

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

LUIS MAS

Sur le problème du mouvement des deux ou des trois corps en relativité générale

Annales de l'I. H. P., section A, tome 7, n° 1 (1967), p. 1-76

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1967__7_1_1_0

© Gauthier-Villars, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Sur le problème du mouvement des deux ou des trois corps en relativité générale

par

Luis MAS

SOMMAIRE. — Dans une première partie nous étudions le problème des deux corps, à partir des équations aux variations des équations d'Einstein; pour cela nous supposons qu'un des deux corps a une masse inférieure d'un ordre de grandeur à l'autre. La variation est calculée à partir de la métrique de Schwarzschild. Pour la plupart des calculs nous admettons la symétrie sphérique. La deuxième partie est une étude de la formulation canonique des équations du mouvement en Relativité Générale, pour le problème des deux ou trois corps. Nous partons des lagrangiens déjà trouvés. Nous utilisons le formalisme de la méthode de variation des constantes pour calculer l'avance et le retard de passage au périhélie dans le cas des deux corps.

SUMMARY. — In the first part of this work the two-body problem is treated starting from the variational equations of Einstein's equations, and in order to do so it is supposed that one of the two bodies has an inferior mass of an order depending on the other mass.

The variation is calculated from the Schwarzschild metric. On the whole we restrict our calculations to the spherically symmetric case.

The second part considers the canonical formulation, in the general relativity, of the equations of motion corresponding to two or three bodies. Starting from the already found Lagrangians and applying the method of constants variation, the advance and the retardation of the perihelion are calculated in the case of two bodies.

INTRODUCTION

Le problème du mouvement dans la théorie de la Relativité Générale est déterminé par le fait, établi par Einstein et Grommer (1927), de ce qu'on doit obtenir les équations du mouvement, c'est-à-dire le principe géodésique, en même temps que la métrique du système tensorielle :

$$(I) \quad S_{\alpha\beta} = \kappa T_{\alpha\beta},$$

c'est-à-dire que l'un dépend de l'autre.

Cette circonstance fait que le problème, théoriquement soit simple et bien posé, mais dans un cas particulier quelconque les difficultés sont très importantes comme c'est bien connu dans les problèmes où les équations du mouvement déterminent le champ et réciproquement. C'est pour cette raison qu'on n'a pas obtenu, jusqu'à maintenant, une solution exacte du problème des deux corps ou plus en Relativité Générale. Des solutions approchées ont été données que nous pouvons distinguer de cette façon :

a) Celles qui considèrent les corps comme singularités du champ, c'est-à-dire, qui ne tiennent pas compte du second membre des équations I, et se situent toujours dans un cas extérieur. Méthode suivie notamment par Einstein, Infeld, Hoffmann [4].

b) Celles qui contrairement emploient le tenseur impulsion-énergie et étudient la métrique intérieure des corps. Cette méthode a été initiée par Fock [5].

L'objet de la première partie de cette thèse est une étude du mouvement qui pourrait se classer dans le groupe *b* mais quelque peu modifié. Dans les méthodes *b* les calculs prennent comme paramètre de développement v^2/c^2 , et les approximations on les fait toujours autour de l'espace plat; on emploie les coordonnées cartésiennes pour l'espace plat de base et après on introduit une condition dans les coordonnées, par exemple celle d'harmonicité [8] ou d'autres semblables [9].

Ce que je me propose est de faire les approximations autour de l'espace de Schwarzschild, en utilisant les coordonnées polaires habituelles mais en introduisant l'hypothèse de prendre le nouveau champ comme une variation de celui de Schwarzschild, c'est-à-dire que nous pourrions obtenir la différence entre les deux métriques à partir des équations aux variations des équations d'Einstein I. Cette différence nous supposons aussi qu'est développable en fonction du paramètre v^2/c^2 et en plus qu'elle satisfait

une condition de coordonnées semblable à la condition d'harmonie.

Quand nous employons la métrique de Schwarzschild nous avons au centre des coordonnées le corps qui en est la cause; tenant compte des difficultés pour étudier les variations de ce corps nous le supposons toujours fixe et les variations produites ailleurs, obtenant ainsi quand nous calculons le mouvement d'un petit corps cause de la variation, le mouvement relatif au corps central.

Les équations du mouvement nous les obtenons en utilisant la condition $\nabla_\alpha \delta(T^{\alpha\beta}) = 0$, en forme intégrals, dans le champ de Schwarzschild plus variation. La comparaison des résultats en première approximation avec ceux de la Mécanique Classique, fixe la constante de la métrique de Schwarzschild.

Nous utilisons la notion de masse introduite par F. Hennequin [6], c'est-à-dire : $\bar{m} = \bar{\rho}u^0c$, où $\bar{\rho}$ correspond à l'espace avec la variation.

Une fois que nous avons obtenu les équations du mouvement, pour la comparaison des résultats avec les autres déjà obtenus, nous calculons le lagrangien duquel nous pouvons dériver les équations; ce lagrangien nous pouvons aussi l'obtenir directement de la métrique. A ce point nous introduirons la condition de symétrie sphérique pour le corps qui produit la variation et en plus nous prendrons aussi l'équation d'état du fluide $\partial_i p = \bar{m}\partial_i U^0$ conditions qui simplifient le calcul et sont aussi nécessaires pour la dite comparaison, surtout avec les travaux du groupe *a*, lesquels sont obligés de prendre la symétrie sphérique, circonstance qui est à la base de la différence des méthodes *a* et *b*.

La seconde partie de ma thèse étudie le problème d'application à un cas pratique, jusqu'à présent toujours astronomique, des résultats obtenus sur les équations du mouvement du problème des deux corps. Nous utilisons la méthode de variation des constantes sous la forme développée par Chazy [12].

D'une part nous avons les lagrangiens des méthodes *a* et *b*, qui sont identiques sous les conditions de simplification citées pour les *b* et d'autre part le lagrangien obtenu par nous, et qui est naturellement plus simple. Le premier pas est obtenir de ces lagrangiens les hamiltoniens avec lesquels et la méthode de variation des constantes nous obtenons l'avance du périhélie et le retard de passage au périhélie, quantités les plus significatives pour préciser la perturbation introduite.

Le dernier chapitre de cette partie étudie le problème des trois corps, à partir du lagrangien donné par Infeld-Plebansky [13]; nous nous limi-

tons à obtenir le formalisme hamiltonien à cause de la complication des calculs, étudiant avec un peu plus de détail le problème restreint des trois corps, c'est-à-dire en supposant que deux corps suivent une trajectoire circulaire autour de son centre de masse et le troisième qui est dans le même plan a une masse beaucoup plus petite que les autres.

NOTATIONS ET SYMBOLES

$+ - - -$	signature de la métrique,
$\alpha, \beta, \gamma, \dots$	et tout indice grec = 0, 1, 2, 3,
i, j, k, \dots	et tout indice latin = 1, 2, 3,
r, φ, θ	coordonnées polaires habituelles,
$\dot{r}, \dot{\varphi}, \dot{\theta}, v^1, v^2, v^3$	dérivées par rapport au temps,
∇/dt	différentiation covariante,
K	constante de la métrique de Schwarzschild,
∂_α	dérivée partielle ordinaire,
∇^i	dérivée partielle covariante,
c	vitesse de la lumière dans le vide.

Les nombres entre crochets et italiques renvoient à la bibliographie.

Les nombres entre parenthèses normaux renvoient aux formules précédentes.

Une lettre avec un trait dessus sera la variation de la quantité déterminée par la lettre.

PREMIÈRE PARTIE

ÉTUDE DU PROBLÈME DES DEUX CORPS A PARTIR DE LA VARIATION DE LA MÉTRIQUE DE SCHWARZSCHILD

I. — Rappels.

Le problème des équations aux variations a été premièrement étudié en Mécanique Céleste, en vue de trouver la vraie forme du mouvement à partir d'un mouvement voisin périodique beaucoup plus facile à déterminer [12] [16], mais qui correspond à certaines conditions initiales, qui ne

sont pas celles du problème réel. Le point de départ est le suivant, soit :

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = f(x, y, t) \quad ; \quad \frac{dy}{dt} = g(x, y, t),$$

un système de deux équations différentielles. Si $x(t)$ et $y(t)$ est une solution déterminée de ce système, nous faisons le changement de variables :

$$(2) \quad x = x(t) + \alpha \quad ; \quad y = y(t) + \beta,$$

et alors le système reste de la forme :

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \beta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \alpha^2 + \dots$$

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{\partial g}{\partial x} \alpha + \frac{\partial g}{\partial y} \beta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \alpha^2 + \dots,$$

et si la solution $x(t), y(t)$ est proche de celle qu'on cherche, on peut prendre le principe de ne pas tenir compte des termes avec α^2, β^2, \dots , en face des termes avec α et β , et alors on reste avec les équations linéaires :

$$(3) \quad \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \beta \quad ; \quad \frac{d\beta}{dt} = \frac{\partial g}{\partial x} \alpha + \frac{\partial g}{\partial y} \beta$$

qu'on définit comme les équations aux variations associées au système (1); plus précisément équations de la première variation; si nous prenons aussi les termes avec $\alpha^2, \beta^2, \alpha\beta$, on dit équations de la deuxième variation.

Toutes ces considérations peuvent s'étendre à un système quelconque d'équations différentielles même si les inconnues dépendent de plusieurs variables, en prenant comme point de départ le changement de variables (2) et utilisant le principe cité, qui fait que les équations à résoudre (3) soient toujours linéaires, d'où sa simplicité.

II. — Équations aux variations de la relativité générale.

Les équations qui nous intéressent sont les équations de la Relativité Générale, dans le cas intérieur et en supposant que nous avons un fluide parfait :

$$(4) \quad S_{\alpha\beta} = \kappa T_{\alpha\beta} = \kappa[(\rho + p)u_\alpha u_\beta - p g_{\alpha\beta}].$$

La base de la Relativité Générale est une variété différentiable V_4 avec une structure de différentiabilité C^2, C^4 , par morceaux. La métrique doit

être riemannienne et du type hyperbolique normal; nous la prendrons avec un carré positif et trois négatifs.

Dans les équations (4) $S_{\alpha\beta}$ est en relation avec le tenseur de Ricci, $R_{\alpha\beta}$:

$$S_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R,$$

c'est-à-dire que les inconnues sont $g_{\alpha\beta}$ d'une part et ρ densité de masse, p densité de pression, u^α vecteur quadrivitesse unitaire, d'autre part.

En supposant qu'elles sont connues sous certaines conditions initiales, nous allons calculer une première variation de cette solution. Nous appellerons maintenant les inconnues du problème :

$$\delta(g_{\alpha\beta}) = h_{\alpha\beta} \quad , \quad \delta(\rho) = \bar{\rho} \quad , \quad \delta(p) = \bar{p} \quad , \quad \delta(u^\alpha) = \bar{u}^\alpha,$$

où le symbole δ , que nous utiliserons par la suite, indique la variation de la quantité qui suit entre parenthèse.

Dans les limites de la première variation nous pouvons monter et baisser les indices tensoriels avec l'aide du tenseur métrique de base $g_{\alpha\beta}$. A partir de,

$$g_{\alpha\beta} g^{\beta\mu} = \delta_\alpha^\mu,$$

on trouve, en prenant les variations :

$$(5) \quad \delta(g^{\alpha\beta}) = -h^{\alpha\beta}.$$

Calculons maintenant la variation des deux membres de l'équation (4). Quant aux coefficients de la connexion riemannienne associée à $g_{\alpha\beta}$, on peut mettre sa variation en forme tensorielle, ce qui est remarquable si nous notons qu'ils ne sont pas des tenseurs [2] [8] :

$$(6) \quad \delta(\Gamma_{\alpha}^{\beta}{}_{\lambda}) = \frac{1}{2} [\nabla_{\alpha} h^{\beta}{}_{\lambda} + \nabla_{\lambda} h^{\beta}{}_{\alpha} - \nabla^{\beta} h_{\alpha\lambda}].$$

A partir de ces formules on déduit la variation du tenseur de Riemann :

$$\delta(R^{\lambda}{}_{\alpha\beta\mu}) = \frac{1}{2} [\nabla_{\beta} (\nabla_{\mu} h^{\lambda}{}_{\alpha} + \nabla_{\alpha} h^{\lambda}{}_{\mu} - \nabla^{\lambda} h_{\mu\alpha}) - \nabla_{\mu} (\nabla_{\beta} h^{\lambda}{}_{\alpha} + \nabla_{\alpha} h^{\lambda}{}_{\beta} - \nabla^{\lambda} h_{\alpha\beta})],$$

et par contraction et utilisant l'identité de Ricci, nous pouvons obtenir la variation du tenseur de Ricci :

$$(7) \quad \delta(R_{\alpha\beta}) = -\frac{1}{2} [\nabla_{\mu} \nabla^{\mu} h_{\alpha\beta} - R_{\alpha\mu} h^{\mu}{}_{\beta} - R_{\mu\beta} h^{\mu}{}_{\alpha} + 2R^{\lambda}{}_{\alpha}{}^{\mu}{}_{\beta} h_{\lambda\mu} - (\mathcal{D}k)_{\alpha\beta}],$$

où nous utilisons les notations :

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} h^\lambda{}_\lambda, \\ \nabla_\alpha f^\alpha{}_\beta \equiv k_\beta = \nabla_\alpha h^\alpha{}_\beta - \frac{1}{2} \nabla_\beta h^\lambda{}_\lambda, \\ (\mathcal{D}k)_{\alpha\beta} = \nabla_\beta k_\alpha + \nabla_\alpha k_\beta. \end{array} \right.$$

L'expression de la variation du tenseur de Ricci peut se simplifier en utilisant la définition introduite par A. Lichnerowicz de l'opérateur laplacien généralisé [8] :

$$(9) \quad (\Delta \mathbf{T})_{\alpha_1 \dots \alpha_p} = -\nabla^\rho \nabla_\rho \mathbf{T}_{\alpha_1 \dots \alpha_p} + \sum_k \mathbf{R}_{\alpha_k \mu} \mathbf{T}_{\alpha_1 \dots, \mu, \dots, \alpha_p} - \sum_{k \neq l} \mathbf{R}_{\alpha_k \rho, \alpha_l \sigma} \mathbf{T}_{\alpha_1 \dots, \rho, \dots, \sigma, \dots, \alpha_p}.$$

On obtient alors,

$$(10) \quad \delta(\mathbf{R}_{\alpha\beta}) = \frac{1}{2} [(\Delta h)_{\alpha\beta} + (\mathcal{D}k)_{\alpha\beta}].$$

A partir de cette formule nous pouvons obtenir la variation du tenseur $\mathbf{S}_{\alpha\beta}$, qui est celle que nous cherchons. De,

$$\mathbf{R}_\alpha{}^\beta = g^{\beta\mu} \mathbf{R}_{\mu\alpha},$$

par variation et tenant compte de (10) nous obtenons :

$$\delta(\mathbf{R}_\alpha{}^\beta) = \frac{1}{2} [(\Delta h)_\alpha{}^\beta + (\mathcal{D}k)_\alpha{}^\beta - 2h^{\beta\mu} \mathbf{R}_{\mu\alpha}],$$

et en contractant :

$$\delta(\mathbf{R}) = \frac{1}{2} [(\Delta h)_\lambda{}^\lambda + (\mathcal{D}k)_\lambda{}^\lambda - 2h^{\lambda\mu} \mathbf{R}_{\lambda\mu}],$$

et comme :

$$\delta(\mathbf{S}_\alpha{}^\beta) = \delta\left(\mathbf{R}_\alpha{}^\beta - \frac{1}{2} \delta_\alpha{}^\beta \mathbf{R}\right),$$

nous obtenons pour la variation du premier membre des équations (4) :

$$(11) \quad \delta(\mathbf{S}_\alpha{}^\beta) = \frac{1}{2} [(\Delta f)_\alpha{}^\beta - 2\mathbf{R}_{\alpha\lambda} f^{\beta\lambda} + \delta_\alpha{}^\lambda \mathbf{R}_{\rho\lambda} f^{\rho\lambda} + \mathbf{S}_\alpha{}^\beta f_\rho{}^\rho + (\mathcal{D}k)_\alpha{}^\beta - \delta_\alpha{}^\beta \nabla_\lambda k^\lambda].$$

Voyons maintenant le deuxième membre; pour le $\mathbf{T}_{\alpha\beta}$ nous avons dit que nous prendrions un fluide parfait, c'est-à-dire que le tenseur $\mathbf{T}_{\alpha\beta}$ est tel qu'il a : un vecteur propre u^α , qui est réel et orienté dans le temps, la

valeur propre duquel est la densité de masse du fluide que nous supposons toujours positive; et les autres trois valeurs propres identiques. Nous supposons u^α unitaire et l'interpréterons comme le vecteur quadrivitesse du schéma. Nous avons donc :

$$(12) \quad T^{\alpha\beta} = (\rho + p)u^\alpha u^\beta - pg^{\alpha\beta}.$$

L'équation variée associée est :

$$(13) \quad \delta(T_{\alpha\beta}) = (\bar{\rho} + \bar{p})u_\alpha u_\beta + (\rho + p)(u_\alpha \bar{u}_\beta + u_\beta \bar{u}_\alpha) - \bar{p}g_{\alpha\beta} - ph_{\alpha\beta}.$$

et une formule analogue pour,

$$\delta(T_\alpha^\beta) = \delta(g^{\beta\mu}T_{\alpha\mu}) = -h^{\beta\mu}T_{\alpha\mu} + g^{\beta\mu}\delta(T_{\alpha\mu}).$$

III. — Cas particulier à résoudre.

Pour nous le problème est de trouver une métrique qui correspond au cas physique d'un corps central de masse M , et un deuxième corps de masse m beaucoup plus petite ($m \ll M$) mais non négligeable, à partir de la solution d'un seul corps, laquelle dans le cas de symétrie sphérique que nous supposons, à une métrique bien connue, solution de (4), et que nous prendrons comme métrique de base pour un calcul aux variations, plus précisément pour le calcul de la première variation.

Les équations à résoudre sont,

$$(14) \quad \delta(S_\alpha^\beta) = \kappa\delta(T_\alpha^\beta),$$

avec les développements (11) et (13).

Maintenant nous allons introduire des simplifications qui sont dues au cas particulier que nous voulons obtenir.

La métrique de base nous devons l'employer pour résoudre (14) dans les régions qui correspondent au cas extérieur, puisque le corps petit nous le supposons suffisamment éloigné du corps central et dans ces conditions, $R_{\alpha\beta} = 0$, $\rho = 0$ et $p = 0$. C'est-à-dire que nous avons déjà :

$$(15) \quad \delta(S_\alpha^\beta) = \frac{1}{2} [(\Delta f)_\alpha^\beta + (\mathcal{D}k)_\alpha^\beta - \delta_\alpha^\beta \nabla_\lambda k^\lambda],$$

$$(16) \quad \delta(T_\alpha^\beta) = (\bar{\rho} + \bar{p})u_\alpha u^\beta - \bar{p}\delta_\alpha^\beta.$$

Nous pouvons encore simplifier d'avantage, puisque nous allons voir que sous certaines conditions nous pourrions annuler le vecteur k_α .

Soient x^α le système de variables dans lequel nous avons les $g_{\alpha\beta}$ et faisons le changement :

$$(17) \quad x^\alpha \rightarrow x'^\alpha = x^\alpha + \delta x^\alpha,$$

la nouvelle forme de la métrique peut se mettre sous la forme,

$$g_{\alpha\beta}(x + \delta x) = g_{\alpha\beta}(x) + \delta x^\mu \partial_\mu g_{\alpha\beta} + \dots,$$

où nous avons tenu compte de la formule de Taylor et nous avons pris seulement la première variation et finalement nous avons posé :

$$ds^2 = [g_{\alpha\beta}(x) + h'_{\alpha\beta}(x)] dx^\alpha dx^\beta + \dots \quad ; \quad h'_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} + \nabla_\beta(g_{\alpha\lambda} \delta x^\lambda) + \nabla_\alpha(g_{\beta\lambda} \delta x^\lambda).$$

Pour les $f_{\alpha\beta}$ nous obtenons :

$$f'_{\alpha\beta} = f_{\alpha\beta} + \nabla_\beta(g_{\alpha\lambda} \delta x^\lambda) + \nabla_\alpha(g_{\beta\lambda} \delta x^\lambda) - g_{\alpha\beta} \nabla_\lambda \delta x^\lambda.$$

Et finalement pour le vecteur k_α :

$$k'_\alpha = k_\alpha + \nabla_\lambda [\nabla^\lambda (g_{\alpha\mu} \delta x^\mu)] + R_{\lambda\alpha} \delta x^\lambda.$$

Les k'_α sont connus, et des travaux de I. Bruhat-Choquet, nous déduisons que c'est possible, au moins localement, de trouver certains δx^α pour lesquels $k'_\alpha = 0$.

C'est-à-dire que bien qu'en général nous partons d'un système de variables pour lequel $k_\alpha \neq 0$, en faisant un changement du type (17), convenablement choisi nous pouvons avoir $k_\alpha = 0$; les nouveaux $g_{\alpha\beta}$, tenant compte de l'ordre d'approximation dans lequel nous travaillons auront exactement la même forme qu'avant par rapport aux nouvelles variables. Nous avons donc :

$$(18) \quad \delta(S^{\alpha\beta})' = \frac{1}{2} [(\Delta f)^{\alpha\beta}] = -\frac{1}{2} \nabla^\lambda \nabla_\lambda f^{\alpha\beta} - R^\alpha_{\mu}{}^\beta{}_\rho f^{\mu\rho} = \varkappa \delta(T^{\alpha\beta}),$$

puisque,

$$\delta(g^{\alpha\mu} S_\mu^\beta) = -h^{\alpha\mu} S_\mu^\beta + g^{\alpha\mu} \delta(S_\mu^\beta),$$

et $S_\mu^\beta = 0$. Les calculs seront faits dans un système de variables, lequel satisfait à $k_\alpha = 0$.

Cette condition est dans un certain sens analogue à la condition d'harmonicité du système de variables, mais dans notre cas ce n'est pas une condition sur la métrique, mais seulement sur la variation de la métrique.

Pour $T_{\alpha\beta}$, nous prendrons comme nous avons déjà dit, un schéma fluide parfait, la variation duquel est (16), mais que maintenant nous pouvons simplifier en tenant compte de ce que nous serons toujours dans un cas extérieur pour la métrique de base : $\rho = 0, p = 0$.

Nous tiendrons compte du fait que ρ est grande par rapport à \bar{p} et en plus de ce qui est homogène à $\bar{\rho}$, en employant les unités physiques habituelles n'est pas \bar{p} mais \bar{p}/c^2 . Nous posons aussi :

$$v^j = u^j/u^0 \quad ; \quad v^0 = 1,$$

et nous interpréterons v^j comme la vitesse spatiale. En conclusion (16) a la forme :

$$(19) \quad \delta(T^{\alpha\beta}) = \left[\bar{\rho}(u^0)^2 v^\alpha v^\beta + \frac{\bar{p}}{c^2} ((u^0)^2 v^\alpha v^\beta - g^{\alpha\beta}) \right].$$

Des équations (14) nous déduisons identiquement : $\nabla_\alpha(\delta T^{\alpha\beta}) = 0$, mais non de (18); si en plus de (18) nous admettons $\nabla_\alpha(\delta T^{\alpha\beta}) = 0$, comme nous ferons pour déduire les équations du mouvement, nous aurons aussi de,

$$\delta(S_\alpha^\beta) = \delta(S_\alpha^\beta)' + \frac{1}{2} [(\mathcal{D}k)_\alpha^\beta - \delta_\alpha^\beta \nabla_\lambda k^\lambda],$$

que,

$$\nabla_\alpha [(\mathcal{D}k)^{\alpha\beta} - g^{\alpha\beta} \nabla_\lambda k^\lambda] = 0,$$

c'est-à-dire,

$$(20) \quad \nabla_\alpha \nabla^\alpha k^\beta + \nabla_\alpha \nabla^\beta k^\alpha - \nabla^\beta \nabla_\lambda k^\lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\Delta k)^\beta = 0.$$

équation qui nous servira plus tard pour clarifier la condition sur les variables que nous avons prise.

IV. — Métrique de base.

Les équations (18) nous allons les résoudre en prenant comme métrique de base, celle de Schwarzschild en coordonnées polaires habituelles :

$$x_2 : t \quad , \quad x_1 : r \quad , \quad x_0 : \theta \quad , \quad x_3 : \varphi,$$

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{2k}{rc^2} \right) dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{2k}{rc^2}} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2),$$

avec K une constante à déterminer.

