta(a_p) = e^{-2\theta}$ de sorte que $\rho_1(Z_n) = \rho(Z_n)$. Considérons d'abord la transformée de Fourier de $\rho^{1/2}(uZ_n)f_2(uZ_n)$ sur A_u ($u = \hat{u}a_u$, $\hat{u} \in SU_2$, $a_u \in A_u$, $\chi(a_u) = e^{ir\varphi}$, $d\mu(a_u) = d\phi$).

$$\Theta_2(\hat{u}Z_n\,; r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{A_u} \rho^{1/2}(uZ_n) f_2(uZ_n)\chi^{-1}(a_u) d\mu(a_u) \tag{44}$$

$$\rho^{1/2}(uZ_n)F_2(uZ_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_r \Theta_2(\hat{u}Z_n, r)e^{ir\varphi} \tag{44'}$$

avec la formule de Plancherel classique :

$$\int_{A_u} \rho(uZ_n)|f_2(uZ_n)|^2 d\mu(a_u) = \sum_r |\Theta_2(\hat{u}Z_n\,; r)|^2 \tag{45}$$

mais $\Theta_2(...) \in L^2(SU_2)$ donc si $Y^{j,j'}_{m/2}(\hat{u})$, $|j|, |j'| \leqslant m/2$, m entier $\geqslant 0$ est une base orthonormale dans $L^2(SU_2)$, on a les relations bien connues :

$$\Theta_2(\hat{u}Z_n\,; r) = \sum_{m>0} \sum_{j,j'} \Psi_2(Z_n\,; r, m, j, j') Y^{j,j'}_{m/2}(\hat{u}) \tag{46}$$

$$|\Psi_2(Z_n, r, m, j, j')| = \frac{1}{16\pi^2} \int_{SU_2} \Theta_2(\hat{u}Z_n\,; r) Y^{j,j'}_{m/2}(\hat{u}) d\mu(\hat{u}) \tag{46'}$$

et

$$\frac{1}{16\pi^2} \int_{SU_2} |\Theta_2(\hat{u}Z_n\,; r)|^2 d\mu(\hat{u}) = \sum_{m>0} \sum_{j,j'} |\Psi_2(Z_n\,; r, m, j, j')|^2 \tag{47}$$

dont l'intégration sur A_p, compte tenu de (45) et de (43), montre que (46′) et (44) définissent une application isométrique (on utilise l'égalité suivante):

$$\int_{S(U_2 \times U_1) \times A_p} f_2(Z_n) d\mu(a_p) d\mu(u)$$

$$= \int_{S(U_2 \times U_1) \times A_p} f_2(u'Z_n) d\mu(a_p) d\mu(u) \quad : u' \in S(U_2 \times U_1))$$

de $C_c^\infty(H)$ sur l'espace des $\Psi_2(...)$ muni de la norme :

$$\| \Psi_2 \|^2 = \sum_r \sum_{m>0} \sum_{j,j'} \frac{1}{2m+1} \int_{A_p} |\Psi_2(Z_n\,; r, m, j, j')|^2 d\mu(a_p) < \infty \tag{47'}$$

(remarquer en calculant $\Psi_2(uZ_n\,; r, m, j, j')$ que $\sum_{j,j'} |\Psi_2(Z_n\,; r, m, j, j')|^2$ ne dépend pas de a_p).

Sur (46'), (37) induit la représentation :

$$Tg\Psi_2(Z_n\,;r,m,j,j') = \frac{1}{16\sqrt{2}\pi^{3/2}}\int_{A_u}\int_{SU_2}[Tgf_2(uZ_n)]\rho^{1/2}(uZ_n)\chi^{-1}(a_u)$$

$$Y^{j,j'}_{m/2}(\hat{u})d(a_u)d\mu(\hat{u}) = \Psi_2(Z_n g\,;r,m,j,j')[\rho(Z_n g)/\rho(Z_n)]^{-1/2} \tag{48}$$

Comme $[\rho(Z_n g)/\rho(Z_n)]^{-1} = d\mu(a_p g)/d\mu(a_p)$, Tg préserve la norme

$$\int_{A_p}|\Psi_2(\ldots)|^2 d\mu(a_p).$$

Ainsi, pour r, m fixés, (51) est une représentation unitaire irréductible équivalente à la somme directe d_0^+, r, m, $\oplus d_0^-$, r, m et la décomposition de $f_2(Z_n)$ s'écrit :

$$f_2(Z_n) = \frac{\rho^{-1/2}(Z_n)}{\sqrt{2\pi}}\sum_r\sum_{m>0}\sum_{j,j'}\Psi_2(Z_n\,;r,m,j,j') \tag{49}$$

