

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

ÉLIANE BLANCHETON

Mécanique analytique des milieux continus

Annales de l'I. H. P., section A, tome 7, n° 3 (1967), p. 189-213

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1967__7_3_189_0

© Gauthier-Villars, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Mécanique analytique des milieux continus

par

Éliane BLANCHETON

Faculté des Sciences de Caen, Laboratoire de Mathématiques.

SOMMAIRE. — Nous montrons qu'il est possible de repérer l'état d'un milieu continu par un point dans un espace de Banach. Les résultats du calcul variationnel classique (principe de Maupertuis, théorie d'Hamilton-Jacobi), généralisés aux espaces de Banach, permettent de développer la mécanique analytique des milieux continus de façon analogue à la mécanique analytique des systèmes de corps solides.

ABSTRACT. — It is shown that it may be associated to every state of a continuous medium a point of a Banach space. The results of the classical calculus of variations (principle of Maupertuis, theory of Hamilton-Jacobi), after being generalised, allow to expose the analytic Mecanic of continuous media in a similar way as the analytic mecanic of solid bodys.

Le calcul des variations classiques se généralise sans peine au cas où l'espace des états est un espace affine F dont l'espace vectoriel associé \vec{F} est un espace de Banach. Les dérivations sont alors des dérivations au sens de Fréchet. Or il est possible de repérer l'état d'un milieu continu à l'instant t par un point d'un tel espace, et les équations de la mécanique des milieux continus, lorsqu'on néglige les phénomènes thermodynamiques, la viscosité, la capillarité, etc., peuvent être obtenues à partir d'un principe variationnel de ce type. L'extension aux espaces de Banach des études faites en dimension finie par Hamilton, Jacobi, Maupertuis, études qui ont conduit à la mécanique analytique des systèmes de corps solides, permettra donc de développer une mécanique analytique des milieux continus.

I. — PRINCIPE VARIATIONNEL DANS LES MILIEUX CONTINUS

Nous désignons par E_3 l'espace affine euclidien de dimension 3, par \vec{E}_3 son espace vectoriel (espace des vecteurs libres de E_3). Soit K_0 le domaine de E_3 occupé par le milieu continu à l'instant initial; K_0 sera supposé être un ensemble compact. Si $M_0 \in K_0$ désigne la position d'une molécule à l'instant initial, M celle de la même molécule à l'instant t , nous écrivons

$$M = u(t)(M_0).$$

Nous poserons

$$X = u(t),$$

donc

$$M = X(M_0).$$

Précisons que, pour t donné, X est une application de K_0 dans E_3 . Nous la supposons prolongeable par une application de classe C^1 sur un ouvert de E_3 contenant K_0 , à valeurs dans E_3 . Sur cet ensemble, on considère la relation d'équivalence

$$\{ X \approx Y \} \Leftrightarrow \{ X = Y \text{ sur } K_0 \}.$$

Nous désignerons par F l'ensemble des classes d'équivalence. Cet ensemble est un espace affine, la norme sur l'espace vectoriel \vec{F} associé étant pour $Z \in \vec{F}$

$$\| Z \| = \text{Max}_{M_0 \in K_0} (\| Z(M_0) \| , \| Z'(M_0) \|).$$

Notons que $\| Z(M_0) \|$ et $\| Z'(M_0) \|$ désignent les normes usuelles respectivement dans \vec{E}_3 et dans $\mathcal{L}(\vec{E}_3, \vec{E}_3)$.

L'application $u : t \rightarrow X$ est alors une application d'un intervalle $[a, b]$ réel et compact dans F . Nous la supposons de classe C^1 . L'ensemble des applications de classe C^1 de $[a, b]$ dans F est un espace affine E lorsqu'on munit l'espace vectoriel associé \vec{E} (qui est l'ensemble des applications de classe C^1 de $[a, b]$ dans \vec{F}) de la norme

$$v \in \vec{E} \Rightarrow \| v \| = \text{Max}_{t \in [a, b]} (\| v(t) \| , \| v'(t) \|)$$

où les normes figurant au deuxième membre sont des normes dans \vec{F} .

Les équations classiques de la mécanique des milieux continus, lorsqu'on

néglige les phénomènes thermodynamiques, la viscosité, la capillarité... peuvent être obtenues à partir d'un principe variationnel dans lequel l'espace des états est F . Le lagrangien est somme de trois termes T , U_1 et U_2 que nous définirons séparément.

a) *Définition de T* (énergie cinétique).

On introduit :

$K = X(K_0)$, domaine occupé par le milieu continu à l'instant t ,

dv_0 élément de volume dans E_3 ,

$dv = \det(X'(M_0))dv_0$, où l'abréviation \det désigne le déterminant,

ρ_0 application donnée de K_0 dans R , de classe C^2 . Le nombre $\rho_0(M_0)$ est la masse spécifique en M_0 à l'instant initial, l'intégrale

$$m = \iiint_{K_0} \rho_0(M_0)dv_0$$

la masse totale.

Enfin $\rho_t(M)$ désignera la masse spécifique en M à l'instant t ; ρ_t est l'application de K dans R définie par

$$\rho_t(M)dv = \rho_0(M_0)dv_0.$$

Nous définirons l'application T de $F \times \vec{F}$ dans R par

$$\begin{aligned} T(u(t), u'(t)) &= \frac{1}{2} \iiint_K \left\langle \frac{\partial M}{\partial t}, \frac{\partial M}{\partial t} \right\rangle \rho_t(M)dv \\ &= \frac{1}{2} \iiint_{K_0} \langle u'(t)(M_0), u'(t)(M_0) \rangle \rho_0(M_0)dv_0. \end{aligned}$$

Nous remarquerons d'ailleurs que T ne dépend en fait que de $u'(t)$.

b) *Définition de U_1* ($- U_1$ est l'énergie de gravitation).

On introduit le vecteur accélération de la pesanteur $\vec{G}(\in \vec{E}_3)$. U_1 est définie à une constante près, par

$$U_1(X) = \iiint_{K_0} \langle \vec{G}, X(M_0) \rangle \rho_0(M_0)dv_0.$$

c) *Définition de U_2* ($- U_2$ est l'énergie élastique).

On donne une application Φ de $\mathcal{L}(\vec{E}_3, \vec{E}_3)$ dans R , caractérisant le milieu étudié. On définit U_2 par

$$U_2(X) = \iiint_{K_0} \Phi(X'(M_0))dv_0.$$

Rappelons par exemple que, pour les fluides parfaits, $\Phi(X'(M_0))$ ne dépend que du déterminant de $X'(M_0)$. Autrement dit,

$$\Phi(X'(M_0)) = f(\det(X'(M_0))),$$

où f désigne une fonction de classe C^2 sur \mathbb{R} . La dérivée $f'(\det(X'(M_0)))$ est la pression du fluide en M .

Les équations classiques des milieux continus s'obtiennent en écrivant que l'application I de E dans \mathbb{R} définie par l'équation

$$I(u) = \int_a^b [T(u(t), u'(t)) + U_1(u(t)) + U_2(u(t))] dt$$

est stationnaire pour des fonctions u données aux extrémités.