Comme tenseur de courbure de Riemann nous prendrons :

$$R_{\alpha\mu, \rho}^{\beta} = \partial_\alpha \Gamma_{\mu\rho}^\beta - \partial_\mu \Gamma_{\alpha\rho}^\beta + \Gamma_{\alpha\sigma}^\beta \Gamma_{\mu\rho}^\sigma - \Gamma_{\mu\sigma}^\beta \Gamma_{\rho\alpha}^\sigma.$$

Avec ce ds^2 nous pouvons développer le premier membre des équations (18); le calcul de $\nabla^\lambda \nabla_\lambda f^{\alpha\beta}$ donne :

$$(21) \quad \alpha = 0, \beta = 0 :$$

$$\widehat{\square} f^{00} + \frac{2k}{r^2 c^2} \left[\frac{2}{c^2 L^2} \partial_0 f^{01} - \partial_1 f^{00} - \frac{k}{r^2 c^2 L} f^{00} + \frac{k}{r^2 c^4 L^3} f^{11} \right],$$

$$\alpha = 0, \beta = 1 :$$

$$\widehat{\square} f^{01} + \frac{2k}{r^2 c^2} \left[\frac{1}{c^2 L^2} \partial_0 f^{11} + \partial_0 f^{00} + \partial_1 f^{01} - 2\partial_2 f^{02} - 2\partial_3 f^{03} \right. \\ \left. + \left(\frac{2k}{r^2 c^2 L} - \frac{2}{r} \right) f^{01} - 2 \cot \theta f^{02} \right],$$

$$\alpha = 0, \beta = 2 :$$

$$\widehat{\square} f^{02} + \frac{2k}{r^2 c^2} \left[\frac{1}{c^2 L^2} \partial_0 f^{12} + 2\partial_1 f^{02} - \frac{1}{r} f^{02} \right],$$

$$\alpha = 0, \beta = 3 :$$

$$\widehat{\square} f^{03} + \frac{2k}{r^2 c^2} \left[\frac{1}{c^2 L^2} \partial_0 f^{13} + 2\partial_1 f^{03} - \frac{1}{r} f^{03} \right],$$

$$\alpha = 1, \beta = 1 :$$

$$\widehat{\square} f^{11} + \frac{2k}{r^2 c^2} \left[3\partial_1 f^{11} + 2\partial_0 f^{01} - 4\partial_2 f^{12} - 4\partial_3 f^{13} - \frac{2k^2}{c^2 r^3} f^{00} \right. \\ \left. + \left(\frac{4}{r} - \frac{k}{r^2 c^2 L} \right) f^{11} + 4r f^{12} + 4r \sin^2 \theta f^{33} \right],$$

$$\alpha = 1, \beta = 2 :$$

$$\widehat{\square} f^{12} + \frac{2k}{r^2 c^2} \left[\partial_0 f^{02} + 2\partial_1 f^{12} - 2\partial_2 f^{22} - 2\partial_3 f^{23} - \frac{3}{r} f^{12} - 2 \cot \theta f^{22} + \sin 2\theta f^{33} \right],$$

$$\alpha = 1, \beta = 3 :$$

$$\widehat{\square} f^{13} + \frac{2k}{r^2 c^2} \left[\partial_0 f^{03} + 4\partial_1 f^{13} - 2\partial_2 f^{23} - 2\partial_3 f^{33} - \frac{3}{r} f^{13} - 6 \cot \theta f^{23} \right],$$

$$\alpha = 2, \beta = 2 ;$$

$$\widehat{\square} f^{22} + \frac{2k}{r^2 c^2} \left[6\partial_1 f^{22} + \frac{2}{r} f^{22} \right],$$

$$\alpha = 2, \beta = 3 :$$

$$\widehat{\square} f^{23} + \frac{2k}{r^2 c^2} \left[6\partial_1 f^{23} + \frac{4}{r} f^{23} \right]; \quad \alpha = 3, \beta = 3 : \widehat{\square} f^{33} + \frac{2k}{r^2 c^2} \left[6\partial_1 f^{33} + \frac{4}{r} f^{33} \right].$$

La valeur de L est : $1 - \frac{2k}{rc^2}$.

Dans le symbole $\widehat{\square}$, nous introduisons tous les termes qui proviennent du Dalemberdien de l'espace plat et en plus les termes :

$$\frac{1}{c^2 L} \partial_{00} + \frac{2k}{rc^2} \partial_{11}.$$

Le calcul de $R^{\alpha}_{\mu,\beta\rho} f^{\mu\rho}$, donne comme résultat :

$$(22) \quad \begin{aligned} \alpha=0, \beta=0 &: \frac{k}{c^4 r^3 L} \left[\frac{2}{L} f^{11} - r^2 f^{22} - r^2 \sin^2 \theta f^{33} \right]; \\ \alpha=0, \beta=1 &: \frac{2k}{c^2 r^3} f^{01}; \quad \alpha=0, \beta=2: -\frac{k}{c^2 r^3} f^{02}; \quad \alpha=0, \beta=3: -\frac{k}{c^2 r^3} f^{03}; \\ \alpha=1, \beta=1 &: \frac{k}{c^2 r^3} L [c^2 2L f^{00} + r^2 f^{22} + r^2 \sin^2 \theta f^{33}]; \\ \alpha=1, \beta=2 &: -\frac{k}{c^2 r^3} f^{12}; \quad \alpha=1, \beta=3: -\frac{k}{c^2 r^3} f^{13}; \\ \alpha=2, \beta=2 &: -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{k}{c^2 r^3} \left[c^2 L f^{00} - \frac{1}{L} f^{11} + 2r^2 \sin^2 \theta f^{33} \right]; \\ \alpha=2, \beta=3 &: \frac{2k}{c^2 r^3} f^{23}; \\ \alpha=3, \beta=3 &: -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \cdot \frac{k}{c^2 r^3} \left[c^2 L f^{00} - \frac{1}{L} f^{11} + 2r^2 f^{22} \right]. \end{aligned}$$

A noter que tous ces calculs nous les avons faits sans aucune approximation et que par conséquent ils sont valables pour d'autres problèmes physiques semblables dans le sens qu'ils emploient le calcul aux variations à partir de la métrique de Schwarzschild comme métrique de base; par exemple, calcul de la métrique dans un point situé dans le cas extérieur dû à une masse qui n'a pas la symétrie sphérique mais seulement une symétrie cylindrique et que nous pouvons aussi étudier comme variation de la métrique de Schwarzschild.

Pour le problème que nous allons étudier les seuls termes nécessaires sont le premier des (21) et des (22) ceux qu'ont $\alpha = \beta$.

V. — Hypothèses sur la forme de la solution.

Pour résoudre (18) nous allons faire deux hypothèses :

a) La solution peut se mettre sous la forme :

$$(23) \quad \begin{cases} f^{00} = -\frac{4U^0}{c^4} - \frac{4S^0}{c^6} + 0\left(\frac{1}{c^8}\right) \\ f^{0i} = \frac{4U^i}{c^4} + \frac{4S^i}{c^6} + 0\left(\frac{1}{c^8}\right) \\ f^{ij} = \frac{4U^{ij}}{c^2} + \frac{4S^{ij}}{c^4} + 0\left(\frac{1}{c^6}\right) \end{cases}$$

où les U et les S sont des fonctions des coordonnées, de $\bar{\rho}$ et \bar{p} , mais non des produits de ceux-ci, parce que nous sommes en première variation; pour la même raison les termes écrits seront ceux que nous calculerons.

b) Nous supposerons aussi que v^i est petit face à c^2 , c'est-à-dire que nous ne prendrons pas des termes avec des facteurs d'un ordre supérieur à $(v^i/c)^2$; et encore nous supposerons que le corps petit suit un mouvement de presque translation dans le sens que,

$$\nabla_i v^j = 0 \left(\frac{1}{c^2} \right)$$

Avec ces hypothèses, nous avons à partir de l'unitariété de u :

$$(24) \quad u^0 = \frac{1}{c} + \frac{1}{c^3} \left(\frac{k}{r} - \frac{(v)^2}{2} \right) + 0 \left(\frac{1}{c^5} \right),$$

où,

$$(v)^2 = g_{ij} v^i v^j,$$

développement que nous utilisons dans l'expression des $\delta(T^{\alpha\beta})$ (19), pour obtenir :

$$(25) \quad \begin{aligned} \delta(T^{00}) &= \frac{\bar{\rho}}{c^2} + \frac{2\bar{\rho}}{c^4} \left(\frac{k}{r} - \frac{(v)^2}{2} \right) + 0 \left(\frac{1}{c^6} \right), \\ \delta(T^{0i}) &= \frac{\bar{\rho}}{c^2} v^i + \frac{2\bar{\rho}}{c^4} v^i \left(\frac{k}{r} - \frac{(v)^2}{2} \right) + \frac{\bar{p}}{c^4} v^i + 0 \left(\frac{1}{c^6} \right); \delta(T^{ij}) = \frac{\bar{\rho}}{c^2} v^i v^j + 0 \left(\frac{1}{c^4} \right) \\ &\quad \text{pour } i \neq j; \\ \delta(T^{11}) &= \frac{\bar{\rho}}{c^2} (v^1)^2 + \frac{\bar{p}}{c^2} + \frac{2\bar{\rho}}{c^4} (v^1)^2 \left(\frac{k}{r} - \frac{(v)^2}{2} \right) + \frac{\bar{p}}{c^4} (v^1)^2 \left(1 - \frac{2k}{r} \right) + 0 \left(\frac{1}{c^6} \right); \\ \delta(T^{22}) &= \frac{\bar{\rho}}{c^2} (v^2)^2 + \frac{\bar{p}}{r^2 c^2} + \frac{2\bar{\rho}}{c^4} (v^2)^2 \left(\frac{k}{r} - \frac{(v)^2}{2} \right) + \frac{\bar{p}}{c^4} (v^2)^2 + 0 \left(\frac{1}{c^6} \right); \\ \delta(T^{33}) &= \frac{\bar{\rho}}{c^2} (v^3)^2 + \frac{\bar{p}}{r^2 \sin^2 \theta c^2} + \frac{2\bar{\rho}}{c^4} (v^3)^2 \left(\frac{k}{r} - \frac{(v)^2}{2} \right) + \frac{\bar{p}}{c^4} (v^3)^2 + 0 \left(\frac{1}{c^6} \right). \end{aligned}$$

Nous résoudrons (18) en deux étapes : premièrement nous calculerons les U , ce que nous appellerons première approximation et après les S , ce que nous appellerons deuxième approximation.

VI. — Calcul de la première approximation.

Pour commodité et aussi pour rapprocher les calculs que nous allons faire avec ceux qui ont été faits avec de principes semblables [6] [9], nous partons

pour l'instant de la forme des $h_{\alpha\beta}$ et non pas de la forme des $f_{\alpha\beta}$ (23); c'est-à-dire que :

$$h^{00} = -\frac{2}{c^4} U^0 + 0\left(\frac{1}{c^6}\right) ; \quad h^{0i} = +\frac{4U^i}{c^4} + 0\left(\frac{1}{c^6}\right) ; \quad h^{ij} = \frac{4\bar{U}^{ij}}{c^2} + 0\left(\frac{1}{c^4}\right),$$

la barre indique que les \bar{U} sont différents de ceux définis avant. Avec cette forme des $h_{\alpha\beta}$ nous avons pour les $f_{\alpha\beta}$:

$$f^{00} = -\frac{U^0}{c^4} - \frac{2\bar{U}^{pp}}{c^4} + 0\left(\frac{1}{c^6}\right) ; \quad f^{0i} = \frac{4U^i}{c^2} + 0\left(\frac{1}{c^4}\right) ; \quad f^{ij} = \frac{4U^{ij}}{c^2} + 0\left(\frac{1}{c^4}\right)$$

pour $i \neq j$;

$$f^{11} = \frac{4\bar{U}^{11}}{c^2} - \frac{U^0}{c^2} + \frac{2\bar{U}^{pp}}{c^2} + 0\left(\frac{1}{c^4}\right),$$

$$f^{22} = \frac{4\bar{U}^{22}}{c^2} - \frac{U^0}{r^2 c^2} + \frac{2\bar{U}^{pp}}{r^2 c^2} + 0\left(\frac{1}{c^4}\right),$$

$$f^{33} = \frac{4\bar{U}^{33}}{c^2} - \frac{U^0}{r^2 \sin^2 \theta c^2} + \frac{2\bar{U}^{pp}}{r^2 \sin^2 \theta c^2} + 0\left(\frac{1}{c^4}\right),$$

avec $\bar{U}^{pp} = g_{ij} \bar{U}^{ij}$.

Ces développements nous les utilisons dans (18) et (19), en tenant compte du fait que nous prenons, comme toujours, \times de l'ordre $1/c^2$; les premiers termes donnent :

$$\alpha=0, \beta=0 : \Delta\left(\frac{U^0}{2c^4} + \frac{\bar{U}^{pp}}{c^4}\right) = -\frac{\bar{x}_p}{c^2}$$

$$\alpha=0, \beta=i : \Delta(-2U^i/c^4) = -\bar{x} \frac{\bar{p}}{c^2} v^i ; \quad \alpha=i, \beta=j \neq i : \Delta(-2U^j/c^2) = 0(1/c^4);$$

$$\alpha=1, \beta=1 : \Delta\left(-\frac{2\bar{U}^{11}}{c^2} + \frac{U^0}{2c^2} - \frac{\bar{U}^{pp}}{c^2}\right) = 0\left(\frac{1}{c^4}\right),$$

$$\alpha=2, \beta=2 : \Delta\left(-\frac{2\bar{U}^{22}}{c^2} + \frac{U^0}{2r^2 c^2} - \frac{\bar{U}^{pp}}{r^2 c^2}\right) = 0\left(\frac{1}{c^4}\right),$$

$$\alpha=3, \beta=3 : \Delta\left(-\frac{2\bar{U}^{33}}{c^2} + \frac{U^0}{2r^2 \sin^2 \theta c^2} - \frac{\bar{U}^{pp}}{r^2 \sin^2 \theta c^2}\right) = 0\left(\frac{1}{c^4}\right)$$

où le signe Δ maintenant veut dire simplement : $-g^{ij} \nabla_i \nabla_j$, avec les g^{ij} de l'espace plat, puisque nous sommes en première approximation. Avec des conditions à l'infini qui traduisent le fait que l'espace doit tendre vers un

espace plat, et aussi qui donnent la continuité convenable, nous déduisons des dernières de (26) :

$$\begin{aligned}
 -2\bar{U}^{11} + \frac{U^0}{2} - \bar{U}^{pp} &= 0, \\
 -2\bar{U}^{22} + \frac{U^0}{2r^2} - \frac{\bar{U}^{pp}}{r^2} &= 0, & U^j = 0, \quad i \neq j. \\
 -2\bar{U}^{33} + \frac{U^0}{2r^2 \sin^2 \theta} - \frac{\bar{U}^{pp}}{r^2 \sin^2 \theta} &= 0,
 \end{aligned}$$

et en faisant l'addition :

$$2\bar{U}^{pp} + \frac{3U^0}{2} - 3\bar{U}^{pp} = 0 \Rightarrow 2\bar{U}^{pp} = 3U^0,$$

résultat que nous pouvons rapporté aux formules premières de (26) :

$$(27) \quad \Delta U^0 = -\frac{1}{2} (\kappa c^2)_{\bar{\rho}} \quad , \quad \Delta U^i = -v^i \Delta U^0 \rightarrow U^i = -v^i U^0$$

En plus de ces résultats qui concordent avec une théorie classique nous obtenons aussi que les U^{ij} sont nuls, résultat qui nous sera utile pour le calcul des S et qui est à la base de tous les calculs faits par approximations.

VII. — Équations du mouvement en première approximation.

Nous supposerons que l'espace-temps à la métrique de Schwarzschild plus la variation que nous venons de calculer et de cette métrique nous allons déduire le mouvement du corps petit qui est la cause de la variation. Nous fixons les variables de sorte que le corps central soit toujours au centre de coordonnées, c'est-à-dire que le mouvement à obtenir sera le mouvement relatif des deux corps. Nous verrons que les équations du mouvement impliquent la condition $k_\alpha = 0$, au moins au même ordre d'approximation dans laquelle nous sommes pour l'instant.

Nous déduirons les équations du mouvement des équations :

$$(28) \quad \nabla_\alpha \delta(T^\alpha_i) = 0,$$

équations qui doivent être comprises au sens de la métrique $g_{\alpha\beta} + \delta(g_{\alpha\beta})$; elles peuvent se mettre sous la forme bien connue :

$$(29) \quad \partial_\alpha [\delta(T^\alpha_i) \sqrt{-g}] = \frac{1}{2} \partial_i g_{\alpha\beta} \delta(T^{\alpha\beta}) \sqrt{-g},$$

où, $g = |g_{\alpha\beta}|$.

Tenant compte de la forme (19) des $\delta(T_i^j)$, nous pouvons écrire :

$$\delta(T_i^j) = v^j \delta(T_i^0) - \frac{\bar{p}}{c^2} \delta_i^j,$$

et par conséquent nous pouvons développer le premier terme de (29) de la forme suivante :

$$\begin{aligned} \partial_0[\delta(T_i^0)\sqrt{-g}] + \partial_j[\delta(T_i^j)\sqrt{-g}] \\ = \partial_0[\delta(T_i^0)\sqrt{-g}] + v^j \partial_j[\delta(T_i^0)\sqrt{-g}] - \partial_i \left[\frac{\bar{p}}{c^2} \sqrt{-g} \right], \end{aligned}$$

et en faisant intervenir la dérivée totale par rapport au temps selon la trajectoire que va suivre le petit corps : $d/dt = \partial_0 + v^j \partial_j$, nous obtenons :

$$\frac{d}{dt} (\delta(T_i^0)\sqrt{-g}) - \partial_i \left[\frac{\bar{p}}{c^2} \sqrt{-g} \right],$$

c'est-à-dire que les équations (29) auront maintenant la forme :

$$(30) \quad \frac{d}{dt} \int_A \delta(T_i^0) d\eta = \frac{1}{2} \int_A \partial_i g_{\alpha\beta} \delta(T^{\alpha\beta}) d\eta.$$

Ces trois formules appliquées à un des points du corps petit vont nous donner le mouvement cherché, en tenant compte de l'hypothèse de quasi-translation. Nous pouvons aussi employer la formule intégrale déduite de (30) :

$$(31) \quad \frac{d}{dt} [\delta(T_i^0)\sqrt{-g}] - \partial_i \left[\frac{\bar{p}}{c^2} \sqrt{-g} \right] = \frac{1}{2} \partial_i g_{\alpha\beta} \delta(T^{\alpha\beta}) \sqrt{-g},$$

qui donne des résultats analogues et qui sera la seule utilisée en deuxième approximation. Remarquons que $d\eta$ est l'élément de volume d'une section d'espace, c'est-à-dire : $d\eta = \sqrt{-g} dr \wedge d\theta \wedge d\varphi$; A est un domaine borné de cette section d'espace qui contient le petit corps. Remarquons aussi que le deuxième terme de (30) ne figure pas dans (31), puisque nous l'annulons en transformant son intégrale de volume dans une autre sur la frontière de A , et dans laquelle nous supposons la condition de Schwarzschild $\bar{p} = 0$.

Rappelons aussi que F. Hennequin [6], avait prouvé que dans un schéma matière pure : $T^{\alpha\beta} = \rho u^\alpha u^\beta$, la quantité,

$$(32) \quad m = \int_A \rho u^0 \sqrt{-g} dr \wedge d\theta \wedge d\varphi,$$

est conservée le long des lignes de courant et que par conséquent il était logique de prendre cette quantité comme masse et la quantité $\bar{\rho}u^0 \sqrt{-g}$ comme densité de masse, non seulement dans ce schéma mais aussi dans un schéma fluide parfait dans lequel nous avons encore :

$$(33) \quad \frac{d}{dt} (\bar{\rho}u^0 \sqrt{-g}) = 0 \left(\frac{1}{c^4} \right).$$

Développons maintenant les équations (30), qui nous donnent pour chaque valeur de i :

$$\begin{aligned} i=1 : & \frac{1}{2} \partial_1 g_{\alpha\beta} \delta(T^{\alpha\beta}) \sqrt{-g} \\ & = \frac{\bar{\rho}}{c} \left(\frac{k}{r^2} - \partial_1 U^0 \right) r^2 \sin \theta - \frac{\bar{\rho}}{c} r^3 \sin \theta \cdot \dot{\theta}^2 - \frac{\bar{\rho}}{c} r^3 \sin^3 \theta \cdot \dot{\varphi}^2 - \frac{2\bar{p}r \sin \theta}{c}, \\ i=2 : & \frac{1}{2} \partial_2 g_{\alpha\beta} \delta(T^{\alpha\beta}) \sqrt{-g} = -\frac{\bar{\rho}}{c} \partial_2 U^0 r^2 \sin \theta - \frac{\bar{\rho}}{c} r^4 \sin^2 \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 - \frac{\bar{p}}{c} r^2 \cos \theta, \\ i=3 : & \frac{1}{2} \partial_3 g_{\alpha\beta} \delta(T^{\alpha\beta}) \sqrt{-g} = -\frac{\bar{\rho}}{c} \partial_3 U^0 r^2 \sin \theta. \end{aligned}$$

En égalant les termes correspondants et tenant compte de (33), nous obtenons :

$$(34) \quad \frac{d}{dt} \dot{r} = -\frac{k}{r^2} + r\dot{\theta}^2 + r \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 ; \quad \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) = r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 ; \quad \frac{d}{dt} (r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}) = 0,$$

$$(35) \quad \partial_i \bar{p} = \bar{\rho} \partial_i U^0.$$

Ces dernières équations jouent le rôle d'une équation d'état du fluide classique et (34) est tout à fait identique aux équations du mouvement relatif de deux corps en Mécanique Classique si nous prenons :

$$(36) \quad k = G(M + m),$$

G , étant la constante de la gravitation.

Analoguement si nous partons des formules (31), nous arrivons à :

$$\begin{aligned} i=1 : & \frac{d}{dt} \int_{\Lambda} -\frac{\bar{\rho}}{c^2} \dot{r} d\eta \\ & = - \int_{\Lambda} \left\{ \frac{\bar{\rho}}{c^2} \partial_1 \left(\frac{k}{r} + U^0 \right) + \frac{\bar{\rho}}{c^2} (r\dot{\theta}^2 + r \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) \right\} d\eta - \int_{\Lambda} \frac{2\bar{p}}{c^2 r} d\eta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 i = 2 : \frac{d}{dt} \int_{\Lambda} - \frac{r^2 \bar{\rho}}{c^2} \dot{\theta} d\eta &= - \int_{\Lambda} \left\{ \frac{\bar{\rho}}{c^2} \partial_2 \left(\frac{k}{r} + U^0 \right) + \frac{\bar{\rho}}{c^2} r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 \right\} d\eta - \int_{\Lambda} \frac{\bar{p}}{c^2} \cot \theta d\eta, \\
 i = 3 : \frac{d}{dt} \int_{\Lambda} - \frac{r^2 \sin^2 \theta}{c^2} \frac{\dot{\varphi}}{\bar{\rho}} d\eta &= - \int_{\Lambda} \left\{ \frac{\bar{\rho}}{c^2} \partial_3 \left(\frac{k}{r} + U^0 \right) \right\} d\eta,
 \end{aligned}$$

c'est-à-dire si nous tenons compte de :

$$\begin{aligned}
 (37) \quad \int_{\Lambda} \bar{\rho} d\eta &= m, \quad \frac{d}{dt} m = 0 \left(\frac{1}{c^2} \right), \\
 i = 1 : m \frac{d}{dt} \dot{r} &= - \frac{km}{r^2} + \dot{\theta}^2 r m + \dot{\varphi}^2 r \sin^2 \theta m + \int_{\Lambda} \left(\bar{\rho} \partial_1 U^0 + \frac{2\bar{p}}{r} \right) d\eta, \\
 i = 2 : m \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) &= \dot{\varphi}^2 r^2 \sin \theta \cos \theta m + \int_{\Lambda} \left(\bar{\rho} \partial_2 U^0 + \bar{p} \cot \theta \right) d\eta; \\
 i = 3 : m \frac{d}{dt} (r^2 \sin \theta \dot{\varphi}) &= \int_{\Lambda} \bar{\rho} \partial_3 U^0 d\eta.
 \end{aligned}$$

Ces équations sont identiques aux équations (34) puisque les intégrales s'annulent sous la condition (35) et la condition de Schwarzschild $\bar{p} = 0$ que nous avons déjà admise avant. Notons que cette condition permet d'avoir des équations analogues à des équations classiques au moins à cette approximation, sans avoir besoin de la condition de symétrie sphérique pour la distribution des masses et pressions.

Nous avons prouvé (20) que les équations du mouvement imposées impliquent que $\Delta k^\alpha = 0$, au même ordre d'approximation. Maintenant ça veut dire que la laplacienne se réduit à $-g^{ij} \nabla_i \nabla_j$ et avec les conditions supposées de continuité et d'espace plat à l'infini $k^\beta = 0 \left(\frac{1}{c^2} \right)$; résultat suffisant pour la compatibilité de nos calculs, à cet ordre.

VIII. — Calcul de la deuxième approximation.

Maintenant cherchons à résoudre (18) avec la forme de solution supposée des $f^{\alpha\beta}$ (23), en tenant compte de ce que nous avons déjà trouvé, $U^j = 0$. Une fois calculés les U et les S nous obtenons les $h^{\alpha\beta}$ à partir de :

$$h^{\alpha\beta} = f^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} h$$

et comme par contraction, $f = -h$ nous avons, $h^{\alpha\beta} = f^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}f$:

$$\begin{aligned} h_{00} &= -2U^0 - \frac{2S^0}{c^2} - \frac{2S^{pp}}{c^2} + \frac{8UU^0}{c^2} + 0\left(\frac{1}{c^4}\right); h_{ij} = 0\left(\frac{1}{c^4}\right) \text{ pour } i \neq j; \\ h_{01} &= -\frac{4U^1}{c^2} + 0\left(\frac{1}{c^4}\right); h_{02} = -\frac{4r^2U^2}{c^2} + 0\left(\frac{1}{c^4}\right); h_{03} = -\frac{4r^2 \sin^2 \theta U^3}{c^2} + 0\left(\frac{1}{c^4}\right); \\ h_{11} &= -\frac{2U^0}{c^2} + 0\left(\frac{1}{c^4}\right); h_{22} = -\frac{2r^2U^0}{c^2} + 0\left(\frac{1}{c^4}\right); h_{33} = -\frac{2r^2 \sin^2 \theta U^0}{c^2} + 0\left(\frac{1}{c^4}\right). \end{aligned}$$

Nous utilisons la notation :

$$S^{pp} = g_{ij}S^{ij}$$

Pour pouvoir résoudre les équations (18) il est nécessaire d'approcher la métrique de Schwarzschild dans le sens suivant : La différence entre $g_{\alpha\beta}$ et $(g_{\alpha\beta})_{pp}$ doit être d'ordre supérieur aux valeurs de $\delta(g_{\alpha\beta})$, ce qui fait qu'à l'approximation considérée sont équivalentes. Pour qu'il en soit ainsi il suffit de retenir dans $g_{\alpha\beta}$ uniquement les termes jusqu'à l'ordre $\left(\frac{k}{c^2}\right)^2$ inclus. Cette simplification ne modifie pas le résultat cherché étant donné l'ordre de grandeur supposé de $\delta(g_{\alpha\beta})$. Ceci ne serait pas correct pour obtenir une approximation supérieure, qui d'ailleurs n'aurait pas de sens physique puisque alors nous devrions aussi considérer la seconde variation de la métrique de Schwarzschild.