Ainsi, compte tenu de (34), les relations (42) et (49) expriment la décomposition de la représentation quasi-régulière en composantes irréductibles et d'après (34'), (40''), (47'), la formule de Plancherel s'écrit :

$$\|f\|^2 = \sum_\nu\int_{N'}\int_{-\infty}^{+\mathscr{D}}|\Psi_1(Z_n\,;\,\nu,\,\sigma)|^2 d\mu(n')d\sigma$$
$$+\sum_r\sum_{m>0}\sum_{j,j'}\frac{1}{2m+1}\int_{A_p}|\Psi_2(Z_n,r,m,j,j')|^2 d\mu(a_p).$$

4.3 Une réalisation de d_1 sur X_d.

La relation (11) montre qu'il existe une application bi-univoque entre l'espace homogène $X_d = SU(2,1)/D_1$ et une composante transitive sous SU(2,1) de $\delta\mathscr{D}\times\delta\mathscr{D}$. Soit $Z_d = \{z_d, W_d\}\in X_d$ avec $z_d = \{z_{d,1}, z_{d,2}\}$, $W_d = \{W_{d,1}, W_{d,2}\}$; pour simplifier, on écrit $z_{d,i}$, $W_{d,i}(i = 1, 2, 3)$ avec la convention $z_{d,3} = W_{d,3} = 1$. Alors sous SU(2,1), $Z_d \to Z'_d = Z_d g$ explicitement :

$$W'_{d,j} = \frac{\Sigma_i W_{d,i}g_{ij}}{\Sigma_j W_{d,j}g_{j3}} \qquad z'_{d,j} = \frac{\Sigma_i z_{d,i}g_{ij}}{\Sigma_j z_{d,j}g_{j3}} \tag{50}$$

Il est facile de voir que D_1 est le stabilisateur de $Z_d^0 = \{(i,0),(0,i)\}$ de sorte que la composante transitive de $\delta\mathscr{D} \times \delta\mathscr{D}$ est $Z_d^0 g$. Par ailleurs, N étant un sous-groupe invariant de K (cf. (10)), on peut écrire un élément de SU(2,1) sous la forme $\delta n n'$ de telle sorte que $nn'g = nk'n'_1 = \delta' n_1 n'_1$ c'est-à-dire $n'g = n'_1$ et $nn'g = n_1 n'_1$. Ces relations et les égalités (50) sont satisfaites pour $W_d = Z_k$ (cf. (23)) et $Z_0 nn' = \hat{t} z_d$ où Z_0 est la matrice (22) et $\hat{t}$ une matrice semi-triangulaire supérieure. Ceci détermine l'application bi-univoque $X_d \leftrightarrow \delta\mathscr{D} \times \delta\mathscr{D}$.

Maintenant on peut écrire :

$$(Z_0 n Z_0^{-1})(Z_0 n' g) = (Z_0 \delta_1 Z_0^{-1})(Z_0, n_1 Z_0^{-1})(Z_0 n'_1) \tag{51}$$

et un calcul simple montre que $Z_0 n Z_0^{-1}$ est une matrice triangulaire supérieure nilpotente tandis que pour $Z_0 \delta_1 Z_0^{-1}$ l'on a :

$$Z_0 \delta_1 Z_0^{-1} = \begin{vmatrix} e^{i\varphi' + \theta'} & 0 & e^{i\varphi'} \operatorname{sh} \theta' \\ 0 & e^{-2i\varphi'} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\varphi' - \theta'} \end{vmatrix}$$

on déduit alors de (51) :

$$(Z_0 n' g)_{33} = e^{i\varphi' - \theta'} (Z_0 n'_1)_{33}$$

et comme

$$(Z_0 n')_{33} = i n'_{13} + n'_{33} = \hat{n}'_{13}, \; e^{i(\varphi' - \theta')} = \hat{k}'_{33}$$

(voir (26)), cette relation n'est autre que (30). Alors avec l'identification $W_d = Z_k$, il vient :

$$e^{i\varphi' - \theta'} = [\Sigma_j (Z_k)_{3j} g_{j3}](1 - i z_k)^{-1}(1 - i z'_k) \tag{52}$$