L'équation d'Euler-Lagrange traduisant la stationnarité de I s'écrit

$$(I-1) \quad \frac{d}{dt} [\partial_2 T(u(t), u'(t))] - \partial_1 T(u(t), u'(t)) - U'_1(u(t)) - U'_2(u(t)) = 0.$$

Nous avons supposé jusqu'à présent qu'aucune condition de liaison n'était imposée à u ou à X . Les deux membres de l'équation (I-1) sont des éléments de $\vec{F}' = \mathcal{L}(\vec{F}, \mathbb{R})$.

Nous ne voulons pas aborder ici l'étude générale des liaisons en mécanique des milieux continus. Notons toutefois qu'il existe un cas particulièrement simple : c'est le cas où l'application X est astreinte à vérifier l'équation

$$X(M_0) = M_0$$

quel que soit M_0 appartenant au bord ∂K_0 de K_0 . Dans ce cas en effet, il suffit de considérer X comme un élément du sous-espace affine F_1 de F constitué par les applications de K_0 dans E_3 , de classe C^1 sur K_0 , se réduisant à l'application identique sur le bord de K_0 . L'espace vectoriel associé \vec{F}_1 est constitué par l'ensemble des applications de \vec{K}_0 dans E_3 , de classe C^1 , nulles sur ∂K_0 . Dans ce cas, l'équation du mouvement est encore (I-1), mais les deux membres sont des éléments de $\vec{F}'_1 = \mathcal{L}(\vec{F}_1, \mathbb{R})$.

A titre d'exemple, donnons la forme explicite de (I-1) pour un fluide parfait. Partant des expressions de T , U_1 , U_2 données plus haut, un calcul simple conduit à

$$\left\{ h \rightarrow \iiint_{K_0} [\langle u''(t)(M_0) - \vec{G}, h(M_0) \rangle \rho_0(M_0) - f'(\alpha) \operatorname{Tr} (A^{-1} h'(M_0) \alpha)] dv_0 \right\} = 0$$

où on a posé

$$A = X'(M_0) \\ \alpha = \det(A)$$

et où Tr désigne la trace; h désigne un vecteur de \vec{F} dans le problème libre, un vecteur de \vec{F}_1 dans le problème lié considéré ci-dessus.

On retrouve les équations classiques en transformant l'intégrale sur K_0 en une intégrale sur K . Il vient

$$\iiint_K [\langle u''(t)(X^{-1}(M)) - \vec{G}, [h \cdot X^{-1}](M) \rangle \rho(M) - f'(\alpha) \operatorname{div}([h \cdot X^{-1}](M))] dv = 0$$

$\forall h \in \vec{F}$ (resp. à \vec{F}_1), ou encore, en désignant par N la normale orientée au point M du bord ∂K ,

$$\iiint_K \left[\langle (u''(t)(X^{-1}(M)) - \vec{G})\rho(M) - \frac{\partial}{\partial M} [f'(\alpha)], [h \cdot X^{-1}](M) \rangle dv - \iint_{\partial K} \langle f'(\alpha)[h \cdot X^{-1}](M), N \rangle dv = 0 \right]$$

$\forall h \in \vec{F}$ (resp. à \vec{F}_1).

Dans le problème lié, l'intégrale sur le bord est nulle. Écrivant que l'intégrale sur K est nulle quel que soit h dans \vec{F}_1 , on obtient

$$[u''(t)(X^{-1}(M)) - \vec{G}]\rho(M) - \frac{\partial}{\partial M} [f'(\alpha)] = 0,$$

qui est l'équation classique où $p = f'(\alpha)$ et $\Gamma = u''(t)(X^{-1}(M))$.

Dans le problème sans liaison, il faut ajouter la condition $f'(\alpha) = 0$ sur le bord de K .

II. — LE PRINCIPE DE MAUPERTUIS

A. — Le principe de Maupertuis dans les espaces de Banach.

Considérons l'équation d'Euler-Lagrange pour un lagrangien L satisfaisant aux hypothèses suivantes : L est la somme de deux termes

$$L(t, u(t), u'(t)) = T(u(t), u'(t)) + U(u(t)).$$

T désigne une fonction réelle, définie sur le produit $\Omega_1 \times \vec{F}$, où Ω_1 désigne un ouvert de F . L'application $X \rightarrow T(X, Y)$ est supposée être de classe C^1

sur Ω_1 . L'application $Y \rightarrow T(X, Y)$ est supposée être bilinéaire et continue, et $T(X, Y)$ est supposé strictement positif pour tout Y non nul.

U désigne une fonction réelle, définie et de classe C^1 sur Ω_1 .

Notons que le principe variationnel à la base des équations de la mécanique des milieux continus est de ce type.

1. L'intégrale de l'énergie.

Nous poserons pour simplifier l'écriture

$$X = u(t), \quad Y = u'(t).$$

L'équation d'Euler-Lagrange s'écrit

$$\partial_1 T(X, Y) + U'(X) - \frac{d}{dt} [\partial_2 T(X, Y)] = 0.$$

On applique les deux membres de cette équation (qui sont des éléments de \vec{F}') au vecteur Y . Il vient, après un calcul immédiat

$$\partial_1 T(X, Y)Y + \partial_2(X, Y) \frac{dY}{dt} + U'(X)Y - \frac{d}{dt} [\partial_2 T(X, Y)Y] = 0$$

Compte tenu de l'identité d'Euler des fonctions homogènes, qui s'écrit

$$\partial_2 T(X, Y)Y = 2T(X, Y),$$

on obtient, tous calculs faits

$$\frac{d}{dt} [U(X) - T(X, Y)] = 0,$$

ou, en désignant par C une constante réelle, appelée constante de l'énergie

$$T(X, Y) = U(X) + C.$$

2. Le principe de Maupertuis.

Énoncé du principe de Maupertuis : Soit u une extrémale régulière (c'est-à-dire telle que $u'(t) \neq 0 \forall t \in [a, b]$) de

$$I(u) = \int_a^b [T(X, Y) + U(X)] dt.$$

C'est une géodésique de la variété riemannienne obtenue en munissant F de la métrique

$$(II-1) \quad ds^2 = (U(X) + C)T(X, dX),$$

où $C = T(X, Y) - U(X)$ est la constante de l'énergie pour le mouvement considéré.

Démonstration : La démonstration du principe de Maupertuis se fait, comme en dimension finie, en écrivant les deux équations d'Euler-Lagrange exprimant respectivement que I et J définie par

$$J(v) = \int_a^b \sqrt{U(v(\tau)) + C} \sqrt{T(v(\tau), v'(\tau))} d\tau$$

sont stationnaires. On fait dans la première de ces équations le changement de variable $t = \psi(s)$, où ψ^{-1} est définie, à une constante additive près, par

$$s = \psi^{-1}(t) = \int [U(u(t)) + C] dt$$

et dans la seconde le changement de variable $\tau = \varphi(s)$, où φ est définie, à une constante additive près, par

$$s = \varphi(\tau) = \int \sqrt{U(v(\tau)) + C} \sqrt{T(v(\tau), v'(\tau))} d\tau.$$

On constate alors que les fonctions $v \cdot \varphi^{-1}$ et $u \cdot \psi$ satisfont à la même équation différentielle. L'équation commune, où

$$X = [v \cdot \varphi^{-1}](s) = [u \cdot \psi](s)$$

et

$$\dot{X} = \frac{dX}{ds}$$

s'écrit

$$(II-2) \quad \frac{d}{ds} [(U(X) + C) \partial_2 T(X, \dot{X})] - T(X, \dot{X}) U'(X) - (U(X) + C) \partial_1 T(X, \dot{X}) = 0.$$

