ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

MARIE-CLAIRE BARTHÉLÉMY

Contribution à l'étude de la diffusion par un potentiel central dans la théorie de l'électron de Dirac. II

Annales de l'I. H. P., section A, tome 7, nº 2 (1967), p. 115-148

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1967__7_2_115_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. VII, n° 2, 1967, p. 115-148.

Section A :
Physique théorique.

Contribution à l'étude de la diffusion par un potentiel central dans la théorie de l'électron de Dirac. II.

par

Marie-Claire BARTHÉLÉMY
Institut Henri Poincaré [1].

ABSTRACT. — This is the second part of a general study about potential scattering in the Dirac electron theory.

In this article, the radial wave functions and other quantities relevant to the partial wave analysis of relativistic scattering theory are investigated.

The properties of the solutions of the Dirac partial differential system being more difficult to obtain than those of solutions of ordinary differential system, a partial wave analysis, similar to this one used in the non-relativistic Schrödinger equation, is built and leads to radial equations.

The analytic properties of the regular and irregular solutions of the Dirac radial differential system for a particle in a central potential $V(r)$ are analyzed in the complex k plane.

A research of analyticity of the generalized Jost functions as well as their zeros is carried out. Some properties of the S matrix lead to an analogue of the Levinson theorem for the relativistic Dirac equation.

SOMMAIRE. — Cet article constitue la deuxième partie d'un travail d'ensemble consacré à l'étude de la diffusion par un potentiel central dans la théorie de l'électron de Dirac.

Les propriétés analytiques des solutions régulières et irrégulières du système radial de Dirac sont étudiées dans le plan complexe de l'impulsion réduite k, une recherche sur l'analyticité de fonctions analogues aux fonctions de Jost ainsi que de leurs zéros est ensuite effectuée. Quelques propriétés de la matrice S nous conduisent à un analogue du théorème de Levinson.

[1] Laboratoire de Physique théorique associé au CNRS.

III. — PROPRIÉTÉS ANALYTIQUES DES FONCTIONS D'ONDES RADIALES

Nous étudierons ici les propriétés des fonctions d'ondes radiales et d'autres quantités en rapport avec l'analyse en ondes partielles de la théorie de la diffusion, comme fonctions de la quantité de mouvement réduite *k*.

Cette étude a été faite par R. G. Newton [*1*] dans le cas de l'équation non relativiste de Schrödinger et par E. Corinaldesi [*2*] dans le cas de l'équation de Klein-Gordon. Nous essaierons de la développer dans le cas de l'équation relativiste de Dirac.

Nous conserverons les notations et définitions de la première partie [*3*].

1. — Préliminaires sur la théorie de la diffusion des particules de Dirac.

Notre point de départ est l'équation de Dirac pour le mouvement d'une particule de spin $\frac{\hbar}{2}$ dans un champ d'énergie potentielle $V(r)$:

$$[(\vec{\alpha}\cdot\vec{p}) + \mu\alpha_4 + V(r)]_{jn}\Psi_n(\vec{r}) = E\Psi_j(\vec{r}) \quad , \quad (j, n = 1, 2, 3, 4).$$

Pour plus de commodité, nous allons remplacer cette équation par l'équation intégrale incorporant les conditions aux limites suivantes : à grandes distances du diffuseur la fonction d'onde est la somme d'une onde plane et d'une onde sphérique divergente. Cette équation intégrale s'écrit [*3*] :

$$\text{(III-1)} \quad \Psi_j(\vec{r}) = a_j(\vec{k}_0)e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{r}} - [E + (\vec{\alpha}\cdot\vec{p}) + \mu\alpha_4]_{jn}\int \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi\,|\vec{r}-\vec{r}'|}V(r')\Psi_n(\vec{r}')d\vec{r}'.$$

Le comportement asymptotique de Ψ est donné par :

$$\Psi_j(\vec{r}) \underset{r\to\infty}{\sim} a_j(\vec{k}_0)e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{r}} + \frac{e^{ikr}}{r}g_j(\theta, \varphi),$$

l'amplitude de diffusion $g(\theta, \varphi)$ s'exprimant par :

$$g(\theta, \varphi) = -\frac{1}{4\pi}[\mathrm{E} + (\vec{\alpha}\cdot\vec{k}) + \mu\alpha_4]\int e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\mathrm{V}(r)\Psi(\vec{r})d\vec{r},$$

$\vec{k}$ faisant l'angle (θ, φ) avec la direction de $\vec{k_0}$.

L'onde plane en propagation dans la direction de l'axe Oz avec spin dans la direction d'incidence, normalisée sur la sphère unité s'écrit :

$$a(\vec{k}_0)e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{r}} = \left(\frac{\mathrm{E}+\mu}{2\mathrm{E}}\cdot\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{k}{\mathrm{E}+\mu} \\ 0 \end{bmatrix} e^{ikz}.$$

Nous développerons cette onde plane $a(\vec{k}_0)e^{i(\vec{k}_0\cdot\vec{r})}$ et $\Psi(\vec{r})$ sur l'ensemble complet de fonctions propres orthonormées $f^{(\varkappa,m)}(\theta, \varphi)$ de $\mathrm{U} = \alpha_4(\vec{\mathrm{L}}\cdot\vec{\sigma} + 1)$. Ces fonctions étant :

$$\varkappa > 0,\ f^{(\varkappa,m)}(\theta, \varphi) = \begin{bmatrix} \left(\dfrac{\varkappa - m}{2(2\varkappa+1)}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{Y}_{\varkappa}^{m}(\theta, \varphi) \\ -\left(\dfrac{\varkappa + m + 1}{2(2\varkappa+1)}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{Y}_{\varkappa}^{m+1}(\theta, \varphi) \\ -i\left(\dfrac{\varkappa + m}{2(2\varkappa-1)}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{Y}_{\varkappa-1}^{m}(\theta, \varphi) \\ -i\left(\dfrac{\varkappa - m - 1}{2(2\varkappa-1)}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{Y}_{\varkappa-1}^{m+1}(\theta, \varphi) \end{bmatrix};$$

$$\varkappa < 0,\ f^{(\varkappa,m)}(\theta, \varphi) = \begin{bmatrix} i\left(\dfrac{|\varkappa| + m}{2(2|\varkappa|-1)}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{Y}_{|\varkappa|-1}^{m}(\theta, \varphi) \\ i\left(\dfrac{|\varkappa| - m - 1}{2(2|\varkappa|-1)}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{Y}_{|\varkappa|-1}^{m+1}(\theta, \varphi) \\ \left(\dfrac{|\varkappa| - m}{2(2|\varkappa|+1)}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{Y}_{|\varkappa|}^{m}(\theta, \varphi) \\ -\left(\dfrac{|\varkappa| + m + 1}{2(2|\varkappa|+1)}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{Y}_{|\varkappa|}^{m+1}(\theta, \varphi) \end{bmatrix},$$

(les $\mathrm{Y}_{\varkappa}^{m}(\theta, \varphi)$ sont les fonctions sphériques normées :

$$\mathrm{Y}_{\varkappa}^{m}(\theta, \varphi) = (-1)^m\left(\left(\frac{(2\varkappa+1)(\varkappa-m)\,!}{4\pi(\varkappa+m)\,!}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{P}_{\varkappa}^{m}(\cos\theta)e^{im\varphi}\right),$$

nous avons montré [3] que l'on a le développement :

$$a(\vec{k_0})e^{ikz} = \sum_{\varkappa>0} \left(\frac{E+\mu}{2E}\cdot 2\varkappa\right)^{\frac{1}{2}} \frac{i^{\varkappa}}{kr}$$

$$\left[krj_{\varkappa}(kr)\left(\frac{1+\alpha_4}{2}\right) + \frac{k}{E+\mu} krj_{\varkappa-1}(kr)\left(\frac{1-\alpha_4}{2}\right)\right] f^{(\varkappa,0)}(\theta, \varphi)$$

$$+ \sum_{\varkappa<0} \left(\frac{E+\mu}{2E}\cdot 2\,|\,\varkappa\,|\right)^{\frac{1}{2}} \frac{i^{|\varkappa|}}{kr}$$

$$\left[- krj_{|\varkappa|-1}(kr)\left(\frac{1+\alpha_4}{2}\right) + \frac{k}{E+\mu} krj_{|\varkappa|}(kr)\left(\frac{1-\alpha_4}{2}\right)\right] f^{(\varkappa,0)}(\theta, \varphi).$$

De même nous écrivons :

$$\Psi(\vec{r}) = \sum_{\varkappa>0} \left(\frac{E+\mu}{2E}\cdot 2\varkappa\right)^{\frac{1}{2}} \frac{i^{\varkappa}}{kr} \left[G_{\varkappa}(k, r)\left(\frac{1+\alpha_4}{2}\right) + F_{\varkappa}(k, r)\left(\frac{1-\alpha_4}{2}\right)\right] f^{(\varkappa,0)}(\theta, \varphi)$$

$$+ \sum_{\varkappa<0} \left(\frac{E+\mu}{2E}\cdot 2\,|\,\varkappa\,|\right)^{\frac{1}{2}} \frac{i^{|\varkappa|}}{kr} \left[G_{\varkappa}(k, r)\left(\frac{1+\alpha_4}{2}\right) + F_{\varkappa}(k, r)\left(\frac{1-\alpha_4}{2}\right)\right] f^{(\varkappa,0)}(\theta, \varphi),$$

compte tenu du fait que le nombre quantique $m + \frac{1}{2}$ et par suite m est conservé. On peut également développer $\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}$ sur les polynômes de Legendre :

$$\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi\,|\,\vec{r}-\vec{r}'\,|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{rr'k} \frac{(2l+1)}{4\pi} kr_< j_l(kr_<)kr_> h_l^+(kr_>) P_l(\cos\gamma),$$

γ étant l'angle de $\vec{r}$ et $\vec{r}'$, $r_<$ désignant la plus petite des longueurs r et r' et $r_>$ la plus grande, et :

$$\frac{2l+1}{4\pi} P_l(\cos\gamma) = \sum_{m=-l}^{+l} Y_l^m(\theta, \varphi)\, Y_l^{*m}(\theta', \varphi'),$$

$\vec{r}'$ faisant l'angle (θ', φ') avec $\vec{k_0}$. [$j_l(kr)$ et $h_l^+(kr)$ sont les fonctions de Bessel sphériques :

$$j_l(kr) = \left(\frac{\pi}{2kr}\right)^{\frac{1}{2}} J_{l+\frac{1}{2}}(kr),\quad h_l^+(kr) = n_l(kr) + ij_l(kr),$$

$$n_l(kr) = (-1)^l\left(\frac{\pi}{2kr}\right)^{\frac{1}{2}} J_{-l-\frac{1}{2}}(kr)\Big].$$

En portant ces développements dans (III-1) on obtient d'abord :

$$\int \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} V(r')\Psi(\vec{r}')d\vec{r}' = \left(\frac{E+\mu}{2E}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty \frac{V(r')}{rk^2}$$

$$\times \Bigg[\sum_{\varkappa>0} (2\varkappa)^{\frac{1}{2}} i^\varkappa \Bigg[G_\varkappa(k, r')kr_< j_\varkappa(kr_<)kr_> h^+_\varkappa(kr_>)\left(\frac{1+\alpha_4}{2}\right)$$

$$+ F_\varkappa(k, r')kr_< j_{\varkappa-1}(kr_<)kr_> h^+_{\varkappa-1}(kr_>)\left(\frac{1-\alpha_4}{2}\right)\Bigg] f^{(\varkappa,0)}(\theta, \varphi)$$

$$+ \sum_{\varkappa<0} (2|\varkappa|)^{\frac{1}{2}} i^{|\varkappa|} \Bigg[G_\varkappa(k, r')kr_< j_{|\varkappa|-1}(kr_<)kr_> h^+_{|\varkappa|-1}(kr_>)\left(\frac{1+\alpha_4}{2}\right)$$

$$+ F_\varkappa(k, r')kr_< j_{|\varkappa|}(kr_<)kr_> h^+_{|\varkappa|}(kr_>)\left(\frac{1-\alpha_4}{2}\right)\Bigg] f^{(\varkappa,0)}(\theta, \varphi)\Bigg] dr',$$

puis en faisant agir l'opérateur $E + (\vec{\alpha}\cdot\vec{p}) + \mu\alpha_4$ à gauche, on obtient en utilisant les identités :

$$(\vec{\alpha}\cdot\vec{p}) = \frac{(\vec{x}\cdot\vec{\alpha})}{r}\left(p_r - \frac{i}{r}\right) + i\frac{(\vec{x}\cdot\vec{\alpha})}{r}\alpha_4\frac{U}{r} \quad \text{et} \quad p_r = -i\frac{\partial}{\partial r},$$

$$Uf^{(\varkappa,m)}(\theta, \varphi) = -\varkappa f^{(\varkappa,m)}(\theta, \varphi),$$

$$\frac{(\vec{x}\cdot\vec{\alpha})}{r}\left(\frac{1+\alpha_4}{2}\right) = \left(\frac{1-\alpha_4}{2}\right)\frac{(\vec{x}\cdot\vec{\alpha})}{r}; \qquad \frac{(\vec{x}\cdot\vec{\alpha})}{r}\left(\frac{1-\alpha_4}{2}\right) = \left(\frac{1+\alpha_4}{2}\right)\left(\frac{\vec{x}\cdot\vec{\alpha}}{r}\right),$$

$$\frac{(\vec{x}\cdot\vec{\alpha})}{r} f^{(\varkappa,m)}(\theta, \varphi) = -i\left(\frac{1+\alpha_4}{2}\right)f^{(\varkappa,m)}(\theta, \varphi) + i\left(\frac{1-\alpha_4}{2}\right)f^{(\varkappa,m)}(\theta, \varphi),$$

et après calculs, l'équation intégrale correspondant à (III-1) :

$$\sum_{\varkappa>0}\left(\frac{E+\mu}{2E}\cdot 2\varkappa\right)^{\frac{1}{2}}\frac{i^\varkappa}{kr}\Bigg[(G_\varkappa(k, r) - krj_\varkappa(kr))\left(\frac{1+\alpha_4}{2}\right)$$