Comme SU(2,1) et D_1 sont unimodulaires, il existe une mesure invariante sur $X_d (d\mu(Z_d) = d\mu(n) d\mu(n'))$ et puisque $\chi(D_1) = e^{-i(\nu\varphi + \sigma\theta)}$ le multiplicateur $\alpha(z, g)$ s'écrit, compte tenu de (52), et en posant

$$\alpha(Z_d) = |1 - i z_k|^{\nu - i\sigma}(1 - i z_k)^{-\nu}$$

(donc $\omega(Z_d) = 1$) :

$$\alpha(Z_d, g) = |\Sigma_j (Z_k)_{3j} g_{j3}|^{i\sigma - \nu} (\Sigma_j (Z_k)_{3j} g_{j3})^{\nu}$$

on obtient ainsi la représentation unitairement équivalente à d_1 ; σ, ν :

$$T g f(Z_d) = |\Sigma_j (Z_k)_{3j} g_{j3}|^{i\sigma - \nu} (\Sigma_j (Z_k)_{3j} g_{j3})^{\nu} f(Z_d g) \tag{53}$$

où $f(Z_d) \in L^2(X_d)$. La différence entre (33) et (53) ($\sigma - 1 \to \sigma$) résulte de l'existence d'une mesure invariante sur $\delta\mathscr{D} \times \delta\mathscr{D}$.

4.4 La représentation régulière.

Pour réduire la représentation régulière $g \to \mathrm{T}g$ dans $\mathrm{L}^2(\mathrm{SU}(2,1))$:

$$\mathrm{T}_{g_0} f(g) = f(gg_0) \qquad g, g_0 \in \mathrm{SU}(2,1) \tag{54}$$

on opère comme dans le paragraphe 4.2 en écrivant d'après (34)

$$f(g) = f_1(g) + f_2(g).$$

Utilisant (11) et l'application $\mathrm{X}_d \leftrightarrow \delta\mathscr{D} \times \delta\mathscr{D}$ du paragraphe précédent, on a pour tout $f_1(g) \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathrm{G})$, la relation intégrale :

$$\int_{\mathrm{G}} f_1(g) d\mu(g) = \int_{\mathrm{X}_d} d\mu(\mathrm{Z}_d) \int_{\mathrm{D}_1} f_1(\delta g) d\mu(\delta) \tag{55}$$

on désigne par $\Psi_1(g\,;\, v, \sigma)$ la transformée de Fourier de $f_1(\delta g)$ sur D_1, et on montre encore que cette transformation est une application isométrique de $\mathrm{L}^2(\mathrm{SU}(2,1))$ sur l'espace des $\Psi_1(g\,;\, v, \sigma)$ avec la norme :

$$\| \Psi_1 \|^2 = \sum_v \int_{\mathrm{X}_d} d\mu(\mathrm{Z}_d) \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi_1(g\,; v, \sigma)|^2 d\sigma < \infty \tag{56}$$

et que (54) y induit la représentation unitaire ($\Psi_1(g\,;\, v, \sigma) \in \mathrm{C}_c^\infty(\delta\mathscr{D} \times \delta\mathscr{D})$)

$$\mathrm{T}_{g_0} \Psi_1(g\,; v, \sigma) = \Psi_1(gg_0\,; v, \sigma) \tag{57}$$

qui pour v, σ, fixés est irréductible et unitairement équivalente à (53), car $\Psi_1(g\,;\, v, \sigma)$ dépend seulement de Z_d et sur l'espace des transformées de Fourier de $f(\delta \mathrm{Z}_d)$, (53) induit (57). De plus, on a :

$$f_1(g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_v \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_1(g\,; v, \sigma) d\sigma \tag{58}$$

Pour $f_2(g) \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathrm{SU}(2,1))$, on utilise la relation intégrale :

$$\int_{\mathrm{G}} f_2(g) d\mu(g) = \int_{\mathrm{X}_u} d\mu(\mathrm{Z}_u) \int_{\mathrm{S}(\mathrm{U}_2 \times \mathrm{U}_1)} f_2(ug) d\mu(u) \quad u \in \mathrm{S}(\mathrm{U}_2 \times \mathrm{U}_1)$$

Comme dans le paragraphe 4.2, on développe $f_2(ug)$ sur la base $\mathrm{Y}_{m/2}^{j,j'}(\hat{u})$ après une transformation de Fourier sur A_u ce qui établit une application isométrique de $L^2(SU(2,1))$ sur l'espace des $\Psi_2(g\,;m,r,j,j')$ muni de la norme :

$$\|\Psi_2\|^2 = \sum_r \sum_{m>0} \sum_{jj'} \frac{1}{2m+1} \int_{\mathscr{D}} |\Psi_2(g\,;r,m,j,j')|^2 d\mu(Z_u) < \infty \quad (59)$$

sur lequel (54) induit la représentation $T_{g_0}\Psi_2(g\,;r,m,j,j') = \Psi_2(gg_0\,;r,m,j,j')$ qui est unitaire, irréductible pour r, m fixés et équivalente à la somme directe d_0^+, r, m, $\oplus d_0^-$, r, m. De plus :

$$f_2(g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_r \sum_{m>0} \sum_{jj'} \Psi_2(g\,;r,m,j,j') \quad (60)$$

D'après (34), (58) et (60) expriment la décomposition de la représentation régulière en composantes irréductibles, tandis que d'après (34'), les relations (56) et (59) fournissent la formule de Plancherel correspondante.