Cette équation est l'équation des géodésiques de la variété riemannienne de métrique (II-1) lorsque le paramètre définissant la géodésique est l'abscisse curviligne. Elle se met sous une forme simple en introduisant les applications bilinéaires continues, symétriques $a(X)$ et $g(X)$ définies respectivement par

$$\frac{1}{2} a(X)(Y, Y) = T(X, Y)$$

$$g(X) = (U(X) + C) a(X).$$

(II-2) devient

$$\frac{d}{ds} [2g(X)(\dot{X}, h)] - g'(X)(h)(\dot{X}, \dot{X}) = 0 \quad \forall h \in \vec{F}.$$

En effectuant la dérivation, on obtient

$$(II-3) \quad g(X)(\ddot{X}, h) + \frac{1}{2} [g'(X)(\dot{X})(\dot{X}, h) + g'(X)(\dot{X})(h, \dot{X}) - g'(X)(h)(\dot{X}, \dot{X})] = 0$$

pour tout h de \vec{F} .

B. — Dérivation covariante et tenseur de courbure dans les variétés de Banach.

1. Définition d'une connexion sur un espace fibré localement trivial.

Soit V une variété de classe C^{p+1} , $\Pi : \mathcal{E} \rightarrow V$ un espace fibré de classe C^{p+1} sur V , dont les fibres sont isomorphes à un espace de Banach fixe \vec{E} , $\rho : T(V) \rightarrow V$ le fibré tangent de v , dont les fibres sont isomorphes à l'espace de Banach \vec{F} . Nous introduirons également le fibré tangent de \mathcal{E} , soit $\lambda : T(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}$. $T(\mathcal{E})$ peut être considéré comme un espace fibré sur $T(V)$, l'application canonique $T(\mathcal{E}) \rightarrow T(V)$ étant l'application linéaire tangente Π_* associée à Π .

Soit alors H l'application de $T(\mathcal{E})$ dans $\mathcal{E} \times_{(V)} T(V)$ qui, à l'élément θ de $T(\mathcal{E})$ fait correspondre l'élément $(\lambda\theta, \Pi_*\theta)$ de $\mathcal{E} \times_{(V)} T(V) = \times_{(V)} \mathcal{E} \times_{(V)} T(V)$ désigne le produit de deux espaces fibrés sur V , et I l'injection de $\mathcal{E} \times_{(V)} \mathcal{E}$ dans $T(\mathcal{E})$. Notons que la suite

$$0 \rightarrow \mathcal{E} \times \mathcal{E} \xrightarrow{I} T(\mathcal{E}) \xrightarrow{H} \mathcal{E} \times T(V) \rightarrow 0$$

où l'on considère les trois espaces comme fibrés sur \mathcal{E} est exacte.

Définition : On appelle connexion sur Π (ou sur \mathcal{E}) une application K de $\mathcal{E} \times_{(V)} T(V)$ dans $T(\mathcal{E})$ satisfaisant aux deux conditions

- 1) $H.K = 1_{\mathcal{E} \times_{(V)} T(V)}$
- 2) K est un C^p -morphisme de fibré bivectoriel sur \mathcal{E} et sur $T(V)$. Dans le cas trivial où V est un ouvert d'un espace affine F , où $T(V) = V \times \vec{F}$ et $\mathcal{E} = V \times \vec{E}$, on a

$$\mathcal{E} \times_{(V)} T(V) = V \times \vec{E} \times \vec{F} \quad , \quad T(\mathcal{E}) = V \times \vec{E} \times \vec{F} \times \vec{E}$$

L'application H fait correspondre à l'élément $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ de $T(\mathcal{E})$ l'élément (α, β, γ) de $V \times \vec{E} \times \vec{F}$. On vérifie alors que toute connexion K est définie par une équation de la forme

$$K(x, s, v) = (x, s, v - \Gamma(x)(s, v))$$

où $\Gamma(x)$ est une application bilinéaire continue de $\vec{E} \times \vec{F}$ dans \vec{E} , et où Γ est de classe C^p .

Notons aussi que dans ce cas on a

$$I(x, \beta, \delta) = (x, \beta, \delta).$$

2. Dérivation covariante d'une section locale de \mathcal{E} .

Soit s une section locale de \mathcal{E} , c'est-à-dire une application de V dans \mathcal{E} telle que $\Pi \cdot s = 1_V$. Soit s_* l'application linéaire tangente correspondante, et (x, v) un point de $T(V)$. L'identité

$$Hs_*(x, v) - K((x, s(x)), (x, v)) = 0$$

montre que $s_*(x, v) - K((x, s(x)), (x, v)) = 0$ appartient au noyau de H , donc à l'image de I . Il existe par suite un élément et un seul η de $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ tel que

$$I(\eta) = s_*(x, v) - K((x, s(x)), (x, v)).$$

Dans le cas trivial, on a

$$I(\eta) = (x, s(x), 0, s'(x)v + \Gamma(x)(s(x), v)),$$

donc

$$\eta = (x, s(x), s'(x)v + \Gamma(x)(s(x), v)).$$

η est la dérivée covariante au point x de la section s . Nous noterons

$$\nabla s(x)(v) = s'(x)v + \Gamma(x)(s(x), v),$$

ou encore

$$(II-4) \quad \nabla s_x(v) = s'_x v + \Gamma_x(s_x, v).$$

3. Dérivation covariante des sections locales de \mathcal{E}' , $\mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{E})$...

On prolonge la définition de l'opérateur ∇ aux sections locales de \mathcal{E}' , $\mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{E})$, etc. de façon que les règles de dérivation dans les espaces normés soient vérifiées. De façon plus précise, on écrira, pour tout $x \in V$:

a) si $f(x) \in \mathbb{R}$

$$(II-5) \quad \nabla f(x) = f'(x);$$

b) si $\omega(x) = \omega_x \in \mathcal{E}'_x$, fibre de \mathcal{E}' en x ,

$$\nabla(\omega_x s_x) h_x = [\nabla \omega_x \cdot h_x] s_x + \omega_x \cdot [\nabla s_x \cdot h_x]$$

$\forall s_x \in \mathcal{E}_x, h_x \in T_x(V)$, (\mathcal{E}_x et $T_x(V)$ désignent respectivement les fibres en x de \mathcal{E} et $T(V)$).