$$+ \left(F_\varkappa(k, r) - \frac{k}{E+\mu}krj_{\varkappa-1}(kr)\right)\left(\frac{1-\alpha_4}{2}\right)\Bigg] f^{(\varkappa,0)}(\theta, \varphi)$$

$$+ \sum_{\varkappa<0}\left(\frac{E+\mu}{2E}\cdot 2|\varkappa|\right)^{\frac{1}{2}}\frac{i^{|\varkappa|}}{kr}\Bigg[(G_\varkappa(k, r) + krj_{|\varkappa|-1}(kr))\left(\frac{1+\alpha_4}{2}\right)$$

$$+ \left(F_\varkappa(k, r) - \frac{k}{E+\mu}krj_{|\varkappa|}(kr)\right)\left(\frac{1-\alpha_4}{2}\right)\Bigg] f^{(\varkappa,0)}(\theta, \varphi)$$

$$= -\left(\frac{E+\mu}{2E}\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^\infty \frac{V(r')}{k^2 r}$$

$$\Big[\sum_{\varkappa>0}(2\varkappa)^{\frac{1}{2}}i^{\varkappa}\Big[(E+\mu)G_{\varkappa}(k,r')kr_<j_{\varkappa}(kr_<)kr_>h_{\varkappa}^{+}(kr_>)\Big(\frac{1+\alpha_4}{2}\Big)$$
$$+(E-\mu)F_{\varkappa}(k,r')kr_<j_{\varkappa-1}(kr_<)kr_>h_{\varkappa-1}^{+}(kr_>)\Big(\frac{1-\alpha_4}{2}\Big)\Big]f^{(\varkappa,0)}(\theta,\varphi)$$
$$+\sum_{\varkappa<0}(2|\varkappa|)^{\frac{1}{2}}i^{|\varkappa|}\Big[(E+\mu)G_{\varkappa}(k,r')kr_<j_{|\varkappa|-1}(kr_<)kr_>h_{|\varkappa|-1}^{+}(kr_>)\Big(\frac{1+\alpha_4}{2}\Big)$$
$$+(E-\mu)F_{\varkappa}(k,r')kr_<j_{|\varkappa|}(kr_<)kr_>h_{|\varkappa|}^{+}(kr_>)\Big(\frac{1-\alpha_4}{2}\Big)\Big]f^{(\varkappa,0)}(\theta,\varphi)$$
$$+\sum_{\varkappa>0}(2\varkappa)^{\frac{1}{2}}i^{\varkappa}\Big[F_{\varkappa}(k,r')\Big(\frac{\varkappa}{r}-\frac{d}{dr}\Big)\big(kr_<j_{\varkappa-1}(kr_<)kr_>h_{\varkappa-1}^{+}(kr_>)\big)\Big(\frac{1+\alpha_4}{2}\Big)$$
$$+G_{\varkappa}(k,r')\Big(\frac{\varkappa}{r}+\frac{d}{dr}\Big)\big(kr_<j_{\varkappa}(kr_<)kr_>h_{\varkappa}^{+}(kr_>)\big)\Big(\frac{1-\alpha_4}{2}\Big)\Big]f^{(\varkappa,0)}(\theta,\varphi)$$
$$+\sum_{\varkappa<0}(2|\varkappa|)^{\frac{1}{2}}i^{|\varkappa|}\Big[F_{\varkappa}(k,r')\Big(\frac{\varkappa}{r}-\frac{d}{dr}\Big)\big(kr_<j_{|\varkappa|}(kr_<)kr_>h_{|\varkappa|}^{+}(kr_>)\big)\Big(\frac{1+\alpha_4}{2}\Big)$$
$$+G_{\varkappa}(k,r')\Big(\frac{\varkappa}{r}+\frac{d}{dr}\Big)\big(kr_<j_{|\varkappa|-1}(kr_<)kr_>h_{|\varkappa|-1}^{+}(kr_>)\big)\Big(\frac{1-\alpha_4}{2}\Big)\Big]f^{(\varkappa,0)}(\theta,\varphi)\Big]$$
$$\times dr'.$$

En multipliant par

$$f^{*t(\varkappa',0)}(\theta,\varphi)\Big(\frac{1+\alpha_4}{2}\Big)\sin\theta d\theta d\varphi\ \Big[\text{resp : } f^{*t(\varkappa',0)}(\theta,\varphi)\Big(\frac{1-\alpha_4}{2}\Big)\sin\theta d\theta d\varphi\Big]$$

et en intégrant sur les angles, on en déduit :

pour $\varkappa > 0$:

(III-2-*a*)
$$\begin{bmatrix}F_{\varkappa}(k,r)\\ G_{\varkappa}(k,r)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{k}{E+\mu}krj_{\varkappa-1}(kr)\\ krj_{\varkappa}(kr)\end{bmatrix}-\int_0^{\infty}\frac{V(r')}{k}$$
$$\begin{bmatrix}(E-\mu)kr_<j_{\varkappa-1}(kr_<)kr_>h_{\varkappa-1}^{+}(kr_>) & \Big(\frac{\varkappa}{r}+\frac{d}{dr}\Big)[kr_<j_{\varkappa}(kr_<)kr_>h_{\varkappa}^{+}(kr_>)]\\ \Big(\frac{\varkappa}{r}-\frac{d}{dr}\Big)[kr_<j_{\varkappa-1}(kr_<)kr_>h_{\varkappa-1}^{+}(kr_>)] & (E+\mu)kr_<j_{\varkappa}(kr_<)kr_>h_{\varkappa}^{+}(kr_>)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F_{\varkappa}(k,r')\\ G_{\varkappa}(k,r')\end{bmatrix}dr',$$

et pour $\varkappa < 0$:

(III-2-*b*)
$$\begin{bmatrix}F_{\varkappa}(k,r)\\ G_{\varkappa}(k,r)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{k}{E+\mu}krj_{|\varkappa|}(kr)\\ -krj_{|\varkappa|-1}(kr)\end{bmatrix}-\int_0^{\infty}\frac{V(r')}{k}$$
$$\begin{bmatrix}(E-\mu)kr_<j_{|\varkappa|}(kr_<)kr_>h_{|\varkappa|}^{+}(kr_>) & \Big(\frac{\varkappa}{r}+\frac{d}{dr}\Big)[kr_<j_{|\varkappa|-1}(kr_<)kr_>h_{|\varkappa|-1}^{+}(kr_>)]\\ \Big(\frac{\varkappa}{r}-\frac{d}{dr}\Big)[kr_<j_{|\varkappa|}(kr_<)kr_>h_{|\varkappa|}^{+}(kr_>)] & (E+\mu)kr_<j_{|\varkappa|-1}(kr_<)kr_>h_{|\varkappa|-1}^{+}(kr_>)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F_{\varkappa}(k,r')\\ G_{\varkappa}(k,r')\end{bmatrix}dr'.$$

On montre que la solution de (III-2) vérifie le système différentiel :

$$\frac{d}{dr}\begin{bmatrix} F_\varkappa(k, r) \\ G_\varkappa(k, r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\varkappa}{r} & -[E - \mu - V(r)] \\ E + \mu - V(r) & -\frac{\varkappa}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_\varkappa(k, r) \\ G_\varkappa(k, r) \end{bmatrix}$$

$\forall \varkappa$ positif ou négatif.

Reprenons l'amplitude de diffusion $g(\theta, \varphi)$ sous la forme intégrale :

$$g(\theta, \varphi) = -\frac{1}{4\pi}[E + (\vec{\alpha}\cdot\vec{k}) + \mu\alpha_4]\int e^{-i(\vec{k}.\vec{r})}V(r)\Psi(\vec{r})d\vec{r}.$$

Développons $\Psi(\vec{r})$ sur les fonctions $f^{(\varkappa,m)}(\theta, \varphi)$, utilisons les développements et relations :

$$e^{-i(\vec{k}.\vec{r})} = 4\pi\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}(-i)^l j_l(kr)Y_l^m(\theta_k, \varphi_k)Y_l^{*m}(\theta_r, \varphi_r),$$

$$(\vec{\alpha}\cdot\vec{k})\left(\frac{1+\alpha_4}{2}\right) = \left(\frac{1-\alpha_4}{2}\right)(\vec{\alpha}\cdot\vec{k})\ ; \qquad (\vec{\alpha}\cdot\vec{k})\left(\frac{1-\alpha_4}{2}\right) = \left(\frac{1+\alpha_4}{2}\right)(\vec{\alpha}\cdot\vec{k}),$$

$$(\vec{\alpha}\cdot\vec{k})f^{(\varkappa,0)}(\theta, \varphi) = k\left[-i\left(\frac{1+\alpha_4}{2}\right)f^{(\varkappa,0)}(\theta, \varphi) + i\left(\frac{1-\alpha_4}{2}\right)f^{(\varkappa,0)}(\theta, \varphi)\right],$$

et par intégration sur les angles θ_r et φ_r, nous obtenons :

$$\text{(III-3)}\quad g(\theta, \varphi) = -\left(\frac{E+\mu}{2E}\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^\infty \frac{r^2V(r)}{kr}\left[\sum_{\varkappa>0}(2\varkappa)^{\frac{1}{2}}Af^{(\varkappa,0)}(\theta, \varphi) + \sum_{\varkappa<0}(2\,|\,\varkappa\,|)^{\frac{1}{2}}Bf^{(\varkappa,0)}(\theta, \varphi)\right]dr,$$

avec :

$$A = [(E+\mu)j_\varkappa(kr)G_\varkappa(k, r) + kj_{\varkappa-1}(kr)F_\varkappa(k, r)]\left(\frac{1+\alpha_4}{2}\right) + i[(E-\mu)j_{\varkappa-1}(kr)F_\varkappa(k, r) + kj_\varkappa(kr)G_\varkappa(k, r)]\left(\frac{1-\alpha_4}{2}\right),$$

$$B = [(E-\mu)j_{|\varkappa|}(kr)F_\varkappa(k, r) - kj_{|\varkappa|-1}(kr)G_\varkappa(k, r)]\left(\frac{1-\alpha_4}{2}\right) + i[(E+\mu)j_{|\varkappa|-1}(kr)G_\varkappa(k, r) - kj_{|\varkappa|}(kr)F_\varkappa(k, r)]\left(\frac{1+\alpha_4}{2}\right).$$

L'approximation de Born de l'amplitude de diffusion peut être obtenue en prenant :

pour $\varkappa > 0$:

$$\left[\begin{array}{l} F_\varkappa(k, r) = \dfrac{k}{E+\mu} krj_{\varkappa-1}(kr) \\ G_\varkappa(k, r) = krj_\varkappa(kr) \end{array}\right. ;$$

pour $\varkappa < 0$:

$$\left[\begin{array}{l} F_\varkappa(k, r) = \dfrac{k}{E+\mu} krj_{|\varkappa|}(kr) \\ G_\varkappa(k, r) = -krj_{|\varkappa|-1}(kr) \end{array}\right. ,$$

ce qui nous donne en reportant dans (III-3),

$$g(\theta, \varphi) = -\left(\frac{E+\mu}{2E}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty r^2 V(r) \left[\sum_{\varkappa>0} (2\varkappa)^{\frac{1}{2}} C f^{(\varkappa,0)}(\theta, \varphi) + \sum_{\varkappa<0} (2|\varkappa|)^{\frac{1}{2}} D f^{(\varkappa,0)}(\theta, \varphi)\right] dr,$$

avec :

$$C = \left[(E+\mu)(j_\varkappa(kr))^2 + k\frac{k}{E+\mu}(j_{\varkappa-1}(kr))^2\right]\left(\frac{1+\alpha_4}{2}\right) + i\left[(E-\mu)\frac{k}{E+\mu}(j_{\varkappa-1}(kr))^2 + k(j_\varkappa(kr))^2\right]\left(\frac{1-\alpha_4}{2}\right),$$

$$D = \left[(E-\mu)\frac{k}{E+\mu}(j_{|\varkappa|}(kr))^2 + k(j_{|\varkappa|-1}(kr))^2\right]\left(\frac{1-\alpha_4}{2}\right) - i\left[(E+\mu)(j_{|\varkappa|-1}(kr))^2 + k\frac{k}{E+\mu}(j_{|\varkappa|}(kr))^2\right]\left(\frac{1+\alpha_4}{2}\right).$$

Nous retrouvons bien ici le développement obtenu dans [*3*], (II-16).

L'élément d'ordre $\varkappa$ de la matrice de diffusion $S_\varkappa = e^{2i\eta_\varkappa(k)}$ est lié à l'amplitude de diffusion par l'expression (II-4) de [*3*] :

$$\text{(II-4)} \quad g(\theta, \varphi) = \left(\frac{E+\mu}{2E}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{\varkappa>0} (2\varkappa)^{\frac{1}{2}} \frac{(S_\varkappa - 1)}{2ik} \mathcal{A} f^{(\varkappa,0)}(\theta, \varphi) + \sum_{\varkappa<0} (2|\varkappa|)^{\frac{1}{2}} \frac{(1-S_\varkappa)}{2k} \mathcal{A} f^{(\varkappa,0)}(\theta, \varphi)\right]$$

avec

$$\mathcal{A} = \left(\frac{1+\alpha_4}{2}\right) + i\frac{k}{E+\mu}\left(\frac{1-\alpha_4}{2}\right);$$

en identifiant les deux développements (III-3) et (II-4), nous obtenons :

pour $\varkappa > 0$:

$$S_\varkappa - 1 = -2ik\int_0^\infty V(r)\left[(E+\mu)j_\varkappa(kr)\frac{G_\varkappa(k, r)}{kr} + kj_{\varkappa-1}(kr)\frac{F_\varkappa(k, r)}{kr}\right]r^2dr,$$

pour $\varkappa < 0$:

$$S_\varkappa - 1 = 2ik\int_0^\infty V(r)\left[(E+\mu)j_{|\varkappa|-1}(kr)\frac{G_\varkappa(k, r)}{kr} - kj_{|\varkappa|}(kr)\frac{F_\varkappa(k, r)}{kr}\right]r^2dr,$$

que nous écrivons sous forme de produit matriciel :

(III-4)

$$(a)\quad \varkappa > 0,\quad S_\varkappa = 1 - 2i\int_0^\infty V(r)\left| krj_{\varkappa-1}(kr) \quad \frac{E+\mu}{k}krj_\varkappa(kr)\right| \left|\begin{matrix} F_\varkappa(k, r) \\ G_\varkappa(k, r)\end{matrix}\right| dr,$$

$$(b)\quad \varkappa < 0,\quad S_\varkappa = 1 + 2i\int_0^\infty V(r)\left| -krj_{|\varkappa|}(kr) \quad \frac{E+\mu}{k}krj_{|\varkappa|-1}(kr)\right| \left|\begin{matrix} F_\varkappa(k, r) \\ G_\varkappa(k, r)\end{matrix}\right| dr.$$

Nous pouvons mettre $S_\varkappa$ en évidence en étudiant le comportement à l'infini de la fonction d'onde radiale.