5. — REPRÉSENTATIONS UNITAIRES DANS $L^2(X_u)$ ET $L^2(X_d)$.

Les techniques du paragraphe précédent peuvent être appliquées aux réductions de différentes représentations unitaires. On en donne ici deux exemples, d'abord pour $g \to Tg$ avec $Tgf(Z_u) = f(Z_u g)$ où $f(Z_u) \in L^2(X_u)$ et où $Z_u g$ est donné par (15).

$\hat{u} \to T_{\hat{u}}$ étant une représentation unitaire de SU_2 peut être réduite par les techniques habituelles de sorte qu'on se limite aux restrictions T_g^m de T_g sur les composantes $\Phi^{(m)}(Z_u)$ irréductibles sous SU_2. Supposant

$$\Phi^{(m)}(Z_u) \in C_c^\infty(Z_u),$$

on écrit

$$\Phi^{(m)}(Z_u) = \Phi_1^{(m)}(Z_u) + \Phi_2^{(m)}(Z_u)$$

comme précédemment. Maintenant on utilise l'homéomorphisme $S \simeq Z_u$ (cf. (14)) et la relation intégrale :

$$\int_S \Phi_1^{(m)}(s)\rho^{-1}(s)d\mu(s) = \int_{S/A_p} d\mu(n) \int_{A_p} \Phi_1^m(a_p s) d\mu(a_p)$$

avec $\rho(s) = \beta(a) = e^{2\theta}$ où β est la fonction modulaire du sous-groupe résoluble S. Soit $\Psi_1^m(s\,;\sigma)$ la transformée de Fourier de $\rho^{1/2}(a_p s)\Phi_1^{(m)}(a_p s)$ sur $A_p(\chi(a_p) = e^{i\sigma\theta}$, $d\mu(a_p) = d\theta)$. En utilisant le théorème de Plancherel sur A_p, on montre comme dans le paragraphe précédent que la transformation de Fourier est une application isométrique de $L^2(X_u)$ sur l'espace des $\Psi_1^{(m)}(s\,;\sigma)$ avec la norme :

$$\| \Psi_1^m \|^2 = \int_N \int_{-\infty}^{+\infty} | \Psi_1^{(m)}(s\,;\sigma)|^2 d\mu(n) d\sigma < \infty \tag{61}$$

sur lequel on a la représentation $T_g \Psi_1^m(s\,;\,\sigma) = \Psi_1^m(sg\,;\sigma)[\rho(sg)/\rho(s)]^{-1/2}$ qui est unitaire car elle préserve la norme

$$\int_N |\Psi_1^m(s\,;\sigma)|^2 d\mu(n)$$

et qui pour m, σ, fixés est unitairement équivalente à $d_1\,;\,\sigma, m$. De la transformation inverse de Fourier on déduit :

$$\Phi_1^{(m)}(Z_u) = \frac{\rho^{-1/2}(s)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_1^m(s\,;\sigma) d\sigma \tag{62}$$

Pour $\Phi_2^{(m)}(Z_u)$ on note que l'application canonique : $SU(2,1) \to SU(2,1)/U$ associe à chaque $\Phi_2^{(m)}(Z_u)$ une fonction $\Phi_2^{(m)}(g)$ constante sur les classes de $SU(2,1)$ par rapport à $S(U_2 \times U_1)$ et si on normalise $d\mu(u)$, de sorte que

$$\int_U d\mu(u) = 1 \quad (u \in S(U_2 \times U_1))$$

on a :

$$\int_{SU(2,1)} |\Phi_2^{(m)}(g)|^2 d\mu(g) = \int_{X_u} |\Phi_2(Z_u)|^2 d\mu(Z_u) \tag{63}$$

maintenant si g_s est un élément de $SU(2,1)$ représentatif de la classe Z_u, on procède comme pour la réduction de la représentation régulière en remarquant que $\Phi_2^{(m)}(Z_u) \in C_c^\infty(X_u)$ implique $\Phi_2(g_s) \in C_c^\infty(SU(2,1))$ de sorte que l'on a les relations (59) et (60) avec g_s au lieu de g et sans sommation sur m. Donc d'après (34), (34'), compte tenu d'une part de (60) et (62), et d'autre part de (59), (61), la formule de Plancherel pour la réduction de la représentation $g \to T_g^{(m)}$ s'écrit :

$$\Phi^{(m)}(Z_u) = \frac{\rho^{-1/2}(s)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_1^{(m)}(s\,;\sigma) d\sigma + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j,j'} \Psi_2^{(m)}(g_s\,;\, r, j, j')$$

$$\| \Phi^{(m)}(Z_u) \|^2 = \int_N \int_{-\infty}^{+\infty} | \Psi_1^{(m)}(s\,;\,\sigma)|^2 d\mu(n) d\sigma + \sum_r \sum_{j,j'} \int_{\mathscr{D}} | \Psi_2^{(m)}(g_s\,;\, r, j, j')|^2 d\mu(Z_u)$$

avec $|j|, |j'| \leqslant m/2$.