Tenant compte de ces considérations dans les développements (21) et (22) et en employant aussi les formules (25) nous arrivons à la forme suivante pour les équations (18) :

$$\begin{aligned} \alpha = 0, \beta = 0 & \quad 2\Delta U^0 = (\kappa c^2)\bar{\rho}; \quad 2\Delta S^0 + 2\partial_{00}U^0 \\ & \quad + 4\frac{k}{r}\partial_{11}U^0 - 4\frac{k}{r^2}\partial_1U^0 = (\kappa c^2)2\bar{\rho}\left(\frac{k}{r} - \frac{(v)^2}{2}\right); \\ \alpha = 0, \beta = 1 & \quad -2\Delta U^1 = (\kappa c^2)\bar{\rho}v^1; \\ \alpha = 0, \beta = 2 & \quad -2\Delta U^2 = (\kappa c^2)\bar{\rho}v^2; \quad \alpha = 0, \beta = 3 : -2\Delta U^3 = (\kappa c^2)\bar{\rho}v^3; \\ (38) \quad \alpha = i, \beta = j \neq i & \quad -2\Delta S^{ij} = (\kappa c^2)\bar{\rho}v^i v^j; \\ \alpha = 1, \beta = 1 & \quad -2\Delta S^{11} + 8\frac{k}{r^3}U^0 = (\kappa c^2)\bar{\rho}(v^1)^2 + (\kappa c^2)\bar{p}; \\ \alpha = 2, \beta = 2 & \quad -2\Delta S^{22} - 4\frac{k}{r^3}U^0 = (\kappa c^2)\bar{\rho}(v^2)^2 + (\kappa c^2)\frac{\bar{p}}{r^2}; \\ \alpha = 3, \beta = 3 & \quad -2\Delta S^{33} - 4\frac{k}{r^3}\frac{U^0}{\sin^2 \theta} = (\kappa c^2)\bar{\rho}(v^3)^2 + (\kappa c^2)\frac{\bar{p}}{r^2 \sin^2 \theta}. \end{aligned}$$

Comme avant Δ est $-g^{ij}\nabla_i\nabla_j$ avec les g^{ij} d'un espace plat en coordonnées polaires habituelles et ne tenant compte que U^0 et S^0 sont traités comme scalaires, U^i et S^i sont traités comme vecteurs à trois dimensions et U^{ij} et S^{ij} comme tenseurs à deux indices à trois dimensions.

La première des équations (38) donne :

$$\Delta\left(\frac{k}{r}U^0\right) = \frac{k}{r}\Delta U^0 + U^0\Delta\left(\frac{k}{r}\right) - 2g^{ij}\partial_i\frac{k}{r}\partial_j U^0,$$

et comme,

$$\Delta\left(\frac{k}{r}\right) = 0; \partial_1\frac{k}{r} = -\frac{k}{r^2}; \partial_2\frac{k}{r} = \partial_3\frac{k}{r} = 0,$$

$$\Delta\left(\frac{k}{r}U_0\right) = \frac{k}{r}\Delta U^0 - 2\frac{k}{r^2}\partial_1 U^0,$$

nous obtenons :

$$\Delta S^0 = \partial_{00}U^0 + 2\frac{k}{r}\partial_{11}U^0 + \Delta\left(\frac{k}{r}U^0\right) + \frac{k}{r}\Delta U^0 - (v)^2\Delta U^0,$$

c'est-à-dire que S^0 a la forme :

$$(39) \quad S^0 = f + 2f' + l + \frac{k}{r}U^0 - (v)^2U^0,$$

avec,

$$(40) \quad \Delta f = \partial_{00}U^0 \quad ; \quad \Delta f' = \frac{k}{r}\partial_{11}U^0 \quad ; \quad \Delta l = \frac{k}{r}\Delta U^0.$$

Nous avons des formules analogues pour S^{0i} et S^{ij} pour $i \neq j$, que nous n'écrivons pas puisqu'elles n'interviennent pas dans les équations du mouvement. Voyons finalement le calcul des S^{11} , S^{22} et S^{33} , plus précisément de S^{pp} , puisque cette quantité est celle qui entre dans les équations du mouvement, d'une manière analogue à U^{pp} en première approximation. Multiplions les trois dernières formules de (38) par g^{11} , g^{22} et g^{33} , respectivement :

$$\Delta S^{11} = 4\frac{k}{r^3}U^0 - \frac{1}{2}[(\kappa c^2)\bar{\rho}(v^1)^2 + (\kappa c^2)\bar{p}],$$

$$r^2\Delta S^{22} = -2\frac{k}{r^3}U^0 - \frac{1}{2}[(\kappa c^2)\bar{\rho}r^2(v^2)^2 + (\kappa c^2)\bar{p}],$$

$$r^2\sin^2\theta\Delta S^{33} = -2\frac{k}{r^3}U^0 - \frac{1}{2}[(\kappa c^2)\bar{\rho}r^2\sin^2\theta(v^3)^2 + (\kappa c^2)\bar{p}].$$

et en les additionnant,

$$g_{ij}\Delta S^{ij} = -\frac{1}{2}(\kappa c^2)\bar{\rho}(v)^2 + \frac{3}{2}(\kappa c^2)\bar{p} = -(v)^2\Delta U^0 + \frac{3}{2}(\kappa c^2)\bar{p}.$$

et comme,

$$g_{ij} \Delta S^{ij} = \Delta(g_{ij} S^{ij}) = \Delta S^{pp},$$

nous arrivons pour S^{pp} à obtenir la forme :

$$(41) \quad S^{pp} = - (v)^2 U^0 + \frac{3}{2} n,$$

avec,

$$(42) \quad \Delta n = (\kappa c^2) \bar{p}.$$

Nous additionnons les formules (40) et (41) pour obtenir un résultat qui sera utilisé par la suite :

$$(42') \quad S^0 + S^{pp} = -f - 2f' + 2U^0 \left(\frac{k}{2r} - (v)^2 \right) + \frac{3}{2} n + l$$

Jusqu'ici nous n'avons fait aucune supposition sur les fonctions ρ et p tout ce que nous avons dit est qu'ils sont liés par les équations (35); comme nous voulons obtenir un résultat concret il nous faut préciser davantage; pour un résultat concret j'entends trouver une solution des équations (40) et (42). Le plus simple que nous pouvons faire est de prendre la condition de symétrie sphérique autour d'un point intérieur 0 du corps petit, c'est-à-dire supposer que,

$$(43) \quad \bar{\rho} = \bar{\rho}(R) \quad ; \quad \bar{p} = \bar{p}(R) \quad ; \quad U^0 = U^0(R) \quad ; \quad \int_{\mathbf{A}} f(R) \partial_i R d\eta = 0,$$

f étant une fonction explicite de R seulement et R la distance par rapport à ce point 0. Ces conditions sont les mêmes qui dans un espace plat traduisent ce qu'on imagine pour symétrie sphérique et que maintenant nous prendrons comme définition.

Avec cette condition nous pourrons calculer f, f', l et n ; nous le ferons explicitement pour f et f' , mais non pour l et n puisque pour les équations du mouvement ce n'est pas f, f', l et n qu'il nous faut, mais :

$$(44) \quad \int_{\mathbf{A}} \bar{\rho}(R) \partial_i f d\eta \quad , \quad \int_{\mathbf{A}} \bar{\rho}(R) \partial_i f' d\eta, \\ \int_{\mathbf{A}} \bar{\rho}(R) \partial_i l d\eta \quad , \quad \int_{\mathbf{A}} \bar{\rho}(R) \partial_i n d\eta,$$

et nous allons voir que ces deux dernières sont nulles en utilisant la condition de symétrie sphérique. C'est évident pour n puisque de son équation de définition nous déduisons : $n = n(R)$ et alors l'intégrale correspondante

à n est du type (43). Voyons maintenant l ; de sa définition nous déduisons :

$$\Delta l = \frac{k}{r} \Delta U^0$$

c'est-à-dire que si les deux corps sont suffisamment éloignés la valeur de l est peu différente de $l \sim k/r$. U^0 à l'intérieur du petit corps et par conséquent l'intégrale,

$$\int_A \bar{\rho}(R) \partial_i l d\tau_i$$

est aussi du type (43) et par conséquent nulle.

Avant de faire le calcul explicite de f et f' nous ferons quelques considérations sur les coordonnées sphériques sous la condition de symétrie que nous avons défini pour en déduire quelques équations qui nous seront utiles par la suite.

IX. — Étude de la symétrie sphérique.

Les coordonnées polaires donnent lieu, presque toujours, à des calculs assez longs; je voudrais ici résumer les résultats qu'on peut obtenir en partant des hypothèses de quasi-translation et symétrie sphérique (43).

Nous avons besoin de ces formules pour le calcul de f , f' et aussi par les équations du mouvement en deuxième approximation, c'est-à-dire des calculs à $1/c^2$ près et par conséquent nous pouvons traiter l'espace comme un espace plat.

a) Avant d'entrer dans le détail nous introduisons la fonction d'univers $\Omega(x, x')$, puisque certains résultats qu'on peut déduire d'elle nous seront utiles :

Si A et O sont deux points de l'espace-temps, que nous pouvons unir par une géodésique d'équation $x^i = \xi^i(u)$, où u est un paramètre, la fonction d'univers est :

$$\Omega(A, O) = \Omega(x_1^i, x_2^i) = \frac{1}{2} (u^1 - u^0) \int_{u_0}^{u_1} g_{ij} u^i u^j du.$$

définition que dans le cas d'un 3-espace plat se réduit à :

$$(45) \quad \Omega(x_1^i, x_2^i) = -\frac{1}{2} R^2,$$

R^2 étant la distance euclidienne entre A et O, c'est-à-dire en coordonnées rectilignes cartésiennes :

$$(46) \quad R^2 = -g_{ij}(x_1^i - x_2^i)(x_1^j - x_2^j)$$

avec,

$$g_{ii} = -1 \quad , \quad g_{ij} = 0 \quad \text{pour } i \neq j,$$

et en coordonnées polaires,

$$(47) \quad (x_1^i) = (r_1, \theta_1, \varphi_1) \quad ; \quad (x_2^i) = (r_2, \theta_2, \varphi_2),$$

$$R^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cdot a$$

avec,

$$a = \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos (\varphi_1 - \varphi_2) + \cos \theta_1 \cos \theta_2.$$

La forme (46) de R sera utilisée surtout pour suggérer des formules qui avec elle sont presque évidentes mais non avec la forme (47).

Il faut noter que la fonction d'univers est un biscalaire et comme tel si nous prenons sa dérivée covariante il faut préciser par rapport à quel point, A ou O. Les dérivées covariantes de Ω nous le noterons avec un subindex à continuation de Ω [10]; i_1 voudra dire dérivée par rapport à la coordonnée i_1 du point A, i_2 voudra dire dérivée par rapport à la coordonnée i_2 du point O et i dérivée par rapport à la coordonnée i d'un des deux points indifféremment.

Par sa définition Ω satisfait à :

$$(48) \quad g^{ij}\Omega_i\Omega_j = 2\Omega$$

et aussi il est facile de vérifier,

$$\Omega_{ij} = \Omega_{ji}.$$

Pour pouvoir comparer un vecteur v_{i_1} à d'autres au point O, nous utilisons le transport par parallélisme le long d'une ligne droite :

$$(\text{tr } v)^{i_2} = t_{j_1}^{i_2} v^{j_1},$$

$t_{j_1}^{i_2}$ étant le bi-1-tenseur qui fait le transport et qu'en coordonnées rectilignes cartésiennes est égal à $\delta_{j_1}^{i_2}$. On définit le bitenseur de transport $t_{i_1 j_1}$ par l'équation :

$$(49) \quad t_{i_1 j_1} t_{j_1}^{i_2} = g_{i_1 j_1},$$

lequel donne en coordonnées rectilignes cartésiennes,

$$t_{i_1 j_1} = g_{ij} \quad \text{et aussi} \quad \nabla t_{i_1 j_1} = 0.$$

Avec l'aide de ces tenseurs nous arrivons à obtenir pour les dérivées covariantes de Ω les formules suivantes :

$$(50) \quad \Omega_{ij} = g_{ij} \quad ; \quad \Omega_{i_2 j_1} = \Omega_{j_1 i_2} = -t_{j_1 i_2} \quad ; \quad \Omega_{i_1 j_1 k_2} = 0.$$

Ces formules et la formule (48) se traduisent pour R^2 en :

$$(50') \quad \nabla_i \nabla_j R^2 = -2g_{ij} \quad ; \quad \nabla_{i_1} \nabla_{j_1} \partial_{k_2} R^2 = 0 \quad ; \quad \nabla_{i_1} \partial_{j_2} R^2 = 2t_{i_1 j_2} \quad ; \quad g^{ij} \partial_i R \partial_j R = -1.$$

b) Voyons maintenant ce que nous pouvons déduire de l'hypothèse de quasi-translation : $\nabla_i v^j = 0 \left(\frac{1}{c^2} \right)$.

(51)

$$\begin{aligned} \partial_1 v^1 &= 0 & , \quad \partial_1(v^2 r^2) &= r v^2 & , \quad \partial_1(v^3 r^2 \sin^2 \theta) &= r \sin^2 \theta v^3, \\ \partial_2 v^1 &= r v^2 & , \quad \partial_2(v^2 r^2) &= -r v^1 & , \quad \partial_2(v^3 r^2 \sin^2 \theta) &= r^2 \sin \theta \cos \theta v^3, \\ \partial_3 v^1 &= r v^3 \sin^2 \theta & , \quad \partial_3(v^2 r^2) &= r^2 \cos \theta \sin \theta v^3 & , \quad \partial_3(v^3 r^2 \sin^2 \theta) &= r^2 \sin \theta \cos \theta v^2. \end{aligned}$$

c) Pour l'application de la condition de symétrie sphérique nous aurons besoin de certaines formules concernant la fonction R qui joue alors un rôle très important. La fonction a que nous avons introduit dans la définition de R peut se mettre sous la forme,

$$a = b + \cos \theta_1 \cos \theta_2,$$

avec,

$$b = \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \sin \theta_1 \sin \theta_2.$$

Nous utilisons aussi les identités :

$$b = a \sin^2 \theta_1 + f\left(\theta_1 + \frac{\pi}{2}, \varphi\right) \sin \theta_1 \cos \theta_1,$$

$$a^2 + a^2\left(\theta_1 + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{\sin^2 \theta_1} b^2\left(\varphi_1 + \frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Avec l'aide de ces calculs nous avons pour les dérivées secondes de R :

$$(51') \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 R}{\partial r_1^2} &= \frac{1}{R} \left[1 - \left(\frac{\partial R}{\partial r_1} \right)^2 \right] = \frac{1}{R} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 R^2}{\partial r_1^2} - \left(\frac{\partial R}{\partial r_1} \right)^2 \right], \\ \frac{\partial^2 R}{\partial \theta_1^2} &= \frac{1}{R} \left[r_1 r_2 a - \left(\frac{\partial R}{\partial \theta_1} \right)^2 \right] = \frac{1}{R} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 R^2}{\partial \theta_1^2} - \left(\frac{\partial R}{\partial \theta_1} \right)^2 \right], \\ \frac{\partial^2 R}{\partial \varphi_1^2} &= \frac{1}{R} \left[r_1 r_2 b - \left(\frac{\partial R}{\partial \varphi_1} \right)^2 \right] = \frac{1}{R} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 R^2}{\partial \varphi_1^2} - \left(\frac{\partial R}{\partial \varphi_1} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

X. — Calcul de la fonction f .

La définition de f est à partir de :

$$\Delta_{(1)}f = \partial_{00}U^0$$

avec $U^0 = U^0(R)$; résultat que nous déduisons de la première des équations (38) et de $\bar{\rho} = \bar{\rho}(R)$. Nous utiliserons les notations,

$$\frac{dU^0}{dR} \equiv U^{0'} \quad ; \quad \frac{dx^i}{dt} \equiv \dot{x}^i$$

Calculons la forme de $\partial_{00}U^0$ sous ces hypothèses; d'abord pour la première dérivée nous avons :

$$\partial_0 U^0 = U^{0'} \frac{\partial R}{\partial x_2^i} \dot{x}_2^i,$$

et pour la deuxième :

$$(52) \quad \partial_{00}U^0 = U^{0''} \frac{\partial R}{\partial x_2^j} \frac{\partial R}{\partial x_2^i} \dot{x}_2^j \dot{x}_2^i + U^{0'} \frac{\partial^2 R}{\partial x_2^j \partial x_2^i} \dot{x}_2^j \dot{x}_2^i + U^{0'} \frac{\partial R}{\partial x_2^j} \ddot{x}_2^j.$$

Mais tenant compte de,

$$\frac{\nabla \dot{x}_2^j}{dt} = \ddot{x}_2^j + \Gamma_{i_2 j_2}^{i_2} \dot{x}_2^i \dot{x}_2^j,$$

$$\nabla_{i_2} \partial_{j_2} R = \partial_{i_2 j_2} R - \Gamma_{i_2 j_2}^{i_2} \partial_{i_2} R,$$

nous pouvons donner un formalisme covariant à (52) :

$$\partial_{00}U^0 = U^{0''} \frac{\partial R}{\partial x_2^j} \frac{\partial R}{\partial x_2^i} \dot{x}_2^j \dot{x}_2^i + U^{0'} \nabla_{i_2} \partial_{j_2} R \dot{x}_2^j \dot{x}_2^i + U^{0'} \frac{\partial R}{\partial x_2^j} \frac{\nabla \dot{x}_2^j}{dt}.$$

En utilisant le résultat,

$$R \nabla_{i_2} \partial_{j_2} R = - \partial_{i_2} R \partial_{j_2} R + \frac{1}{2} \nabla_{i_2} \partial_{j_2} R^2,$$

la dérivée seconde $\partial_{00}U^0$ prend la forme :

$$\partial_{00}U^0 = U^{0''} \partial_{i_2} R \partial_{j_2} R \dot{x}_2^i \dot{x}_2^j - \frac{U^{0'}}{R} \partial_{i_2} R \partial_{j_2} R \dot{x}_2^i \dot{x}_2^j + \frac{U^{0'}}{2R} \Delta_{i_2} \partial_{j_2} R^2 \dot{x}_2^i \dot{x}_2^j + U^{0'} \partial_{i_2} R \ddot{x}_2^i.$$

Les deux premiers termes peuvent être résumés en un seul :

$$\frac{1}{R} \left(\frac{U^{0'}}{R} \right)' (R^2 \partial_{i_2} R \partial_{j_2} R \dot{x}_2^i \dot{x}_2^j).$$

Finalement de la définition de fonction d'univers nous déduisons que cette dérivée peut aussi s'écrire,

$$(53) \quad \partial_{00}U^0 = \frac{1}{R} \left(\frac{U^{0'}}{R} \right)' (\Omega_{i_1} \Omega_{j_1} \dot{x}_2^i \dot{x}_2^j) - \frac{U^{0'}}{R} (v_2)^2 - \frac{U^{0'}}{R} \Omega_{i_1} \ddot{x}_2^i,$$

où nous avons utilisé la notation : $(v_2)^2 = g_{ij}v^i v^j$.

Devant cette forme de $\partial_{00}U^0$ nous allons prouver une solution de (40) de la forme :

$$(54) \quad f = \lambda(v_2)^2 + \mu(\Omega_{i_1} \Omega_{j_1} \dot{x}_2^i \dot{x}_2^j) + \nu(\Omega_{i_1} \ddot{x}_2^i),$$

λ , μ et ν , fonctions de R à déterminer. Si f a cette forme sa laplacienne est elle de la forme :

$$\begin{aligned} \Delta_{(1)}f &\equiv -g^{i_1 j_1} \nabla_{i_1} \nabla_{j_1} f = (v_2)^2 \Delta_{(1)}\lambda - 2g^{i_1 j_1} \mu \Omega_{i_1 i_2} \Omega_{j_1 j_2} \dot{x}_2^i \dot{x}_2^j \\ &\quad + \Delta_{(1)}\mu (\Omega_{i_1} \Omega_{j_1} \dot{x}_2^i \dot{x}_2^j) + 2\mu \Omega_{i_1} \Delta_{(1)}\Omega_{j_1} \dot{x}_2^i \dot{x}_2^j - 4g^{i_1 j_1} [\partial_{i_1} \mu \Omega_{i_2} \Omega_{j_1 j_2} \dot{x}_2^i \dot{x}_2^j] \\ &\quad + \Delta_{(1)}\nu \Omega_{i_1} \ddot{x}_2^i + \nu \Delta_{(1)}\Omega_{i_1} \ddot{x}_2^i - 2g^{i_1 j_1} \partial_{i_1} \nu \Omega_{i_2 j_2} \ddot{x}_2^i. \end{aligned}$$

Pour développer ces calculs nous utilisons (50); d'abord étudions les termes du type,

$$2\mu \Omega_{i_1} \Delta_{(1)}\Omega_{j_1} \dot{x}_2^i \dot{x}_2^j \quad \text{et} \quad \nu \Delta_{(1)}\Omega_{i_1} \ddot{x}_2^i,$$

lesquels sont nuls, puisque de (50) nous déduisons :

$$\Delta_{(1)}\Omega_{j_1} \equiv -g^{i_1 i_2} \nabla_{i_1} \nabla_{j_1} \Omega_{j_2} = -g^{i_1 j_1} \Omega_{i_1 j_1 j_2} = 0.$$

Étudions maintenant les $\Delta_{(1)}\lambda$, $\Delta_{(1)}\mu$, $\Delta_{(1)}\nu$:

$$\Delta_{(1)}\lambda \equiv -g^{i_1 j_1} \nabla_{i_1} \nabla_{j_1} \lambda = -g^{i_1 j_1} \nabla_{i_1} (\lambda' \partial_{j_1} R) = -g^{i_1 j_1} \lambda'' \partial_{i_1} R \partial_{j_1} R + \lambda' \Delta R,$$

et si nous utilisons la dernière des formules (50'),

$$\Delta \Omega = -3 \quad ; \quad \Delta R^2 = 6 \quad ; \quad \Delta R = \frac{2}{R},$$

$$\Delta R^2 = 2R \Delta R - 2g^{ij} \partial_i R \partial_j R = 2R \Delta R + 2,$$

nous obtenons,

$$\Delta_{(1)}\lambda = \lambda'' + \frac{2\lambda'}{R}.$$

Voyons maintenant le terme,

$$-4g^{i_1 j_1} \partial_{i_1} \mu \Omega_{i_2} \Omega_{j_1 j_2} \dot{x}_2^i \dot{x}_2^j = -4g^{i_1 j_1} \frac{\mu'}{R} R \frac{\partial R}{\partial x_1^i} \Omega_{i_2} \Omega_{j_1 j_2} \dot{x}_2^i \dot{x}_2^j,$$

lequel peut être simplifié utilisant la deuxième formule de (50),

$$4 \frac{\mu'}{R} g^{i,j_1} \Omega_{i_1} \Omega_{i_2} t_{j_1 j_2} \ddot{x}_2^i \ddot{x}_2^j = 4 \frac{\mu'}{R} \delta_{j_1}^{j_2} \Omega_{i_1} \Omega_{i_2} \ddot{x}_2^i \ddot{x}_2^j = 4 \frac{\mu'}{R} \Omega_{j_1} \Omega_{i_2} \ddot{x}_2^i \ddot{x}_2^j.$$

Les calculs ont été faits en coordonnées cartésiennes mais comme le résultat est tensorielle il est valable dans un système quelconque de coordonnées. Analoguement nous trouvons pour le terme,

$$- 2g^{i,j_1} \mu \Omega_{i_1 i_2} \Omega_{j_1 j_2} \ddot{x}_2^i \ddot{x}_2^j$$

l'expression suivante,

$$- 2g^{i,j_1} \mu t_{i_1 i_2} t_{j_1 j_2} \ddot{x}_2^i \ddot{x}_2^j = - 2\mu \delta_{i_1}^{j_2} t_{j_1 j_2} \ddot{x}_2^i \ddot{x}_2^j = - 2\mu g_{i_1 j_1} \ddot{x}_2^i \ddot{x}_2^j = - 2\mu (v_2)^2.$$

Finalement reste le terme,

$$- 2g^{i,j_1} \partial_{i_1} \nu \Omega_{j_1 i_2} \ddot{x}_2^i = 2g^{i,j_1} \frac{\nu'}{R} \Omega_{i_1} t_{j_1 i_2} \ddot{x}_2^i = 2 \frac{\nu'}{R} \Omega_{i_2} \ddot{x}_2^i,$$

que nous avons traité d'une façon très semblable aux précédents.