Les équations (III-2) jointes au comportement asymptotique des fonctions de Bessel $j_\varkappa(kr)$ et $h_\varkappa^+(kr)$:

$$krj_\varkappa(kr) \underset{r\to\infty}{\sim} \sin\left(kr - \frac{\varkappa\pi}{2}\right) \quad , \quad krh_\varkappa^+(kr) \underset{r\to\infty}{\sim} e^{i\left(kr-\frac{\varkappa\pi}{2}\right)},$$

et aux équations (III-4) nous donnent quand $r \to \infty$:

(III-4')

pour $\varkappa > 0$:

$$\left|\begin{matrix} F_\varkappa(k, r) \\ G_\varkappa(k, r)\end{matrix}\right| \sim \frac{i^{\varkappa+1}}{2}\left[\left|\begin{matrix} -i\dfrac{(E-\mu)}{k} \\ 1\end{matrix}\right| e^{-ikr} - (-1)^\varkappa S_\varkappa \left|\begin{matrix} i\dfrac{E-\mu}{k} \\ 1\end{matrix}\right| e^{ikr}\right],$$

pour $\varkappa < 0$:

$$\left|\begin{matrix} F_\varkappa(k, r) \\ G_\varkappa(k, r)\end{matrix}\right| \sim \frac{i^{|\varkappa|+1}}{2}\left[i\left|\begin{matrix} -i\dfrac{E-\mu}{k} \\ 1\end{matrix}\right| e^{-ikr} - (-1)^{|\varkappa|} S_\varkappa(-i) \left|\begin{matrix} i\dfrac{E-\mu}{k} \\ 1\end{matrix}\right| e^{ikr}\right],$$

ou encore en écrivant $S_\varkappa = e^{2i\eta_\varkappa}$

$$\begin{vmatrix} F_\varkappa(k, r) \\ G_\varkappa(k, r) \end{vmatrix} \sim e^{i\eta_\varkappa} \begin{bmatrix} \dfrac{E-\mu}{k} \cos\left[kr - \dfrac{\varkappa\pi}{2} + \eta_\varkappa\right] \\ \sin\left[kr - \dfrac{\varkappa\pi}{2} + \eta_\varkappa\right] \end{bmatrix} \quad \text{pour } \varkappa > 0;$$

$$\begin{vmatrix} F_\varkappa(k, r) \\ G_\varkappa(k, r) \end{vmatrix} \sim e^{i\eta_\varkappa} \begin{bmatrix} \dfrac{E-\mu}{k} \sin\left[kr - \dfrac{|\varkappa|\pi}{2} + \eta_\varkappa\right] \\ -\cos\left[kr - \dfrac{|\varkappa|\pi}{2} + \eta_\varkappa\right] \end{bmatrix} \quad \text{pour } \varkappa < 0.$$

Nous retrouvons bien ici le fait que $\eta_\varkappa$ représente le déphasage.

2. — Généralités.

Les parties radiales $f_\varkappa(r)$ et $g_\varkappa(r)$ de la fonction d'onde de Dirac sont solutions du système :

$$\begin{cases} [E - \mu - V(r)]g_\varkappa(r) + \left[\dfrac{d}{dr} + \dfrac{1-\varkappa}{r}\right] f_\varkappa(r) = 0 \\ [E + \mu - V(r)]f_\varkappa(r) - \left[\dfrac{d}{dr} + \dfrac{1+\varkappa}{r}\right] g_\varkappa(r) = 0. \end{cases}$$

En posant

$$f_\varkappa(r) = \frac{F_\varkappa(r)}{r} \quad \text{et} \quad g_\varkappa(r) = \frac{G_\varkappa(r)}{r},$$

$F_\varkappa(r)$ et $G_\varkappa(r)$ vérifieront le système :

$$\text{(III-5)} \qquad \begin{cases} [E - \mu - V(r)]\, G_\varkappa(r) + \dfrac{d}{dr} F_\varkappa(r) - \dfrac{\varkappa}{r} F_\varkappa(r) = 0 \\ [E + \mu - V(r)]\, F_\varkappa(r) - \dfrac{d}{dr} G_\varkappa(r) - \dfrac{\varkappa}{r} G_\varkappa(r) = 0. \end{cases}$$

Si nous introduisons la notation $\Psi_\varkappa = \begin{bmatrix} F_\varkappa \\ G_\varkappa \end{bmatrix}$, ce système s'écrit :

$$\text{(III-6)} \quad \frac{d}{dr}\Psi = A\Psi \quad \text{avec} \quad A = \begin{bmatrix} \dfrac{\varkappa}{r} & -[E - \mu - V(r)] \\ [E + \mu - V(r)] & -\dfrac{\varkappa}{r} \end{bmatrix}.$$

Les deux composantes Ψ doivent vérifier la condition d'intégrabilité :

$$\int_0^r \Psi^{*t}(s)\Psi(s)ds < \infty,$$

pour être des fonctions d'ondes admissibles. Les fonctions considérées sont, bien entendu, des matrices colonnes à deux éléments, dépendant de r et de $\varkappa$.

Nous supposerons que le potentiel $V(r)$ tend vers zéro quand $r \to \infty$ et vérifie des conditions d'intégrabilité de la forme :

$$\text{(III-7)} \qquad \int_0^\infty r^n V(r)dr < \infty \qquad \text{pour} \qquad n = 0,\ n = 1,\ n = 2.$$

Nous pouvons relier chaque solution $\Psi[\varkappa, E, V(r)]$ du système (III-5) à une solution $\Psi[-\varkappa, -E, -V(r)]$ par la transformation :

$$\Psi[\varkappa, E, V] = \rho_1\Psi[-\varkappa, -E, -V] \qquad \text{avec} \qquad \rho_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

En effet, il suit de (III-6) que $A(\varkappa, E, V) = \rho_1 A(-\varkappa, -E, -V)\rho_1$. Nous pouvons donc étudier les propriétés des solutions de (III-6) pour les valeurs positives de $\varkappa$. Comme les seules conditions imposées au potentiel $V(r)$ sont indépendantes de son signe, il nous suffit d'échanger les résultats pour les valeurs positives et négatives de E et les rôles des première et deuxième composantes de Ψ pour obtenir les résultats pour $\varkappa$ négatif.

3. — Solutions régulières et irrégulières.

Étudions (III-6) pour des valeurs positives de $\varkappa$.

Pour des potentiels $V(r)$ vérifiant (III-7), D. S. Carter [*4*] a montré que pour une énergie E donnée telle que $|E| > \mu$, le système (III-6) a une solution unique $h_\varkappa(k, r)$ qui est asymptotique à une onde sphérique convergente d'impulsion $-k$.

$$\text{(III-8)} \qquad h_\varkappa(k, r) \underset{r\to\infty}{\sim} (ik)^\varkappa \begin{bmatrix} -i\dfrac{(E-\mu)}{k} \\ 1 \end{bmatrix} e^{-ikr},$$

avec $k^2 = E^2 - \mu^2$. Comme E est indépendant du signe de k, $h^\varkappa(-k, r)$ est aussi solution de (III-6) et nous avons :

$$\text{(III-9)} \qquad h_\varkappa(-k, r) \underset{r\to\infty}{\sim} (-ik)^\varkappa \begin{bmatrix} i\dfrac{(E-\mu)}{k} \\ 1 \end{bmatrix} e^{ikr}.$$

Pour k réel, nous notons que $h_\varkappa(-k, r) = h_\varkappa^*(k, r)$. La paire de fonctions $h_\varkappa(k, r)$, $h_\varkappa(-k, r)$ forme un système fondamental de solutions de (III-6) et par suite, la solution physiquement admissible peut s'exprimer comme une combinaison linéaire de ces deux solutions.

La solution admissible physiquement $\varphi_\varkappa(k, r)$ est définie par son comportement à l'origine :

$$\text{(III-10)} \qquad \lim_{r\to 0} \frac{\varphi_\varkappa(k, r)}{r^\varkappa} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(2\varkappa - 1)!!} \\ 0 \end{bmatrix},$$

avec $(2\varkappa - 1)!! = 1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2\varkappa - 1)$.

Par ailleurs on a :

$$\text{(III-11)} \quad \varphi_\varkappa(k, r) = \frac{1}{\det [h_\varkappa(k, r), h_\varkappa(-k, r)]} [h_\varkappa(-k) h_\varkappa(k, r) - h_\varkappa(k) h_\varkappa(-k, r)],$$

et $$\det [h_\varkappa(k, r), h_\varkappa(-k, r)] = -2ik^{2\varkappa-1}(\mathrm{E} - \mu).$$

Il suit de (III-11) que $\varphi_\varkappa(-k, r) = \varphi_\varkappa(k, r)$ et d'après (III-10) :

$$\text{(III-12)} \quad \begin{aligned} h_\varkappa(k) &= \det [\varphi_\varkappa(k, r), \quad h_\varkappa(k, r)] = \lim_{r\to 0} \frac{r^\varkappa h_{\varkappa_2}(k, r)}{(2\varkappa - 1)!!}, \\ h_\varkappa(-k) &= \det [\varphi_\varkappa(k, r), h_\varkappa(-k, r)] = \lim_{r\to 0} \frac{r^\varkappa h_{\varkappa_2}(-k, r)}{(2\varkappa - 1)!!}, \end{aligned}$$

$h_{\varkappa_2}(k, r)$ étant la seconde composante de $h_\varkappa(k, r)$.

Du comportement asymptotique de $h_\varkappa(k, r)$, et de $h_\varkappa(-k, r)$, (III-8) et (III-9), on déduit le comportement asymptotique de la solution régulière :

$$\text{(III-13)} \quad \varphi_\varkappa(k, r) \underset{r\to\infty}{\sim} \frac{|h_\varkappa(k)|}{k^\varkappa} \begin{bmatrix} \cos\left[kr - \dfrac{\varkappa\pi}{2} + \eta_\varkappa(k)\right] \\ \dfrac{k}{\mathrm{E} - \mu} \sin\left[kr - \dfrac{\varkappa\pi}{2} + \eta_\varkappa(k)\right] \end{bmatrix},$$

$\eta_\varkappa(k)$, déphasage d'ordre $\varkappa$, est égal à l'argument de $h_\varkappa(k)$ modulo 2π. On déduit également de (III-11) que l'élément d'indice $\varkappa$ de la matrice S est donné par :

$$\mathrm{S}_\varkappa(k) = \frac{h_\varkappa(k)}{h_\varkappa(-k)} = e^{2i\eta_\varkappa(k)}.$$

Dans tout ce qui précède, k était réel. Nous allons maintenant considérer la possibilité de valeurs complexes pour k. Ce problème a été déjà partiellement étudié par D. S. Carter [*4*] et ses résultats ont été signalés par F. Prats et J. S. Toll [*5*]. La thèse de D. S. Carter étant particulièrement difficile à consulter, nous en rappellerons quelques résultats. A chaque valeur de k, correspondent deux valeurs de E données par $E = \pm (k^2 + \mu^2)^{\frac{1}{2}}$; en conséquence, les fonctions h_x, η_x... sont des fonctions bivalentes de k. D. S. Carter s'est proposé de montrer que $h_x(k, r)$ peut être prolongée par une fonction bivalente de la variable k complexe, avec des points de branchements d'affixe $k = \pm i\mu$. Les deux feuillets de Riemann sont séparés en introduisant des coupures le long de l'axe imaginaire du plan k de $+ i\mu$ à $+ i\infty$ et de $- i\mu$ à $- i\infty$. Sur chaque feuillet le signe de la partie réelle de E est fixé, nous désignerons par σ ce signe ($\sigma = \pm 1$) et $h_x(k, r)$ par $h_x^\sigma(k, r)$ suivant le feuillet correspondant.

Sous réserve que le potentiel $V(r)$ vérifie les conditions (III-7), $h_x^\sigma(k, r)$ est une solution de (III-6) vérifiant la condition asymptotique (III-8) et fonction analytique par rapport à k dans le demi-plan inférieur $\mathrm{Im}\,\{ k \} \leqslant 0$.

La condition (III-10) étant indépendante de k, pour r fixé, $\varphi_x(k, r)$ est une fonction analytique, pour tous les points du plan complexe k coupé, avec $| k |$ fini.

Il nous a semblé difficile d'utiliser les résultats de Carter avec les majorantes qu'il a indiquées pour étudier l'analyticité des fonctions de Jost et de la matrice S. C'est pour cela que nous allons donner une autre démonstration de l'analyticité en k de $\varphi_x(k, r)$ et de $h_x(k, r)$, qui nous semble plus complète pour $h_x(k, r)$.

4. — Analyticité en k des solutions $\varphi_x(k, r)$ et $h_x(k, r)$.

Avant d'aborder le problème de l'analyticité des solutions $\varphi_x(k, r)$ et $h_x(k, r)$, il est utile de faire une mise au point sur certaines définitions mathématiques que nous utiliserons, nos équations possédant une structure matricielle.

Nous appelons matrice continûment différentiable, ou analytique, une matrice dont chaque élément a cette propriété. Suivant en cela de nombreux auteurs et en particulier D. S. Carter, nous définirons tacitement des opérations ou des propriétés pour nos matrices comme généralisation des mêmes concepts pour chacun de leurs éléments. De cette façon, beaucoup de théorèmes de l'analyse ordinaire s'appliquent dans cette généralisation aux matrices et nous les utiliserons sans démonstration. Nous utiliserons pour « matrice norme » la matrice obtenue en remplaçant chaque élément par son module et en la notant suivant l'usage habituel par des signes du module de part et d'autre de la matrice.

On aura bien entendu : $| A + B | \leqslant | A | + | B |$ et $| AB | \leqslant | A || B |$.