Considérons maintenant le produit de Kronecker de deux représentations de la série d_1. Il définit une représentation dans l'espace des fonctions $f(Z_k^1, Z_k^2)$ telles que

$$\| f \|^2 = \int_{\delta\mathcal{G} \times \delta\mathcal{G}} |f(Z_k^1, Z_k^2)|^2 d\mu(Z_k^1) d\mu(Z_k^2) < \infty$$

avec

$$T_g f(Z_k^1, Z_k^2) = \alpha(Z_d, g) f(Z_k^1 g, Z_k^2 g) \tag{64}$$

et

$$\alpha(Z_d, g) = \alpha_1(Z_d, g)\alpha_2(Z_d, g)$$

$$= \left| \sum_j (Z_k^1)_{3j} g_{j3} \right|^{i\sigma_1 - 1 - \nu_1} \left(\sum_j (Z_k^1)_{3j} g_{j3} \right)^{\nu_1}$$

$$\left(\sum_j (Z_k^2)_{3j} g_{j3} \right)^{i\sigma_2 - 1 - \nu_2} \left(\sum_j (Z_k^2)_{3j} g_{j3} \right)^{\nu_2} \tag{64'}$$

où $Z_k g$ est donné par (24).

La variété des paires (Z_k^1, Z_k^2) n'est pas transitive sous SU(2, 1), mais comme montré dans le paragraphe 4.3, $X_d = SU(2,1)/D_1$ en est une. Ainsi en identifiant (Z_k^1, Z_k^2) à Z_d, (64) peut être considéré comme une représentation dans $L^2(X_d)$.

Soit maintenant $f(Z_d) = f_1(Z_d) + f_2(Z_d) \in C_c^\infty(Z_d)$ et Z_d^0 le point stabilisé par D_1, introduisons :

$$\Psi_1(Z_d\,; \sigma_1, \nu_1) = \alpha_1(Z_d^0, g^Z) \left| \sum_j (Z_k^{2,0})_{j3} g_{j3}^Z \right|^{-1} f_1(Z_d) \tag{65}$$

où g^Z est l'élément de SU(2, 1) qui amène Z_d^0 sur Z_d et où $Z_k^{2,0}$ est la seconde composante de Z_d^0, alors $|\Psi_1(Z_d\,; \nu_1, \sigma_1)| = |f_1(Z_d)|$. Par ailleurs, compte tenu de la relation (2) on voit aisément que (64) induit sur (65) la représentation (53). Ainsi $\Psi_1(Z_d\,; \nu_1, \sigma_1)$ est la composante irréductible de $f_1(Z_d)$.

Considérons maintenant la transformée de Radon de $f_2(Z_d) \in C_c^\infty(X_d)$

$$\phi_2(a_p n) = \int_{N'} \alpha(Z_d^0, g) F_2(a_p, n, n') d\mu(n') \tag{66}$$

avec $F_2(n, n') = \{ f_2 \circ \gamma_1 \}(n, n')$ où γ_1 est l'application $X_d \to \{ n, n' \}$ définie par (10). Comme $A_p N = S$ est homéomorphe à X_u, la relation (66) fournit une fonction $\phi_2(Z_u) \in C_c^\infty(X_u)$ sur laquelle (64) induit la représentation $Tg\phi_2(Z_u) = \phi_2(Z_u g)$ unitaire et qui peut être réduite comme il a été indiqué au début de ce paragraphe. Le problème est alors d'inverser (66), on prouvera dans un autre travail en utilisant la technique des horosphères de Gelfand-Graev *[11]* que

$$f_2(Z_d) = \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left[\int_N \phi_2(a_p n Z_d)d\mu(n)\right]_{\theta=0}$$

où θ est le paramètre de a_p et on donnera la formule de Plancherel correspondante. Ce dernier exemple est intéressant car il montre que la technique simple que l'on a utilisée pour réduire les représentations unitaires continues n'est pas toujours suffisante pour achever la réduction.