On tire de cette équation, compte tenu de (II-4) et de (II-5)

$$\nabla \omega_x(h_x, s_x) = \omega'_x(h_x, s_x) - \omega_x(\Gamma_x(s_x, h_x)).$$

c) La même technique permet d'obtenir l'expression de la dérivée covariante d'une section A de $\mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{E})$. Sous-entendant systématiquement l'indice x , on obtient

$$\nabla A(h, s) = A'(h, s) + \Gamma(As, h) - A(\Gamma(s, h))$$

$$\forall h \in T_x(V), s \in \mathcal{E}_x.$$

Enfin la dérivée covariante d'une section g_x de $\mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{E}; \mathbb{R})$ est donnée par l'équation

$$\nabla g_x(h)(s_1, s_2) = g'_x(h)(s_1, s_2) - g_x(\Gamma(s_1, h), s_2) - g_x(s_1, \Gamma(s_2, h))$$

$$\forall h \in T_x(V), s_1 \text{ et } s_2 \in \mathcal{E}_x.$$

4. Courbure et torsion d'une connexion linéaire.

Les connexions linéaires sur la variété V s'obtiennent en prenant $\mathcal{E} = T(V)$. Notons que si V est de classe C^n , Γ est de classe C^{n-2} . L'application K est alors définie sur $T(V) \times T(V)$. La partie antisymétrique de K , définie par

$$sk(K)(h, k) = K(h, k) - K(k, h), \quad h, k \in T(V),$$

appartient au noyau de H . Il existe donc un élément $\theta(h, k)$ et un seul dans $T(V) \times T(V)$ tel que

$$I(\theta(h, k)) = Sk(K)(h, k).$$

θ est la *torsion* de la connexion considérée. Dans le cas trivial, on a

$$\theta(h, k) = \Gamma(h, k) - \Gamma(k, h).$$

La courbure s'obtient, comme en dimension finie, par antisymétrisation de la dérivée covariante seconde. On obtient, dans le cas trivial

$$R(h, k, l) = \Gamma'(k)(h, l) - \Gamma'(l)(h, k) + \Gamma(\Gamma(h, l), k) - \Gamma(\Gamma(h, k), l).$$

5. Variétés hilbertiennes.

Nous dirons que la variété V de classe C^p est hilbertienne si on donne une application g de $T(V)$ dans $T'(V)$ qui soit un isomorphisme d'espaces fibrés : $g(x) = g_x$ est une application linéaire, continue, inversible, de $T_x(V)$ sur $T'_x(V)$, que nous identifierons d'ailleurs canoniquement avec une application, également notée g_x bilinéaire, continue, symétrique de $T_x(V) \times T_x(V)$ dans \mathbb{R} . L'application $x \rightarrow g_x$ est de classe C^{p-1} .

On démontre très simplement la proposition suivante :

Proposition : Il existe une connexion linéaire et une seule possédant les deux propriétés

a) La torsion associée à cette connexion est nulle (donc Γ est symétrique).

b) La dérivée covariante de g associée à cette connexion est nulle.

Dans le cas trivial, cette connexion est définie par

$$\Gamma(h, k) = \frac{1}{2} [g_x]^{-1} [g'_x(h)k + g'_x(k)h - S(g'_x)(h, k)]$$

où $S(g'_x)$ est défini par

$$S(g'_x)(h, k)(v) = g'_x(v)(h, k) \quad \forall h, k, v \in T_x(V).$$

On l'appellera connexion hilbertienne sur V .

La courbure R est alors donnée, en fonction de g , par l'équation suivante où g est mis systématiquement à la place de g_x :

$$\begin{aligned} \text{(II-6)} \quad g(R(h_1, h_2, h_3), h_4) &= \frac{1}{2} g''(h_1, h_2)(h_3, h_4) + \frac{1}{2} g''(h_3, h_4)(h_1, h_2) \\ &\quad - \frac{1}{2} g''(h_1, h_3)(h_2, h_4) - \frac{1}{2} g''(h_2, h_4)(h_1, h_3) \\ &\quad + g(\Gamma(h_1, h_2), \Gamma(h_3, h_4)) - g(\Gamma(h_1, h_3), \Gamma(h_2, h_4)), \\ &\quad \forall h_1, h_2, h_3, h_4 \in T_x(V). \end{aligned}$$

Compte tenu de la symétrie des applications g , g'' et Γ , on voit que

a) l'application $(h_2, h_3) \rightarrow g(R(h_1, h_2, h_3), h_4)$ est antisymétrique (cette antisymétrie vient de la définition de R),

b) l'application $(h_1, h_4) \rightarrow g(R(h_1, h_2, h_3), h_4)$ est antisymétrique,

c) l'application $((h_1, h_2), (h_3, h_4)) \rightarrow g(R(h_1, h_2, h_3), h_4)$ est symétrique.

6. Équation des géodésiques de la variété hilbertienne définie par g .

L'équation différentielle des géodésiques de la variété hilbertienne définie par g (nous dirons aussi pour une raison évidente la variété hilbertienne de métrique g) a été obtenue à la fin du paragraphe A. Elle s'écrit

$$g(\ddot{X})(h) + g(\Gamma(\dot{X}, \dot{X}))(h) = 0 \quad \forall h \in T_x(V),$$

ou encore, puisque g est supposé inversible.

$$(II-7) \quad \ddot{X} + \Gamma(\dot{X}, \dot{X}) = 0.$$

C. — Stabilité infinitésimale des mouvements à énergie constante.

Soit $s \rightarrow X$ une solution de (II-7). Nous dirons que cette solution est stable (au point de vue infinitésimal) si toutes les solutions de l'équation aux variations associées à la solution particulière $s \rightarrow X$ de (II-7) sont bornées.

Théorème de Synge : Soit F un espace affine banachique muni d'une structure de variété hilbertienne V par la donnée d'une métrique g à laquelle correspond la courbure R . Soit (II-7) l'équation différentielle des géodésiques de cette variété, le paramètre étant l'abscisse curviligne. Soit enfin $s \rightarrow X = f(s)$ une des solutions de (II-7) définissant une géodésique (C). Si, en tout point X de (C), on a

$$g(R(\dot{X}, \dot{X}, h), h) \geq 0$$

quel que soit h dans F , alors la solution f est instable.

Démonstration : L'équation aux variations associée à (II-7) s'écrit

$$(II-8) \quad \ddot{\xi} + \Gamma'(\xi)(\dot{X}, \dot{X}) + 2\Gamma(\dot{\xi}, X) = 0$$

où

$$\dot{\xi} = \frac{d}{ds}, \quad \ddot{\xi} = \frac{d\dot{\xi}}{ds}.$$

Nous transformerons cette équation en introduisant la dérivée covariante de ξ le long de la courbe (C).

Définition : Soit $X \rightarrow \xi$ un champ de vecteurs défini sur un voisinage d'une courbe (C), de classe C^1 sur ce voisinage. La dérivée covariante de ξ en $X \in (C)$ prise suivant le vecteur tangent \dot{X} est

$$\nabla \xi(\dot{X}) = \xi'(\dot{X}) + \Gamma(\xi, \dot{X})$$

ou

$$\nabla \xi(\dot{X}) = \frac{d\xi}{ds} + \Gamma(\xi, \dot{X}).$$

Le deuxième membre de cette équation a encore un sens si $X \rightarrow \xi$ est un champ de vecteurs défini sur (C). Nous l'appellerons dérivée covariante du champ de vecteurs $X \rightarrow \xi$ sur (C) et noterons

$$\nabla_C \xi = \frac{d\xi}{ds} + \Gamma(\xi, \dot{X}).$$

$X \rightarrow \nabla_C \xi$ est encore un champ de vecteurs sur (C). Si (C) et ξ sont de classe C^2 , on peut itérer l'opération. On obtient

$$(II-9) \quad \nabla_C^2 \xi = \frac{d^2 \xi}{ds^2} + \Gamma'(\dot{X})(\xi, \dot{X}) + 2\Gamma\left(\frac{d\xi}{ds}, \dot{X}\right) + \Gamma(\xi, \ddot{X}) + \Gamma(\Gamma(\xi, \dot{X}), \dot{X}).$$