Enfin, pour éviter d'avoir un grand nombre de constantes, nous utiliserons toujours la même lettre C en convenant que si un nombre fini de constantes intervient, on peut toutes les majorer par la plus grande que nous appellerons encore C.

Soient $R_\varkappa^0(k, r)$ et $S_\varkappa^0(k, r)$ les solutions du système du champ libre ($V(r) = 0$) :

$$\frac{d\Psi}{dr} = \begin{bmatrix} \frac{\varkappa}{r} & -(E-\mu) \\ E+\mu & -\frac{\varkappa}{r} \end{bmatrix} \Psi,$$

linéairement indépendantes :

$$R_\varkappa^0(k, r) = \begin{bmatrix} kr\, j_{\varkappa-1}(kr) \\ \frac{k}{E-\mu} kr\, j_\varkappa(kr) \end{bmatrix}, \qquad S_\varkappa^0(k, r) = \begin{bmatrix} kr\, n_{\varkappa-1}(kr) \\ \frac{k}{E-\mu} kr\, n_\varkappa(kr) \end{bmatrix}.$$

Rappelons que nous nous bornons, dans tout ce qui suit, aux valeurs positives de $\varkappa$. Les solutions $\varphi_\varkappa(k, r)$ et $h_\varkappa(k, r)$ de l'équation (III-6) définies par (III-10) et (III-8) vérifient les équations intégrales :

$$\text{(III-14)} \quad \varphi_\varkappa(k, r) = k^{-\varkappa} \begin{bmatrix} kr\, j_{\varkappa-1}(kr) \\ \frac{k}{E-\mu} kr\, j_\varkappa(kr) \end{bmatrix} - \int_0^r \frac{S_\varkappa^0(k, r) R^{0t}_\varkappa(k, \xi) - R_\varkappa^0(k, r) S^{0t}_\varkappa(k, \xi)}{W[R_\varkappa^0(k, r), S_\varkappa^0(k, r)]} V(\xi)\varphi_\varkappa(k, \xi)d\xi,$$

$$\text{(III-15)} \quad h_\varkappa(k, r) = k^{\varkappa} \begin{bmatrix} \frac{E-\mu}{k} kr\, h_{\varkappa-1}^-(kr) \\ kr\, h_\varkappa^-(kr) \end{bmatrix} + \int_r^\infty \frac{S_\varkappa^0(k, r) R^{0t}_\varkappa(k, \xi) - R_\varkappa^0(k, r) S^{0t}_\varkappa(k, \xi)}{W[R_\varkappa^0(k, r), S_\varkappa^0(k, r)]} V(\xi) h_\varkappa(k, \xi)d\xi,$$

avec $h_\varkappa^-(kr) = n_\varkappa(kr) - ij_\varkappa(kr)$ et $W[R_\varkappa^0(k, r), S_\varkappa^0(k, r)] = \frac{k}{E-\mu}$.

Le noyau de ces équations intégrales s'écrit :

$$K(k\,; r, \xi) = -\left(\frac{E-\mu}{k}\right)[S_\varkappa^0(k, r) R^{0t}_\varkappa(k, \xi) - R_\varkappa^0(k, r) S^{0t}_\varkappa(k, \xi)]$$
$$= \frac{i(E+\mu)}{2k^{2\varkappa+1}} [h_\varkappa^0(k, r) h^{0t}_\varkappa(-k, \xi) - h_\varkappa^0(-k, r) h^{0t}_\varkappa(k, \xi)],$$

t désigne l'opération de transposition.

L'indice ^{0} indique que $h^0_\varkappa(k, r)$ et $h^0_\varkappa(-k, r)$ sont les solutions en l'absence de potentiel se comportant à l'infini suivant (III-8). Ce sont respectivement :

$$h^0_\varkappa(k, r) = k^\varkappa \begin{bmatrix} \dfrac{k}{E+\mu} kr\, h^-_{\varkappa-1}(kr) \\ kr\, h^-_\varkappa(kr) \end{bmatrix}, \qquad h^0_\varkappa(-k, r) = k^\varkappa \begin{bmatrix} \dfrac{E-\mu}{k} kr\, h^+_{\varkappa-1}(kr) \\ kr\, h^+_\varkappa(kr) \end{bmatrix},$$

avec $h^+_\varkappa(kr) = n_\varkappa(kr) + ij_\varkappa(kr)$.

Finalement $\varphi_\varkappa(k, r)$ et $h_\varkappa(k, r)$ vérifient les équations intégrales (III-14), (III-15) écrites maintenant :

$$\text{(III-16)} \qquad \varphi_\varkappa(k, r) = k^{-\varkappa} \begin{bmatrix} kr\, j_{\varkappa-1}(kr) \\ \dfrac{k}{E-\mu} kr\, j_\varkappa(kr) \end{bmatrix} + \int_0^r K(k\,; r, \xi)V(\xi)\varphi_\varkappa(k, \xi)d\xi,$$

$$\text{(III-17)} \qquad h_\varkappa(k, r) = h^0_\varkappa(k, r) - \int_r^\infty K(k\,; r, \xi)V(\xi)h_\varkappa(k, \xi)d\xi.$$

$j_\varkappa(kr)$ et $n_\varkappa(kr)$ sont les fonctions de Bessel sphériques telles que :

$$\lim_{r\to 0} kr\, j_\varkappa(kr) = \frac{(kr)^{\varkappa+1}}{(2\varkappa+1)!!} + 0[(kr)^{\varkappa+3}],$$

$$\lim_{r\to 0} kr\, n_\varkappa(kr) = (kr)^{-\varkappa}(2\varkappa-1)!! + 0[(kr)^{-\varkappa+2}]$$

$$\lim_{r\to\infty} kr\, j_\varkappa(kr) = \sin\left(kr - \frac{\varkappa\pi}{2}\right)\,; \qquad \lim_{r\to\infty} kr\, n_\varkappa(kr) = \cos\left(kr - \frac{\varkappa\pi}{2}\right).$$

Afin de prouver la convergence des suites d'approximations successives, nous utiliserons les bornes suivantes données par N. Levinson [*6*] et R. G. Newton [*1*] et valables dans le plan complexe tout entier :

$$\text{(III-18-}a\text{)} \qquad |\, kr\, j_\varkappa(kr)\,| \leqslant Ce^{|\operatorname{Im} k|r} \left(\frac{|k|r}{1+|k|r}\right)^{\varkappa+1},$$

$$\text{(III-18-}b\text{)} \qquad |\, kr\, n_\varkappa(kr)\,| \leqslant Ce^{|\operatorname{Im} k|r} \left(\frac{1+|k|r}{|k|r}\right)^{\varkappa},$$

$$\text{(III-18-}c\text{)} \qquad |\, kr\, h^-_\varkappa(kr)\,| \leqslant Ce^{\operatorname{Im} kr} \left(\frac{1+|k|r}{|k|r}\right)^{\varkappa}.$$

On obtient alors :

$$|\, R^0_\varkappa(k, r)\,| \leqslant Ce^{|\operatorname{Im} k|r} \begin{bmatrix} \left(\dfrac{|k|r}{1+|k|r}\right)^{\varkappa} \\ \left|\dfrac{E+\mu}{k}\right| \left(\dfrac{|k|r}{1+|k|r}\right)^{\varkappa+1} \end{bmatrix},$$

et :

$$|\, S^0_\varkappa(k, r)\,| \leqslant C e^{|\operatorname{Im} k| r} \begin{bmatrix} \left(\dfrac{|k|r}{1+|k|r}\right)^{-\varkappa+1} \\ \left|\dfrac{E+\mu}{k}\right| \left(\dfrac{|k|r}{1+|k|r}\right)^{-\varkappa} \end{bmatrix}.$$

Pour $\xi \leqslant r$ on en déduit :

(III-19) $|\, K(k\,;\, r, \xi)\,|$

$$\leqslant C e^{|\operatorname{Im} k|(r-\xi)} \left(\frac{r}{1+|k|r}\right)^{\varkappa} \left(\frac{1+|k|\xi}{\xi}\right)^{\varkappa} \begin{bmatrix} \dfrac{|E-\mu|\xi}{1+|k|\xi} & 1 \\ 1 & \dfrac{|E+\mu|r}{1+|k|r} \end{bmatrix}.$$

Nous allons essayer de résoudre (III-16) par approximations successives :

Soit $\varphi_\varkappa(k, r) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{(n)}_\varkappa(k, r)$, avec :

(III-20) $$\varphi^{(0)}_\varkappa(k, r) = k^{-\varkappa} \begin{bmatrix} kr\, j_{\varkappa-1}(kr) \\ \dfrac{k}{E-\mu}\, kr\, j_\varkappa(kr) \end{bmatrix},$$

$$\varphi^{(n)}_\varkappa(k, r) = \int_0^r K(k\,;\, r, \xi) V(\xi) \varphi^{(n-1)}_\varkappa(k, \xi) d\xi \quad \text{pour} \quad n \geqslant 1.$$

En utilisant pour $\varphi^{(0)}_\varkappa(k, r)$ la borne :

$$|\, \varphi^{(0)}_\varkappa(k, r)\,| \leqslant C e^{|\operatorname{Im} k| r} \left(\frac{r}{1+|k|r}\right)^{\varkappa} \begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{|E+\mu|r}{1+|k|r} \end{bmatrix},$$

ainsi que (III-19), on obtient :

$$|\, \varphi^{(1)}_\varkappa(k, r)\,| \leqslant C^2 e^{|\operatorname{Im} k| r} \left(\frac{r}{1+|k|r}\right)^{\varkappa}$$

$$\left[\int_0^r |\, V(\xi)\,| \begin{vmatrix} \dfrac{|E-\mu|\xi}{1+|k|\xi} & 1 \\ 1 & \dfrac{|E+\mu|\xi}{1+|k|\xi} \end{vmatrix} d\xi\right] \begin{vmatrix} 1 \\ \dfrac{|E+\mu|r}{1+|k|r} \end{vmatrix},$$

et par récurrence :

$$(\text{III-21}) \qquad |\varphi_\varkappa^{(n)}(k, r)| \leqslant \frac{C^{n+1}}{n!} e^{|\mathrm{Im}\,k|r}\left(\frac{r}{1+|k|r}\right)^\varkappa \left[\int_0^r |V(\xi)| \begin{vmatrix} \frac{|E-\mu|\xi}{1+|k|\xi} & 1 \\ 1 & \frac{|E+\mu|\xi}{1+|k|\xi} \end{vmatrix} d\xi\right]^n \begin{vmatrix} 1 \\ \frac{|E+\mu|r}{1+|k|r} \end{vmatrix}.$$

Nous en déduisons que chaque intégrale de la série (III-20) converge absolument et uniformément par rapport à k et r et que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \varphi_\varkappa^{(n)}$ converge absolument et uniformément pour tout r et dans toute région bornée du plan complexe k. $|\varphi_\varkappa(k, r)|$ peut être majorée par une expression susceptible d'être notée formellement :

$$|\varphi_\varkappa(k, r)| \leqslant Ce^{|\mathrm{Im}\,k|r}\left(\frac{r}{1+|k|r}\right)^\varkappa \exp\left[C\int_0^r |V(\xi)| \begin{vmatrix} \frac{|E-\mu|\xi}{1+|k|\xi} & 1 \\ 1 & \frac{|E+\mu|\xi}{1+|k|\xi} \end{vmatrix} d\xi\right] \begin{vmatrix} 1 \\ \frac{|E+\mu|r}{1+|k|r} \end{vmatrix}.$$

Comme $\varphi_\varkappa^{(0)}(k, r)$ est une fonction analytique entière de k ainsi que $K(k\,; r, \xi)$, il en est de même de chaque $\varphi_\varkappa^{(n)}(k, r)$. Par suite, pour chaque r fixé, $\varphi_\varkappa(k, r)$ est une fonction entière de k^2.

Procédons de la même façon pour l'équation (III-17) en écrivant :

$$h_\varkappa(k, r) = \sum_{n\geqslant 0} h_\varkappa^{(n)}(k, r),$$

avec :

$$h_\varkappa^{(0)}(k, r) = k^\varkappa \begin{vmatrix} \frac{k}{E+\mu} kr\, h_{\varkappa-1}^-(kr) \\ kr\, h_\varkappa^-(kr) \end{vmatrix},$$

$$h_\varkappa^{(n)}(k, r) = -\int_r^\infty K(k\,; r, \xi)V(\xi)h_\varkappa^{(n-1)}(k, \xi)d\xi, \quad \text{pour } n \geqslant 1.$$

A l'aide de (III-18) on trouve que :

$$(\text{III-22}) \qquad |h_\varkappa^{(0)}(k, r)| \leqslant Ce^{(\mathrm{Im}\,k)r}\left(\frac{1+|k|r}{r}\right)^\varkappa \begin{vmatrix} \frac{|E-\mu|r}{1+|k|r} \\ 1 \end{vmatrix},$$

et pour $r \leqslant \xi$,

(III-23) $|\,K(k\,;\,r,\,\xi)\,|$

$$\leqslant C e^{|\operatorname{Im} k|(\xi - r)}\left(\frac{\xi}{1+|k|\xi}\right)^{\varkappa}\left(\frac{1+|k|r}{r}\right)^{\varkappa}\left|\begin{matrix}\dfrac{|E-\mu|r}{1+|k|r} & 1 \\ 1 & \dfrac{|E+\mu|\xi}{1+|k|\xi}\end{matrix}\right|.$$

En posant :

(III-24-a)
$$h_1(k,\,r) = e^{(\operatorname{Im} k)r}\left(\frac{1+|k|r}{r}\right)^{\varkappa}\begin{bmatrix}\dfrac{|E-\mu|r}{1+|k|r} \\ 1\end{bmatrix},$$