6. — CONCLUSIONS

On a obtenu huit séries de représentations unitaires irréductibles continues de SU(2, 1), les discrètes d_0^+, d_0^-, discrètes dégénérées $d_{0,0}^+$, $d_{0,0}^-$, $d'_{0,0}$, caractérisées respectivement par deux entiers et par un entier, les séries continues d_1^0, d_1^1 et supplémentaire d_s caractérisées les premières par un entier et un nombre réel, la seconde par un nombre réel dans l'intervalle (0, 1), d_1 et d_s peuvent être réalisés de plusieurs façons différentes dans $L^2(S^3)$, $L^2(N')$ ou $L^2(\delta\mathscr{D} \times \delta\mathscr{D})$. Il y a deux problèmes non résolus, le premier difficile concerne la complétion des représentations unitaires, irréductibles, continues et on peut seulement indiquer, d'après l'analyse de Fourier des représentations régulière et quasi régulière que toutes les autres représentations unitaires, irréductibles, continues pouvant exister sont de mesure de Plancherel nulle. Le second problème est l'identification des séries précédentes avec les représentations locales *[7]* ce qui peut être fait par le calcul des représentations de l'algèbre de Lie correspondant aux séries d_0^+, d_0^-, ... *ds*.

L'application des représentations unitaires de SU(2, 1) à la physique des hautes énergies semble devoir se faire d'après l'une des trois possibilités suivantes qui toutes sont liées à l'emploi des séries discrètes $d_0^{\pm}$. On peut comme Fronsdal *[7]* *[14]* à partir des représentations locales établir un diagramme poids infini dans un espace à deux dimensions et associer les particules à certains points du treillis des poids. La difficulté est alors que les particules ne sont plus groupées en supermultiplets ce qui est un handicap pour une théorie des interactions. D'un autre point de vue l'unification au sens de Flato-Sternheimer *[12]* de SU(2, 1) et du groupe de Poincaré suggère qu'il existe une connexion entre certaines représentations de $d_0^{\pm}$ et les représentations finies de SU(2, 1) qui serviraient à classer les particules en supermultiplets ; on voit [13] qu'on obtiendrait alors les résultats essentiels de SU_3. Dans [13] on a montré une connexion particulière entre la représentation $\mathscr{D}^{1/2}$ de SU(1, 1) et la représentation $d^+_{0,2}$ de la série discrète. Ce résultat peut être étendu à SU(2, 1) en remarquant qu'une base orthonormale dans le sous-espace linéaire fermé $\mathscr{H}(\mathscr{D})$ de fonctions de $L^2(\mathscr{D})$ holomorphes dans $\mathscr{D}$ est l'ensemble des polynômes

$$\phi_{n,m}(z_1, z_2) = \pi^{-1}\sqrt{n + m + 1}\, z_1{}^n, z_2{}^m$$

(n, m, entiers positifs) qui définissent le noyau de Bergmann

$$K(z_1, z_2) = (1 - |z_1|^2 - |z_2|^2)^{-2}$$

alors pour $r = 2, L^2(\mathscr{D}, \omega, \mu) = \mathscr{H}(\mathscr{D})$ de sorte que toute fonction $f(Z_u)$ peut être développée sur les $\phi_{n,m}(z_1, z_2)$; comme la représentation finie fondamentale de SU(2, 1) opère sur z_1, z_2 par les relations :

$$z'_1 = \frac{g_{11}z_1 + g_{12}z_2 + g_{13}}{g_{31}z_1 + g_{32}z_2 + g_{33}} \qquad z'_2 = \frac{g_{21}z_1 + g_{22}z_2 + g_{23}}{g_{31}z_1 + g_{32}z_2 + g_{33}}$$

ceci établit la connexion cherchée entre cette représentation et $d^+_{0,2}$ de la série discrète dégénérée. Evidemment ce résultat s'étend à d^-_0 en considérant des fonctions antianalytiques et $\bar{\phi}_{nm'}$ mais il n'est pas sûr que l'on puisse aller loin dans cette voie.

La troisième possibilité est basée sur la suggestion d'interpréter les sous-groupes SU_2, A_u du sous-groupe compact maximal $S(U_2 \times U_1)$ comme le groupe d'isospin et d'hypercharge avec les identifications $m = I$, $r = 2 - Y > 0$ où I, Y désignent respectivement les nombres quantiques d'isospin et d'hypercharge. Les particules sont associées aux représentations $d^+_{0;r,m}$ et les antiparticules aux représentations $d^-_{0;r,m}$ (alors $r = -(Y + 2)$; nous n'entrons pas ici dans le détail des définitions de l'opérateur conjugaison de charge et de la parité, ni dans la discussion du théorème CPT. Les particules sont naturellement groupées en multiplets d'isospin mais de plus, les séries $d^\pm_{0;r,m}$ considérées comme des représentations unitaires réductibles de $S(U_2 \times U_1)$ qui est alors le groupe d'invariance des interactions fortes, sont soumises à la restriction $2m - r = 2n$, n entier qui implique le résultat expérimental bien vérifié $2I + Y =$ entier pair. Écrivant la relation précédente $2m - r + 1 = 2n + 1$, nous allons montrer que pour n fixe, les supermultiplets caractérisés par la relation $2m - r + 1 = 2n + 1$ coïncident au point de vue contenu isotopique avec ceux qui correspondent à certaines des représentations unitaires finies de SU_3. En fait, n détermine une famille de supermultiplets qui sont différentiés par les valeurs J^P du spin J et de la parité P.