L'élimination de $\xi = \frac{d^2 \xi}{ds^2}$ entre (II-8) et (II-9) conduit à l'équation

$$(II-10) \quad \nabla_C^2 \xi + R(\dot{X}, \xi, \dot{X}) = 0.$$

Pour achever la démonstration du théorème de Synge, nous nous introduirons la norme du vecteur ξ considéré comme vecteur tangent au point X de la variété V, soit

$$\|\xi\|_V = [g(\xi, \xi)]^{1/2},$$

et le champ de vecteurs unitaires au sens de la norme sur V

$$X \rightarrow \eta = \xi / \|\xi\|_V.$$

On a évidemment

$$g(\eta, \eta) = 1,$$

équation qui donne par dérivations le long de (C)

$$g(\nabla_C \eta, \eta) = 0 \quad , \quad g(\nabla_C^2 \eta, \eta) = - \|\nabla_C \eta\|_V^2.$$

De

$$\xi = \eta \|\xi\|_V,$$

on déduit

$$\nabla_{\mathbf{C}} \xi = \frac{d}{ds} (\|\xi\|_{\mathbf{V}}) \eta + \|\xi\|_{\mathbf{V}} \nabla_{\mathbf{C}} \eta,$$

puis

$$\nabla_{\mathbf{C}^2} \xi = \frac{d^2}{ds^2} [\|\xi\|_{\mathbf{V}}] \eta + 2 \frac{d}{ds} [\|\xi\|_{\mathbf{V}}] \nabla_{\mathbf{C}} \eta + \|\xi\|_{\mathbf{V}} \nabla_{\mathbf{C}^2} \eta.$$

Cette équation entraîne

$$g(\nabla_{\mathbf{C}^2} \xi, \eta) = \frac{d^2}{ds^2} [\|\xi\|_{\mathbf{V}}] - \|\xi\|_{\mathbf{V}} \|\nabla_{\mathbf{C}} \eta\|_{\mathbf{V}}^2,$$

qui s'écrit en utilisant (II-10)

$$\frac{d^2}{ds^2} [\|\xi\|_{\mathbf{V}}] = \|\xi\|_{\mathbf{V}} [\|\nabla_{\mathbf{C}} \eta\|_{\mathbf{V}}^2 + g(\mathbf{R}(\dot{\mathbf{X}}, \dot{\mathbf{X}}), \eta)].$$

Le théorème de Synge s'en déduit immédiatement.

D. — Expression de la condition d'instabilité de Synge pour un milieu continu.

Les notations sont celles du paragraphe A. Nous écrirons toutefois $\mathbf{U}(\mathbf{X})$ au lieu de $\mathbf{U}(\mathbf{X}) + \mathbf{C}$ (\mathbf{C} est supposé fixé), et remarquerons que, pour un milieu continu, \mathbf{T} est fonction de \mathbf{X}' seul. On a donc

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = a(\mathbf{Y}, \mathbf{Y})$$

$$g(\mathbf{X}) = \mathbf{U}(\mathbf{X})a.$$

Comme plus haut, nous écrirons systématiquement \mathbf{U} , \mathbf{U}' , \mathbf{U}'' , g , g' , g'' , au lieu de $\mathbf{U}(\mathbf{X})$, $\mathbf{U}'(\mathbf{X})$, $\mathbf{U}''(\mathbf{X})$, $g(\mathbf{X})$, $g'(\mathbf{X})$, $g''(\mathbf{X})$. L'équation (II-6) devient ici

$$\begin{aligned} g(\mathbf{R}(h_1, h_2, h_3), h_4) &= \frac{1}{2} \mathbf{U}''(h_1, h_2) a(h_3, h_4) + \frac{1}{2} \mathbf{U}''(h_3, h_4) a(h_1, h_2) \\ &\quad - \frac{1}{2} \mathbf{U}''(h_1, h_3) a(h_2, h_4) - \frac{1}{2} \mathbf{U}''(h_2, h_4) a(h_1, h_3) \\ &\quad + \frac{1}{2} \mathbf{U}'(\Gamma(h_2, h_4)) a(h_1, h_3) - \frac{1}{2} \mathbf{U}'(\Gamma(h_1, h_2)) a(h_3, h_4) \\ &\quad + \frac{1}{4\mathbf{U}} [3\mathbf{U}'(h_1)\mathbf{U}'(h_3) a(h_2, h_4) - 3\mathbf{U}'(h_3)\mathbf{U}'(h_4) a(h_1, h_2) \\ &\quad + \mathbf{U}'(h_2)\mathbf{U}'(h_4) a(h_1, h_3) - \mathbf{U}'(h_1)\mathbf{U}'(h_2) a(h_3, h_4)]. \end{aligned}$$

Remarquons que, en raison des symétries et antisymétries de $g(R(h_1, h_2, h_3)h)$, il suffit, pour étudier le signe de la forme quadratique $h \rightarrow g(R(\dot{X}, \dot{X}, h), h)$, de se limiter à des vecteurs h orthogonaux à \dot{X} au sens de la métrique g , donc tels que

$$a(\dot{X}, h) = 0.$$

Supposant cette condition réalisée, on obtient

$$g(R(\dot{X}, \dot{X}, h), h) = \frac{1}{2} U''(\dot{X}, \dot{X})a(h, h) + \frac{1}{2} U''(h, h)a(\dot{X}, \dot{X}) \\ + \frac{1}{4U} [- (U'(\dot{X}))^2 a(h, h) - 3[U'(h)]^2 a(\dot{X}, \dot{X})] - \frac{1}{2} U'(\Gamma(\dot{X}, \dot{X}))a(h, h).$$

Mais X est solution de l'équation différentielle (II-7) et, puisque l'abscisse curviligne est le paramètre définissant la courbe (C), on a

$$g(\dot{X}, \dot{X}) = 1.$$

D'autre part $T(X, \dot{X}) = U(X)$ montre que U est strictement positif pour \dot{X} différent de 0, ce que nous supposons. En tenant compte de ces remarques, la condition d'instabilité de Synge s'écrit

$$UU''(h, h) - \frac{3}{2} (U'h)^2 + \left[U''(\dot{X}, \dot{X}) + U'\dot{X} - \frac{(U'\dot{X})^2}{2U} \right] U^2 a(h, h) \geq 0$$

pour tout h orthogonal à \dot{X} au sens de la métrique g .

Cette même condition, écrite en remplaçant \dot{X} et \ddot{X} par leurs expressions en fonction de $u'(t)$ et $u''(t)$ devient

$$(II-11) \quad \frac{U''(h, h) - \frac{3}{2U} (U'h)^2}{a(h, h)} + \frac{U''(u'(t), u'(t)) - \frac{3}{2U} (U'(u'(t)))^2}{a(u'(t), u'(t))} + U'(u''(t)) \geq 0$$

ou encore, en introduisant $W = \frac{1}{\sqrt{U}}$,

$$\frac{W''(h, h)}{a(h, h)} + \frac{W''(u'(t), u'(t))}{a(u'(t), u'(t))} + W'(u''(t)) \geq 0.$$

Condition d'instabilité de Syngé pour un fluide parfait en l'absence de pesanteur.