(III-24-b)
$$K_1(k\,;\,r,\,\xi) = \left|\begin{matrix}\dfrac{|E-\mu|\xi}{1+|k|\xi} & 1 \\ \dfrac{1+|k|r}{r}\times\dfrac{\xi}{1+|k|\xi} & \dfrac{|E+\mu|\xi}{1+|k|\xi}\end{matrix}\right|$$

et

$$K_2(k\,;\,r,\,\xi) = \begin{bmatrix}\dfrac{|E-\mu|r}{1+|k|r} & 1 \\ 1 & \dfrac{|E+\mu|\xi}{1+|k|\xi}\end{bmatrix},$$

et en remarquant que :

$$|\,K(k;\,r,\,\xi)h^0_{\varkappa}(k,\,\xi)\,| \leqslant C^2\, e^{(|\operatorname{Im} k|+\operatorname{Im} k)(\xi-r)}K_1(k;\,r,\,\xi)h_1(k,\,r),$$
$$K_2(k;\,r,\,\xi)K_1(k;\,\xi,\,\eta) \leqslant K_1(k;\,r,\,\xi)K_1(k;\,r,\,\eta)A(r,\,\xi)$$

avec

$$A(r,\,r_1) = \left|\begin{matrix}\dfrac{r}{1+|k|r}\times\dfrac{1+|k|r_1}{r_1} & 0 \\ 0 & 1\end{matrix}\right|,$$

et $A(r,\,r_1)K_1(k;\,r_1,\,r_i) \leqslant K_1(k;\,r,\,r_i)A(r,\,r_1)$ pour $i \geqslant 2$, avec

$r \leqslant r_1 \leqslant r_2 \leqslant \ldots \leqslant r_n$, on obtient :

$$|\,h^{(1)}_{\varkappa}(k,\,r)\,| \leqslant C^2\left[\int_r^{\infty}|\,V(\xi)\,|\,e^{(|\operatorname{Im} k|+\operatorname{Im} k)(\xi-r)}K_1(k\,;\,r,\,\xi)d\xi\right]h_1(k,\,r),$$

(III-25)

$$|\,h^{(n)}_{\varkappa}(k,\,r)\,| \leqslant \frac{C^{n+1}}{n\,!}\left[\int_r^{\infty}|\,V(\xi)\,|\,e^{(|\operatorname{Im} k|+\operatorname{Im} k)(\xi-r)}K_1(k\,;\,r,\,\xi)d\xi\right]^n h_1(k,\,r).$$

On en déduit finalement que la série $\sum_{n\geqslant 0} h_\varkappa^{(n)}(k, r)$ est majorée par une série qui peut être sommée et notée formellement :

(III-26)
$$\left|\sum_{n\geqslant 0} h_\varkappa^{(n)}(k, r)\right| \leqslant \mathrm{C}\exp\left[\mathrm{C}\int_r^\infty |\,\mathrm{V}(\xi)\,|\, e^{(|\,\mathrm{Im}\,k\,|+\mathrm{Im}\,k)(\xi-r)}\mathrm{K}_1(k\,;r,\xi)d\xi\right]h_1(k, r).$$

La série $\sum_{n\geqslant 0} h_\varkappa^{(n)}(k,r)$ converge donc uniformément pour tout $r \geqslant r_0 > 0$, et dans toute région bornée du plan complexe k pour laquelle :

$$\int_0^\infty |\,\mathrm{V}(\xi)\,|\, e^{(|\,\mathrm{Im}\,k\,|+\mathrm{Im}\,k)\xi}\mathrm{K}_1(k\,;r,\xi)d\xi < \infty.$$

Par suite $h_\varkappa(k, r)$ existe, est continue et s'obtient par approximations successives à partir de (III-17) pour tout $r > 0$ et pour tout k (de module borné) dans le demi-plan complexe inférieur, incluant l'axe réel pourvu que $\mathrm{V}(r)$ vérifie (III-7) avec $n = 0$ et $n = 1$.

Si de plus $\mathrm{V}(r)$ décroît exponentiellement à l'infini de telle sorte que $\int_0^\infty r^n\,|\,\mathrm{V}(r)\,|\,e^{2ar}dr < \infty$ avec $n = 0$ et $n = 1$, pour a réel fini positif, alors $h_\varkappa(k, r)$ existe et est continue dans la bande du demi-plan complexe k supérieur avec $\mathrm{Im}\,k \leqslant a$.

Les $h_\varkappa^{(n)}(k, r)$ n'étant pas nécessairement régulières, afin de montrer l'analyticité de $h_\varkappa(k, r)$, nous devons montrer l'existence et la continuité de la première dérivée de $h_\varkappa(k, r)$ par rapport à k.

Posons :

$$g_\varkappa(k, r) = \frac{d}{dk}(h_\varkappa(k, r)).$$

Dérivons par rapport à k l'équation intégrale (III-17) sous réserve que :

$$\int_r^\infty \frac{d}{dk}[\mathrm{K}(k\,;r,\xi)h_\varkappa(k,\xi)]\mathrm{V}(\xi)d\xi$$

converge uniformément (ce qui suivra de notre démonstration); il vient :

$$g_\varkappa(k, r)$$
$$= \frac{d}{dk}h_\varkappa^0(k, r) - \int_r^\infty\left[\mathrm{V}(\xi)\frac{d\mathrm{K}(k\,;r,\xi)}{dk}h_\varkappa(k,\xi) + \mathrm{V}(\xi)\mathrm{K}(k\,;r,\xi)g_\varkappa(k,\xi)\right]d\xi.$$

En utilisant un procédé identique à celui employé pour $h_\varkappa(k, r)$, on écrit

$$g_\varkappa(k, r) = \sum_{n \geqslant 0} g_\varkappa^{(n)}(k, r)$$

avec :

$$g_\varkappa^{(0)}(k, r) = \frac{dh_\varkappa^{(0)}(k, r)}{dk} \,;$$

et pour $n \geqslant 1$:

$$g_\varkappa^{(n)}(k, r) = - \int_r^\infty d\xi V(\xi) \left[\frac{dK(k\,;\, r, \xi)}{dk} h_\varkappa^{(n-1)}(k, \xi) + K(k\,;\, r, \xi) g_\varkappa^{(n-1)}(k, \xi) \right].$$

On a ici :

$$g_\varkappa^{(0)}(k, r) = r \begin{bmatrix} k^\varkappa \dfrac{E - \mu}{k \cdot E} [(E + \mu)\; h_{\varkappa-1}^-(kr) + Ekr \;\; h_{\varkappa-2}^-(kr)] \\ k^\varkappa kr \; h_{\varkappa-1}^-(kr) \end{bmatrix}.$$

En explicitant $\dfrac{dK(k; r, \xi)}{dk}$ et en utilisant (III-18) on obtient les bornes suivantes pour $g_\varkappa^{(0)}(k, r)$ et $\dfrac{d}{dk} K(k; r, \xi)$ pour $\xi \geqslant r$:

$$\text{(III-27)} \qquad | g_\varkappa^{(0)}(k, r) | \leqslant Cre^{(\mathrm{Im}\, k)r} \frac{\varepsilon}{|k|\,|E|} \left(\frac{1 + |k|r}{r} \right)^{\varkappa+1} \begin{bmatrix} \dfrac{|E - \mu| r}{1 + |k| r} \\ 1 \end{bmatrix},$$

et

(III-28)

$$\left| \frac{dK(k\,; r, \xi)}{dk} \right| \leqslant \frac{C\xi}{|E|} \cdot \frac{\varepsilon}{|k|} e^{|\mathrm{Im}\, k|(\xi - r)} \left(\frac{\xi}{1 + |k|\xi} \right)^\varkappa \left(\frac{1 + |k| r}{r} \right)^{\varkappa+1} K_2(k\,; r, \xi),$$

où $K_2(k; r, \xi)$ est donné par (III-24) et $\varepsilon = \sup\,(\,|E - \mu|\,,\; |E + \mu|\,)$.

En utilisant les majorantes de $g_\varkappa^{(0)}(k, r)$, $\dfrac{dK(k; r, \xi)}{dk}$, $h_\varkappa^{(n)}(k, \xi)$, $K(k; r, \xi)$ données par (III-27), (III-28), (III-25) et (III-23), on obtient finalement :

$$| g_\varkappa^{(0)}(k, r) | \leqslant Cr \frac{\varepsilon}{|E|} \frac{1 + |k| r}{|k| r} h_1(k, r),$$

$$| g_\varkappa^{(n)}(k, r) | \leqslant (n + 1) \frac{C^{n+1}}{n\,!} \frac{\varepsilon}{|E|} \frac{1 + |k| r}{|k| r} r \frac{1}{r^n}$$
$$\left[\int_r^\infty \xi d\xi \,|\, V(\xi) \,|\, e^{(|\mathrm{Im}\, k| + \mathrm{Im}\, k)(\xi - r)} K_1(k\,;\, r, \xi) \right]^n h_1(k, r).$$

La série $\sum_{n \geqslant 0} g_\chi^{(n)}(k, r)$ est alors majorée par une série qui peut être sommée et notée formellement, on a alors :

$$\left| \sum_{n \geqslant 0} g_\chi^{(n)}(k, r) \right| \leqslant C \frac{\varepsilon}{|E|} \frac{1 + |k| r}{|k|}$$
$$\left[1 + \frac{C}{r} \int_r^\infty \xi \, | V(\xi) | \, e^{(|\operatorname{Im} k| + \operatorname{Im} k)(\xi - r)} K_1(k ; r, \xi) d\xi \right]$$
$$\times \exp \left[\frac{C}{r} \int_r^\infty \xi \, | V(\xi) | \, e^{(|\operatorname{Im} k| + \operatorname{Im} k)(\xi - r)} K_1(k ; r, \xi) d\xi \right] h_1(k, r).$$

La série $\sum_{n \geqslant 0} g_\chi^{(n)}(k, r)$ converge donc uniformément pour tout $r \geqslant r_0 > 0$ et dans toute région bornée du plan complexe k n'incluant pas les points d'affixe $k = 0$ et $k = \pm i\mu$ et pour laquelle le potentiel vérifie la condition :

$$\int_0^\infty \xi \, | V(\xi) | \, e^{(|\operatorname{Im} k| + \operatorname{Im} k)\xi} K_1(k ; r, \xi) d\xi \text{ fini.}$$

On en conclut que $g_\chi(k, r) = \frac{d}{dk} h_\chi(k, r)$ existe, est continue, et s'obtient par approximations successives pour tout $r > 0$ et tout k fini différent de zéro et de $- i\mu$ dans le demi-plan complexe inférieur, incluant l'axe réel, pourvu que $V(r)$ vérifie la condition (III-7) pour $n = 1$ et $n = 2$. Nous en déduisons que sous la condition (III-7) pour $n = 0, 1, 2$, $h_\chi(k, r)$ est une solution du système (III-5) qui vérifie la condition asymptotique (III-8) et qui est une fonction analytique de k pour $\operatorname{Im} k \leqslant 0$ dans le plan complexe k coupé le long de l'axe imaginaire de $- i\mu$ à $- i\infty$, ceci uniformisant $h_\chi(k,r)$.

Nous allons maintenant étudier le comportement de $h_\chi(k, r)$ quand $|k| \to + \infty$. Pour cela nous reprenons l'équation intégrale (III-17) et nous considérons la matrice :

$$T(k, r) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{k^\chi \dfrac{k}{E + \mu} kr \, h_{\chi-1}^-(kr)} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{k^\chi kr \, h_\chi^-(kr)} \end{bmatrix}.$$

La matrice $L_\chi(k, r) = T(k, r) \cdot h_\chi(k, r)$, telle que :

$$L_\chi^{(0)}(k, r) = T(k, r) h_\chi^{(0)}(k, r) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

vérifiera l'équation intégrale :

(III-29) $$L_\varkappa(k, r) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \int_r^\infty H(k\,;\, r,\, \xi)V(\xi)L_\varkappa(k,\, \xi)d\xi,$$

avec $$H(k;\, r,\, \xi) = T(k,\, r)K(k;\, r,\, \xi)T^{-1}(k,\, \xi).$$

Nous résolvons (III-29) par approximations successives en posant :

$$L_\varkappa(k, r) = \sum_{n\geqslant 0} L_\varkappa^{(n)}(k, r) \qquad \text{avec} \qquad L_\varkappa^{(0)}(k, r) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

et

$$L_\varkappa^{(n)}(k, r) = -\int_r^\infty H(k\,;\, r,\, \xi)V(\xi)L_\varkappa^{(n-1)}(k,\, \xi)d\xi.$$

En utilisant les inégalités (III-23) et (III-22) on montre que :

$$|\,L_\varkappa^{(n)}(k,r)\,| \leqslant \frac{C^n}{n\,!}\,|\,T(k,r)\,|\left[\int_r^\infty d\xi e^{(|\operatorname{Im} k| + \operatorname{Im} k)(\xi - r)}\,|\,V(\xi)\,|\,K_1(k;r,\xi)\right]^n h_1(k, r),$$

$K_1(k;\, r,\, \xi)$ et $h_1(k,\, r)$ étant définis en (III-24).

De plus on peut majorer $|\,T(k,\, r)\,|$ en minorant $h^\varkappa krh_\varkappa^-(kr)$.

$$kr\, h_\varkappa^-(kr) = -i\left(\frac{\pi kr}{2}\right)^{\frac{1}{2}} H^{(2)}_{\varkappa+\frac{1}{2}}(kr),$$

$H^{(2)}_{\varkappa+\frac{1}{2}}(kr)$ étant la fonction de Hankel de deuxième espèce.