Pour le développement de la laplacienne de f nous arrivons à :

$$\Delta_{(1)} f = \left(\lambda'' + \frac{2\lambda'}{R} - 2\mu \right) (v_2)^2 + \left(\mu'' + \frac{6\mu'}{R} \right) (\Omega_{i_2} \Omega_{j_2} \ddot{x}_2^i \ddot{x}_2^j) + \left(\nu'' + \frac{4\nu'}{R} \right) (\Omega_{i_2} \ddot{x}_2^i),$$

et en identifiant les coefficients de,

$$(v_2)^2, \quad \Omega_{i_2} \Omega_{j_2} \ddot{x}_2^i \ddot{x}_2^j, \quad \Omega_{i_2} \ddot{x}_2^i,$$

avec ceux de la dérivée seconde de $\partial_{00} U^0$, nous obtenons les équations différentielles de second ordre linéaires suivantes :

$$\begin{aligned} \lambda'' + \frac{2\lambda'}{R} - 2\mu &= \frac{U^0}{R} \\ \mu'' + \frac{6\mu'}{R} &= \frac{1}{R} \left(\frac{U^0}{R} \right)' \\ \nu'' + \frac{4\nu'}{R} &= \frac{U^0}{R}. \end{aligned}$$

Les solutions de ce système qui prennent la valeur zéro, ainsi que leurs dérivées premières par rapport à R , pour R tendant vers l'infini sont :

$$(55) \quad \begin{aligned} -\lambda = \nu &= \frac{1}{R^3} \int_0^R U^0 R^2 dR, \\ \mu &= \frac{U^0}{R^2} - \frac{3}{R^5} \int_0^R U^0 R^2 dR, \end{aligned}$$

R étant la distance de A à O .

Nous avons déjà dit que dans les équations du mouvement ce qui nous faudra est,

$$\int_{\mathbf{A}} \bar{\rho} \partial_i f d\eta,$$

calcul que nous allons faire en employant la condition de symétrie sphérique. Calculons d'abord la dérivée $\partial_i f$:

$$\begin{aligned} \partial_i f &= \partial_i \lambda (v_2)^2 + \lambda \partial_i (v_2)^2 \\ &+ \partial_i \mu \Omega_i \Omega_j \dot{x}_2^i \dot{x}_2^j + 2\mu \Omega_i \Omega_j \dot{x}_2^i \dot{x}_2^j + 2\mu \Omega_i \Omega_j \dot{x}_2^i \partial_i \dot{x}_2^j \\ &+ \partial_i \nu \Omega_i \ddot{x}_2^i + \nu \Omega_i \ddot{x}_2^i + \nu \Omega_i \partial_i \ddot{x}_2^i, \end{aligned}$$

c'est-à-dire, si nous tenons compte de l'hypothèse de quasi-translation, de (50) :

(56)

$$\partial_i f = -\frac{\lambda'}{\mathbf{R}} \Omega_i (v_2)^2 - \frac{\mu'}{\mathbf{R}} \Omega_i \Omega_j \dot{x}_2^i \dot{x}_2^j - 2\mu t_{i_1 i_2} \Omega_j \dot{x}_2^i \dot{x}_2^j - \frac{\nu'}{\mathbf{R}} \Omega_i \Omega_i \ddot{x}_2^i - \nu t_{i_1 i_2} \ddot{x}_2^i,$$

l'intégrale à calculer se réduit à :

$$\begin{aligned} & - \int_{\mathbf{A}} \bar{\rho} \frac{\lambda'}{\mathbf{R}} \Omega_i (v_2)^2 d\eta - \int_{\mathbf{A}} \bar{\rho} \frac{\mu'}{\mathbf{R}} \Omega_i \Omega_j \dot{x}_2^i \dot{x}_2^j d\eta - 2 \int_{\mathbf{A}} \bar{\rho} \mu t_{i_1 i_2} \Omega_j \dot{x}_2^i \dot{x}_2^j d\eta \\ & - \int_{\mathbf{A}} \bar{\rho} \frac{\nu'}{\mathbf{R}} \Omega_i \Omega_i \ddot{x}_2^i d\eta - \int_{\mathbf{A}} \bar{\rho} \nu t_{i_1 i_2} \ddot{x}_2^i d\eta. \end{aligned}$$

Les seules qui ne sont pas nulles sont,

$$- \int_{\mathbf{A}} \bar{\rho} \nu t_{i_1 i_2} \ddot{x}_2^i d\eta = -\ddot{x}_1^i \int_{\mathbf{A}} \bar{\rho}(\mathbf{R}) \nu(\mathbf{R}) d\eta$$

et

$$- \int_{\mathbf{A}} \bar{\rho} \frac{\nu'}{\mathbf{R}} \Omega_i \Omega_i \ddot{x}_2^i d\eta = -\frac{1}{3} \ddot{x}_1^i \int_{\mathbf{A}} \bar{\rho}(\mathbf{R}) \frac{\nu'(\mathbf{R})}{\mathbf{R}} \mathbf{R}^2 d\eta.$$

Ce résultat a été obtenu en faisant le calcul en coordonnées rectilignes cartésiennes et comme il conserve son formalisme tensoriel il est valable dans un système de coordonnées quelconque. Nous avons utilisé aussi le résultat :

$$(57) \quad \int_{\mathbf{A}} f(\mathbf{R}) \Omega_i \Omega_i d\eta = \int_{\mathbf{A}} f(\mathbf{R}) \mathbf{R}^2 d\eta.$$

Nous arrivons donc, à la forme suivante pour l'intégrale :

$$\int_{\mathbf{A}} \bar{\rho} \partial_i f d\eta = -\ddot{x}_1^i \int_{\mathbf{A}} \bar{\rho}(\mathbf{R}) \left[\nu(\mathbf{R}) + \frac{1}{3} \nu'(\mathbf{R}) \mathbf{R} \right] d\eta,$$

la quantité sous l'intégrale peut être calculée à partir de la solution trouvée pour v ,

$$v' = \frac{3}{R^3} \int_0^R U^0 R^2 dR + \frac{U^0}{R}.$$

Le résultat final est :

$$(58) \quad \int_A \bar{\rho} \partial_i f d\eta = - \frac{\ddot{x}_1^i}{3} \int_A \bar{\rho} U^0 d\eta.$$

XI. — Calcul de la fonction f' .

La définition de f' est :

$$(59) \quad \Delta f' = \partial_{11} U^0 \cdot \frac{k}{r}$$

avec comme avant, $U^0 = U^0(R)$.

Calculons la forme de $\partial_{11} U^0$, sous ces hypothèses; d'abord pour la première dérivée nous avons :

$$\partial_1 U^0 = U^{0'} \frac{\partial R}{\partial r},$$

et pour la deuxième,

$$\partial_{11} U^0 = U^{0''} \left(\frac{\partial R}{\partial r} \right)^2 + U^{0'} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2},$$

mais tenant compte des formules (51'), nous pouvons écrire :

$$\partial_{11} U^0 = U^{0''} \left(\frac{\partial R}{\partial r} \right)^2 + U^{0'} \frac{1}{R} \left[1 - \left(\frac{\partial R}{\partial r} \right)^2 \right],$$

les deux premiers termes nous pouvons les unir comme avant pour $\partial_{00} U^0$

$$\partial_{11} U^0 = \frac{1}{R} \left(\frac{U^{0'}}{R} \right)' \left[R^2 \left(\frac{\partial R}{\partial r} \right)^2 \right] + \frac{U^{0'}}{R}.$$

Devant cette forme de $\partial_{11} U^0$, nous allons prouver une solution de (59) du type :

$$f' = \lambda(R) \frac{k}{r} R^2 \left(\frac{\partial R}{\partial r} \right)^2 + \mu(R) \frac{k}{r},$$

ou bien si nous faisons l'approximation,

$$\frac{\partial R}{\partial r} \sim \frac{r_1 - r_2}{R} \sim \frac{r_1 - r_2 \cos \alpha}{R}$$

valable dans l'ordre de précision que nous nous avons fixé, une f' de la forme :

$$f' \sim \lambda(R) \frac{k}{r} (r-a)^2 + \mu(R) \frac{k}{r}$$

avec, λ et μ , fonctions à déterminer. Si f' a cette forme sa laplacienne est-elle de la forme :

$$\begin{aligned} \Delta f' &= \lambda(R) k \Delta \frac{(r-a)^2}{r} + \Delta \lambda \cdot \frac{k}{r} (r-a)^2 - 2g^{11} \partial_1 \lambda \partial_1 \left[\frac{k}{r} (r-a)^2 \right] \\ &+ \Delta \mu \cdot \frac{k}{r} + \mu \Delta \frac{k}{r} - 2g^{11} \partial_1 \mu \partial_1 \frac{k}{r}, \end{aligned}$$

et nous pouvons la calculer avec l'aide des résultats :

$$\Delta \lambda = \lambda'' + \frac{2\lambda'}{R} \quad ; \quad \Delta \frac{(r-a)^2}{r} = \frac{2}{r},$$

et nous obtenons :

$$\Delta f' = \left(\lambda'' + \frac{2\lambda'}{R} \right) \frac{k}{r} (r-a)^2 + \lambda \cdot \frac{2k}{r} + \frac{4\lambda'}{R} \frac{k}{r} (r-a)^2 + \left(\mu'' + \frac{2\mu'}{R} \right) \frac{k}{r}.$$

Maintenant si nous identifions les coefficients de,

$$\frac{k}{r} (r-a)^2 \quad \text{et} \quad \frac{k}{r},$$

avec ceux de la dérivée seconde de $\partial_{11} U^0$, nous arrivons aux équations différentielles de second ordre linéaires :

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \left(\frac{U^{0'}}{R} \right)' &= \lambda'' + \frac{6\lambda'}{R}, \\ \frac{U^{0'}}{R} &= \mu'' + \frac{2\mu'}{R} + 2\lambda. \end{aligned}$$

Les solutions de ce système qui prennent la valeur zéro, ainsi que leurs dérivées premières par rapport à R , pour R tendant vers l'infini sont :

$$(60) \quad \begin{aligned} \lambda &= \frac{U^0}{R^2} - \frac{3}{R^5} \int_0^R U^0 R^2 dR, \\ \mu &= \frac{1}{R^3} \int_0^R U^0 R^2 dR, \end{aligned}$$

R étant maintenant la distance entre les points A et O .

Comme avant il nous faut calculer l'intégrale,

$$\int_{\Lambda} \bar{\rho} \partial_i f' d\eta$$

qui sera utilisé par la suite; voyons d'abord la dérivée première par rapport à i_1 de f' :

$$\begin{aligned} \partial_1 f' = \partial_1 \lambda \cdot \frac{k}{r} R^2 \left(\frac{\partial R}{\partial r} \right)^2 + \lambda \cdot \partial_1 \frac{k}{r} R^2 \left(\frac{\partial R}{\partial r} \right)^2 + \lambda \cdot \frac{k}{r} \partial_1 \left[R^2 \left(\frac{\partial R}{\partial r} \right)^2 \right] \\ + \partial_1 \mu \cdot \frac{k}{r} + \mu \partial_1 \frac{k}{r}. \end{aligned}$$

Par les mêmes considérations que nous avons employé avec f' , nous sommes réduits aux deux intégrales :

$$- \int_{\Lambda} \bar{\rho} \lambda \frac{k}{r^2} R^2 \left(\frac{\partial R}{\partial r} \right)^2 d\eta \quad \text{et} \quad - \int_{\Lambda} \bar{\rho} \mu \frac{k}{r^2} d\eta.$$

La première peut être calculée avec l'aide de (57) et nous avons :

$$- \int_{\Lambda} \bar{\rho} \lambda \frac{k}{r^2} R^2 \left(\frac{\partial R}{\partial r} \right)^2 d\eta = - \frac{k}{r^2} \int_{\Lambda} \bar{\rho}(R) \cdot \frac{1}{3} \lambda(R) R^2 d\eta.$$

Et si nous utilisons la solution obtenue pour f' (60) :

$$\begin{aligned} \int_{\Lambda} \bar{\rho} \partial_1 f' d\eta = - \frac{k}{3r^2} \int_{\Lambda} \bar{\rho} U^0 d\eta_i - \frac{k}{r^2} \int_{\Lambda} \frac{\bar{\rho}}{R^3} \left(\int_0^R U^0 R^2 dR \right) d\eta \\ + \frac{k}{r^2} \int_{\Lambda} \frac{\bar{\rho}}{R^3} \left(\int_0^R U^0 R^2 dR \right) d\eta, \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$(61) \quad \int_{\Lambda} \bar{\rho} \partial_1 f' d\eta = - \frac{k}{3r^2} \int_{\Lambda} \bar{\rho} U^0 d\eta.$$

Pour $i = 2, 3$, il est facile de voir que nous avons :

$$(62) \quad \int_{\Lambda} \bar{\rho} \partial_2 f' d\eta = \int_{\Lambda} \bar{\rho} \partial_3 f' d\eta = 0.$$

XII. — Équations du mouvement en deuxième approximation.

Les équations du mouvement que nous imposons sont les mêmes qu'avant, c'est-à-dire :

$$\nabla_{\alpha} \delta(T^{\alpha i}) = 0,$$

mais maintenant nous devons faire les calculs avec une précision supérieure d'un ordre à celle de la première approximation. Pour le premier membre des équations (31) nous avons besoin de calculer $\delta(T^0_i)$,

$$\delta(T^0_i) = \delta(T^{\alpha\beta})g_{\alpha i} = \delta(T^{00})h_{0i} + \delta(T^{0j})h_{ji} + \delta(T^{0i})g_{ii}$$

Comme nous avons dit avant la quantité que physiquement nous devons prendre comme densité de masse est : $\bar{\rho}u^0c$, laquelle si bien n'est pas conservative le long des lignes de courant du fluide elle est la plus conservative qu'on peut trouver [6]. Nous prendrons donc :

$$\bar{\rho}u^0c = \bar{m} \quad ; \quad \bar{\rho} = \frac{\bar{m}}{cu^0} = \bar{m} \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(U - \frac{(v)^2}{2} \right) \right],$$

et nous poserons les T^0_i en fonction de cette \bar{m} :

$$(63) \quad \begin{aligned} \delta(T^0_1) &= -\frac{\bar{m}}{c^2} v^1 + \frac{\bar{m}}{c^4} v^1 \left(2U^0 - 3U + \frac{(v)^2}{2} \right) - \frac{\bar{p}}{c^4} v^1, \\ \delta(T^0_2) &= -\frac{\bar{m}}{c^2} r^2 v^2 + \frac{\bar{m}}{c^4} v^2 r^2 \left(2U^0 - 3U + \frac{(v)^2}{2} \right) - \frac{\bar{p}}{c^4} r^2 v^2, \\ \delta(T^0_3) &= -\frac{\bar{m}}{c^2} r^2 \sin^2 \theta v^3 + \frac{\bar{m}}{c^4} r^2 \sin^2 \theta v^3 \left(2U^0 - 3U + \frac{(v)^2}{2} \right) - \frac{\bar{p}}{c^4} r^2 \sin^2 \theta v^3. \end{aligned}$$

Calculons maintenant la quantité $1/2 \partial_i g_{\alpha\beta} \delta T^{\alpha\beta}$, qui est au second membre de (31); en tenant compte comme avant de (27), de la définition de $(v)^2$ et que de (42') nous déduisons :

$$-\frac{\bar{p}}{c^4} \partial_i (S^0 + S^{pp}) = -\frac{\bar{p}}{c^4} (U \partial_i U^0 + U^0 \partial_i U - 2(v)^2 \partial_i U^0 + \partial_i f + 2\partial_i f')$$

nous arrivons à :

$$\begin{aligned} 1/2 \partial_i g_{\alpha\beta} \delta T^{\alpha\beta} &= -\frac{\bar{m}}{c^2} \partial_i (U + U^0) - \frac{\bar{m}}{2c^2} [(v^2)^2 \partial_i r^2 + (v^3)^2 \partial_i (r^2 \sin^2 \theta)] \\ &\quad - \frac{\bar{p}}{2c^2} \partial_i (lr^4 \sin^2 \theta) + \frac{\bar{m}}{c^4} \left(-U + 3U^0 + \frac{(v)^2}{2} - (v^1)^2 \right) \partial_i U - \frac{\bar{p}}{c^4} \partial_i U \\ &\quad + \frac{\bar{m}}{c^4} \left(2U - \frac{(v)^2}{2} \right) \partial_i U^0 - \frac{3\bar{p}}{c^4} \partial_i U^0 - \frac{\bar{m}}{c^4} \partial_i (f + 2f') \\ &\quad + U^0 \frac{4\bar{m}}{c^4} [v^1 \partial_i v^1 + v^2 \partial_i (r^2 v^2) + v^3 \partial_i (r^2 \sin^2 \theta v^3)] \\ &\quad - U^0 \frac{\bar{m}}{c^4} [(v^2)^2 \partial_i r^2 + (v^3)^2 \partial_i (r^2 \sin^2 \theta)] \\ &\quad - U^0 \frac{\bar{p}}{c^4} \partial_i (lr^4 \sin^2 \theta) - \left[\frac{\bar{p}}{2c^4} + \frac{\bar{m}}{c^4} \left(\frac{U}{2} - \frac{(v)^2}{4} \right) \right] [(v^2)^2 \partial_i r^2 + (v^3)^2 \partial_i (r^2 \sin^2 \theta)]. \end{aligned}$$

Ce résultat nous donne pour $i = 1$:

$$\begin{aligned}
 (64) \quad & 1/2\partial_1 g_{\alpha\beta} \delta(T^{\alpha\beta}) \\
 &= -\frac{\bar{m}}{c^2} \partial_1(U + U^0) - \frac{\bar{m}}{c^2} [r(v^2)^2 + r(v^3)^2 \sin^2 \theta] - \frac{2\bar{p}}{c^2} \cdot \frac{1}{r} \\
 &+ \frac{\bar{m}}{c^4} \left(-U + 3U^0 + \frac{(v)^2}{2} - (v^1)^2 \right) \partial_1 U - \frac{\bar{p}}{c^4} \partial_1 U \\
 &+ \frac{\bar{m}}{c^4} \left(2U - \frac{(v)^2}{2} \right) \partial_1 U^0 - \frac{3\bar{p}}{c^4} \partial_1 U^0 - \frac{\bar{m}}{c^4} \partial_1 (f + 2f') \\
 &+ 4 \frac{U^0 \bar{m}}{c^4} [r(v^2)^2 + r \sin^2 \theta (v^3)^2] - 4 \frac{U^0 \bar{p}}{c^4} \frac{1}{r} - 2U^0 \frac{\bar{m}}{c^4} [r(v^2)^2 + r \sin^2 \theta (v^3)^2] \\
 &- [r(v^2)^2 + r \sin^2 \theta (v^3)^2] \left[\frac{\bar{p}}{c^4} + \frac{\bar{m}}{c^4} \left(U - \frac{(v)^2}{2} \right) \right],
 \end{aligned}$$

pour $i = 2$,

$$\begin{aligned}
 (65) \quad & 1/2\partial_2 g_{\alpha\beta} \delta(T^{\alpha\beta}) = -\frac{\bar{m}}{c^2} \partial_2 U^0 - \frac{\bar{m}}{c^2} r^2 (v^3)^2 \sin \theta \cos \theta - \frac{\bar{p}}{c^2} \cot \theta \\
 &+ \frac{\bar{m}}{c^4} \left(2U - \frac{(v)^2}{2} \right) \partial_2 U^0 - \frac{3\bar{p}}{c^4} \partial_2 U^0 - \frac{\bar{m}}{c^4} \partial_2 (f + 2f') \\
 &- 2U^0 \frac{\bar{p}}{c^4} \cot \theta - r^2 (v^3)^2 \sin \theta \cos \theta \left[\frac{\bar{p}}{c^4} + \frac{\bar{m}}{c^4} \left(U - \frac{(v)^2}{2} \right) \right] \\
 &- 2\bar{m} \frac{U^0}{c^4} (v^3)^2 r^2 \sin \theta \cos \theta + U^0 \frac{4\bar{m}}{c^4} (v^3)^2 r^2 \sin \theta \cos \theta,
 \end{aligned}$$

pour $i = 3$,

$$\begin{aligned}
 (66) \quad & 1/2\partial_3 g_{\alpha\beta} \delta(T^{\alpha\beta}) \\
 &= -\frac{\bar{m}}{c^2} \partial_3 U^0 + \frac{\bar{m}}{c^4} \left(2U - \frac{(v)^2}{2} \right) \partial_3 U^0 - \frac{3\bar{p}}{c^4} \partial_3 U^0 - \frac{\bar{m}}{c^4} \partial_3 (f + 2f').
 \end{aligned}$$

Avec ces calculs la première équation du mouvement, c'est-à-dire, en faisant $i = 1$ dans (31), donne :

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dt} \int_{\Lambda} \left[\bar{m}(v^1) - \frac{\bar{m}}{c^2} v^1 \left(2U^0 - 3U + \frac{(v)^2}{2} \right) + \frac{\bar{p}}{c^2} v^1 \right] \left(1 + \frac{2U^0}{c^2} \right) cr^2 \sin \theta dV \\
 &= \int_{\Lambda} \left[\bar{m} \partial_1 (U + U^0) + \bar{m} [r(v^2)^2 + r(v^3)^2 \sin^2 \theta] + \frac{2\bar{p}}{r} \right] \left(1 + \frac{2U^0}{c^2} \right) cr^2 \sin \theta dV \\
 &- \int_{\Lambda} \left[\frac{\bar{m}}{c^2} \left(-U + 3U^0 + \frac{(v)^2}{2} - (v^1)^2 \right) \partial_1 U \right] \left(1 + \frac{2U^0}{c^2} \right) cr^2 \sin \theta dV \\
 &- \int_{\Lambda} \left[\frac{\bar{m}}{c^2} \left(2U - \frac{(v)^2}{2} \right) \partial_1 U^0 - \frac{3\bar{p}}{c^2} \partial_1 U^0 \right] \left(1 + \frac{2U^0}{c^2} \right) cr^2 \sin \theta dV
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Lambda} \left[\frac{2\bar{m}U^0}{c^2} [r(v^2)^2 + r(v^3)^2 \sin^2 \theta] - \frac{4\bar{p}U^0}{rc^2} \right] \left(1 + \frac{2U^0}{c^2} \right) cr^2 \sin \theta dV \\
& + \int_{\Lambda} (r(v^2)^2 + r \sin^2 \theta (v^3)^2) \left[\frac{\bar{p}}{c^2} + \frac{\bar{m}}{c^2} \left(U - \frac{(v^2)^2}{2} \right) \right] \left(1 + \frac{2U^0}{c^2} \right) cr^2 \sin \theta dV \\
& + \int_{\Lambda} \frac{\bar{m}}{3c^2} U^0 \left(\frac{\nabla v^1}{dt} + 2\partial_1 U \right) \left(1 + \frac{2U^0}{c^2} \right) cr^2 \sin \theta dV
\end{aligned}$$

en tenant compte que maintenant, $\sqrt{-g} = cr^2 \sin \theta \left(1 + \frac{2U^0}{c^2} \right)$; nous utilisons aussi la notation, $dV = dr \wedge d\theta \wedge d\varphi$.