Dans le cadre de l'unification au sens de Flato-Sternheimer du groupe de Poincaré et de SU(2,1) fournissent $SU(2,2) = \mathscr{U}(\mathscr{P}, SU(2,1))$ avec intersection sur l'algèbre de Lie nilpotente de dimension trois, on peut définir l'opérateur de spin $\mathscr{J}_3$ mais nous n'examinerons pas ce problème ici en distinguant seulement les différents supermultiplets par les valeurs expérimentales du spin.

La première famille de supermultiplets correspond à $n = 0$, donc $2m - r + 1 = \pm 1$, les seules valeurs possibles de $2m$ et r sont $2m = \{0, 1, 2\}$, $r = \{1, 2, 3\}$ qui fournissent les couples $2m$, r suivants :

$$\{1,1\}\,(2m - r + 1 = 1),\ \{2,2\}\,(2m - r + 1 = 1),$$
$$\{0,2\}\,(2m - r + 1 = -1),\ \{1,3\}\,(2m - r + 1 = -1),$$

on a par exemple les supermultiplets suivants :
Pour les baryons :

J^P	$\{1,1\}$	$\{2,2\}$	$\{0,2\}$	$\{1,3\}$
$\frac{1^+}{2}$	N	Σ	Λ	Ξ
$\frac{3^-}{2}$	N*(1518)	$Y_1^*(1660)$	$Y_0^*(1520)$	$\Xi^*(1820)$
$\frac{5^+}{2}$	N*(1688)	$Y_1^*(1915)$	$Y_0^*(1815)$	$\Xi^*(1933)$

Pour les mésons :

J^P	$\{1,1\}$	$\{2,2\}$	$\{0,2\}$	$\{1,3\}$
0^-	$K = (K^+, K^0)$	π	η	$\tilde{K} = (K^-, \tilde{K}^0)$
1^-	K*(891)	ρ	$\omega(\phi)$	K^+(891)
2^+	K*(1415)	A_2	f	K^+(1425)

On vérifie immédiatement que le contenu isotopique de ces supermultiplets est le même que celui de la représentation $D^8(1,1)$ de SU_3.

La seconde famille de supermultiplets correspond à $n = 1$, donc $2m - r + 1 = \pm 3, \pm 1$, avec $2m = \{0, 1, 2, 3\}$, $r = \{1, 2, 3, 4\}$ et en imposant la condition subsidiaire $2m = 4 - r$, on a les couples $\{2m, r\}$ suivants (entre parenthèses les valeurs de $2m - r + 1$).

$$\{3,1\}\,(3) \quad \{2,2\}\,(1) \quad \{1,3\}\,(-1) \quad \{0,4\}\,(-3)$$

d'où les supermultiplets baryoniques suivants qui ont même contenu isotopique que la représentation $D^{10}(3,0)$ de SU_3.

J^P	$\{3,1\}$	$\{2,2\}$	$\{1,3\}$	$\{0,4\}$
$\frac{3^+}{2}$	$N^*(1236)$	$Y_1^*(1385)$	$\Xi^*(1530)$	$\Omega^-(1675)$
$\frac{7^+}{2}$	$N^+(1920)$	$Y_1^+(2035)$	?	?

Il ne semble pas que l'on ait encore observé des résonances mésoniques appartenant à cette famille de supermultiplets sauf peut-être la résonance C de 1 215 MeV. Pour la famille suivante $n=2, 2m=\{0, 1, 2, 3, 4\}$, $r=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ $2m=6-r$, les supermultiplets sont caractérisés par les couples suivants qui ne correspondent pas au contenu isotopique d'une représentation de SU_3.

$$\{4,2\}(3) \quad \{3,3\}(1) \quad \{2,4\}(-2) \quad \{1,5\}(-3).$$

On obtient exactement les mêmes valeurs de $2m+1-r$ que pour $m=1$ et l'on observe le résultat intéressant que chaque famille contient seulement quatre supermultiplets.