Nous savons, [7], que $H_\nu^{(2)}(z)$ n'a pas de zéros dans la moitié inférieure du plan complexe $-\pi \leqslant \arg z \leqslant 0$ pour $\nu \geqslant 0$. Donc $krh_\varkappa^-(kr)$ n'a pas de zéro dans le demi-plan $\operatorname{Im} k \leqslant 0$ sauf peut-être pour $k = 0$. Mais à l'origine $k^\varkappa krh_\varkappa^-(kr) = \dfrac{(2\varkappa - 1)!!}{r^\varkappa}$ donc $k^\varkappa krh_\varkappa^-(kr)$ ne s'annule pas dans le demi-plan $\operatorname{Im} k \leqslant 0$. On peut montrer par récurrence à partir de $\varkappa = 1$ que :

$$|\,(kr)^\varkappa\, kr\, h_\varkappa^-(kr)\,| \geqslant Ce^{\operatorname{Im} kr}\,|\,kr\,|^\varkappa,$$

ce qui entraîne :

$$|\,T(k,\, r)\,| \leqslant \frac{Ce^{-\operatorname{Im} kr}}{|\,k\,|^\varkappa}\begin{bmatrix} \left|\dfrac{E+\mu}{k}\right| & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

En reportant dans $L_\varkappa^{(n)}(k,\, r)$ on obtient finalement :

$$|\,L_\varkappa^{(n)}(k,\, r)\,| \leqslant \frac{C^{n+1}}{n\,!}\left(\frac{1 + |\,k\,|\,r}{|\,k\,|\,r}\right)^\varkappa$$

$$\begin{bmatrix} \left|\dfrac{E+\mu}{k}\right| & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\left[\int_r^\infty |\,V(\xi)\,|\,e^{(|\operatorname{Im} k| + \operatorname{Im} k)(\xi - r)}K_1(k\,;\, r,\, \xi)d\xi\right]^n \begin{bmatrix} \dfrac{|\,E-\mu\,|\,r}{1 + |\,k\,|\,r} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

L'intégrale

$$\int_r^\infty d\xi e^{(|\mathrm{Im}\, k|+\mathrm{Im}\, k)(\xi-r)}\, |\,\mathrm{V}(\xi)\,|\; \mathrm{K}_1(k; r, \xi)$$

converge dans le demi-plan inférieur k sous réserve que le potentiel vérifie les conditions (III-7) pour $n = 0$ et $n = 1$. L'intégrale $\mathrm{L}_\varkappa^{(n)}(k, r)$ converge donc uniformément par rapport à k près de $|k| = \infty$, dans le demi-plan inférieur $\mathrm{Im}\, k \leqslant 0$ et pour $r > 0$. Il en est de même de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathrm{L}_\varkappa^{(n)}(k, r)$.

Nous pouvons donc prendre la limite de chaque terme $\mathrm{L}_\varkappa^{(n)}(k, r)$ quand $|k| \to \infty$ et sommer la série obtenue pour avoir la limite de $\mathrm{L}_\varkappa(k, r)$ pour $r > 0$. On obtient :

$$\underset{|k|\to\infty}{\text{limite}}\ \mathrm{H}(k\,;\, r, \xi)\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = i \lim_{|k|\to\infty} \frac{\mathrm{E}}{k}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},$$

$$\underset{|k|\to\infty}{\text{limite}}\ \mathrm{L}_\varkappa^{(n)}(k, r) = \frac{1}{n\,!}\left(-i \lim_{|k|\to\infty}\frac{\mathrm{E}}{k}\right)^n \left[\int_r^\infty \mathrm{V}(\xi)d\xi\right]^n \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},$$

d'où :

$$\mathrm{L}_\varkappa(k, r) \underset{|k|\to\infty}{\frown} \exp\left[-i \lim_{|k|\to\infty}\frac{\mathrm{E}}{k}\int_r^\infty \mathrm{V}(\xi)d\xi\right]\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}.$$

En remplaçant $\mathrm{L}_\varkappa(k, r)$ par $\mathrm{T}(k, r)h_\varkappa(k, r)$, on obtient :

$$\text{(III-30)} \qquad h_\varkappa(k, r) \underset{|k|\to\infty}{\frown} h_\varkappa^{(0)}(k, r) \exp\left[-i \lim_{|k|\to\infty}\frac{\mathrm{E}}{k}\int_r^\infty \mathrm{V}(\xi)d\xi\right],$$

dans la moitié inférieure du plan k complexe avec $\lim\limits_{|k|\to\infty}\frac{\mathrm{E}}{k} = \pm 1$.

IV. — FONCTIONS DE JOST [8]

1. — Analyticité de $h_\varkappa(k)$.

Considérons les fonctions $h_\varkappa(k)$ et $h_\varkappa(-k)$ définies en (III-12) :

$$\text{(IV-1)} \qquad \begin{aligned} h_\varkappa(k) &= \left.\frac{r^\varkappa h_{\varkappa_2}(k, r)}{(2\varkappa-1)\,!\,!}\right]_{r=0} = \det\,[\varphi_\varkappa(k, r), h_\varkappa(k, r)],\\ h_\varkappa(-k) &= \left.\frac{r^\varkappa h_{\varkappa_2}(-k, r)}{(2\varkappa-1)\,!\,!}\right]_{r=0} = \det\,[\varphi_\varkappa(k, r), h_\varkappa(-k, r)]. \end{aligned}$$

Nous allons étudier l'analyticité en k de $h_\varkappa(k)$ en nous bornant toujours aux valeurs positives de $\varkappa$.

Si nous insérons les équations intégrales (III-16) et (III-17) dans les seconds membres de (IV-1) et si nous passons aux limites $r = 0$ et $r = \infty$, nous obtenons pour $h_\varkappa(k)$ les deux représentations intégrales :

$$\text{(IV-2-}a\text{)} \qquad h_\varkappa(k) = 1 + \int_0^\infty \varphi_\varkappa^t(k, \xi)\mathrm{V}(\xi)h_\varkappa^{(0)}(k, \xi)d\xi,$$

$$\text{(IV-2-}b\text{)} \qquad h_\varkappa(k) = 1 + \lim_{r\to 0} \int_r^\infty \varphi_\varkappa^{(0)t}(k, \xi)\mathrm{V}(\xi)h_\varkappa(k, \xi)d\xi.$$

Afin de prolonger $h_\varkappa(k)$ dans le plan complexe, nous utiliserons les équations (IV-2) ou (IV-1). En tenant compte de (III-22), (III-20) et (III-21) l'équation (IV-2-a) nous donne :

$$|\, h_\varkappa(k) - 1 \,| \leqslant \mathrm{C}e^{\mathrm{C}\,\sup\left(1, \frac{\varepsilon}{|k|}\right)} \int_0^\infty |\,\mathrm{V}(r)\,|\, e^{(|\operatorname{Im} k| + \operatorname{Im} k)r}\left(1 + \frac{\varepsilon r}{1 + |\,k\,|\,r}\right)^2 dr,$$

sous réserve que $\mathrm{V}(r)$ vérifie (III-7) avec $n = 0$ et $n = 1$.

Sous les hypothèses (III-7) pour le potentiel avec $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$, l'intégrale converge absolument, $h_\varkappa(k)$ existe et est continue pour tout k dans la moitié inférieure du plan k complexe, à l'exception du point d'affixe $k = 0$. La convergence absolue nous permet de différentier (IV-2) par rapport à k sous le signe d'intégration (nous montrerons que l'intégrale $\dfrac{dh_\varkappa}{dk}(k)$ converge uniformément) :

$$\frac{dh_\varkappa(k)}{dk} = \int_0^\infty \mathrm{V}(r)\left[\frac{d\varphi_\varkappa^{(0)t}}{dk}(k, r)h_\varkappa(k, r) + \varphi_\varkappa^{(0)t}(k, r)\,\frac{dh_\varkappa}{dk}(k, r)\right]dr.$$

En prenant $r_0 > 0$, on a :

$$\frac{dh_\varkappa(k)}{dk} = \int_0^{r_0}[\quad]dr + \int_{r_0}^\infty \mathrm{V}(r)\left[\frac{d\varphi_\varkappa^{(0)t}}{dk}(k, r)h_\varkappa(k, r) + \varphi_\varkappa^{(0)(t)}(k, r)\frac{dh_\varkappa}{dk}(k, r)\right]dr.$$

En utilisant les inégalités (III-26) et (III-29) ainsi que :

$$|\,\varphi_\varkappa^{(0)(t)}(k, r)\,| \leqslant \mathrm{C}e^{|\operatorname{Im} k|r}\left(\frac{r}{1 + |\,k\,|\,r}\right)^\varkappa \left|\, 1 \quad \frac{|\,\mathrm{E} + \mu\,|\,r}{1 + |\,k\,|\,r}\,\right|,$$

$$\left|\frac{d}{dk}\varphi_\varkappa^{(0)t}(k, r)\right| \leqslant \mathrm{C}r\,\frac{\varepsilon}{|\,\mathrm{E}\,|}\,e^{|\operatorname{Im} k|r}\left(\frac{r}{1 + |\,k\,|\,r}\right)^\varkappa \frac{1 + |\,k\,|\,r}{|\,k\,|\,r}\left|\, 1 \quad \frac{|\,\mathrm{E} + \mu\,|\,r}{1 + |\,k\,|\,r}\,\right|,$$

on obtient une majoration que nous noterons formellement :

$$\left|\frac{d\varphi_{\varkappa}^{(0)t}}{dk}(k, r)h_{\varkappa}(k, r) + \varphi_{\varkappa}^{(0)t}(k, r)\frac{dh_{\varkappa}}{dk}(k, r)\right| \leqslant C^2 \frac{\varepsilon}{|E|} e^{(|\operatorname{Im} k| + \operatorname{Im} k)r}$$

$$\frac{1+|k|r}{|k|}\left|1 \quad \frac{|E+\mu|r}{1+|k|r}\right| \times [2+B] \times \exp[B] \times \begin{bmatrix} \frac{|E-\mu|r}{1+|k|r} \\ 1 \end{bmatrix},$$

avec :

$$B = \frac{C}{r}\int_r^{\infty} \xi \, | V(\xi) | \, e^{(|\operatorname{Im} k| + \operatorname{Im} k)(\xi - r)} K_1(k ; r, \xi) d\xi,$$

les intégrales étant convergentes lorsque le potentiel vérifie les conditions (III-7) avec $n = 1$, $n = 2$.

Cette majoration s'écrit encore :

$$\left| \int_{r_0}^{\infty} V(r) \left[\frac{d\varphi_{\varkappa}^{(0)t}}{dk}(k, r)h_{\varkappa}(k, r) + \varphi_{\varkappa}^{(0)t}(k, r)\frac{d}{dk}h_{\varkappa}(k, r)\right] dr \right|$$

$$< C\frac{\varepsilon}{|E|}\left[2 + \frac{C}{r_0^2}\frac{\varepsilon}{|k|}\right] e^{\frac{C}{r_0^2}\frac{\varepsilon}{|k|}} \int_{r_0}^{\infty} | V(r) | \, e^{(|\operatorname{Im} k| + \operatorname{Im} k)r} \frac{1+|k|r}{|k|} \left(1 + \frac{\varepsilon r}{1+|k|r}\right)^2 dr.$$

Ceci nous montre que l'intégrale de r_0 à $+\infty$ converge uniformément par rapport à k pour toute valeur de $|k|$ sous réserve que le potentiel vérifie les conditions (III-7) avec $n = 0, 1, 2$, dans le demi-plan inférieur $\operatorname{Im} k \leqslant 0$ coupé, les points d'affixes $k = 0$ et $k = -i\mu$ étant exclus.

Si nous supposons de plus que le potentiel est développable en série entière au voisinage de $r = 0$, alors $h_{\varkappa}(k, r)$ se comporte au voisinage de l'origine comme $h_{\varkappa}^{(0)}(k, r)$ et $\left[\frac{d\varphi_{\varkappa}^{t(0)}}{dk}(k, r)h_{\varkappa}(k, r) + \varphi_{\varkappa}^{(0)t}(k, r)\frac{dh_{\varkappa}}{dk}(k, r)\right]$ est équivalent à $\frac{k}{E} r \left[\frac{1}{2\varkappa - 1} + \frac{1}{2\varkappa + 1}\right]$ quand $r \to 0$. L'intégrale

$$\int_0^{r_0} | V(r) | \left| \frac{d\varphi_{\varkappa}^{(0)t}(k, r)}{dk} h_{\varkappa}(k, r) + \varphi_{\varkappa}^{(0)t}(k, r)\frac{dh_{\varkappa}}{dk}(k, r)\right| dr$$

est bien convergente pour $|k|$ fini.

La dérivée $\frac{dh_{\varkappa}(k)}{dk}$ existe pour tout k ($|k|$ fini) dans le demi-plan inférieur coupé $\operatorname{Im}\{k\} \leqslant 0$, les points d'affixe $k = 0$, $k = -i\mu$ étant exclus.

$h_\varkappa(k)$ est donc une fonction analytique dans ce domaine sous réserve que le potentiel vérifie la condition (III-7) pour $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$.

L'intégrale de (IV-2) étant uniformément convergente pour $|k| \to \infty$, nous pouvons écrire que la limite de $h_\varkappa(k)$ quand $|k| \to \infty$, $\operatorname{Im} k \leqslant 0$, est égale à la limite de l'intégrale (qui est l'intégrale de la limite). D'où :

$$\lim_{|k|\to\infty} h_\varkappa(k) = 1 + \int_0^\infty \lim_{|k|\to\infty} \varphi_\varkappa^{(0)t}(k, r)\mathrm{V}(r)h_\varkappa(k, r)dr.$$

En utilisant (III-30) et les comportements à l'infini des fonctions de Bessel, on a :

$$h_\varkappa(k) \underset{|k|\to\infty}{\sim} 1 - i \lim_{|k|\to\infty} \frac{k}{\mathrm{E}} \int_0^\infty \mathrm{V}(r)dr + \ldots + \frac{1}{n!}\left[-i \lim_{|k|\to\infty} \frac{k}{\mathrm{E}} \int_0^\infty \mathrm{V}(r)dr\right]^n + \ldots,$$

c'est-à-dire :

$$h_\varkappa(k) \underset{|k|\to\infty}{\sim} \exp\left[-i \lim_{|k|\to\infty} \frac{k}{\mathrm{E}} \int_0^\infty \mathrm{V}(r)dr\right].$$

Nous en tirons les deux conséquences :

$$|h_\varkappa(k)| \to 1 \quad \text{quand} \quad |k| \to \infty, \ \operatorname{Im} k \leqslant 0,$$

et :

(IV-3) $$\eta_\varkappa(k) \underset{\substack{|k|\to\infty \\ \operatorname{Im} k \leqslant 0}}{\sim} - \lim_{|k|\to\infty} \frac{k}{\mathrm{E}} \int_0^\infty \mathrm{V}(r)dr.$$

Nous en déduisons également le comportement de la solution régulière :

$$\varphi_\varkappa(k, r) \underset{\substack{|k|\to\infty \\ \operatorname{Im} k \leqslant 0}}{\sim} \frac{1}{k^\varkappa} \begin{bmatrix} \cos\left[kr - \dfrac{\varkappa\pi}{2} - \lim\limits_{|k|\to\infty} \dfrac{k}{\mathrm{E}} \displaystyle\int_0^r \mathrm{V}(\xi)d\xi\right] \\ \dfrac{k}{\mathrm{E} - \mu} \sin\left[kr - \dfrac{\varkappa\pi}{2} - \lim\limits_{|k|\to\infty} \dfrac{k}{\mathrm{E}} \displaystyle\int_0^r \mathrm{V}(\xi)d\xi\right] \end{bmatrix}.$$

La formule (IV-3) nous redonne bien le comportement du déphasage d'ordre $\varkappa$ quand $|k| \to \infty$ tel qu'il a été obtenu par Parzen [*9*].