Voyons de plus près le calcul du premier membre :

$$\begin{aligned}
\bar{m} \frac{dv^1}{dt} + \frac{1}{c^2} \left(\frac{d}{dt} v^1 \right) \int_{\Lambda} \bar{m} \left(2U^0 - 3U + \frac{(v^2)^2}{2} \right) r^2 \sin \theta dV - \frac{2v^1}{c^2} \frac{d}{dt} \int_{\Lambda} \bar{m} U^0 r^2 \sin \theta dV \\
+ \frac{3v^1}{c^2} \frac{d}{dt} \int_{\Lambda} \bar{m} U r^2 \sin \theta dV - \frac{v^1}{c^2} \frac{d}{dt} \int_{\Lambda} \bar{m} \frac{(v^2)^2}{2} r^2 \sin \theta dV \\
+ \frac{v^1}{c^2} \frac{d}{dt} \int_{\Lambda} \bar{p} r^2 \sin \theta dV + \frac{1}{c^2} \left(\frac{d}{dt} v^1 \right) \int_{\Lambda} \bar{p} r^2 \sin \theta dV.
\end{aligned}$$

Maintenant nous pouvons simplifier beaucoup ces termes en tenant compte de :

a) nous prendrons une équation d'état du fluide semblable à celle de la première approximation (35),

$$(67) \quad \bar{m} \partial_i U^0 = \partial_i \bar{p},$$

la différence étant en termes de $1/c^2$, ce qui ne modifie pas les résultats déjà obtenus puisqu'en première approximation nous ne considérons pas les termes que nous venons d'introduire dans l'équation d'état;

b) de l'équation (38) et de l'hypothèse (33), nous avons que :

$$(67') \quad dU^0/dt = 0(1/c^2);$$

c) sous les conditions de symétrie sphérique la condition (67) peut se mettre de la forme :

$$(38) \quad \bar{m} U^0 = \bar{p}',$$

où U' , p' veut dire dérivée par rapport à R , et de cette formule nous allons déduire que :

$$\frac{1}{2} \int_{\Lambda} \bar{m} U^0 r^2 \sin \theta dV = 3 \int_{\Lambda} \bar{p} r^1 \sin \theta dV + 0 \left(\frac{1}{c^2} \right);$$

en effet, le deuxième membre est :

$$3 \int_{\Lambda} \bar{p} r^2 \sin \theta dV = 12\pi \int_0^{\infty} \bar{p} R^2 dR = 4\pi \int_0^{\infty} d(\bar{p} R^3) - 4\pi \int_0^{\infty} R^3 \bar{p}' dR.$$

la première intégrale est nulle, puisque \bar{p} nous le supposons fini à l'intérieur du corps petit et nul au dehors; quant à la deuxième tenant compte de (68),

$$(68') \quad 3 \int_{\Lambda} \bar{p} r^2 \sin \theta dV = -4\pi \int_0^{\infty} R^3 \bar{m} U^{0'} dR,$$

la dérivée $U^{0'}$ nous pouvons la déduire de (38) :

$$(69) \quad -4\pi G \bar{m} = U^{0''} + \frac{2}{R} U^{0'},$$

c'est-à-dire que nous avons :

$$\begin{aligned} 3 \int_{\Lambda} \bar{p} r^2 \sin \theta dV &= \frac{1}{G} \int_0^{\infty} R^3 \left(U^{0''} U^{0'} + \frac{2}{R} U^{0'^2} \right) dR \\ &= \frac{1}{2G} \int_0^{\infty} d(R^3 U^{0'^2}) + \frac{1}{2G} \int_0^{\infty} R^2 U^{0'^2} dR, \end{aligned}$$

la première intégrale est aussi nulle puisque nous prenons les conditions déjà citées, $U^{0'} = 0$ pour $R = 0$, $U^{0'} \sim \frac{1}{R^2}$ pour $R \rightarrow \infty$; il reste donc :

$$(70) \quad + \frac{1}{2G} \int_0^{\infty} R^2 U^{0'^2} dR = 3 \int_{\Lambda} \bar{p} r^2 \sin \theta dV ;$$

analoguement, utilisant (69) nous avons :

$$\frac{1}{2} \int_{\Lambda} \bar{m} U^{0'} r^2 \sin \theta dV = -\frac{1}{2G} \int_0^{\infty} d(R^2 U^{0'} U^0) + \frac{1}{2G} \int_0^{\infty} R^2 U^{0'^2} dR,$$

et comme la première intégrale est nulle comme avant,

$$(71) \quad \frac{1}{2} \int_{\Lambda} \bar{m} U^{0'} r^2 \sin \theta dV = \frac{1}{2G} \int_0^{\infty} R^2 U^{0'^2} dR.$$

De l'égalité entre (70) et (71) nous déduisons (68'). Nous avons besoin de cette formule parce que des résultats (67') et (33), nous arrivons à :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Lambda} \bar{m} U^{0'} r^2 \sin \theta dV = 0 \left(\frac{1}{c^2} \right),$$

et par conséquent aussi :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Lambda} \bar{p} r^2 \sin \theta dV = 0 \left(\frac{1}{c^2} \right).$$

d) nous utiliserons aussi le résultat de la première approximation :

$$m \frac{\nabla v^1}{dt} - m \partial_1 U = 0 \left(\frac{1}{c^2} \right) \quad \left(U = \frac{k}{r} \right)$$

Après toutes ces considérations il reste seulement pour le premier membre de (66') :

$$(72) \quad \bar{m} \frac{dv^1}{dt} - \frac{1}{c^2} \int_{\Lambda} \bar{m} \left(2U^0 - 3U + \frac{(v)^2}{2} \right) \partial_1 U r^2 \sin \theta dV \\ - \frac{1}{c^2} \int_{\Lambda} \bar{m} [r(v^2)^2 + r(v^3)^2 \sin^2 \theta] \left(2U^0 - 3U + \frac{v^2}{2} \right) d\eta \\ + \frac{3mv^1 k}{c^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{mv^1}{c^2} \frac{d}{dt} \frac{(v)^2}{2} + \frac{1}{c^2} \int_{\Lambda} \bar{p} r^2 \sin \theta \partial_1 U dV \\ - \frac{1}{c^2} \int_{\Lambda} \bar{p} [r(v^2)^2 + r(v^3)^2 \sin^2 \theta] r^2 \sin \theta dV.$$

Tenant compte de $d/dt(1/r) = -v^1/r^2$ et aussi à partir de (51) :

$$\frac{d}{dt} (\dot{v})^2 = -2v^1 \partial_1 U$$

les deux derniers termes de (72) peuvent se regrouper :

$$+ \frac{4}{c^2} \int_{\Lambda} \bar{m} (v^1)^2 \partial_1 U r^2 \sin \theta dV$$

Les termes que nous avons obtenus maintenant peuvent se simplifier avec ceux du premier membre :

$$m \frac{\nabla v^1}{dt} - m \partial_1 U = \int_{\Lambda} -\frac{\bar{m}}{c^2} (2U + 3(v^1)^2) \partial_1 U r^2 \sin \theta dV \\ + \int_{\Lambda} -\frac{\bar{m}}{c^2} \left(2U - 2U^0 - \frac{(v)^2}{2} \right) \partial_1 U^0 r^2 \sin \theta dV + \int_{\Lambda} \frac{3\bar{p}}{c^2} \partial_1 U^0 r^2 \sin \theta dV \\ + \int_{\Lambda} \frac{4\bar{p}U^0}{rc^2} r^2 \sin \theta dV + \int_{\Lambda} \frac{\bar{m}}{c^2} [r(v^2)^2 + r \sin^2 \theta (v^3)^2] (-2U) r^2 \sin \theta dV,$$

nous avons utilisé la formule (déduite de (58) et (61)) :

$$\int_{\Lambda} \bar{m} \partial_1 (f + 2f') r^2 \sin \theta dV = - \int_{\Lambda} \bar{m} U^0 \partial_1 U r^2 \sin \theta dV.$$

Nous pouvons encore simplifier ce résultat, puisque à partir de :

$$\partial_1 (U^0 \bar{p} r^2 \sin \theta) = \partial_1 U^0 \bar{p} r^2 \sin \theta + U^0 \partial_1 \bar{p} r^2 \sin \theta + 2U^0 \bar{p} r \sin \theta \\ = \partial_1 U^0 \bar{p} r^2 \sin \theta + m U^0 \partial_1 U^0 r^2 \sin \theta + 2U^0 \bar{p} r \sin \theta,$$

nous obtenons finalement pour l'équation du mouvement $i = 1$:

$$(73) \quad m \frac{\nabla v^1}{dt} - m \partial_1 U = \frac{2mk^2}{r^2 c^2} + \frac{3mk}{r^2 c^2} (v^1)^2 - \frac{2mk}{c^2} [(v^2)^2 + \sin^2 \theta (v^3)^2] \\ + \int_{\Lambda} \frac{\bar{m}}{c^2} [r(v^2)^2 + r \sin^2 \theta (v^3)^2] 2U r^2 \sin \theta dV + \int_{\Lambda} \frac{\bar{p}}{c^2} \partial_1 U^0 r^2 \sin \theta dV.$$

Passons à la deuxième équation, $i = 2$:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \int_{\Lambda} \left[\bar{m} r^2 v^2 - \frac{\bar{m}}{c^2} r^2 v^2 \left(2U^0 - 3U + \frac{(v)^2}{2} \right) + \frac{\bar{p}}{c^2} r^2 v^2 \right] \left(1 + \frac{2U^0}{c^2} \right) cr^2 \sin \theta dV \\
 = \int_{\Lambda} \left[\bar{m} \partial_2 U^0 + \bar{m} r^2 (v^3)^2 \sin \theta \cos \theta + \bar{p} \cot \theta \right] \left(1 + \frac{2U^0}{c^2} \right) cr^2 \sin \theta dV \\
 - \int_{\Lambda} \left[\frac{\bar{m}}{c^2} \left(2U - \frac{(v)^2}{2} \right) \partial_2 U^0 - \frac{3\bar{p}}{c^2} \partial_2 U^0 \right] cr^2 \sin \theta dV \\
 - \int_{\Lambda} \left[\frac{\bar{m}}{c^2} 2U^0 (v^3)^2 r^2 \sin \theta \cos \theta - \frac{\bar{p}}{c^2} 2U^0 \cot \theta \right] cr^2 \sin \theta dV \\
 + \int_{\Lambda} r^2 (v^3)^2 \sin \theta \cos \theta \left[\frac{\bar{p}}{c^2} + \frac{\bar{m}}{c^2} \left(U - \frac{(v)^2}{2} \right) \right] cr^2 \sin \theta dV \\
 + \int_{\Lambda} \frac{\bar{m}}{3c^2} U^0 \frac{\nabla v^2}{dt} cr^2 \sin \theta dV.
 \end{aligned}$$

Avec les termes du premier membre nous pouvons faire à travers les mêmes raisonnements qu'avant les simplifications déduites de (67) et suivants et nous arrivons à :

$$\begin{aligned}
 mr^2 \frac{\nabla v^2}{dt} = \frac{1}{c^2} \int_{\Lambda} \bar{m} r^2 (v^3)^2 \sin \theta \cos \theta \left(2U^0 - 3U + \frac{(v)^2}{2} \right) r^2 \sin \theta dV \\
 - \frac{3mr^2 v^2}{c^2} k \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{mr^2 v^2}{c^2} \frac{d}{dt} \frac{(v)^2}{2} - \frac{1}{c^2} \int_{\Lambda} \bar{p} r^2 (v^3)^2 \sin \theta \cos \theta r^2 \sin \theta dV + \dots
 \end{aligned}$$

En tenant compte maintenant des termes du deuxième membre de l'équation, nous obtenons pour $i = 2$:

$$\begin{aligned}
 (74) \quad mr^2 \frac{\nabla v^2}{dt} = - \frac{2mkr(v^3)^2 \sin \theta \cos \theta}{rc^2} + \frac{4kv^1 v^2 m}{c^2} \\
 - \int_{\Lambda} \frac{\bar{m}}{c^2} \left(2U - \frac{(v)^2}{2} \right) \partial_2 U^0 r^2 \sin \theta dV + \int_{\Lambda} \frac{\bar{p}}{c^2} \partial_2 U^0 r^2 \sin \theta dV,
 \end{aligned}$$

où nous avons aussi utilisé le résultat :

$$\partial_3 (U^0 \bar{p} r^2 \sin \theta) = \partial_2 U^0 \cdot \bar{p} r^2 \sin \theta + \bar{m} U^0 \partial_1 U^0 r^2 \sin \theta + 2U^0 \bar{p} r^2 \sin \theta \cos \theta.$$

Pour la dernière des équations du mouvement, $i = 3$ nous avons :

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \int_{\Lambda} \left[\bar{m} r^2 \sin^2 \theta v^3 - \frac{\bar{m}}{c^2} r^2 \sin^2 \theta v^3 \left(2U^0 - 3U + \frac{(v)^2}{2} \right) + \frac{\bar{p}}{c^2} r^2 \sin \theta v^3 \right] \\
 \left(1 + \frac{2U^0}{c^2} \right) cr^2 \sin \theta dV \\
 = \int_{\Lambda} \bar{m} \partial_3 U^0 \left(1 + \frac{2U^0}{c^2} \right) cr^2 \sin \theta dV + \int_{\Lambda} \frac{\bar{m}}{3c^2} U^0 \frac{\nabla v^3}{dt} cr^2 \sin \theta dV \\
 - \int_{\Lambda} \left[\frac{\bar{m}}{c^2} \left(2U - \frac{(v)^2}{2} \right) \partial_3 U^0 - \frac{3\bar{p}}{c^2} \partial_3 U^0 \right] cr^2 \sin \theta dV.
 \end{aligned}$$

le premier membre nous pouvons le développer sous la forme :

$$\begin{aligned}
 mr^2 \sin^2 \theta \frac{\nabla v^3}{dt} &= \frac{1}{c^2} \int_{\Lambda} \frac{d}{dt} (r^2 \sin^2 \theta v^3) \bar{m} \left(2U^0 - 3U + \frac{(v)^2}{2} \right) r^2 \sin \theta dV \\
 &+ \frac{2r^2 \sin^2 \theta v^3}{c^2} \frac{d}{dt} \int_{\Lambda} \bar{m} U^0 r^2 \sin \theta dV \\
 &- \frac{3r^2 \sin^2 \theta v^3}{c^2} \frac{d}{dt} \int_{\Lambda} \bar{m} U r^2 \sin \theta dV + \frac{r^2 \sin^2 \theta v^3}{c^2} \frac{d}{dt} \int_{\Lambda} \bar{m} \frac{(v)^2}{2} r^2 \sin \theta dV \\
 &- \frac{r^2 \sin^2 \theta v^3}{c^2} \frac{d}{dt} \int_{\Lambda} \bar{p} r^2 \sin^2 \theta dV - \frac{1}{c^2} \dots
 \end{aligned}$$

ce qui nous donne pour ladite équation du mouvement :

$$\begin{aligned}
 (75) \quad mr^2 \sin^2 \theta \frac{\nabla v^3}{dt} &= \frac{4mk \sin^2 \theta v^1 v^3}{c^2} \\
 &- \int_{\Lambda} \frac{\bar{m}}{c^2} \left(2U - \frac{(v)^2}{2} \right) \partial_3 U^0 r^2 \sin \theta dV + \int_{\Lambda} \frac{\bar{p}}{c^2} \partial_3 U^0 r^2 \sin \theta dV.
 \end{aligned}$$

Toutes ces équations du mouvement ont les deux intégrales du type :

$$\int_{\Lambda} \frac{\bar{m}}{c^2} \partial_i U^0 r^2 \sin \theta dV \quad , \quad \int_{\Lambda} \frac{\bar{p}}{c^2} \partial_i U^0 r^2 \sin \theta dV,$$

que nous pouvons annuler sous la condition de symétrie sphérique; il reste alors les équations très simples :

$$(76) \quad \left\{ \begin{aligned}
 \frac{\nabla v^1}{dt} - \partial_1 U &= \frac{2k^2}{r^3 c^2} + \frac{3k}{r^2 c^2} (v^1)^2 - \frac{2k}{c^2} [(v^2)^2 + \sin^2 \theta (v^3)^2] \\
 r^2 \frac{\nabla v^2}{dt} &= - \frac{2kr(v^3)^2 \sin \theta \cos \theta}{rc^2} + \frac{4kv^1 v^2}{c^2} \\
 \frac{\nabla v^3}{dt} &= \frac{4kv^1 v^3}{r^2 c^2}
 \end{aligned} \right.$$

Il est important de noter que sous ces hypothèses, les équations du mouvement ne dépendent pas de \bar{p} , résultat déjà remarqué dans d'autres équations trouvées par des méthodes semblables.

XIII. — Comparaison avec les résultats obtenus de la métrique de base.

Le lagrangien, correspondant à une particule d'épreuve, qui est dans un champ gravitationnel produit par un corps de masse M, lequel donne une métrique de Schwarzschild, est :

$$(77) \quad L = - mc^2 \Sigma$$

où Σ est en utilisant les notations de L. Bel [1] :

$$\Sigma = \sqrt{\sigma - \frac{\dot{r}^2}{6c^2} - \frac{r^2}{c^2}(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2)}$$

avec,

$$\sigma = 1 - \frac{2k}{rc^2}$$

Les équations du mouvement de la particule d'épreuve de masse m sont les équations d'Euler :

$$(78) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{r}}{\sigma\Sigma} \right) + \frac{mc^2}{2\Sigma} \left[\left(1 + \frac{\dot{r}^2}{c^2\sigma^2} \right) \frac{d\sigma}{dr} - \frac{2r}{c^2} (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) \right] = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{mr^2\dot{\theta}}{\Sigma} \right) - \frac{mr^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2}{\Sigma} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{mr^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}}{\Sigma} \right) = 0, \end{cases}$$

que nous devons calculer pour comparer avec nos résultats, jusqu'aux termes en $1/c^2$: pour Σ et σ nous avons les développements :

$$\begin{aligned} \Sigma &= \sqrt{1 - \frac{2k}{rc^2} + \frac{(v)^2}{c^2}} & \frac{1}{\Sigma} &\sim 1 + \frac{k}{rc^2} - \frac{(v)^2}{2c^2} \\ \sigma\Sigma &= \sqrt{1 - \frac{6k}{rc^2} + \frac{(v)^2}{c^2}} & \frac{1}{\sigma\Sigma} &= 1 + \frac{3k}{rc^2} - \frac{(v)^2}{2c^2} \\ & & \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sigma\Sigma} \right) &\sim -\frac{4k\dot{r}}{r^2c^2}. \end{aligned}$$

En tenant compte de :

$$dm/dt = 0 (1/c^2),$$

nous avons pour la première équation :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{r}}{\sigma\Sigma} \right) + \frac{1}{\Sigma} \left[\left(1 + \frac{\dot{r}^2}{c^2} \right) \frac{k\dot{r}}{r^2} - r(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) \right] &= 0 \\ \ddot{r} \left(1 + \frac{3k}{rc^2} - \frac{(v)^2}{2c^2} \right) - \frac{4k\dot{r}^2}{r^2c^2} + \frac{k\dot{r}^2}{r^2c^2} + \frac{k}{r^2} + \frac{k^2}{r^3c^2} - \frac{k(v)^2}{2r^2c^2} - r(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) \\ - \frac{k}{c^2} (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) + \frac{(v)^2}{2c^2} r(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) &= 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire,

$$\ddot{r} + \frac{k}{r^2} - r(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) = \frac{2k^2}{r^3 c^2} - \frac{2k}{c^2} (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) + \frac{3kr^2}{r^2 c^2}.$$

Pour la deuxième équation :

$$\frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) - r^2 \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta = - \frac{2kr \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta}{rc^2} + \frac{4kv^1 v^2}{c^2}.$$

Et finalement pour la troisième équation :

$$\frac{1}{r \cos \theta} \frac{d}{dt} (r^2 \cos \theta \dot{\varphi}) = \frac{4kv^1 v^3}{r^2 c^2}.$$

C'est-à-dire les mêmes équations que (76), mais maintenant, $K = GM$ et dans notre cas : $K = G(M + m)$; cette coïncidence veut dire que sous des conditions de symétrie sphérique convenablement choisis, l'influence de la petite masse m est minimum sur la métrique et aussi que la densité de masse que nous avons pris est la plus adéquate à la vue de cette ressemblance des équations. Nous n'aurions pas obtenu exactement les mêmes termes si nous avions resté avec la densité de masse $\bar{\rho}$ ou si nous avions pris une autre définition, que dans les limites de $1/c^2$ près était tolérable.

Les résultats que nous venons d'obtenir seront employés dans la deuxième partie de cette thèse pour étudier comment la trajectoire du corps petit a été modifiée à cause des termes supplémentaires calculés.

XIV. — Étude de la condition $K_\alpha = 0$.

Des équations du mouvement : $\nabla_\alpha \delta(T^{\alpha\beta}) = 0$, nous avons déduit que $\Delta k^\beta = 0$, au même ordre d'approximation.

Nous pouvons toujours développer Δk^β de la forme :

$$\Delta k^\beta = \Delta k^{\beta(1)} + \Delta k^{\beta(2)} + \dots$$

où $k^{\beta(1)}$, $k^{\beta(2)}$, représentent les ordres successifs par rapport à $1/c^2$. Dans la première approximation nous avons vu que des équations du mouvement nous obtenions (36') :

$$\Delta k^{\beta(1)} = \Delta_{(p)} k^{\beta(1)} + 0 \left(\frac{1}{c^2} \right)$$

où $\Delta_{(p)}$ veut dire la laplacienne dans un 3-espace plat. C'est-à-dire que nous avons :

$$(79) \quad k^{\beta(1)} = 0$$

Nous faisons maintenant un raisonnement identique; mais à un ordre d'approximation supérieure :

$$\Delta k^{\beta(2)} = \Delta_{(p)} k^{\beta(2)} + 0\left(\frac{1}{c^2}\right)$$

d'où,

$$(80) \quad k^{\beta(2)} = 0$$

Ces deux résultats (79) et (80) nous suffisent pour pouvoir affirmer que dans les limites de l'approximation que nous nous avons fixées, il y a compatibilité entre la condition sur les variables $k_{\alpha} = 0$, et la solution que nous avons obtenue.

DEUXIÈME PARTIE

FORMULATION CANONIQUE DU PROBLÈME DES DEUX ET TROIS CORPS EN RELATIVITÉ GÉNÉRALE

I. — Hypothèses fondamentales.

Pour bien se rendre compte de la nature mécanique et mathématique du problème des deux corps en Relativité Générale il est nécessaire avant tout de préciser son aspect astronomique, indépendamment des lois mécaniques qui nous serviront pour le développer mathématiquement.

Nous traiterons toujours de deux corps suffisamment éloignés de façon que la comparaison de cette distance avec la grandeur de chacun de ces deux corps nous autorise à donner par connu le mouvement d'un corps si nous connaissons le mouvement d'un point de ce corps; ce point sera presque toujours un centre de symétrie que nous supposerons exister à l'intérieur de chaque corps.

Nous nous placerons pour l'instant dans le problème des deux corps c'est-à-dire que du point de vue astronomique il faut admettre que l'influence des autres corps, toujours présents, est négligeable; la cause peut être double, parce qu'ils sont très éloignés ou bien parce qu'ils sont de masse très petite face aux deux corps que nous étudions.

En Relativité Générale dans un problème quelconque il faut résoudre les équations d'Einstein,

$$(81) \quad S_{\alpha\beta} = \kappa T_{\alpha\beta}$$

avec dans chaque cas le $T_{\alpha\beta}$ qui décrit la situation physique. De ces équations nous devons obtenir la métrique de l'espace et à partir de cette métrique déduire les équations du mouvement. Les équations sont en général difficiles à résoudre à cause de l'influence de la métrique sur le mouvement et *vice versa*.

Seulement dans le cas d'un seul corps la solution exacte a pu être obtenue, en supposant la symétrie sphérique et le corps centré à l'origine des variables; à partir de cette solution on trouve aussi le mouvement d'un corps d'épreuve par approximations successives. Dans notre problème il faudra prendre une solution approchée pour les deux : la métrique et le mouvement. L'objet de cette étude est d'arriver aux derniers résultats qu'impliquent ces équations notamment vis-à-vis des résultats classiques.

Le problème des deux corps peut être considéré comme un cas particulier de la mécanique des milieux continus avec une distribution de matière qui remplit, avec des vides éventuels, tout l'espace; cette matière est soumise et crée la gravitation. Il faut trouver en fonction des coordonnées non seulement les coefficients $g_{\alpha\beta}$ de la métrique mais aussi la congruence des lignes de temps qui décrit le mouvement de ce fluide. Analytiquement une congruence est déterminée par quatre paramètres $u^\alpha(x^0, x^1, x^2, x^3)$. Ces quatre nouvelles inconnues se réduisent à trois puisque nous devons avoir l'identité,

$$u_\alpha u^\alpha = g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = g^{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta = 1$$

En introduisant la densité de distribution de la matière $d(x^0, x^1, x^2, x^3)$ et la constante c , vitesse de la lumière dans le vide, $d/c^3 = \rho$ sera la densité d'énergie tenant compte de la proportionnalité de la masse et de l'énergie; le tenseur impulsion-énergie aura les composantes :

$$T^{\alpha\beta} = \rho u^\alpha u^\beta$$

Si nous tenons compte des forces intérieures, c'est-à-dire, les pressions, le tenseur impulsion-énergie est dans le cas d'un fluide parfait :

$$T^{\alpha\beta} = \rho u^\alpha u^\beta + \frac{p}{c^2} (u^\alpha u^\beta - g^{\alpha\beta}).$$

Les inconnues du problème sont alors :

$$g^{\alpha\beta}, u^\alpha, \rho \text{ et } p.$$

Pour que le problème soit déterminé il faut utiliser les équations

$$(82) \quad \nabla_\beta u^\alpha \cdot u^\beta = 0$$

qui dérivent des équations (81). Dans un cas pratique on se fixe un système de variables et on déduit les équations du mouvement à partir de la conservation du tenseur impulsion-énergie, équations qui sont bien les géodésiques de l'espace selon (82).

Nous allons préciser les ordres de grandeur sur lesquels nous étudions et simplifions le problème.

Premièrement nous irons seulement jusqu'à la deuxième approximation. Dans la plupart des cas où nos raisonnements seront appliqués l'ordre de grandeur des magnitudes comme l'énergie potentielle ou cinétique est celle de notre système planétaire. Pour les mouvements de ce système, v^2 est très petit face à c^2 et aussi U , le potentiel newtonien à l'intérieur ou à l'extérieur des corps :

$$\beta^2 = \frac{v^2}{c^2} \quad ; \quad \gamma = \frac{U}{c^2},$$

sont de l'ordre de 10^{-8} pour la Terre et pas très différents pour les autres corps du système solaire. Les termes qui contiennent β^2 ou γ seront dits du premier ordre et face à eux nous négligerons tous les termes d'ordre supérieur.

À partir d'une des hypothèses déjà introduites nous pouvons déduire que nous pouvons négliger les termes d'ordre $(D/R)^2$, où D est la distance moyenne entre les deux corps et R le « rayon » d'un des deux corps.