Avec les notations du paragraphe I, on a successivement

$$U_2'(X)h = \iiint_{K_0} f'(\alpha) \text{Tr} (A^{-1} \cdot h'(M_0)) \alpha dv_0$$

$$U_2''(X)(h, h) = \iiint_{K_0} \{ [\alpha f''(\alpha) + f'(\alpha)] [\text{Tr} (A^{-1} \cdot h'(M_0))]^2 - f'(\alpha) \text{Tr} [(A^{-1} \cdot h'(M_0))^2] \} \alpha dv_0.$$

Il faut joindre à ces équations

$$a(h, h) = \iiint_{K_0} \langle h(M_0), h(M_0) \rangle \rho_0(M_0) dv_0,$$

et

$$U = U_2(X) + C,$$

où C désigne la constante de l'énergie du mouvement dont on étudie la stabilité.

Nous écrirons l'inégalité (II-11) dans le cas où le mouvement étudié est rectiligne et uniforme

$$M = M_0 + Vt$$

où V désigne un vecteur constant. On a ici

$$u'(t)(M_0) = V \quad , \quad u''(t)(M_0) = 0.$$

Donc

$$U(u(t)) = \frac{1}{2} a(u'(t)) \quad , \quad u'(t) = \frac{1}{2} m |V|^2.$$

$U'(u'(t))$ et $U''(u'(t), u'(t))$ sont nuls puisque $[u'(t)]'(M_0) = 0$. Enfin

$$X'(M_0) = 1_{E^3}$$

entraîne

$$\alpha = 1.$$

L'inégalité (II-11) se réduit ici à

$$m |V|^2 \iiint_{K_0} \{ [f''(1) + f'(1)] [\text{Tr} (h'(M_0))]^2 - f'(1) \text{TR} (h'(M_0)^2) \} dv_0 \geq 0.$$

Cette condition entraîne

$$\begin{cases} f'(1) \leq 0 \\ f''(1) + f'(1) \geq 0. \end{cases}$$

III. — L'ÉQUATION D'HAMILTON-JACOBI

A. — Les équations canoniques.

Soit F un espace affine, \vec{F} son espace vectoriel associé qui est supposé être un espace de Banach, $V = V_1 \times V_2$ un ouvert de $F \times \vec{F}$, I un intervalle réel, L une fonction réelle de classe C^2 sur $I \times V$.

Considérons l'équation d'Euler-Lagrange

$$(III-1) \quad \frac{d}{dt} [\partial_3 L(t, X, X')] - \partial_2 L(t, X, X') = 0.$$

Nous introduisons la variable supplémentaire

$$(III-2) \quad p = \partial_3 L(t, X, X') \quad (p \in \vec{F}').$$

L'équation

$$z - \partial_3 L(t, X, Y) = 0,$$

où $(t, X, Y) \in I \times V$, définit implicitement Y en fonction de (t, X, z) . Soit (t_0, X_0, Y_0) un point de $I \times V$, $z_0 = \partial_3 L(t_0, X_0, Y_0)$. Supposons $\partial_{33} L(t_0, X_0, Y_0)$ inversible de \vec{F} dans \vec{F}' (condition qui permettrait de munir \vec{F} d'une structure d'espace hilbertien). Il existe alors un voisinage ouvert D de (t_0, X_0, z_0) dans $R \times F \times \vec{F}'$, un voisinage ouvert W de Y_0 dans \vec{F} et un C^1 -isomorphisme A de D sur W tel que

$$(III-3) \quad z - \partial_3 L(t, X, A(t, X, z)) = 0$$

pour tout (t, X, z) de D . Nous supposons, au besoin en nous limitant à une restriction de L , que A est définie sur $I \times V_1 \times \Omega$, où Ω désigne l'image de $I \times V$ par $\partial_3 L$.

Le système différentiel composé des équations (III-1) et (III-2) est alors équivalent au système

$$(III-4) \quad \begin{cases} \frac{dX}{dt} = A(t, X, p) \\ \frac{dp}{dt} = \partial_2 L(t, X, p). \end{cases}$$

On met le système (III-4) sous une forme plus symétrique en introduisant la fonction d'Hamilton H définie sur $I \times V_1 \times \Omega$ par l'équation

$$(III-5) \quad H(t, X, z) = zA(t, X, z) - L(t, X, A(t, X, z)).$$

Les dérivées partielles de H sont

$$(III-6) \quad \begin{cases} \partial_1 H(t, X, z) = -\partial_1 L(t, X, A(t, X, z)) \\ \partial_2 H(t, X, z) = -\partial_2 L(t, X, A(t, X, z)) \\ \partial_3 H(t, X, z) = \cdot A(t, X, z) (= \{h \rightarrow hA(t, X, z)\}), \end{cases}$$

ce qui prouve que H est de classe C^2 . Le système (III-4) devient

$$(III-7) \quad \begin{cases} \cdot \frac{dX}{dt} = \partial_3 H(t, X, p) \\ \frac{dp}{dt} = -\partial_2 H(t, X, p). \end{cases}$$

Ces deux équations sont appelées équations canoniques ou système canonique.

B. — L'équation d'Hamilton-Jacobi.

1. Étude d'un problème de géométrie.

Soit S une fonction réelle, de classe C^2 sur $I \times V_1$, telle que

$$S'(t, X) \begin{pmatrix} 1 \\ Y \end{pmatrix} = \partial_1 S(t, X) + \partial_2 S(t, X)Y$$

soit non nul sur $I \times V$. S définit une famille \mathcal{F} de surfaces dépendant d'un paramètre σ par l'équation

$$S(t, X) = \sigma.$$

On considère la fonction réelle g définie sur $I \times V$ par l'équation

$$(III-8) \quad g(t, X, Y) = \frac{L(t, X, Y)}{\partial_1 S(t, X) + \partial_2 S(t, X)Y}.$$

(t, X) étant supposé donné, nous cherchons les vecteurs Y rendant (III-8) stationnaire, c'est-à-dire les solutions de l'équation

$$\partial_3 g(t, X, Y) = 0.$$

Cette équation s'écrit

$$(III-9) \quad \partial_3 L(t, X, Y) - g(t, X, Y)S'_2(t, X) = 0.$$

Supposons que pour une certaine valeur (t_0, X_0) de (t, X) , (III-9) admette une racine Y_0 . Le théorème de la fonction implicite montre alors que sous

l'hypothèse $\partial_{33}L(t_0, X_0, Y_0)$ inversible, il existe un C^1 -isomorphisme f d'un voisinage ouvert D_1 de (t_0, X_0) sur un voisinage ouvert de Y_0 tel que

$$(III-10) \quad \partial_3 L(t, X, f(t, X)) - g(t, X, f(t, X))S'_2(t, X) = 0 \quad \forall (t, X) \in D_1.$$

Nous supposons dans la suite $D_1 = I \times V_1$, et associerons au champ de vecteurs f l'équation différentielle

$$(III-11) \quad \frac{dX}{dt} = f(t, X).$$

Remarque : Le problème étudié plus haut est la généralisation du problème classique : étude des trajectoires orthogonales de la famille \mathcal{F} . La « norme » au point (t, X) serait donnée par

$$\|(\tau, Y)\| = |\tau| + L(t, X, Y) - 1.$$

Proposition : Toute courbe intégrale de (III-11) rencontre localement toute hypersurface de la famille \mathcal{F} en un point et un seul.