2. — Études des zéros de $h_\varkappa(k)$.

Supposons que $h_\varkappa(k)$ s'annule en un point k_0 du demi-plan inférieur :

$$h_\varkappa(k_0) = 0, \quad \operatorname{Im} k_0 < 0.$$

Par (IV-1), cela signifie que le déterminant construit avec $h_\varkappa(k_0, r)$ et $\varphi_\varkappa(k_0, r)$ est nul, donc que les deux solutions ne sont pas linéairement indépendantes. On a alors :

(IV-4) $$h_\varkappa(k_0, r) = c\varphi_\varkappa(k_0, r)$$

Le membre de gauche décroît exponentiellement à l'infini, tandis que le membre de droite vérifie (III-10) donc s'annule à l'origine. Montrons que E_0, tel que $E_0^2 = k_0^2 + \mu^2$, est une valeur propre discrète du système différentiel radial (III-6), c'est-à-dire que nous avons un état lié d'énergie $\pm (k_0^2 + \mu^2)^{\frac{1}{2}}$.

En effet, soit k_0 une racine de $h_\varkappa(k)$ dans le demi-plan inférieur. Étant donné que $h_\varkappa^*(-k^*) = h_\varkappa(k)$, $-k_0^*$ est également une racine dans le demi-plan inférieur. En multipliant à gauche, le système (III-6) pour $\varphi_\varkappa(k, r)$, par $\varphi_\varkappa^t(k', r)\omega$, avec $\omega = i\rho_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$, et en ajoutant le système déterminant $\varphi_\varkappa^t(k', r)$ multiplié par $\omega\varphi_\varkappa(k, r)$, on obtient :

$$\text{(IV-5)} \qquad \frac{d}{dr}\left[\varphi_\varkappa^t(k', r)\omega\varphi_\varkappa(k, r)\right] = (E - E')\varphi_\varkappa^t(k', r)\varphi_\varkappa(k, r).$$

En posant $k = k_0$ et $k' = -k_0^*$ et en intégrant entre 0 et $+\infty$, nous obtenons :

$$2i \operatorname{Im} E_0 \int_0^{+\infty} |\varphi_\varkappa(k_0, r)|^2 dr = 0,$$

et par suite E_0 est réel, ce qui entraîne que $k_0^2 + \mu^2$ est réel positif. Ceci, joint au fait que $\operatorname{Im} k_0 < 0$ nous donne $k_0 = +i\mathrm{K}$ avec $-\mu \leqslant \mathrm{K} \leqslant 0$. Cela correspond bien à E_0 réel avec $|E_0| < \mu$.

La réciproque est aussi vraie. Si E_0 est une valeur propre discrète, alors $h_{\varkappa_2}(k_0, r)$ doit s'annuler pour $r = 0$ quand k_0 est pris dans le demi-plan inférieur. Par suite d'après (IV-1) $h_\varkappa(k_0) = 0$.

Si $k_0 = -i\mathrm{K}$, avec $0 < \mathrm{K} < \mu$, est une racine de $h_\varkappa(k)$, alors (III-11) nous donne la valeur de la constante c de (IV-4) :

$$c = \frac{2(-1)^\varkappa \mathrm{K}^{2\varkappa-1}(E_0 - \mu)}{h_\varkappa(i\mathrm{K})} = \frac{-2ik_0^{2\varkappa-1}(E_0 - \mu)}{h_\varkappa(-k_0)}.$$

La fonction $h_\varkappa(k)$ ne peut pas avoir de racines sur l'axe réel, sauf peut-être pour $k = 0$. Ceci vient du fait que pour k réel : $h_\varkappa(k) = h_\varkappa^*(-k)$. Donc quand $h_\varkappa(k) = 0$ pour k réel, $h_\varkappa(-k)$ est aussi nul. L'équation (III-11) montre que $\varphi_\varkappa(k, r)$ serait identiquement nul comme fonction de r ce qui est en contradiction avec la condition aux limites (III-10). Donc $h_\varkappa(k)$ ne peut pas s'annuler pour k réel $\neq 0$.

Étude de l'ordre de multiplicité des zéros de $h_\varkappa(k)$.

Supposons d'abord que $h_\varkappa(k_0) = 0$ pour $\operatorname{Im} k_0 < 0$ ($k_0 = -i\mathrm{K}$ avec $0 < \mathrm{K} < \mu$). Différentions (IV-1) par rapport à k et utilisons (IV-4) :

$$\frac{dh_\varkappa(k_0)}{dk} = c^{-1} \frac{dh^t_\varkappa(k_0, r)}{dk} \omega h_\varkappa(k_0, r) + c\varphi^t_\varkappa(k_0, r)\omega \frac{d\varphi_\varkappa(k_0, r)}{dk}.$$

Le membre de droite peut être évalué en différentiant (IV-5), et l'équation équivalente pour $h_\varkappa(k, r)$, par rapport à k. En faisant ensuite $k = k_0 = k'$, on trouve :

$$\frac{d}{dr}\left[\varphi^t_\varkappa(k_0. r)\omega \frac{d\varphi_\varkappa(k_0, r)}{dk}\right] = \frac{k_0}{\mathrm{E}_0} \varphi^t_\varkappa(k_0, r)\varphi_\varkappa(k_0, r)$$

et

$$\frac{d}{dr}\left[h^t_\varkappa(k_0, r)\omega \frac{dh_\varkappa}{dk}(k_0, r)\right] = \frac{k_0}{\mathrm{E}_0} h^t_\varkappa(k_0, r)h_\varkappa(k_0, r).$$

Par suite en intégrant la première entre 0 et r, la seconde entre r et $+\infty$, on obtient :

$$\frac{d}{dk} h_\varkappa(k_0) = c\,\frac{k_0}{\mathrm{E}_0}\int_0^r \varphi^t_\varkappa(k_0, r)\varphi_\varkappa(k_0, r)dr + c^{-1}\,\frac{k_0}{\mathrm{E}_0}\int_r^{+\infty} h^t_\varkappa(k_0, r)h_\varkappa(k_0, r)dr.$$

Rappelons que pour $k_0 = -i\mathrm{K}$, $\varphi_\varkappa(k_0, r)$ et $h_\varkappa(k_0, r)$ sont réels ($h^*_\varkappa(-k^*, r) = h_\varkappa(k, r)$). D'où, en utilisant (IV-4) et en notant $\mathring{h} = \dfrac{dh}{dk}$,

$$\text{(IV-6)} \qquad \mathring{h}_\varkappa(k_0) = c\,\frac{k_0}{\mathrm{E}_0}\int_0^\infty \varphi^t_\varkappa(k_0, r)\varphi_\varkappa(k_0, r)dr.$$

Or $c \neq 0$ à cause de la condition aux limites (III-8), le membre de droite de (IV-6) ne peut donc être nul. Par suite, $\mathring{h}_\varkappa(k_0) \neq 0$ quand $h_\varkappa(k_0) = 0$ et le zéro correspondant est toujours *simple.*

Étudions maintenant le point $k = 0$. Tout d'abord, il n'y a pas d'état lié pour $\varkappa = 1$ et $\mathrm{E} = -\mu$ parce qu'alors la condition d'intégrabilité n'est pas vérifiée.

Soit donc $k = k_0$ tel que $h_\varkappa(k_0) = 0$, k_0 tendant vers zéro d'une façon que nous allons préciser. La formule (IV-5) pour $h_\varkappa(k, r)$ nous donne :

$$\frac{d}{dr}\,[h^t_\varkappa(k', r)\omega h_\varkappa(k, r)] = (\mathrm{E} - \mathrm{E}')h^t_\varkappa(k', r)h_\varkappa(k, r).$$

En dérivant par rapport à k, puis en faisant $k = k' = k_0$, on obtient en notant $\mathring{h} = \frac{dh}{dk}$ et en intégrant de r à $+\infty$:

$$[h^t_\varkappa(k_0, r)\omega\mathring{h}_\varkappa(k_0, r)]_r^\infty = \frac{k_0}{\mathrm{E}_0}\int_r^\infty h^t_\varkappa(k_0, r')h_\varkappa(k_0, r')dr'.$$

Prenons k_0 dans le demi-plan inférieur, $\operatorname{Im} k_0 < 0$, nous avons :

$$\text{(IV-7)} \qquad \det\,[h_\varkappa(k_0, r),\ \mathring{h}_\varkappa(k_0, r)] = -\frac{k_0}{\mathrm{E}_0}\int_r^\infty h^t_\varkappa(k_0, r')h_\varkappa(k_0, r')dr'.$$

Faisons tendre k_0 vers zéro à l'intérieur d'un angle $< \pi$, $-\operatorname{Im} k \geqslant \varepsilon\,|\,k\,|$, $\varepsilon > 0$. Alors on montre que $\frac{k_0}{\mathrm{E}_0}\int_r^\infty h^t_\varkappa(k_0, r')h_\varkappa(k_0, r')dr'$ a la même limite quand $k_0 \to 0$ que $\left[\frac{k_0}{\mathrm{E}_0}\int_r^\infty h_\varkappa^{(0)t}(k_0, r')h_\varkappa^{(0)}(k_0, r')dr'\right]$. Calculons cette limite, il vient :

$$\lim_{k_0\to 0}\left[\frac{k_0}{\mathrm{E}_0}\int_r^\infty k_0^{2\varkappa}\left|\frac{k_0}{\mathrm{E}_0+\mu}\,k_0r'h^-_{\varkappa-1}(k_0r')\quad k_0r'h^-_\varkappa(k_0r')\right|\left|\begin{matrix}\frac{k_0}{\mathrm{E}_0+\mu}\,k_0r'\,h^-_{\varkappa-1}(k_0r')\\ k_0r'\,h^-_\varkappa(k_0r')\end{matrix}\right|dr'\right]$$

$$= \lim_{k_0\to 0}\frac{k_0}{\mathrm{E}_0}\left[\int_r^\infty k_0^{2\varkappa}\frac{k_0^2}{(\mathrm{E}_0+\mu)^2}[k_0r'h^-_{\varkappa-1}(k_0r')]^2dr' + \int_r^\infty k_0^{2\varkappa}[k_0r'h^-_\varkappa(k_0r')]^2dr'\right].$$

Or :

$$\lim_{k_0\to 0}\frac{k_0}{\mathrm{E}_0}\int_r^\infty k_0^{2\varkappa}[k_0r'h^-_\varkappa(k_0r')]^2dr' = \lim_{k_0\to 0}\frac{1}{\mathrm{E}_0}\left[k_0^{2\varkappa}\int_{k_0r}^a[zh^-_\varkappa(z)]^2dz + k_0^{2\varkappa+1}\int_{\frac{a}{k_0}}^\infty e^{-2ik_0r'}i^{2\varkappa}dr'\right]$$

$$= \frac{1}{\mathrm{E}_0}\times\left[\begin{matrix}0 \text{ si } \varkappa \geqslant 1\\ -i \text{ si } \varkappa = 0 \text{ (ce qui n'est pas possible puisque } \underline{\varkappa \neq 0}).\end{matrix}\right.$$

De même :

$$\lim_{k_0\to 0}\frac{k_0}{\mathrm{E}_0}\int_r^\infty k_0^{2(\varkappa-1)}(\mathrm{E}_0-\mu)^2[k_0r'h^-_{\varkappa-1}(k_0r')]^2dr'$$

$$= \lim_{k_0\to 0}\frac{(\mathrm{E}_0-\mu)^2}{\mathrm{E}_0}\left[k_0^{2(\varkappa-1)}\int_{k_0r}^a[zh^-_{\varkappa-1}(z)]^2dz + k_0^{2(\varkappa-1)+1}\int_{\frac{a}{k_0}}^{+\infty}e^{-2ik_0r'}i^{2(\varkappa-1)}dr'\right]$$

$$= \frac{(\mathrm{E}_0-\mu)^2}{\mathrm{E}_0}\times\left[\begin{matrix}0 \text{ si } \varkappa\geqslant 2\\ \\ -i \text{ si } \varkappa = 1\end{matrix}\right] = \left[\begin{matrix}0 & \text{si } \varkappa \geqslant 2 & \\ 0 & \text{si } \varkappa = 1, & \mathrm{E}_0 = \mu,\\ 4\,i\mu & \text{si } \varkappa = 1, & \mathrm{E}_0 = -\mu.\end{matrix}\right.$$

Finalement, (IV-7) s'écrit :

$$\det\,[h_\varkappa(k_0, r), \overset{\circ}{h}_\varkappa(k_0, r)] = \begin{bmatrix} 0 & \text{si } \varkappa \geqslant 2 & \\ 0 & \text{si } \varkappa = 1, & E_0 = \mu, \\ -4i\mu & \text{si } \varkappa = 1, & E_0 = -\mu, \end{bmatrix}$$

quand on fait tendre k_0 vers zéro dans l'angle ci-dessus indiqué. Or pour $k_0 = 0$, on a :

$$\overset{\circ}{h}_\varkappa(0) = c^{-1} \det\,[h_\varkappa(0, r), \overset{\circ}{h}_\varkappa(0, r)] + c \det\,[\overset{\circ}{\varphi}_\varkappa(0, r), \varphi_\varkappa(0, r)]$$

pour laquelle on peut faire tendre r vers zéro.