Nous supposons aussi que le mouvement de ces deux corps est une quasi-translation dans le sens suivant : un corps C_i a un mouvement de translation si à un instant quelconque tous ses points ont la même vitesse vectorielle, \vec{v}^i ; nous pouvons donc prendre la vitesse d'un point P quelconque du corps. Pratiquement nous pourrions considérer un mouvement comme quasi-translation si la valeur absolue de la différentielle vectorielle $\nabla \vec{v}^i$ est négligeable face aux valeurs \vec{v}^i ; il nous faut que le rapport : $|\nabla \vec{v}^i| / |\vec{v}^i|$, soit au plus de quelques centièmes, de façon que :

$$\beta^2 \frac{|\nabla v^i|}{v^i} \quad , \quad \gamma \frac{|\nabla v^i|}{v^i}$$

soient d'un ordre supérieur au premier; c'est cela qui arrive pour les planètes; premièrement ses déformations sont très petites et ils se comportent comme de corps rigides; en réalité son mouvement n'est pas purement une translation puisqu'il y a en plus la rotation, mais le rapport entre les deux vitesses est toujours de quelques centièmes.

II. — Méthodes de calcul.

Une fois admises ces hypothèses il faut calculer la métrique de l'espace correspondant à notre distribution de masses des deux corps. Pour le faire il y a deux chemins :

a) Admettre le rôle fondamental du tenseur impulsion-énergie et par étapes successives approcher la métrique en employant ce tenseur qui nous décrit le fluide; ce fluide garde encore assez de libertés quant à sa forme de distribution et à sa symétrie. Les calculs mathématiques sont à peu près les mêmes que nous avons faits dans la première partie de cette thèse, puisque la méthode d'approximation choisie appartient à cette classe.

b) Obtenir la métrique sans l'aide du tenseur impulsion-énergie, c'est-à-dire en considérant les corps en présence comme zones singulières sans préciser son intérieur; la symétrie sphérique est alors obligatoire, ce qui différencie cette méthode de la précédente si bien on finit là aussi pour admettre la symétrie sphérique pour simplifier le problème.

Sous cette condition de symétrie sphérique les deux chemins conduisent au même résultat au moins jusqu'à l'ordre d'approximation que nous étudions.

Voyons maintenant comment à partir de la métrique nous arrivons au formalisme lagrangien. Nous suivrons le point de vue adopté par Levi-Civita [15]; la métrique qu'il a obtenue est :

$$\frac{1}{c^2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = 1 - 2 \left(\frac{1}{2} \beta^2 + \gamma p \right) - 2\gamma p_h \beta_h^2 + 8\bar{\omega}_h \beta_h^2 + 8\gamma_h \vec{\beta}_0 \wedge \vec{\beta}_1 - 2\theta_h,$$

où $h = 1, 0$ représente un corps ou l'autre; $\bar{\omega}_h$ et θ_h potentiels intérieurs et,

$$\gamma p_h = \frac{Gm_h}{c^2} \cdot \frac{1}{r}$$

En prenant :

$$\xi'_h = - \frac{1}{\xi_h} \left(\frac{ds}{dt} - 1 \right),$$

nous avons,

$$\xi_h \xi'_h = \xi'_{h_0} + \xi'_{h_1},$$

où,

$$\xi'_{h_0} = \frac{1}{2} \beta_h^2 + \gamma p_h,$$

est la partie du premier ordre, identique aux calculs classiques. Comme termes du second ordre nous avons :

$$\mathcal{L}'_{h_1} = \frac{1}{2} \mathcal{L}'_{h_0} + \gamma p_h \beta_h^2 - 4 \bar{\omega}_h \beta_h^2 - 4 \gamma_h \vec{\beta}_0 \wedge \vec{\beta}_1 + \theta_h.$$

Nous pouvons utiliser la constante ξ_h en choisissant une valeur convenable pour que dans l'expression du lagrangien disparaissent les potentiels ω_h , θ_h , intérieurs du corps qu'on considère. Nous dans la première partie avons fait de même quand nous avons pris la densité de masse \bar{m} puisque dans les équations du mouvement sous les hypothèses de symétrie sphérique n'intervenait pas U^0 potentiel intérieur du corps et par conséquent non plus dans le lagrangien desdites équations.

Nous arrivons facilement à mettre le lagrangien sous la forme :

$$\mathcal{L}'_h = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 = \frac{1}{2} \beta_h^2 + \gamma_h + \mathcal{L}_1$$

où,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 = & \frac{1}{2} \mathcal{L}_0^2 + \frac{2l_0 l_1 - l_{h+1}^2}{r^2} + \frac{l_{h+1}}{r} (\beta_h^2 + 2\beta_{h+1}^2 - 4\vec{\beta}_h \wedge \vec{\beta}_{h+1}) \\ & + \frac{1}{2} l_{h+1} \frac{d_{h+1}^2 r}{dt^2}, \end{aligned}$$

nous avons écrit :

$$Gmh/c^2 = l_h,$$

G étant la constante de la gravitation.

Le mouvement absolu est défini pour les équations :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}_h}{\partial \beta_{h,i}} - \frac{\partial \mathcal{L}_h}{\partial x_h^i} = 0$$

Nous fixons la forme d'obtenir ces équations en admettant qu'en première approximation le vecteur $\vec{\alpha}$ défini par :

$$m\vec{\alpha} = m_0 \vec{\beta}_0 + m_1 \vec{\beta}_1$$

m étant égal à la somme $m_0 + m_1$ de la masse des deux corps, est nul; alors dans \mathcal{L}_1 nous pourrions faire :

$$(83) \quad m_0 \vec{\beta}_0 + m_1 \vec{\beta}_1 = 0$$

condition sur laquelle nous nous appuyerons pour étudier le mouvement relatif. Nous prenons comme variables celles d'un corps par rapport à l'autre :

$$(84) \quad x^i = x_1^i - x_0^i$$

la vitesse relative étant :

$$(85) \quad \vec{\beta} = \vec{\beta}_1 - \vec{\beta}_0$$

de (84) et (85) nous obtenons,

$$\vec{\beta}_0 = \frac{m_1}{m} \vec{\beta} \quad ; \quad \vec{\beta}_1 = \frac{m_0}{m} \vec{\beta},$$

formules qui nous permettent d'éliminer la vitesse absolue dans tous les termes d'ordre supérieur; la substitution en \mathcal{L}_0 et \mathcal{L}_1 nous devons la faire après avoir fait les dérivations indiquées.

Nous obtenons donc comme lagrangien relatif :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1,$$

avec,

$$(86) \quad \mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}{c^2} + \frac{Gm}{c^2} \frac{1}{r},$$

et les termes du second ordre :

$$(87) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}_1 = & \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}{2c^2} \cdot \frac{Gm}{c^2} \frac{1}{r} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{m_0 m_1}{m^2} \right) \\ & + \frac{G^2 m^2}{c^4} \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{9}{2} \frac{m_0 m_1}{m^2} \right) + \frac{C^2 Gm}{c^4} \frac{1}{r^3} \frac{m_0 m_1}{2m^2}, \end{aligned}$$

où maintenant pour simplifier, x, y, z seront toujours les coordonnées relatives d'un corps par rapport à l'autre; nous avons pris aussi :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$m = m_0 + m_1,$$

G constante de la gravitation,

c vitesse de la lumière,

C constante que nous déduisons de l'intégrale première :

$$(88) \quad r \dot{\varphi}^2 = C^2 + \textcircled{2}$$

où r, θ, φ seront utilisés pour les coordonnées relatives polaires de deux corps.

Nous employerons aussi l'intégrale première de l'énergie :

$$(89) \quad \frac{1}{2} \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{c^2} = \frac{Gm}{c^2} \frac{1}{r} - \frac{Gm}{c^2 2a} + \textcircled{2}$$

où la notation $\textcircled{2}$ sera utilisée pour les termes du second ordre ou d'ordres supérieurs.

Avec l'aide de (89) nous obtenons :

$$(90) \quad \mathfrak{L}_1 = -\frac{G^2 m^2}{c^4 2ar} \left(2 + 3 \frac{m_0 m_1}{m^2} \right) + \frac{G^2 m^2}{c^4 r^2} \left(3 - \frac{3}{2} \frac{m_0 m_1}{m^2} \right) - \frac{G^2 a}{2c^4 r^3} m_0 m_1 (1 - e^2)$$

Le premier terme en $1/r$ nous pouvons l'éliminer facilement en prenant comme nouvelles masses des deux corps, les quantités :

$$m^* = m \left\{ 1 + \left(2 + \frac{3m_0 m_1}{m^2} \right) \frac{Gm}{c^2 2a} \right\}$$

Cela est possible puisque nous avons au premier ordre :

$$m^* = m + \textcircled{2}$$

c'est-à-dire qu'à cet ordre nous serons d'accord avec la Mécanique Classique, condition nécessaire de compatibilité pour nos calculs. Comme toutes les masses qui interviendront dans nos formules seront maintenant celles que nous venons de définir, nous pourrions supprimer le signe *, sans que cela prête à confusion.

III. — Comparaison avec l'autre méthode d'obtention de la métrique.

Avec l'autre méthode (II) nous arrivons au lagrangien absolu suivant pour le problème des deux corps :

$$\mathfrak{L}' = \mathfrak{L}_0 + \mathfrak{L}_1$$

avec,

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}'_0 &= \frac{1}{2} m_0 \frac{(v_0)^2}{c^2} + \frac{1}{2} m_1 \frac{(v_1)^2}{c^2} + \frac{Gm_0 m_1}{rc^2} \\ \mathfrak{L}'_1 &= \frac{3}{2} \frac{Gm_0 m_1}{rc^4} [(v_0)^2 + (v_1)^2] - 4 \frac{Gm_0 m_1}{r} \cdot \frac{\vec{v}_0 \vec{v}_1}{c^4} + \frac{1}{8} m_0 \frac{[(v_0)^2]^2}{c^4} \\ &\quad + \frac{1}{8} \frac{[(v_1)^2]^2}{c^4} - \frac{1}{2} \frac{G^2 m_0 m_1}{c^4} m - \frac{1}{2} \frac{m_0 m_1}{c^4} \frac{\partial^2 r}{\partial x_0^i \partial x_1^i} x_0^i x_1^i. \end{aligned}$$

Ce qui nous donne pour le lagrangien relatif (90) :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1$$

avec maintenant,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &= \frac{1}{2} (v)^2 + Gm \\ (91) \quad \mathcal{L}_0 &= \frac{1}{c^2} \left[\frac{1}{8} \left(1 - \frac{3m_1 m_0}{m} \right) [v^1]^2 + \frac{1}{2} (3m + m_0 m_1) \frac{G}{r} (v)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \frac{m_1 m_0}{m r^3} (x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z})^2 - \frac{1}{2} \frac{G^2 m^2}{r^2} \right]. \end{aligned}$$

Nous pouvons modifier cette dernière formule en utilisant les constantes des intégrales premières déjà citées ; notamment nous pouvons substituer $(v)^2$ par sa valeur déduite de (89) et de (88) nous avons :

$$1/2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = 1/2(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) = \frac{Gm}{r} - \frac{Gm}{2a} + \textcircled{2}$$

et aussi :

$$\begin{aligned} 1/2 \frac{m_0 m_1}{r^3} (x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z})^2 \\ = 1/2 \frac{m_0 m_1}{r^3} (r\dot{r})^2 = 1/2 \frac{m_0 m_1}{r} \dot{r}^2 = \frac{G^2 m_0 m_1}{r^2} - \frac{G^2 m_0 m_1}{2ar} - \frac{m_0 m_1 C^2 G}{m^2 r^3}, \end{aligned}$$

résultats que donnent pour (91) exactement la forme (90) du lagrangien que nous avons obtenu par l'autre chemin.

IV. — Formalisme hamiltonien.

Nous pouvons maintenant obtenir la fonction de Hamilton du système ; pour cela il faut seulement mettre \mathcal{L} sous la forme :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(r),$$

et par conséquent,

$$H = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + U(r).$$

En introduisant les impulsions généralisées :

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i},$$

nous pouvons obtenir pour H,

$$H = H_0 + H_1,$$

avec,

$$(92) \quad \begin{aligned} H_0 &= \frac{1}{2} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - \frac{Gm}{c^2} \frac{1}{r} \\ H_1 &= -\frac{G^2 m^2}{c^4 r^2} \left(3 - \frac{3 m_0 m_1}{m^2} \right) - \frac{G^2 a}{2c^4 r^3} m_0 m_1 (1 - e^2). \end{aligned}$$

Les deux termes de H_1 , nous pouvons les écrire de la forme :

$$(93) \quad H_1 = -\frac{\alpha_1 k}{2r^2} - \frac{\alpha_2 k}{3r^3}$$

où,

$$k = Gm/c^2,$$

et,

$$(94) \quad \begin{aligned} \alpha_1 &= 2 \frac{Gm}{c^2} \left(3 - \frac{3 m_0 m_1}{m^2} \right) \\ \alpha_2 &= 3 \frac{Ga}{2c^2} \left(\frac{m_0 m_1}{m} \right) (1 - e^2). \end{aligned}$$

Ces termes seront supposés dérivés d'une force perturbatrice du type :

$$F = -\frac{\alpha_1 k}{r^3} - \frac{\alpha_2 k}{r^4},$$

le sens de laquelle sera précisé par la suite.

Une fois la fonction de Hamilton obtenue, nous allons étudier une méthode pour avoir des résultats assez simples qui s'appelle :

V. — Méthode de la variation des constantes [12].

Nous partons avec un système de variables dynamiques

$$(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$$

lesquelles obéissent aux équations de Hamilton :

$$\begin{cases} \dot{q}_r = \partial H / \partial p_r \\ \dot{p}_r = -\partial H / \partial q_r \end{cases} \quad (r = 1, 2, \dots, n),$$

où,

$$H(q, p, t) = H_0(q, p, t) + H_1(q, p, t).$$

L'équation de Hamilton-Jacobi correspondante à H_0 est :

$$(95) \quad H_0\left(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_n}, t\right) + \frac{\partial W}{\partial t} = 0,$$

et si H_0 ne dépend pas explicitement du temps.

$$(96) \quad H_0\left(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial W'}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W'}{\partial q_n}\right) = \sigma_1.$$

La fonction $W(q, \sigma, t)$ définit une transformation canonique des variables dynamiques q, p aux variables σ, β que satisfont aux équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\sigma}_r = \frac{\partial k}{\partial \beta_r} \\ \dot{\beta}_r = -\frac{\partial k}{\partial \sigma_r} \end{array} \right. \quad (r = 1, 2, \dots, n),$$

où,

$$k = H_0 + H_1 + \frac{\partial W}{\partial t},$$

mais de (95) nous obtenons :

$$k = H_1.$$

La fonction H_1 , il faudra l'expliciter maintenant en termes dépendant des fonctions σ et β .

Les constantes canoniques qui proviennent d'une solution de l'équation de Hamilton-Jacobi ont donc des propriétés notables. Si nous supposons que ladite équation (95) est résolue en employant un certain $H_0(p, q, t)$ que nous désignerons par fonction de Hamilton imperturbée, soient (σ, β) les constantes canoniques que nous en déduisons. Nous avons maintenant non seulement la solution du problème imperturbé, mais aussi la même solution est valable pour le problème dynamique de fonction de Hamilton égal à :

$$(97) \quad H(q, p, t) = H_0 + H_1,$$

avec les mêmes degrés de liberté qu'avant, mais maintenant σ et β ne sont plus des constantes mais des nouvelles variables dynamiques qui satisfont les équations :

$$(98) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\sigma}_r = \frac{\partial H_1}{\partial \beta_r} \\ \dot{\beta}_r = -\frac{\partial H_1}{\partial \sigma_r} \end{array} \right. \quad (r = 1, 2, \dots, n).$$

Dans (98), H_1 nous devons le considérer comme fonction des σ, β, t ; pour cela il faut remplacer les variables q et p par ses expressions en fonction des σ, β, t . La fonction de Hamilton H_1 nous l'appellerons perturbée et la solution du problème aussi solution perturbée.

VI. — Application à notre fonction de Hamilton.

Notre problème s'adapte à ce que nous venons d'exposer; pour le résoudre, nous chercherons premièrement la solution imperturbée qui est la classique et après il faudra écrire les équations (98) pour obtenir d'elles les modifications du mouvement de base.

Nous supposons que nous voulons étudier pour fixer les idées, le mouvement d'une certaine planète de masse m . Nous prendrons deux systèmes de variables, les deux orthogonaux mais un (ξ^1, ξ^2, ξ^3) avec son centre de masse que nous pouvons déterminer en première approximation et l'autre fixé à un des deux corps, le Soleil dans notre cas par exemple (x, y, z) .

Les résultats classiques déduits de la loi de Newton donnent pour le mouvement absolu de n corps :

$$\ddot{\xi}_i = -\frac{xG^2}{r^3} + G^2 \sum_i m_i \frac{x - x^i}{\Delta_i^3}$$

$$\ddot{\xi}_{sol} = \frac{mxG^2}{r^3} + G^2 \sum_i m_i \frac{x^i}{\rho_i^3},$$

et pour le mouvement par rapport au Soleil des n planètes :

$$x^i = \xi^i - \xi_{sol}^i,$$

nous avons,

$$(99) \quad \begin{aligned} \ddot{x} &= \ddot{\xi}^1 - \ddot{\xi}_{sol}^1 = -\frac{kx}{r^3} - G^2 \sum_i m_i \left(\frac{x - x^i}{\Delta_i^3} + \frac{x^i}{\rho_i^3} \right) \\ \ddot{y} &= \ddot{\xi}^2 - \ddot{\xi}_{sol}^2 = -\frac{ky}{r^3} - G^2 \sum_i m_i \left(\frac{y - y^i}{\Delta_i^3} + \frac{y^i}{\rho_i^3} \right) \\ \ddot{z} &= \ddot{\xi}^3 - \ddot{\xi}_{sol}^3 = -\frac{kz}{r^3} - G^2 \sum_i m_i \left(\frac{z - z^i}{\Delta_i^3} + \frac{z^i}{\rho_i^3} \right) \end{aligned}$$

où,

$$\begin{aligned} k &= G(1 + m)/c^2 && \text{(Masse du Soleil : 1)} \\ r^2 &= (x^2 + y^2 + z^2)/c^2 \\ \rho_i^2 &= (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)/c^2 \\ \Delta_i^2 &= (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que (99) peut se mettre de la forme :

$$\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \ddot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad \ddot{z} = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

où,

$$V = -k/r - R$$

avec la valeur de R égal à :

$$(100) \quad R = k^2 \sum_i m_i \left(\frac{1}{\Delta_i} - \frac{1}{\rho_i^3} (xx_i + yy_i + zz_i) \right).$$

En termes de fonction de Hamilton nous avons donc :

$$H = \frac{1}{2} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - \frac{k}{r} - R(x, y, z, x_1, y_1, z_1, \dots),$$

ou bien,

$$H = H_0 + H_1$$

où,

$$H_0 = 1/2(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - \frac{k}{r} \quad ; \quad H_1 = -R.$$

De cette façon on peut étudier le problème des deux corps perturbé par la présence d'autres corps. Pour notre problème avec H_0 nous utiliserons la solution classique du problème des deux corps, laquelle est une des seules à pouvoir être obtenues sans l'aide de H_1 en Mécanique Classique; pour le calcul des perturbations nous utiliserons l'expression (92) de H_1 .

La solution du problème imperturbé est :

$$\begin{aligned} t - \beta_1 &= \int_{r_0}^r \frac{r}{L} dr \\ -\beta_2 &= - \int_{r_0}^r \frac{\sigma_2}{rL} dr + \int_0^\theta \frac{\sigma_2}{N} d\theta \\ \varphi &= -\beta_3 + \int_0^\theta \frac{\sigma_3}{N} \sec^2 \theta d\theta \\ p_r &= L/r \\ p_\theta &= N \\ p_\varphi &= \sigma_3 \end{aligned}$$

où,

$$L = (2r^2 \sigma_1 + 2kr - \sigma_2^2)^{1/2}$$

$$N = (\sigma_2^2 - \sigma_3^2 \sec^2 \theta).$$

Pour pouvoir interpréter les résultats nous devons mettre les constantes canoniques en fonction des constantes du mouvement :

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= -\frac{k(M+m)}{2a} \\ \sigma_2^2 &= ka(1-e^2)(M+m) \\ \sigma_3^2 &= Ga(1-e^2)(M+m)\cos^2 i \\ \beta_1 &= \tau \quad ; \quad \beta_2 = -\omega \quad ; \quad \beta_3 = -\Omega,\end{aligned}$$

avec a demi-grand axe de l'ellipse,
 e excentricité de l'ellipse ($0 < e < 1$),
 i inclinaison du plan du mouvement par rapport au plan de référence,
 τ temps de passage au périhélie,
 ω angle entre le nœud ascendant et le périhélie,
 Ω longitude du nœud ascendant.

Nous utiliserons aussi :

$$\begin{aligned}\bar{\omega} &\text{ longitude du périhélie : } \bar{\omega} = \omega + \Omega, \\ \bar{M} &\text{ anomalie moyenne : } \bar{M} = n(t - T), \\ n &\text{ moyen mouvement : } n^2 a^3 = k(M+m), \\ u &\text{ anomalie excentrique,} \\ \varepsilon &\text{ longitude moyenne.}\end{aligned}$$

A partir de l'équation de Hamilton-Jacobi correspondante à H_0 nous arrivons à la solution classique :

$$\begin{aligned}(100') \quad & k = G(M+m) \\ & n^2 a^3 = k \\ & \bar{M} = \varepsilon + n(t - t_0) - \bar{\omega} = n(t - \tau) \\ & M = u - e \sin u \\ & r = a(1 - e \cos u) \\ & \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{1/2} \operatorname{tg} \frac{r u}{\varepsilon \bar{a}} \\ & u = \omega + \bar{\omega} - \Omega \\ & \sin \theta = \sin i \sin u \\ & \operatorname{tg}(\varphi - \Omega) = \cos i \operatorname{tg} u\end{aligned}$$

En utilisant les équations (98) nous aurions les dérivées des éléments canoniques, mais il paraît plus convenable d'obtenir les dérivées par rap-

port aux éléments classiques que nous venons de définir. Si nous appelons ces éléments c_i avec pour i l'ordre : $a, e, i, \Omega, \bar{\omega}, \varepsilon$, nous avons :

$$\dot{c}_i = \sum_{s=1}^3 \left(\frac{\partial c_i}{\partial \sigma_s} \dot{\sigma}_s + \frac{\partial c_i}{\partial \beta_s} \dot{\beta}_s \right)$$

c'est-à-dire en employant les équations (98),

$$\begin{aligned} \dot{c}_i &= \sum_{s=1}^3 \left(-\frac{\partial c_i}{\partial \sigma_s} \frac{\partial R}{\partial \beta_s} + \frac{\partial c_i}{\partial \beta_s} \frac{\partial R}{\partial \sigma_s} \right) \\ &= \sum_{s=1}^3 \left(-\frac{\partial c_i}{\partial \beta_s} \sum_{j=1}^6 \frac{\partial R}{\partial c_j} \frac{\partial c_j}{\partial \sigma_s} \right) - \sum_{s=1}^3 \left(\frac{\partial c_i}{\partial \sigma_s} \sum_{j=1}^6 \frac{\partial R}{\partial c_j} \frac{\partial c_j}{\partial \beta_s} \right), \end{aligned}$$

et en inversant l'ordre des dérivées :

$$\dot{c}_i = \sum_{j=1}^6 \frac{\partial R}{\partial c_j} \sum_{s=1}^3 \left(\frac{\partial c_j}{\partial \sigma_s} \frac{\partial c_i}{\partial \beta_s} - \frac{\partial c_j}{\partial \beta_s} \frac{\partial c_i}{\partial \sigma_s} \right),$$

c'est-à-dire :

$$\dot{c}_i = \sum_{j=1}^6 \frac{\partial R}{\partial c_j} \{c_j, c_i\}$$

où,

$$\{c_j, c_i\} = \sum_{s=1}^3 \left(\frac{\partial c_j}{\partial \sigma_s} \frac{\partial c_i}{\partial \beta_s} - \frac{\partial c_j}{\partial \beta_s} \frac{\partial c_i}{\partial \sigma_s} \right).$$

Les seuls crochets de Poisson qui ne sont pas nuls sont :

$$\{a, \varepsilon\} = -2(a/k)^{1/2},$$

$$\{e, \bar{\omega}\} = (ka)^{-1/2} \cotg \Phi$$

$$\{e, \varepsilon\} = (ka)^{-1/2} \operatorname{tg} \Phi / 2 \cos \Phi$$

$$\{i, \Phi\} = \frac{1}{\sin i \cos \Phi (ka)^{1/2}} \quad ; \quad \{i, \bar{\omega}\} = \{i, \varepsilon\} = \frac{\operatorname{tg} i/2}{\cos \Phi (ka)^{1/2}}$$

où nous avons introduit la notation : $\sin \Phi = e$.

Nous obtenons finalement les dérivées par rapport au temps des éléments classiques :

$$(101) \quad \frac{da}{dt} = -\frac{2}{n^2 a} \frac{\partial R}{\partial \tau}$$

$$(102) \quad \frac{de}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial \bar{\omega}} - \frac{1-e^2}{n^2 a^2 e} \frac{\partial R}{\partial \tau}$$

$$(103) \quad \frac{di}{dt} = -\frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \theta} - \frac{\operatorname{tg} i/2}{na^2(1-e^2)} \frac{\partial R}{\partial \bar{\omega}}$$

$$(104) \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i}$$

$$(105) \quad \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\operatorname{tg} i/2}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i}$$

$$(106) \quad \frac{d\tau}{dt} = \frac{2}{n^2 a} \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{1-e^2}{n^2 a^2 e} \frac{\partial R}{\partial e}.$$

La résolution de ces équations nous donnera la solution perturbée que nous cherchons; la valeur de R à employer est (92). Dans le cas d'un mouvement plat, que nous supposons comme hypothèse simplificatrice, il ne faut pas tenir compte des équations (103) et (104).