Démonstration : Soit $m = (\tau, \xi)$ un point de $I \times V_1$, $X = \alpha(t, m)$ l'équation de la courbe intégrale maximale de (III-11) passant par m , σ un point du domaine de valeurs de S . Les valeurs de t correspondant aux points d'intersection de la courbe $X = \alpha(t, m)$ et de l'hypersurface $S(t, X) = \sigma$ sont les racines de l'équation

$$(III-12) \quad S(t, \alpha(t, m)) - \sigma = 0.$$

En raison des hypothèses faites sur S et des propriétés de α , (III-12) définit implicitement t en fonction de m et de σ . On a donc localement

$$t = \Phi(m, \sigma),$$

Φ étant un C^1 -isomorphisme d'un ouvert de $R \times F \times R$ sur un ouvert de R .

2. Cas où $g(t, X, f(t, X))$ est constant sur toute hypersurface de la famille \mathcal{F} .

Proposition 1 : Pour que $g(t, X, f(t, X))$ soit constant sur toute hypersurface de la famille \mathcal{F} , il faut et il suffit qu'il existe une fonction réelle ψ telle que

$$(III-13) \quad g(t, X, f(t, X)) = \psi(S(t, X)).$$

De plus ψ est de classe C^1 .

Démonstration : La proposition est évidente.

Proposition 2 : Si la famille \mathcal{F} d'hypersurfaces satisfait à la condition (III-13) et si $L(t, X, Y) \neq 0$ sur $I \times V$, il existe une définition \bar{S} de la famille \mathcal{F} , C^2 -équivalente à S , telle que, si on définit \bar{g} par

$$\bar{g}(t, X, f) = \frac{L(t, X, Y)}{\bar{S}'(t, X)(l, Y)}$$

et si on désigne par \bar{f} le champ de vecteurs associé à \bar{S} par (III-10), on ait

$$(III-14) \quad \bar{g}(t, X, \bar{f}(t, X)) = 1 \quad \forall t, X, \sigma.$$

Démonstration : On cherche un C^2 -isomorphisme φ tel que, si $\bar{S} = \varphi \cdot S$, (III-14) soit vérifiée. Remarquant que $\bar{f} = f$ car ces deux fonctions satisfont à des équations (III-10) identiques et la solution de (III-10) est unique, on trouve immédiatement pour définir φ , l'équation différentielle

$$\varphi'(\sigma) = \psi(\sigma),$$

ce qui démontre la proposition 2.

Si la famille \mathcal{F} est définie par \bar{S} , alors l'équation (III-8) devient

$$L(t, X, f(t, X)) = \partial_1 \bar{S}(t, X) + \partial_2 \bar{S}(t, X) f(t, X),$$

et l'équation (III-9)

$$\partial_3 L(t, X, f(t, X)) = \partial_2 \bar{S}(t, X).$$

Introduisons la fonction d'Hamilton H . Les deux dernières équations deviennent respectivement

$$\partial_1 \bar{S}(t, X) + H(t, X, \partial_2 \bar{S}(t, X)) = 0$$

$$f(t, X) = A(t, X, \partial_2 \bar{S}(t, X)).$$

Dans toute la suite de cet exposé, nous supprimerons la barre sur S et nous intéresserons à la famille \mathcal{F} d'hypersurfaces définie par une fonction S satisfaisant à l'équation connue sous le nom d'*équation d'Hamilton-Jacobi*

$$(III-15) \quad \partial_1 S(t, X) + H(t, X, \partial_2 S(t, X)) = 0.$$

A chaque solution S de (III-15) on associe l'équation différentielle (III-11) qui s'écrit ici

$$(III-16) \quad \frac{dX}{dt} = A(t, X, \partial_2 S(t, X)).$$

Proposition 3 : $L(t, X, Y)$ est supposé non nul sur $I \times V$. Soit S une fonction de classe C^2 sur $I \times V_1$, telle que $S'(t, X)(1, Y)$ soit non nul sur $I \times V$. Soit (C) une courbe intégrale de l'équation (III-16), A_1 (resp. A_2) le point d'intersection de (C) avec l'hypersurface d'équation

$$S(t, X) = \sigma_1 \text{ (resp. } S(t, X) = \sigma_2 \text{)}.$$

On considère l'intégrale, prise sur l'arc A_1A_2 de (C)

$$J = \int_{A_1A_2} L\left(t, X, \frac{dX}{dt}\right) dt.$$

Pour que S soit solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi, il faut et il suffit que

$$J = \sigma_1 - \sigma_2$$

quelle que soit la courbe intégrale (C) , quels que soient σ_1 et σ_2 .

Démonstration : La démonstration de cette proposition généralise trivialement la démonstration faite classiquement en dimension finie.

C. — Relation entre l'équation d'Hamilton-Jacobi et les équations canoniques.

Proposition 1 : Soit S une solution de classe C^2 de l'équation d'Hamilton-Jacobi et soit

$$(III-17) \quad \begin{cases} \frac{dX}{dt} = A(t, X, p) \\ p = \partial_2 S(t, X) \end{cases}$$

l'équation différentielle associée à S . L'ensemble des solutions de (III-17) est contenu dans l'ensemble des solutions des équations canoniques.

Démonstration : La première équation canonique résulte de la première équation (III-17) et de la première équation (III-6). La seconde s'obtient en dérivant la deuxième équation (III-17) par rapport à t et en éliminant $\partial_{12}S$ entre l'équation obtenue et la dérivée par rapport à X de l'équation d'Hamilton-Jacobi.

Proposition 2 : Soit α (resp. β) une application d'un ouvert Ω_0 de $\mathbb{R} \times F$ dans F (resp. dans \vec{F}), de classe C^1 , telle que $\partial_2 \alpha(t, u)$ soit une application inversible de \vec{F} dans \vec{F} . Soit alors φ l'application inverse de $u \rightarrow \alpha(t, u)$. Si α et β définissent une famille \mathcal{F}_1 , dépendant du paramètre u , de solutions

du système canonique, et si le champ de covecteurs $X \rightarrow \beta(t_0, \varphi(t_0, X))$ est une 1-forme fermée, alors il existe une solution S de l'équation d'Hamilton-Jacobi, de classe C^2 , telle que \mathcal{F}_1 soit l'ensemble des solutions de (III-17).

Démonstration : Nous supposons que les équations

$$(III-18) \quad \begin{cases} X = \alpha(t, u) \\ p = \beta(t, u) \end{cases}$$

définissent pour tout u une solution du système canonique (III-7). Tirant u de la première équation et portant dans la seconde, il vient

$$p = \beta(t, \varphi(t, X)).$$

La fonction S cherchée doit satisfaire à

$$\begin{aligned} \partial_2 S(t, X) &= p && \text{(deuxième équation (III-17))} \\ \partial_1 S(t, X) &= -H(t, X, p) && \text{(équation d'Hamilton-Jacobi).} \end{aligned}$$

Autrement dit, la dérivée S' de S doit satisfaire à

$$(III-19) \quad S'(t, X) = [-H(t, X, \beta(t, \varphi(t, X))) \quad \beta(t, \varphi(t, X))]$$

D'après le théorème de Poincaré, pour qu'il existe une fonction S satisfaisant à (III-19), il faut et il suffit localement que la dérivée extérieure du deuxième membre soit nulle. Autrement dit, il faut et il suffit que l'on ait

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial X} [-H(t, X, \beta(t, \varphi(t, X)))] = \frac{\partial}{dt} [\beta(t, \varphi(t, X))] \\ \frac{\partial}{\partial X} [\beta(t, \varphi(t, X))](\xi)(\eta) = \frac{\partial}{\partial X} [\beta(t, \varphi(t, X))](\eta)(\xi) \end{cases}$$

quels que soient ξ et η dans \vec{F} .