Donc si $h_\varkappa(0) = 0$, alors

$$\overset{\circ}{h}_\varkappa(0) = \begin{bmatrix} 0 \text{ si } \begin{bmatrix} \varkappa \geqslant 2 \\ \varkappa = 1 \end{bmatrix} \text{avec} & E = \mu. \\ -4i\mu c^{-1} \text{ si } \varkappa = 1, & E = -\mu. \end{bmatrix}$$

Il nous faut une précision supplémentaire dans les cas où $\varkappa \geqslant 2$ et $\varkappa = 1$ avec $E = \mu$. On dérive une nouvelle fois $h_\varkappa(k)$ par rapport à k et on trouve que :

$$\overset{\circ\circ}{h}_\varkappa(0) = \lim_{k \to 0} \frac{\overset{\circ}{h}_\varkappa(k)}{k},$$

ce qui nous donne en utilisant (IV-7) et $h_\varkappa(0, r) = c\varphi_\varkappa(0, r)$:

$$\overset{\circ\circ}{h}_\varkappa(0) = -2\frac{c}{E_0}\int_0^\infty \varphi_\varkappa^t(0, r')\varphi_\varkappa(0, r')dr' \quad \text{pour } \varkappa \geqslant 2 \text{ et } \varkappa = 1, \quad E = \mu.$$

Ceci nous montre bien que $\overset{\circ\circ}{h}_\varkappa(0) \neq 0$.

On a donc démontré que si $h_\varkappa(0) = 0$, alors quand $k \to 0$ avec $-\operatorname{Im} k \geqslant \varepsilon \mid k \mid$, $\varepsilon > 0$:

$$h_\varkappa(k) = \begin{bmatrix} 0(k) & \text{si } \varkappa = 1, & E = -\mu, \\ 0(k^2) & \text{si } \varkappa \geqslant 2 \text{ et } \varkappa = 1, & E = \mu, \end{bmatrix}$$

c'est-à-dire que $h_\varkappa$ tend vers zéro exactement comme k ou k^2 suivant les cas précités. On en déduit que si $h_\varkappa(0) = 0$, alors le zéro est simple si $\varkappa = 1$, $E = -\mu$; il est double si $\varkappa \geqslant 2$ et si $\varkappa = 1$ avec $E = \mu$.

3. — Quelques propriétés de la matrice S.

Nous pouvons maintenant utiliser $S_\varkappa(k) = \dfrac{h_\varkappa(k)}{h_\varkappa(-k)} = e^{2i\eta_\varkappa(k)}$ afin d'en déduire des conclusions concernant la matrice S à partir des propriétés de

$h_\varkappa(k)$. Sur l'axe réel $S_\varkappa$ est continue et à cause de la limite de $h_\varkappa(k)$ quand $k \to \infty$:

$$\lim_{k\to\pm\infty} |\, S_\varkappa(k)\,| = 1,$$

puisque

$$S_\varkappa(k) \underset{|k|\to\infty}{\sim} \exp\left[-2i \lim_{|k|\to\infty} \frac{k}{E}\int_0^\infty V(r)dr\right].$$

Pour tout potentiel vérifiant (III-7), le déphasage se comporte à hautes énergies, suivant :

(IV-8) $$\eta_\varkappa^\sigma(\infty) = -\lim_{|k|\to\infty} \frac{k}{E}\int_0^\infty V(r)dr + m\pi \text{ où } m \text{ est entier.}$$

On peut toujours fixer $\eta_\varkappa^\sigma(k)$ en choisissant $m = 0$.

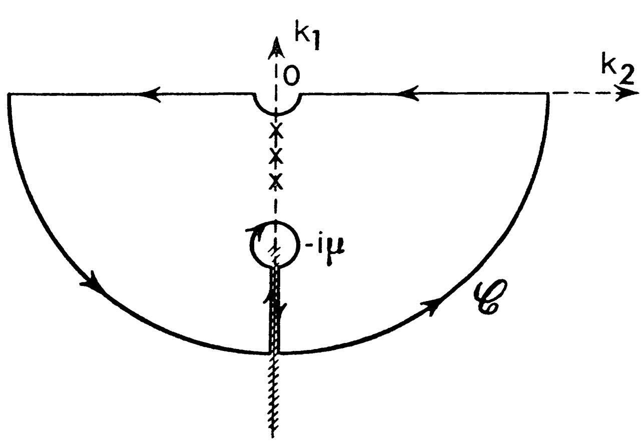
Avec la méthode suivie, nous ne pouvons rien dire concernant les propriétés de $S_\varkappa(k)$ dans le plan complexe k puisque dès que l'on quitte l'axe réel, soit $h_\varkappa(k)$, soit $h_\varkappa(-k)$ n'est plus analytique. En d'autres termes, $S_\varkappa(k)$ peut avoir toutes sortes de singularités dans le plan complexe en dehors de l'axe réel. On ne peut même pas conclure que $S_\varkappa(k)$ a un pôle à $k = i\,|\,k_0\,|$ si $E_0^2 = \mu^2 - k_0^2$ est tel que E_0 est une valeur propre discrète, parce que $h_\varkappa(i\,|\,k_0\,|\,)$ peut être nul.

Le comportement à basses énergies de $S_\varkappa(k)$ peut s'étudier de la façon suivante :

La fonction analytique $h_\varkappa(k)$ étant régulière dans la moitié inférieure du plan complexe k muni de la coupure, sauf en $k = -i\mu$, nous avons :

(IV-9) $$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} d\,[\text{Log } h_\varkappa^\sigma(k)] = n_\varkappa^\sigma,$$

où $n_\varkappa^\sigma$ est le nombre de zéros de $h_\varkappa^\sigma(k)$ dans le demi-plan inférieur.



Le contour d'intégration $\mathcal{C}$ est indiqué sur la figure. Comme chaque zéro de $h_\varkappa^\sigma(k)$ en $k = -iK(0 < K < \mu)$ est simple, et est associé à une valeur propre discrète, $n_\varkappa^\sigma$ sera le nombre d'état lié correspondant à la valeur $\varkappa$ (sauf si pour cette valeur $\varkappa$, $k = 0$ correspond aussi à un état lié).

Les contributions des deux quarts de cercle pour $k = Ke^{i\theta}$, $K \to \infty$, θ variant de $-\pi$ à $-\frac{\pi}{2}$ pour le premier, de $-\frac{\pi}{2}$ à 0 pour le second, si l'on tient compte de :

$$h_\varkappa(k) \underset{|k|\to\infty}{\sim} \exp\left[-i \lim_{|k|\to\infty} \frac{k}{E}\int_0^\infty V(r)dr\right],$$

donnent :

$$-2i\sigma\int_0^\infty V(r)dr.$$

Près de $k = 0$, si nous écrivons $h_\varkappa^\sigma(k) = ak^q + o(k^q)$ (ceci étant vrai dans chaque angle de sommet O, inférieur à π dans le demi-plan inférieur), la contribution du petit demi-cercle de rayon ε autour de O donne :

$$\int_{\supset} d\,[\mathrm{Log}\, h_\varkappa^\sigma(k)] \to q\int_{\supset} d\,[\mathrm{Log}\, k] = -i\pi q \text{ à la limite } \varepsilon \to 0 \; (q \text{ entier}).$$

Les deux contributions le long de l'axe imaginaire se compensent. Celle du cercle de rayon ε autour du point $-i\mu$ ne donne rien à la limite $\varepsilon \to 0$. Finalement l'intégrale (IV-9) nous donne, en utilisant $h_\varkappa^\sigma(k) = |\,h_\varkappa^\sigma(k)\,|\, e^{i\eta_\varkappa^\sigma(k)}$,

$$2i\sigma\int_0^\infty V(r)dr + 2\pi i\left(n_\varkappa^\sigma + \frac{q}{2}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{K\to\infty}\left[i\eta_\varkappa^\sigma(-K) - i\eta_\varkappa^\sigma(-\varepsilon) + i\eta_\varkappa^\sigma(\varepsilon) - i\eta_\varkappa^\sigma(K) \right.$$
$$\left. + \mathrm{Log}\left|\frac{h_\varkappa^\sigma(-K)h_\varkappa^\sigma(\varepsilon)}{h_\varkappa^\sigma(K)h_\varkappa^\sigma(-\varepsilon)}\right|\right].$$

Le terme réel disparaît puisque $h_\varkappa^*(-k) = h_\varkappa(k)$ quand k est réel.

Par suite, pour la même raison, $\eta_\varkappa^\sigma(k)$ est une fonction impaire de k, et l'on obtient :

$$\eta_\varkappa^\sigma(0) - \eta_\varkappa^\sigma(\infty) = \pi\left(n_\varkappa^\sigma + \frac{q}{2}\right) + \sigma\int_0^\infty V(r)dr.$$

Nous avons vu que : $q = 0$ si $h_\varkappa(0) \neq 0$,
$q = 1$ si $\varkappa = 1$, $E = -\mu$ $(\sigma = -1)$ et $h_\varkappa(0) = 0$,
$q = 2$ si $\varkappa \geqslant 2$ et $\varkappa = 1$, $E = +\mu$ avec $h_\varkappa(0) = 0$.

Dans ce dernier cas, $k = 0$ correspond à une valeur propre discrète et peut ainsi s'ajouter à $n_\varkappa^\sigma$.

Nous remarquons que dans le cas de l'équation de Schrödinger, R. G. Newton [1], nous avons :

$$\delta_l(0) - \delta_l(\infty) = \pi\left(n_l + \frac{1}{2}q\right),$$

q ayant des valeurs analogues : $q = 0$ si $f_l(0) \neq 0$; $q = 1$ si $f_l(0) = 0$ et $l = 0$; $q = 2$ si $f_l(0) = 0$ et $l \geqslant 1$.

On a finalement l'analogue du théorème de Levinson [6] :

$$\eta_\varkappa^\sigma(0) - \eta_\varkappa^\sigma(\infty) = \begin{cases} \pi\left(N_\varkappa^\sigma + \frac{1}{2}\right) - \int_0^\infty V(r)dr & \text{si } \varkappa = 1,\ E = -\mu \text{ et } h_\varkappa(0) = 0. \\ \pi N_\varkappa^\sigma + \sigma\int_0^\infty V(r)dr & \text{dans les autres cas,} \end{cases}$$

$N_\varkappa^\sigma$ est le nombre total d'état lié correspondant à la valeur $\varkappa$ et au feuillet σ. La différence avec le cas de l'équation de Schrödinger est due au terme $\sigma\int_0^\infty V(r)dr$. Compte tenu de l'expression de $\eta_\varkappa^\sigma(\infty)$ obtenue en (IV-8), on a finalement :

$$\eta_\varkappa^\sigma(0) = \begin{cases} \pi\left(N_\varkappa^\sigma + \frac{1}{2}\right) & \text{si } \varkappa = 1,\ E = -\mu,\ h_\varkappa(0) = 0, \\ \pi N_\varkappa^\sigma & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

Comme conséquence, nous trouvons que :

$$S_\varkappa^\sigma(0) = \begin{cases} -1 & \text{si } \varkappa = 1,\ E = -\mu,\ h_\varkappa(0) = 0. \\ +1 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

Comparons maintenant les relations (III-13) et (III-4′) pour $\varphi_\varkappa(k, r)$ et la fonction d'onde physique $\begin{bmatrix} F_\varkappa \\ G_\varkappa \end{bmatrix}$. On trouve que :

(IV-10)

$$\Psi_\varkappa(k, r) = \begin{vmatrix} F_\varkappa(k, r) \\ G_\varkappa(k, r) \end{vmatrix} = \frac{k^\varkappa}{|h_\varkappa(k)|\, e^{-i\eta_\varkappa}} \frac{E - \mu}{k} \varphi_\varkappa(k, r) = \frac{k^{\varkappa-1}(E - \mu)}{h_\varkappa(-k)} \varphi_\varkappa(k, r),$$

ce qui donne, compte tenu de (III-10) :

$$|\Psi_\varkappa(k, r)|^2 \underset{r\to 0}{\sim} \frac{|\Psi_\varkappa^{(0)}(k, r)|^2}{|h_\varkappa(k)|^2},$$

$\Psi_\varkappa^{(0)}(k, r)$ étant la solution physique en l'absence de potentiel, c'est-à-dire :

$$\Psi_\varkappa^{(0)}(k, r) = \left| \begin{array}{c} \dfrac{k}{\mathrm{E} + \mu} kr\, j_{\varkappa-1}(kr) \\ kr\, j_\varkappa(kr) \end{array} \right|.$$

Par ailleurs, l'équation (III-4) combinée à (IV-10) nous donne :

$$\text{(IV-11)} \quad \mathrm{S}_\varkappa(k) = 1 - 2ik^\varkappa \int_0^\infty \mathrm{V}(r) \left| \frac{\mathrm{E} - \mu}{k} krj_{\varkappa-1}(kr) \;\; krj_\varkappa(kr) \right| \frac{\varphi_\varkappa(k, r)}{h_\varkappa(-k)}\, dr.$$

En utilisant les inégalités (III-18) et (III-21) nous trouvons que $|\mathrm{S}_\varkappa(k) - 1| \leqslant \mathrm{O}(k^{2\varkappa-1})$ si $h_\varkappa(0) \neq 0$ pourvu que :

$$\int_0^\infty |\mathrm{V}(r)| \left(\frac{r}{1 + |k|\, r}\right)^{2\varkappa} dr < \infty.$$

Si $h_\varkappa(0) = 0$, il suit de l'étude de l'ordre de multiplicité des zéros de $h_\varkappa(k)$ que :

$$|\mathrm{S}_\varkappa(k) - 1| \leqslant 0(k^{2\varkappa-3}) \text{ si } \varkappa \geqslant 2 \text{ et } \varkappa = 1, \mathrm{E} = \mu.$$
$$|\mathrm{S}_\varkappa(k) - 1| \leqslant 0(k^{2\varkappa-2}) \text{ si } \varkappa = 1, \mathrm{E} = -\mu.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. G. NEWTON, *Journal of Math. Phys.*, t. 1, n° 4, p. 319 (1960).
[2] E. CORINALDESI, *Nuovo Cimento*, t. 11, p. 468 (1954).
[3] M. C. BARTHÉLÉMY, *à paraître* aux *Annales de l'Institut Henri Poincaré.*
[4] D. S. CARTER, Ph. D. Thèse Princeton (1952), *non publié.*
[5] F. PRATS et J. S. TOLL, *Phys. Rev.*, t. 113, n° 1, p. 363 (1959).
[6] N. LEVINSON, Kgl Danske Videnskab. Selskab, *Mat-fys. Medd*, t. 25, n° 9 (1949).
[7] ERDELYI, *Higher Transcendantal Function*, vol. 2, p. 62.
[8] R. JOST, *Helv. Phys. Acta*, t. 20, p. 256 (1947).
[9] G. PARZEN, *Phys. Rev.*, t. 80, p. 261 (1950).