VII. — Étude de l'avance du périhélie.

Nous allons étudier premièrement l'équation (105) que sous l'hypothèse du mouvement plat se réduit à :

$$\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} F \frac{\partial r}{\partial e},$$

où F représente une force perturbatrice, laquelle dans notre cas est donnée par (94).

De $r = a(1 - e \cos u)$, nous déduisons :

$$\frac{\partial r}{\partial e} = a \left(-\cos u + e \sin u \frac{\partial u}{\partial e} \right),$$

et de $u - e \sin u = n(t - \tau)$:

$$(1 - e \cos u) \frac{\partial u}{\partial e} = \sin u,$$

c'est-à-dire que :

$$\frac{\partial r}{\partial e} = a \frac{-\cos u + e}{1 - e \cos u},$$

et par conséquent,

$$(107) \quad \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \cdot F \cdot a \frac{-\cos u + e}{1 - e \cos u}.$$

Grâce à un théorème de Poincaré nous sommes autorisés à considérer dans l'étude du mouvement elliptique perturbé du point P, que pendant une révolution les éléments classiques de l'ellipse qui figurent dans le deuxième membre de (107) sont tous constants à l'exception de t et u .

Si nous intégrons la formule (107) le long d'une révolution nous aurons l'avance $\delta\bar{\omega}$ du périhélie correspondant.

Mais avant il est convenu de changer la variable d'intégration puisque pour le moment nous avons u explicitement et aussi dans l'équation pour r :

$$r = a(1 - e \cos u).$$

Les calculs seront plus faciles si nous prenons comme variable d'intégration u à la place de t .

Dérivant l'équation de Kepler (100') par rapport à t nous avons :

$$(1 - e \cos u) \frac{du}{dt} = n$$

avec laquelle nous obtenons l'équation :

$$\frac{d\bar{\omega}}{du} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \cdot F \cdot a \frac{-\cos u + e}{1 - e \cos u} \cdot \frac{1 - e \cos u}{n}$$

Décomposant F selon les deux termes de (94) nous obtenons pour le premier terme après avoir fait : $k = n^2 a^3$,

$$(108) \quad \frac{d\bar{\omega}_1}{du} = \frac{\alpha_1 \sqrt{1-e^2}}{ae} \cdot \frac{\cos u - e}{(1 - e \cos u)^3}.$$

Pour l'intégration il nous faudra savoir les valeurs de :

$$(109) \quad I_n = \int_0^{2\pi} \frac{du}{(1 - e \cos u)^n} ; \quad I_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{1-e^2}} ; \quad I_2 = \frac{2\pi}{(1-e^2)^{3/2}} ;$$

$$I_3 = \frac{\pi(2+e^2)}{(1-e^2)^{5/2}} ; \quad I_4 = \frac{\pi(1+3e^2)}{(1-e^2)^{7/2}}.$$

Nous pouvons mettre (107) de la forme :

$$\frac{d\bar{\omega}_1}{du} = \frac{\alpha_1 \sqrt{1-e^2}}{ae^2} \cdot \frac{-(1-e \cos u) + 1-e^2}{(1-e \cos u)^3},$$

avec laquelle nous obtenons pour l'avance du périhélie du premier terme de la fonction perturbatrice α_1 :

$$\delta\bar{\omega}_1 = \frac{\alpha_1 \sqrt{1-e^2}}{ae^2} (-I_2 + (1-e^2)I_3),$$

et en tenant compte des valeurs (109) :

$$(110) \quad \delta\bar{\omega}_1 = \frac{\pi\alpha_1}{a(1-e^2)}$$

Pour le deuxième terme de F nous avons l'équation :

$$\frac{d\bar{\omega}_2}{du} = \frac{\alpha_2 \sqrt{1-e^2}}{a^2 e^2} \cdot \frac{-(1-e \cos u) + 1-e^2}{(1-e \cos u)^4}$$

et en l'intégrant,

$$\delta\bar{\omega}_2 = \frac{\alpha_2 \sqrt{1-e^2}}{a^2 e^2} (-I_3 + (1-e^2)I_4),$$

c'est-à-dire tenant compte des valeurs des intégrales (109) :

$$(111) \quad \delta\bar{\omega}_2 = \frac{\pi\alpha_2}{a^2} \left(-\frac{2+e^2}{e^2(1-e^2)^2} + \frac{2+3e^2}{e^2(1-e^2)^2} \right) = \frac{2\pi\alpha_2}{a^2(1-e^2)^2}.$$

Si nous additionnons (110) et (111) :

$$\delta\bar{\omega} = \frac{\pi}{a(1-e^2)} \left(\alpha_1 + \frac{2\alpha_2}{a(1-e^2)} \right),$$

et tenant compte des valeurs de α_1 , α_2 (94) et (94') :

$$(112) \quad \delta\bar{\omega} = \frac{\pi}{a(1-e^2)} \left[\frac{2km}{c^2} \left(3 - \frac{3}{2} \frac{m_0 m_1}{m^2} \right) + \frac{3k}{c^2} \frac{m_0 m_1}{m} \right] = \frac{km}{c^2} \cdot \frac{6\pi}{a(1-e^2)}.$$

Rappelons que $m = m_0 + m_1$. Ce résultat est analogue au résultat obtenu par Robertson [17], par des méthodes différentes.

Les variations de a et e demi-grand et excentricité de l'ellipse sont périodiques et par conséquent ne donnent lieu à des variations observables. Nous

noterons encore que le mouvement actuel admet au deuxième ordre deux intégrales premières :

$$\frac{k}{2a} + \frac{\alpha_1 k}{2r^2} + \frac{\alpha_2 k}{2r^3} = \text{const.} + \textcircled{2}$$

$$a(1 - e^2) = \text{const.} + \textcircled{2},$$

lesquelles ont déjà été utilisées.

VIII. — Étude du retard de passage au périhélie.

Il nous reste à étudier l'équation (106) qui concerne le retard de passage au périhélie :

$$(113) \quad \frac{d\tau}{dt} = \frac{2}{n^2 a} \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{1 - e^2}{n^2 a^2 e} \frac{\partial R}{\partial e}.$$

Comme avant nous prenons u variable d'intégration et nous considérons la révolution délimitées par u_0 et la valeur $u_0 + 2\pi$. Nous appellerons $\delta\tau$, $\delta'\tau$, $\delta''\tau$, les perturbations correspondantes aux trois termes de l'équation (113) :

$$\delta\tau = \delta'\tau + \delta''\tau.$$

Si nous comparons avec (107),

$$\delta''\tau = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{n} \delta\bar{\omega} = \frac{\pi}{na\sqrt{1 - e^2}} \left(\alpha_1 + \frac{2\alpha_2}{a(1 - e^2)} \right).$$

Pour obtenir $\delta'\tau$ il est nécessaire de développer la dérivée $\partial R/\partial a$ c'est-à-dire $\partial r/\partial a$; de l'expression, $r = a(1 - e \cos u)$, nous déduisons :

$$\frac{\partial r}{\partial a} = 1 - e \cos u + ae \sin u \frac{\partial u}{\partial a}.$$

La dérivée par rapport à a de u nous l'obtenons par la dérivée logarithmique de l'équation de Kepler (100') :

$$u - e \sin u = \sqrt{\frac{K}{a^3}} (t - \tau),$$

où K est constant; nous avons donc,

$$\frac{1 - e \cos u}{u - e \sin u} \frac{\partial u}{\partial a} = -\frac{3}{2a},$$

et,

$$\frac{\partial r}{\partial a} = 1 - e \cos u - \frac{3}{2} \frac{e \sin u(u - e \sin u)}{1 - e \cos u}.$$

A partir de ces calculs nous obtenons $\delta' \tau$ de l'intégrale :

$$(114) \quad \delta' \tau = \int_0^{2\pi} \frac{2}{n^2 a} \cdot F \left[1 - e \cos u - \frac{3}{2} \frac{e \sin u(u - e \sin u)}{1 - e \cos u} \right] \frac{1 - e \cos u}{n} du$$

($u_0 = 0$).

Si nous prenons le premier terme de F, la première intégrale de (114) donne :

$$\int_0^{2\pi} - \frac{2}{n^2 a} \frac{\alpha_1 K}{r^3} (1 - e \cos u)^2 du = - \frac{4\pi \alpha_1}{na \sqrt{1 - e^2}},$$

et la seconde si nous faisons une intégration par parties devient :

$$\left[- \frac{u - e \sin u}{2(1 - e \cos u)^2} \right]_0^{2\pi} + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{du}{1 - e \cos u} = - \frac{\pi}{(1 - e)^2} + \frac{\pi}{\sqrt{1 - e^2}}.$$

Pour le deuxième terme de F nous devons calculer d'abord l'intégrale :

$$\frac{2\alpha_2}{na^2} \int_0^{2\pi} - \frac{du}{(1 - e \cos u)^2} = \frac{2\alpha_2}{na^2} (-I_2),$$

et après :

$$\frac{2\alpha_2}{na^2} \int_0^{2\pi} \frac{3}{2} \frac{e \sin u(u - e \sin u)}{(1 - e \cos u)^4} du,$$

que nous pouvons aussi résoudre par une intégration par parties :

$$\frac{3\alpha_2}{na^2} \left[- \frac{u - e \sin u}{3(1 - e \cos u)^3} \right]_0^{2\pi} + \frac{\alpha_2}{na^2} I_2.$$

La contribution du deuxième terme de F est donc,

$$\delta' \tau = - \frac{2\pi \alpha_1}{na^2 (1 - e^2)^{3/2}} - \frac{3\alpha_2}{na^2} \cdot \frac{2\pi}{3(1 - e \cos u_0)^3}.$$

Et pour le retard total nous avons :

$$\delta \tau = \frac{\pi}{na(1 - e)^2} \left(-3\alpha_1 - \frac{2\alpha_2}{a(1 - e)} \right),$$

et si nous remplaçons les valeurs de α_1 , α_2 (94), (94') :

$$(115) \quad \delta \tau = - \frac{\pi}{na(1 - e^2)} \frac{3Gm}{c^2} \left(6 - \frac{m_0 m_1}{m^2} (2 - e) \right).$$

Cette formule diffère de celle d'un corps d'épreuve dans un espace de Schwarzschild, parce qu'il y a $m = m_0 + m_1$, et dans la parenthèse un terme nouveau, la valeur duquel varie entre,

$$1/2 > \frac{m_0 m_1}{m^2} (2 - e) > 0$$

il est $1/2$ quand $m_0 = m_1$ et $e = 0$; il est très petit quand $m_0 \gg m_1$.

IX. — Étude avec la métrique obtenue par variation.

Les équations du mouvement (76) que nous avons obtenu sous les hypothèses de symétrie sphérique et aussi :

$$\begin{aligned}\bar{m} &= \bar{\rho} u^0 c, \\ \bar{m} \partial_i U^0 &= \partial_i \bar{p},\end{aligned}$$

peuvent se dériver du lagrangien :

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{2k}{rc^2} - \frac{\dot{r}^2}{c^2(1 - 2k/rc^2)} - \frac{r^2}{c^2} (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2)}.$$

Ce lagrangien nous avons vu qu'à termes en $1/c^2$ près peut se mettre de la forme :

$$L = -mc^2 \sqrt{1 + \frac{(v)^2}{c^2} - \frac{2k}{rc^2} - \frac{\dot{r}^2}{c^4} \frac{2k}{r}},$$

et utilisant l'intégrale de l'énergie :

$$m \frac{(v)^2}{c^2} + \frac{k}{rc^2} = \frac{k}{2a} + \textcircled{2},$$

ce lagrangien se réduit à :

$$L = L_0 + L_1$$

avec,

$$\begin{aligned}L_0 &= \frac{1}{2} \frac{(v)^2}{c^2} + \frac{Gm}{c^2} \frac{1}{r} \\ L_1 &= + \frac{G^2 m^2}{c^4 a r} + 3 \frac{G^2 m^2}{c^4 r^2}.\end{aligned}$$

Pour les mêmes chemins que précédemment nous arrivons à la fonction de Hamilton,

$$\begin{aligned}H &= H_0 + H_1 \\ H_0 &= \frac{1}{2} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - \frac{Gm}{c^2} \frac{1}{r} \\ H_1 &= - \frac{3G^2 m^2}{c^4 r^2} - \frac{G^2 m^2}{c^4 a r},\end{aligned}$$

H_1 , nous pouvons le mettre de la forme :

$$H_1 = - \frac{3G^2 m^2}{c^4 r^2},$$

puisqu'en faisant le changement :

$$m^* = m \left(1 - \frac{Gm}{2c^2 a} \right),$$

nous avons éliminé le terme en $1/r$. H_1 nous le prendrons donc comme dérivé d'une force perturbatrice :

$$F = - \frac{\alpha_1 k}{r^2} \quad ; \quad \alpha_1 = \frac{6Gm}{c^2}.$$

Cette force donne pour l'équation (105) d'avance du périhélie la contribution :

$$(116) \quad \delta\bar{\omega} = \frac{km}{c^2} \frac{6\pi}{a(1-e^2)},$$

et pour l'équation (106) de retard de passage au périhélie :

$$(117) \quad \delta\tau = - \frac{\pi}{na(1-e^2)} \frac{18km}{c^2}$$

Les formules (116) et (112) sont identiques et quant à (117) et (115), maintenant l'expression est plus simple et comme correction à la formule correspondante à un corps d'épreuve dans un espace de Schwarzschild elle conserve seulement la modification $m = m_0 + m_1$, des deux que nous avons avant.

X. — Rappel des résultats obtenus en relativité générale pour le problème des N corps.

Des deux méthodes citées d'obtention des équations du mouvement le résultat obtenu par ceux qui utilisent le tenseur impulsion-énergie peut se mettre de la forme :

$$\begin{aligned} m_a \frac{d}{dt} \left[v_a^i + v_a^i \frac{(v_a)^2}{2c^2} + \frac{3v_a^i}{c^2} \Sigma' u_b(a) - \frac{4}{c^2} \Sigma' v_b^i u_b(a) \right] + \frac{d}{dt} \frac{v_a^i}{c^2} \int p dV \\ = m_a \Sigma' \partial_i u_b(a) + \int m_a \partial_i u_a dV + \frac{3M_a}{2c^2} \Sigma'(v)^2 \partial_i u_b(a) \\ + \Sigma' \frac{\partial_i u_b(a)}{c^2} \left[\frac{3}{2} m_a (v_a)^2 - m_a \Sigma' u_b(a) + \int 3p dV \right] \\ - [(v)^2 + \Sigma' u_b(a)] \int m_a \partial_i u_a dV - \frac{1}{c^2} \int m_a u_a \partial_i u_a dV - 4 \frac{M_a}{c^2} v_a^k \Sigma' v_b^k \partial_i u_b(a) \\ - \int \frac{3p}{c^2} \partial_i u_a dV + \int \frac{m_a}{c^2} \partial_i (f - g + l) dV + 0 \left(\frac{1}{c^4} \right), \end{aligned}$$

où f, g, l sont les fonctions déjà introduites et que satisfont à :

$$\Delta f = \partial_{00} U^0 \quad ; \quad \Delta g = U^0 \Delta U^0 \quad ; \quad \Delta l = -4\pi G 3p.$$

Si nous admettons la symétrie sphérique et en plus la condition sur la pression :

$$\bar{m} \partial_i U^0 = \partial_i \bar{p}$$

on arrive selon A. Papapetrou [9] à :

$$(118) \quad \begin{aligned} m_a \frac{d}{dt} \left[v_a^i + v_a^i \frac{(v)^2}{2c^2} + \frac{3v_a^i}{c^2} \Sigma' u_b(a) - \frac{4}{c^2} \Sigma' v_b^i u_b(a) \right] \\ = \Sigma' \partial_i u_b(a) \left[m_a + \frac{3}{2c^2} m_a (v_a)^2 - \frac{m_a}{c^2} \Sigma' u_b(a) \right] \\ + \frac{3}{2c^2} m_a \Sigma' (v_a)^2 \partial_i u_b(a) - 4 \frac{m_a}{c^2} v_a^k \Sigma' v_b^k \partial_i u_b(a) \\ + \int \frac{m_a}{c^2} \partial_i f dV + o\left(\frac{1}{c^4}\right). \end{aligned}$$

Einstein, Infeld, Hoffmann [4] par l'autre méthode arrivent au résultat suivant :

$$(119) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\left[m_a + \frac{1}{2} m_a (v_a)^2 + 3 \sum_b m_a m_b / r_{ab} \right] \dot{v}_a^i - \frac{1}{2} \sum_b m_a m_b \frac{\partial^2 r_{ab}}{\partial x_a^i \partial x_b^j} \dot{v}_b^j \right. \\ \left. - 4 \sum_b m_a m_b / r_{ab} \dot{v}_b^i \right] - \sum_b m_a m_b \frac{\left(1 + \frac{3}{2} (v_a)^2 + \frac{3}{2} (v_b)^2 - 4v_a^j v_b^j \right)}{\partial r_{ab} / \partial x_a^i} \\ + \frac{1}{2} \frac{\Sigma'_b m_a m_b (m_a + m_b)}{\partial (r_{ab}^2) / \partial x_a^i} + \left[\frac{d}{dx_a^i} \frac{1}{2} \sum_c m_a m_b m_c \left(\frac{1}{r_{ab}} \frac{1}{r_{bc}} + \frac{1}{r_{bc}} \frac{1}{r_{ca}} + \frac{1}{r_{ca}} \frac{1}{r_{ab}} \right) \right] \\ + \frac{1}{2} \sum_b m_a m_b v_a^j v_b^l \frac{\partial^3 r_{ab}}{\partial x_a^j \partial x_b^l \partial x_a^i}, \end{aligned}$$

équations qui sont essentiellement identiques aux précédentes; il faut seulement faire les dérivées indiquées en (118) et après regrouper les termes pour trouver les équations (119).

Ces équations peuvent être déduites d'une fonction de Lagrange :

$$(120) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_a^i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_a^i}$$

laquelle est :

$$\begin{aligned}
 (121) \quad \mathfrak{L} = & \frac{1}{2} \sum_a m_a (v_a)^2 + \frac{1}{8} \sum_a m_a [(v_a)^2]^2 - 2 \sum'_{a,b} \frac{m_a m_b}{r_{ab}} v_a^i v_b^i \\
 & + \frac{3}{4} \sum'_{a,b} \frac{m_a m_b}{r_{ab}} [(v_a)^2 + (v_b)^2] - \frac{1}{4} \sum'_{a,b} m_a m_b \frac{\partial^2 r_{ab}}{\partial x_a^i \partial x_b^j} v_b^j v_a^i \\
 & + \frac{1}{2} \sum'_{a,b} \frac{m_a m_b}{r_{ab}} - \frac{1}{4} \sum'_{a,b} \frac{m_a m_b (m_a + m_b)}{r_{ab}^2} \\
 & - \frac{1}{6} \sum'_{a,b,c} m_a m_b m_c \left(\frac{1}{r_{ab}} \frac{1}{r_{bc}} + \frac{1}{r_{bc}} \frac{1}{r_{ca}} + \frac{1}{r_{ca}} \frac{1}{r_{ab}} \right).
 \end{aligned}$$

Cette fonction peut être obtenue aussi directement de la métrique en suivant la méthode indiquée par Landau, Lifchitz [14].

XI. — Problème des trois corps.

Jusqu'au deuxième ordre nous obtenons le lagrangien absolu suivant pour le problème des trois corps, déduit de (120) :

$$\begin{aligned}
 (122) \quad \mathfrak{L} = & \frac{1}{2} m_1 (v_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_2)^2 + \frac{1}{2} m_3 (v_3)^2 + \frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} \\
 & + \frac{1}{8} m_1 (v_1)^4 + \frac{1}{8} m_2 (v_2)^4 + \frac{1}{8} m_3 (v_3)^4 - m_1 m_2 m_3 \left(\frac{1}{r_{12} r_{23}} + \frac{1}{r_{23} r_{31}} + \frac{1}{r_{31} r_{12}} \right) \\
 & - \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{r_{12}^2} - \frac{1}{2} \frac{m_1 m_3 (m_1 + m_3)}{r_{13}^2} - \frac{1}{2} \frac{m_2 m_3 (m_2 + m_3)}{r_{23}^2} \\
 & - 4 \frac{m_1 m_2}{r_{12}} v_1^i v_2^i - 4 \frac{m_1 m_3}{r_{13}} v_1^i v_3^i - 4 \frac{m_2 m_3}{r_{23}} v_2^i v_3^i \\
 & + \frac{3}{2} \frac{m_1 m_2}{r_{12}} [(v_1)^2 + (v_2)^2] + \frac{3}{2} \frac{m_1 m_3}{r_{13}} [(v_1)^2 + (v_3)^2] + \frac{3}{2} \frac{m_2 m_3}{r_{23}} [(v_2)^2 + (v_3)^2] \\
 & - \frac{1}{2} m_1 m_2 v_1^i v_2^j \frac{\partial^2 r_{12}}{\partial x_1^i \partial x_2^j} - \frac{1}{2} m_1 m_3 v_1^i v_3^j \frac{\partial^2 r_{13}}{\partial x_1^i \partial x_3^j} - \frac{1}{2} m_2 m_3 v_2^i v_3^j \frac{\partial^2 r_{23}}{\partial x_2^i \partial x_3^j},
 \end{aligned}$$

où nous employons les notations :

m_1, m_2, m_3 masses des trois corps; $(x_1^i), (x_2^i), (x_3^i)$ coordonnées absolues de chacun des trois corps; r_{12}, r_{23}, r_{31} , distances entre les corps.

XII. — Étude générale du formalisme hamiltonien.

Avant d'obtenir la fonction de Hamilton qui peut se déduire de la fonction de Lagrange que nous venons d'écrire, nous allons faire des considérations plus générales.

Soit L un lagrangien du type :

$$(123) \quad L = \frac{1}{2} \Sigma k(\dot{q}_i^2) + f(r) + f^{(2)}(\dot{q})$$

où $f^{(2)}(\dot{q})$ veut dire une fonction d'ordre supérieur aux autres termes par rapport à $(v)^2/c^2$: tel est le cas du lagrangien des trois corps, à étudier.

Par définition la fonction de Hamilton correspondante est :

$$H = \Sigma p_i \dot{q}_i - L$$

dans notre cas nous avons,

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = k \dot{q}_i + \frac{\partial f^{(2)}(\dot{q})}{\partial \dot{q}_i}$$

c'est-à-dire,

$$(124) \quad \dot{q}_i = \frac{p_i}{k} - \frac{1}{k} \frac{\partial f^{(2)}(\dot{q})}{\partial \dot{q}_i} + \dots$$

et aussi en prenant le carré :

$$(\dot{q}_i)^2 = \frac{p_i^2}{k^2} - \frac{2p_i}{k^2} \frac{\partial f^{(2)}(\dot{q})}{\partial \dot{q}_i} + \dots$$

et en tenant compte de (124), nous obtenons :

$$\frac{1}{2} k(\dot{q}_i)^2 = \frac{p_i^2}{2k} - \dot{q}_i \frac{\partial f^{(2)}(\dot{q})}{\partial \dot{q}_i} + \dots$$

En substituant ces résultats dans la définition du hamiltonien, nous obtenons pour celui-ci :

$$(123) \quad \begin{aligned} H &= \Sigma k \dot{q}_i^2 + \dot{q}_i \frac{\partial f^{(2)}(\dot{q})}{\partial \dot{q}_i} - \frac{1}{2} \Sigma k(\dot{q}_i)^2 - f(r) - f^{(2)}(\dot{q}) \\ &= \frac{1}{2} \Sigma k \dot{q}_i^2 + \dot{q}_i \frac{\partial f^{(2)}(\dot{q})}{\partial \dot{q}_i} - f(r) - f^{(2)}(\dot{q}) \\ &= \frac{p_i^2}{2k} - f(r) - f^{(2)}(p/k). \end{aligned}$$

Toutes ces considérations peuvent s'étendre à notre cas puisque dans le lagrangien (122) nous avons une partie d'ordre 1 par rapport à v^2/c^2 et une autre partie d'ordre 2 par rapport à v^2/c^2 .

XIII. — Application au problème des trois corps.

Dans le lagrangien (122) il y a les trois parties de (123) :

$$\frac{1}{2} \Sigma k(\dot{q}_i)^2 \Rightarrow \frac{1}{2} m_1(v_1)^2 + \frac{1}{2} m_2(v_2)^2 + \frac{1}{2} m_3(v_3)^2$$

$$f(r) \Rightarrow \frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}}$$

et tous les autres termes sont de second ordre : $f^{(2)}(\dot{q})$.