On peut alors décrire les interactions fortes à la manière habituelle, nous esquissons ici seulement le schéma que l'on développera dans un autre travail. En se plaçant dans le cadre des champs quantifiés, à chaque supermultiplet est associé un champ Ψ pour les baryons, Φ pour les mésons sur lesquels opèrent respectivement les représentations Ug, Vg unitaires de $SU(2,1)$. Ug, Vg sont obtenus immédiatement à partir de $d^+_{0;r,m}$. Remarquant que les champs correspondants aux antiparticules ont des fonctions antianalytiques $\overline{\Psi}'$ de $d^-_{0;r,m}$ les champs conjugués de charge $\tilde{\Psi}$ sont définis sur les complexes conjugués $\tilde{\Psi}'$. Si $B(\Psi, \tilde{\Psi})$ est une forme bilinéaire dont les composantes se transforment contragrédientement à Vg, la lagrangien d'interaction est de la forme $B(\Psi, \tilde{\Psi})\Phi$ (Il faut néanmoins noter que sous $SU(2,1)$, $B(\Psi, \tilde{\Psi})\Phi \to \alpha^\pi(z,y)B(\Psi', \tilde{\Psi}')\Phi'$ où $\alpha^\pi(z,y)$ est le multiplicateur du champ des pions). En première quantification, les fonctions d'onde ψ, ϕ pourraient être associées aux représentations finies de $SU(2,1)$, car on n'a pas alors besoin de représentations unitaires. Le passage de la première à la deuxième quantification pourrait expliquer la connexion entre les représentations finies et unitaires que l'on a signalée plus haut. On remarque d'ailleurs que la famille $n=2$, $2m=6-r$ a le même contenu isotopique que la représentation de dimension 14 de $SU(2,1)$ (qui n'est pas irréductible sous SU_3).

Évidemment il y a le problème délicat du spectre de masse des différents multiplets mais suivant la suggestion de Flato-Sternheimer [*12*] on peut procéder pour SU(2,1) dans le cadre de l'unification « exceptionnelle » SU(2,2) comme l'ont fait ces auteurs pour SL(3,C). Nous développerons cette question ultérieurement.

Pour terminer, notons la très intéressante similitude de d_1 avec la série principale de SL(2,C) et il serait important de comparer la continuation analytique de ces représentations. Enfin les représentations unitaires irréductibles continues de SU(2,1) partagent avec celles de SU(1,1) quelques propriétés simples qui sont dues à l'existence des décompositions (10) et (11).

L'auteur désire remercier le Professeur M. Flato et le Docteur D. Sternheimer pour de nombreuses et intéressantes discussions ainsi que pour une lecture du manuscrit.

RÉFÉRENCES

[*1*] E. M. STEIN, A survey of representations of non-compact groups, *in High energy physics and elementary particles*, I. A. E. A., 1965.
[*2*] M. A. NAIMARK, *Les représentations linéaires du groupe de Lorentz*, Dunod, 1962.
[*3*] V. BARGMANN, *Ann. of Math.*, **48**, 1947, 568.
I. M. GEL'FAND, M. I. GRAËV et N. Ya. VILENKIN, *Generalized functions*, vol. 5, Acad. Press, 1966.
P. HILLION, Plancherel's formulae for SU(1,1), non publié.
[*4*] M. GEL'FAND et M. A. NAIMARK, Unitäre Darstellungen der Klassichen gruppen, Akad. Verl., Berlin, 1957.
[*5*] M. I. GRAËV, *Dok. Akad. Nauk. S. S. S. R.*, **98**, 1954, 517.
M. I. GRAËV, *Trud. Mosk. Math.*, **7**, 1958, 335.
[*6*] M. I. GRAËV, *Dok. Akad. Nauk. S. S. S. R.*, **113**, 1957, 966.
[*7*] C. FRONSDAL, *Proc. Phys. Soc.*, **A 288**, 1965, 98.
L. C. BIEDENHARN, J. NUYTS et N. STRAUMANN, C. E. R. N., Prepint TH. 585, 1965.
[*8*] S. HELGASON, *Differential geometry and symmetric spaces*, Acad. Press, 1962.
[*9*] HARISH-CHANDRA, *Ann. Jour. of Math.*, **79**, 1957, 87-193.
[*10*] F. RIESZ et B. Sz. NAGY, *Leçons d'analyse fonctionnelle*. Gauthier-Villars, 1955.
[*11*] I. M. GEL'FAND et M. I. GRAËV, *Am. Math. Soc. Transl.*, **37**, 1964, 351.
[*12*] M. FLATO, *Thèse Paris*, 1965.
M. FLATO et D. STERNHEIMER, *J. of Math. Phys.*, **7**, 1966, 1932.
[*13*] P. HILLION, *Phys. Rev.*, **147**, 1966, 1038.
[*14*] C. FRONSDAL et G. BISIACCHI, *Nuov. Cim.*, **42**, 1966, 220.