Un calcul ne présentant aucune difficulté montre que, sous les hypothèses énoncées dans la proposition, ces deux conditions sont satisfaites. Il existe donc bien une fonction S satisfaisant à (III-19). Elle est de classe C^2 puisque S' est par définition même de classe C^1 . Le système différentiel associé à cette application, qui s'écrit en raison de la troisième identité (III-6)

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = \partial_3 H(t, X, p) \\ p = \partial_2 S(t, X) \end{cases}$$

est alors vérifié identiquement, quel que soit u , par (III-18).

D. — La condition de Weierstrass.

Proposition : Soient $X = v_1(t)$, $p = v_2(t)$ une solution du système canonique, (C) la courbe $(t, v_1(t))$, A_1 et A_2 deux points de (C). Soit (Γ) une courbe de classe C^1 par morceaux joignant A_1 et A_2 et dont tous les points sont dans $I \times V_1$. Si, quel que soit (t, X, Y) dans $I \times V$, $\partial_{33}L(t, X, Y)$ est une forme quadratique positive, alors

$$\int_C L\left(t, X, \frac{dX}{dt}\right) dt \leq \int_\Gamma L\left(t, X, \frac{dX}{dt}\right) dt.$$

\int_C (resp. \int_Γ) représente l'intégrale curviligne prise sur (C) (resp. (Γ)) entre les points A_1 et A_2 .

Démonstration : La courbe (C) appartient certainement à une famille à un paramètre (III-18) satisfaisant aux conditions de la proposition 2. En effet, soit $X = \alpha(t, X_0, p_0)$, $p = \beta(t, X_0, p_0)$ la solution générale maximale du système canonique pour la condition initiale (X_0, p_0) . Supposons $p_0 = v_2(t_0)$ fixé. La famille à un paramètre X_0

$$\begin{aligned} X &= \alpha(t, X_0, v_2(t_0)) \\ p &= \beta(t, X_0, v_2(t_0)) \end{aligned}$$

contient (C) et satisfait aux conditions de la proposition 2 puisque, pour $t = t_0$, p prend la valeur $v_2(t_0)$ indépendant de X_0 .

Soit donc S une solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi telle que (C) soit une courbe intégrale de l'équation différentielle associée (III-16). On désigne par t_1 et X_1 (resp. t_2 et X_2) les composantes de A_1 (resp. A_2). On a, quelle que soit (Γ) , et en particulier si $(\Gamma) = (C)$,

$$J = \int_\Gamma dS(t, X) = S(t_2, X_2) - S(t_1, X_1).$$

Utilisant d'autre part

$$\frac{dS(t, X)}{dt} = \partial_1 S(t, X) + \partial_2 S(t, X) \frac{dX}{dt},$$

l'équation d'Hamilton-Jacobi et la définition (III-5) de H, il vient

$$J = \int_\Gamma \left[L(t, X, Y) + \partial_3 L(t, X, Y) \left(\frac{dX}{dt} - Y \right) \right] dt,$$

où on a posé

$$Y = A(t, X, \partial_2 S(t, X)).$$

On en déduit

$$\int_c L(t, X, Y) dt = \int_\Gamma \left[L(t, X, Y) + \partial_3 L(t, X, Y) \left(\frac{dX}{dt} - Y \right) \right] dt.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \text{(III-20)} \quad & \int_c L\left(t, X, \frac{dX}{dt}\right) dt - \int_\Gamma L\left(t, X, \frac{dX}{dt}\right) dt \\ & = \int_\Gamma \left[L(t, X, Y) - L\left(t, X, \frac{dX}{dt}\right) - \partial_3 L(t, X, Y) \left(Y - \frac{dX}{dt} \right) \right] dt. \end{aligned}$$

Par application de la formule de Taylor à la fonction $Y \rightarrow L(t, X, Y)$, on voit qu'il existe $\xi \in \left[\frac{dX}{dt}, Y \right]$ tel que

$$\begin{aligned} L(t, X, Y) - L\left(t, X, \frac{dX}{dt}\right) - \partial_3 L(t, X, Y) \left(Y - \frac{dX}{dt} \right) \\ = -\frac{1}{2} \partial_{33} L(t, X, \xi) \left(Y - \frac{dX}{dt} \right)^2. \end{aligned}$$

Le deuxième membre de (III-20) est donc négatif par hypothèse. La proposition en résulte.

E. — Application à la mécanique des milieux continus.

Les notations sont celles du paragraphe I. On a

$$L(t, X, Y) = \frac{1}{2} a(Y, Y) + U(X).$$

On en déduit

$$p = a(Y) = \iiint_{\mathbf{K}_0} \langle Y(M_0), \cdot(M_0) \rangle \rho_0(M_0) dv_0.$$

Soit a^{-1} l'application inverse de a . On a ici

$$A(t, X, p) \equiv a^{-1}(p).$$

L'équation

$$H(t, X, p) \equiv p a^{-1}(p) - L(t, X, a^{-1}(p))$$

donne après simplification

$$H(t, X, p) = \frac{1}{2} p a^{-1}(p) - U(X) = \frac{1}{2} a^{-1}(p, p) - U(X).$$

Les équations canoniques ont la forme très simple

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dX}{dt} = a^{-1}(p) \\ \frac{dp}{dt} = U'(X), \end{array} \right.$$

et l'équation d'Hamilton-Jacobi

$$\partial_1 S(t, X) + \frac{1}{2} a^{-1}(\partial_2 S(t, X), \partial_2 S(t, X)) - U(X) = 0.$$

Enfin la condition de Weierstrass exprime que

$$I(u) = \int \dots \int_{[t_1, t_2] \times K_0} \left[\frac{1}{2} \langle u'(t)(M_0), u'(t)(M_0) \rangle \rho_0(M_0) + \langle \vec{G}, u(t)(M_0) \rangle + \Phi(u(t)'(M_0)) \right] dv_0$$

où I est définie sur l'ensemble des applications de $[t_1, t_2]$ dans F (resp. F_1), continues et continûment différentiables par morceaux sur $[t_1, t_2]$ est minimum au point \tilde{u} correspondant au mouvement.

Notons aussi que les hypothèses faites dans le paragraphe I assurent l'unicité de la solution maximale des équations canoniques passant par un point (t_0, X_0, p_0) donné. Autrement dit, la donnée des applications $u(t_0)$ et $u'(t_0)$ (champ des positions et champ des vitesses à l'instant t_0) détermine le mouvement.

BIBLIOGRAPHIE

- V. ARNOLD, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 260, 1965, p. 5668-5671.
 S. LANG, Introduction to differentiable manifolds.
 A. LICHNEROWICZ, Éléments de calcul tensoriel.
 A. D. MICHAL, Le calcul différentiel dans les espaces de Banach.
 J. J. MOREAU, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 249, 1959, p. 2156-2159.
 H. RUND, The Hamilton-Jacobi theory in the calculus of variations.
 SYNGE, On the geometry of dynamics, *Trans. Roy. Soc. London*, 1926.

(Manuscrit reçu le 22 avril 1967).