Nous pouvons donc obtenir immédiatement la fonction de Hamilton à partir de (123), mais avant nous prendrons des notations plus commodes :

$$m_1(p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3) \quad ; \quad r_{12} = \sqrt{(q_1 - q_4)^2 + (q_2 - q_5)^2 + (q_3 - q_6)^2},$$

$$m_2(p_4, p_5, p_6, q_4, q_5, q_6) \quad ; \quad r_{13} = \sqrt{(q_7 - q_1)^2 + (q_8 - q_2)^2 + (q_9 - q_3)^2},$$

$$m_3(p_7, p_8, p_9, q_7, q_8, q_9) \quad ; \quad r_{23} = \sqrt{(q_4 - q_7)^2 + (q_5 - q_8)^2 + (q_6 - q_9)^2},$$

avec lesquelles la fonction de Hamilton s'écrit :

$$\begin{aligned} H = & \frac{1}{2m_1} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + \frac{1}{2m_2} (p_4^2 + p_5^2 + p_6^2) \\ & + \frac{1}{2m_3} (p_7^2 + p_8^2 + p_9^2) - \frac{m_2 m_3}{r_{23}} - \frac{m_3 m_1}{r_{13}} - \frac{m_1 m_2}{r_{12}} \\ & - \frac{1}{8m_1^3} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)^2 - \frac{1}{8m_2^3} (p_4^2 + p_5^2 + p_6^2)^2 \\ & - \frac{1}{8m_3^3} (p_7^2 + p_8^2 + p_9^2) + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{r_{12}^2} \\ & + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_3 (m_1 + m_3)}{r_{13}^2} + \frac{1}{2} \frac{m_2 m_3 (m_2 + m_3)}{r_{23}^2} + m_1 m_2 m_3 \left(\frac{1}{r_{12} r_{23}} + \frac{1}{r_{23} r_{31}} + \frac{1}{r_{31} r_{12}} \right) \\ & - \frac{3}{2m_1} \left(\frac{m_2}{r_{12}} + \frac{m_3}{r_{13}} \right) (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) - \frac{3}{2m^2} \left(\frac{m_1}{r_{12}} + \frac{m_3}{r_{23}} \right) (p_4^2 + p_5^2 + p_6^2) \\ & - \frac{3}{2m_3} \left(\frac{m_1}{r_{13}} + \frac{m_2}{r_{23}} \right) (p_7^2 + p_8^2 + p_9^2) \\ & + \frac{1}{2r_{12}^3} [(q_1 - q_4)p_1 + (q_2 - q_5)p_2 + (q_3 - q_6)p_3] \\ & \quad \quad \quad [(q_1 - q_4)p_4 + (q_2 - q_5)p_5 + (q_3 - q_6)p_6] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2r_{13}^3} [(q_7 - q_1)p_1 + (q_8 - q_2)p_2 + (q_9 - q_3)p_3] \\
& \qquad \qquad \qquad [(q_7 - q_1)p_7 + (q_8 - q_2)p_8 + (q_9 - q_3)p_9] \\
& + \frac{1}{2r_{23}^3} [(q_4 - q_7)p_4 + (q_5 - q_8)p_5 + (q_6 - q_9)p_6] \\
& \qquad \qquad \qquad [(q_4 - q_7)p_7 + (q_5 - q_8)p_8 + (q_6 - q_9)p_9] \\
& + \frac{7}{2r_{12}} (p_4p_1 + p_5p_2 + p_6p_3) + \frac{7}{2r_{13}} (p_7p_1 + p_8p_2 + p_9p_3) \\
& + \frac{7}{2r_{23}} (p_7p_4 + p_8p_5 + p_9p_6).
\end{aligned}$$

Il faut dire que dans toute cette dernière partie nous prenons par commodité $c = 1$ et $k = 1$, en suivant les notations de Infeld-Plebansky [13].

XIV. — Autre forme de la fonction de Hamilton.

Nous allons faire une transformation canonique des variables q et p :

$$q'_i = q'_i(q, p, t) \quad ; \quad p'_i = p'_i(q, p, t),$$

pour cela il suffit que :

$$dW = \Sigma q_i dp_i + \Sigma p'_i dp'_i + (H' - H)dt,$$

c'est-à-dire que,

$$q_r = \frac{\partial W}{\partial p_r} \quad ; \quad p'_r = \frac{\partial W}{\partial q'_r}.$$

La nouvelle fonction de Hamilton est :

$$H' = H + \frac{\partial W}{\partial t},$$

et nous prendrons,

$$\begin{aligned}
W = & p_1q'_1 + p_2q'_2 + p_3q'_3 + p_4q'_4 + p_5q'_5 + p_6q'_6 \\
& + (p_1 + p_4 + p_7)q'_7 + (p_2 + p_5 + p_8)q'_8 + (p_3 + p_6 + p_9)q'_9.
\end{aligned}$$

Les relations entre les anciennes et les nouvelles variables sont :

$$\begin{aligned}
q_1 = q'_1 + q'_7 \quad ; \quad q_2 = q'_2 + q'_8 \quad ; \quad q_3 = q'_3 + q'_9 \quad ; \quad p'_1 = p_1 \quad ; \quad p'_2 = p_2 \quad ; \quad p'_3 = p_3. \\
q_4 = q'_4 + q'_7 \quad ; \quad q_5 = q'_5 + q'_8 \quad ; \quad q_6 = q'_6 + q'_9 \quad ; \quad p'_4 = p_4 \quad ; \quad p'_5 = p_5 \quad ; \quad p'_6 = p_6.
\end{aligned}$$

$$q_7 = q'_7 ; q_8 = q'_8 ; q_9 = q'_9 ;$$

$$p'_7 = p_1 + p_4 + p_7 ; p'_8 = p_2 + p_5 + p_8 ; p'_9 = p_3 + p_6 + p_9.$$

$$p_7 = p'_7 - p'_1 - p'_4 ; p_8 = p'_8 - p'_2 - p'_5 ; p_9 = p'_9 - p'_3 - p'_6.$$

Nous utiliserons la notation vectorielle :

$$\vec{p}_1(p'_1, p'_2, p'_3) ; \vec{r}_1 = (q'_1, q'_2, q'_3)$$

$$\vec{p}_2(p'_4, p'_5, p'_6) ; \vec{r}_2 = (q'_4, q'_5, q'_6)$$

$$\vec{p}_3(p'_7, p'_8, p'_9) ; \vec{r}_3 = (q'_7, q'_8, q'_9) = \vec{r}_2 - \vec{r}_1.$$

et en plus nous supprimerons les ' puisqu'on ne peut pas se confondre.

Nous prendrons aussi la condition $\vec{p}_3 = 0$, laquelle fixe le système de référence; ce système est celui qui fixe le troisième corps au repos. Avec ces conditions la fonction de Hamilton est :

$$(125) \quad \begin{aligned} H = & \frac{1}{2m_1} \vec{p}_1^2 + \frac{1}{2m_2} \vec{p}_2^2 + \frac{1}{2m_3} (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 - \frac{m_2 m_3}{|\vec{r}_2|} - \frac{m_3 m_1}{|\vec{r}_1|} - \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \\ & - \frac{1}{8} m_1^3 |\vec{p}_1^2|^2 - \frac{1}{8m_2^3} |\vec{p}_2^2|^2 - \frac{1}{8m_3^3} |(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2|^2 \\ & + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2} + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_3 (m_1 + m_3)}{\vec{r}_1^2} + \frac{1}{2} \frac{m_2 m_3 (m_2 + m_3)}{\vec{r}_2^2} \\ & - \frac{3}{2m_1} \left(\frac{m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| |\vec{r}_2|} + \frac{m_3}{|\vec{r}_1|} \right) (\vec{p}_1^2) - \frac{3}{2m_2} \left(\frac{m_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} + \frac{m_3}{|\vec{r}_2|} \right) (\vec{p}_2^2) \\ & - \frac{3}{2m_3} \left(\frac{m_1}{|\vec{r}_1|} + \frac{m_2}{|\vec{r}_2|} \right) (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 \\ & + m_1 m_2 m_3 \left(\frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| |\vec{r}_2|} + \frac{1}{|\vec{r}_2| |\vec{r}_1|} + \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| |\vec{r}_1|} \right) \\ & - \frac{1}{2 |\vec{r}_2|^3} [(\vec{r}_2 \cdot \vec{p}_3)] [\vec{r}_2 (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)] + \frac{1}{2 |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} [(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \vec{p}_1] [(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \vec{p}_2] \\ & - \frac{1}{2 |\vec{r}_1|^3} [\vec{r}_1 \vec{p}_1] [\vec{r}_1 (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)] + \frac{7}{2 |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} (\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2) \\ & + \frac{7}{2 |\vec{r}_1|} \vec{p}_1 (\vec{p}_1 + \vec{p}_2) + \frac{7}{2 |\vec{r}_2|} \vec{p}_2 (\vec{p}_1 + \vec{p}_2) \end{aligned}$$

XV. — Les impulsions généralisées.

Nous retournons à notre premier lagrangien pour le calcul des impulsions généralisées; par définition : $p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$, ce qui nous donne pour la coordonnée 1 du premier corps :

$$(126) \quad p_1 \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = m_1 \dot{q}_1 + \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_1 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) \\ + 3m_1 \dot{q}_1 m_2 \{ (q_1 - q_4)^2 + (q_2 - q_5)^2 + (q_3 - q_6)^2 \}^{-1/2} \\ + 3m_1 \dot{q}_1 m_3 \{ (q_7 - q_1)^2 + (q_8 - q_2)^2 + (q_9 - q_3)^2 \}^{-1/2} \\ - 7/2 m_1 m_2 \dot{q}_4 \{ (q_1 - q_4)^2 + (q_2 - q_5)^2 + (q_3 - q_6)^2 \}^{-1/2} \\ - 7/2 m_1 m_3 \dot{q}_7 \{ (q_7 - q_1)^2 + (q_8 - q_2)^2 + (q_9 - q_3)^2 \}^{-1/2} \\ - 1/2 m_1 m_2 \{ (q_1 - q_4)^2 + (q_2 - q_5)^2 + (q_3 - q_6)^2 \}^{-3/2} \\ (q_1 - q_4) \{ (q_1 - q_4) \dot{q}_4 + (q_2 - q_5) \dot{q}_5 + (q_3 - q_6) \dot{q}_6 \} \\ - 1/2 m_1 m_3 \{ (q_7 - q_1)^2 + (q_8 - q_2)^2 + (q_9 - q_3)^2 \}^{-3/2} \\ (q_7 - q_1) \{ (q_7 - q_1) \dot{q}_7 + (q_8 - q_2) \dot{q}_8 + (q_9 - q_3) \dot{q}_9 \}.$$

et en notation plus résumée pour les autres coordonnées du premier corps :

$$p_2 \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = m_1 \dot{q}_2 + \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_2 (\vec{v}_1)^2 + 3m_1 m_2 \dot{q}_2 \{ |\vec{r}_{12}|^2 \}^{-1/2} \\ + 3m_1 m_3 \dot{q}_2 |\vec{r}_{31}|^{-1} - 7/2 m_1 m_2 \dot{q}_5 |\vec{r}_{12}|^{-1} - 7/2 m_1 m_3 \dot{q}_8 |\vec{r}_{13}|^{-1} \\ - \frac{1}{2} m_1 m_2 |\vec{r}_{12}|^{-3} (q_2 - q_5) (\vec{r}_{12} \cdot \vec{v}_2) - \frac{1}{2} m_1 m_3 (q_8 - q_2) |\vec{r}_{13}|^{-3} (\vec{r}_{13} \cdot \vec{v}_3),$$

$$p_3 \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3} = m_1 \dot{q}_3 + \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_3 (v_1)^2 + 3m_1 m_2 \dot{q}_3 |\vec{r}_{12}|^{-1} \\ + 3m_1 m_3 \dot{q}_3 |\vec{r}_{13}|^{-1} - 7/2 m_1 m_2 \dot{q}_6 |\vec{r}_{12}|^{-1} - 7/2 m_1 m_3 \dot{q}_9 |\vec{r}_{13}|^{-1} \\ - \frac{1}{2} m_1 m_2 (q_3 - q_6) |\vec{r}_{12}|^{-3} (\vec{r}_{12} \cdot \vec{v}_2) - \frac{1}{2} m_1 m_3 (q_9 - q_3) |\vec{r}_{13}|^{-3} (\vec{r}_{13} \cdot \vec{v}_3).$$

Nous avons obtenu des formules analogues pour les autres corps. De toutes ces formules nous obtenons :

$$(127) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{q}_7 = \frac{p_7}{m_3} - a \\ \dot{q}_8 = \frac{p_8}{m_2} - b \end{array} \right. \quad \dot{q}_9 = \frac{p_9}{m_3} - c$$

avec, a, b, c , des quantités d'ordre supérieur par rapport à v^2/c^2 , que nous pouvons déduire facilement de (126); par exemple la valeur de a est :

(128)

$$a = 1/2 \dot{q}_7 (v_3)^2 + 3m_1 \dot{q}_7 |r_{13}|^{-1} + 3m_2 \dot{q}_7 |r_{23}|^{-1} - \frac{7}{2} m_3 \dot{q}_1 |r_{13}|^{-1} - \frac{7}{2} m_2 \dot{q}_4 |r_{23}|^{-1} \\ - \frac{1}{2} m_1 |r_{13}|^{-3} (q_7 - q_1) (\vec{r}_{13} \cdot \vec{v}_1) - \frac{1}{2} m_2 |r_{23}|^{-3} (q_4 - q_7) (\vec{r}_{23} \cdot \vec{v}_2).$$

Si nous calculons les carrés des formules (127) :

$$\dot{q}_7^2 = \frac{p_7^2}{m_3^2} - \frac{2ap_7}{m_3} + \textcircled{2}$$

$$\dot{q}_8^2 = \frac{p_8^2}{m_3^2} - \frac{2cp_8}{m_3} + \textcircled{2}$$

$$\dot{q}_9^2 = \frac{p_9^2}{m_3^2} - \frac{2bp_9}{m_3} + \textcircled{2}$$

c'est-à-dire que pour l'énergie cinétique classique nous avons en termes des impulsions généralisées :

$$(129) \quad 1/2 m_3 (\dot{q}_7^2 + \dot{q}_8^2 + \dot{q}_9^2) = \frac{1}{2m_3} (p_7^2 + p_8^2 + p_9^2) - (ap_7 + bp_8 + cp_9),$$

où le terme correctif de second ordre est :

$$ap_7 + bp_8 + cp_9 = \frac{1}{2m_3} (p_7^2 + p_8^2 + p_9^2)^2 + \frac{3}{m_3} \left(\frac{m_1}{r_{13}} + \frac{m_2}{r_{23}} \right) (p_7^2 + p_8^2 + p_9^2) \\ - \frac{7}{2r_{13}} (p_7 p_1 + p_8 p_2 + p_9 p_3) - \frac{7}{2r_{23}} (p_7 p_4 + p_8 p_5 + p_9 p_6) \\ - \frac{1}{2r_{13}} [(q_7 - q_1)p_1 + (q_8 - q_2)p_2 + (q_9 - q_3)p_3] \\ \quad \quad \quad [(q_7 - q_1)p_7 + (q_8 - q_2)p_8 + (q_9 - q_3)p_9] \\ - \frac{1}{2r_{23}} [(q_4 - q_7)p_4 + (q_5 - q_8)p_5 + (q_6 - q_9)p_6] \\ \quad \quad \quad [(q_4 - q_7)p_7 + (q_5 - q_8)p_8 + (q_6 - q_9)p_9].$$

Pour les deux autres corps nous avons :

$$\frac{1}{2} m_1 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) = \frac{1}{2m_1} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) - (\bar{a}p_1 + \bar{b}p_2 + \bar{c}p_3)$$

$$\frac{1}{2} m_2 (\dot{q}_4^2 + \dot{q}_5^2 + \dot{q}_6^2) = \frac{1}{2m_2} (p_4^2 + p_5^2 + p_6^2) - (\hat{a}p_4 + \hat{b}p_5 + \hat{c}p_6),$$

avec d'expressions semblables à (128) pour les termes correctifs et que nous ne développons pas puisque par la suite ne seront pas employées.

XVI. — Fonction de Hamilton relative à un des corps.

La fonction de Hamilton (124) donne pour la fonction de Hamilton relative au corps de masse m_3 :

$$\begin{aligned}
 H_r = & \frac{1}{2m_3} (p_7^2 + p_8^2 + p_9^2) - \frac{m_2 m_3}{r_{23}} - \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{m_1 m_2 m_3}{r_{23} r_{31}} \left(1 + \frac{r_{13} + r_{31}}{r_{12}} \right) \\
 & - \frac{1}{8m_3^3} (p_7^2 + p_8^2 + p_9^2)^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_3 (m_1 + m_3)}{r_{13}^2} + \frac{1}{2} \frac{m_2 m_3 (m_2 + m_3)}{r_{23}^2} \\
 & - \frac{3}{2} \frac{m_1}{m_3} \frac{1}{r_{13}} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) - \frac{3}{2} \frac{m_2}{m_3} \frac{1}{r_{23}} (p_4^2 + p_5^2 + p_6^2) - \frac{3}{2} \left(\frac{m_1}{m_3} \frac{1}{r_{13}} - \frac{m_2}{m_3} \frac{1}{r_{23}} \right) \\
 & \qquad \qquad \qquad (p_7^2 + p_8^2 + p_9^2) \\
 & + \frac{7}{2} \frac{1}{r_{13}} (p_7 p_1 + p_8 p_2 + p_9 p_3) + \frac{7}{2} \frac{1}{r_{23}} (p_7 p_4 + p_8 p_5 + p_9 p_6) \\
 & + \frac{1}{2} \frac{1}{r_{13}^3} [(q_7 - q_1)p_1 + (q_8 - q_2)p_2 + (q_9 - q_3)p_3] \\
 & \qquad \qquad \qquad [(q_7 - q_1)p_7 + (q_8 - q_2)p_8 + (q_9 - q_3)p_9] \\
 & + \frac{1}{2} \frac{1}{r_{23}^3} [(q_4 - q_7)p_4 + (q_5 - q_8)p_5 + (q_6 - q_9)p_6] \\
 & \qquad \qquad \qquad [(q_4 - q_7)p_7 + (q_5 - q_8)p_8 + (q_6 - q_9)p_9],
 \end{aligned}$$

où nous avons supprimé les termes de (124) qui ne font pas intervenir les coordonnées du corps de masse m_3 .

Cette fonction de Hamilton en employant les résultats (129) et (128) nous pouvons l'écrire :

$$\begin{aligned}
 (130) \quad H_r = & \frac{1}{2} (\dot{q}_7^2 + \dot{q}_8^2 + \dot{q}_9^2) - \frac{m_2}{r_{23}} - \frac{m_1}{r_{13}} + \frac{m_1 m_2}{r_{23} r_{31}} \left(1 + \frac{r_{32} + r_{31}}{r_{12}} \right) \\
 & + \frac{3}{8} (\dot{q}_7^2 + \dot{q}_8^2 + \dot{q}_9^2)^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 (m_1 + m_3)}{r_{13}^2} + \frac{1}{2} \frac{m_2 (m_2 + m_3)}{r_{23}^2} \\
 & + \frac{3}{2} \frac{m_1}{r_{13}} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) + \frac{3}{2} \frac{m_2}{r_{23}} (\dot{q}_4^2 + \dot{q}_5^2 + \dot{q}_6^2) - \frac{3}{2} \left(\frac{m_1}{r_{13}} + \frac{m_2}{r_{23}} \right) \\
 & \qquad \qquad \qquad (\dot{q}_7^2 + \dot{q}_8^2 + \dot{q}_9^2).
 \end{aligned}$$

Afin d'alléger un peu les calculs, en supprimant des termes à l'expression antérieure nous prendrons comme masses des deux autres corps :

$$\begin{aligned}
 (131) \quad m_1^* &= m_1 \left[1 - \frac{3}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) - \frac{m_2}{r_{12}} \right] \\
 m_2^* &= m_2 \left[1 - \frac{3}{2} (\dot{q}_4^2 + \dot{q}_5^2 + \dot{q}_6^2) - \frac{m_1}{r_{12}} \right],
 \end{aligned}$$

notons qu'au premier ordre :

$$m_1^* = m_1 \quad ; \quad m_2^* = m_2,$$

c'est-à-dire que nous sommes assurés de retrouver les résultats classiques à cet ordre d'approximation; les nouvelles masses sont constantes dans les limites des termes du troisième ordre que nous ne considérons pas.

Le nouveau hamiltonien est :

$$(132) \quad H_r = \frac{1}{2} (\dot{q}_7^2 + \dot{q}_8^2 + \dot{q}_9^2) - \frac{m_2}{r_{23}} - \frac{m_1}{r_{13}} - \frac{3}{2} \left(\frac{m_1}{r_{13}} + \frac{m_2}{r_{23}} \right) (\dot{q}_7^2 + \dot{q}_8^2 + \dot{q}_9^2) + \frac{m_1 m_2}{r_{23} r_{31}} \\ + \frac{3}{8} (\dot{q}_7^2 + \dot{q}_8^2 + \dot{q}_9^2)^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1(m_1 + m_3)}{r_{13}^2} + \frac{1}{2} \frac{m_2(m_1 + m_3)}{r_{23}^2}.$$

C'est-à-dire que nous pouvons l'écrire :

$$H_r = H_0 + H_1$$

avec comme partie classique :

$$(133) \quad H_0 = \frac{1}{2} (\dot{q}_7^2 + \dot{q}_8^2 + \dot{q}_9^2) - \frac{m_2}{r_{23}} - \frac{m_1}{r_{13}},$$

et comme fonction de Hamilton perturbatrice :

$$(134) \quad H_1 = \frac{3}{2} H_0^2 - \left(\frac{m_2}{r_{23}} + \frac{m_1}{r_{13}} \right)^2 + \frac{1}{2} m_3 \left(\frac{m_2}{r_{23}} + \frac{m_1}{r_{13}} \right).$$

Dans le cas d'un problème des trois corps plats, c'est-à-dire que les trois corps restent toujours sur le même plan les équations sont plus simples; nous avons pour le hamiltonien absolu :

$$H = \frac{1}{2m_1} (p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2m_2} (p_4^2 + p_5^2) + \frac{1}{2m_3} (p_7^2 + p_8^2) - \frac{3}{2m_1} \left(\frac{m_2}{r_{12}} + \frac{m_3}{r_{13}} \right) (p_1^2 + p_2^2) \\ - \frac{1}{8m_1^3} (p_1^2 + p_2^2)^2 - \frac{1}{8m_2^3} (p_4^2 + p_5^2)^2 - \frac{1}{8m_3^3} (p_7^2 + p_8^2)^2 - \frac{3}{2m_2} \left(\frac{m_1}{r_{12}} + \frac{m_3}{r_{23}} \right) (p_4^2 + p_5^2) \\ + \frac{7}{2r_{12}} (p_4 p_1 + p_5 p_2) + \frac{7}{2r_{13}} (p_7 p_1 + p_8 p_2) \\ + \frac{7}{2r_{23}} (p_7 p_4 + p_8 p_5) - \frac{3}{2m_3} \left(\frac{m_1}{r_{13}} + \frac{m_2}{r_{23}} \right) (p_7^2 + p_8^2) \\ + \frac{1}{2r_{12}^3} [(q_1 - q_4)p_1 + (q_2 - q_5)p_2][(q_1 - q_4)p_4 + (q_2 - q_5)p_5] \\ + \frac{1}{2r_{13}^3} [(q_7 - q_1)p_1 + (q_8 - q_2)p_2][(q_7 - q_1)p_7 + (q_8 - q_2)p_8] \\ + \frac{1}{2r_{23}^3} [(q_4 - q_7)p_4 + (q_5 - q_8)p_5][(q_4 - q_7)p_7 + (q_5 - q_8)p_8 + f](r),$$

pour les impulsions généralisées :

$$p_7 \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_7} = m_3 \dot{q}_7 + \frac{1}{2} m_3 \dot{q}_7 v_3^2 + \dots$$

$$p_8 \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_8} = m_3 \dot{q}_8 + \frac{1}{2} m_3 \dot{q}_8 v_3^2 + \dots$$

$$p_9 \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_9} = 0.$$

Les changements de masse sont maintenant :

$$m_1^* = m_1 \left[1 - \frac{3}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \frac{m_2}{r_{12}} \right]$$

$$m_2^* = m_2 \left[1 - \frac{3}{2} (\dot{q}_4^2 + \dot{q}_5^2) - \frac{m_1}{r_{12}} \right],$$

et la fonction de Hamilton relative au corps de masse m_3 :

$$H_r = \frac{1}{2} (\dot{q}_7^2 + \dot{q}_8^2) - \frac{m_2}{r_{23}} - \frac{m_1}{r_{13}} + \frac{3}{8} (\dot{q}_7^2 + \dot{q}_8^2)^2 + \frac{3}{2} \left(\frac{m_1}{r_{13}} + \frac{m_2}{r_{23}} \right) (\dot{q}_7^2 + \dot{q}_8^2) + f(r),$$

ce qui nous donne finalement les deux parties :

$$H_r = H_0 + H_1,$$

avec comme partie classique :

$$(135) \quad H_0 = \frac{1}{2} (\dot{q}_7^2 + \dot{q}_8^2) - \frac{m_2}{r_{23}} - \frac{m_1}{r_{13}},$$

et la perturbation de second ordre :

$$(136) \quad H_1 = \frac{3}{2} H_0^2 - \left(\frac{m_2}{r_{23}} + \frac{m_1}{r_{13}} \right)^2 + \frac{1}{2} m_3 \left(\frac{m_2}{r_{23}} + \frac{m_1}{r_{13}} \right)$$

où les distances r_{23} , r_{13} , sont maintenant :

$$r_{23} = \sqrt{(q_4 - q_7)^2 + (q_5 - q_8)^2}$$

$$r_{13} = \sqrt{(q_7 - q_1)^2 + (q_8 - q_2)^2}.$$

XVII. — Application au problème restreint des trois corps.

C'est le cas où deux masses décrivent des circonférences concentriques pendant que la troisième masse beaucoup plus petite est dans le plan des deux circonférences. Le nombre des degrés de liberté du système est alors deux.

De (135) nous déduisons la fonction de Hamilton :

$$H = H_0 + H_1,$$

avec ses deux parties :

$$(137) \quad \begin{aligned} H_0 &= \frac{1}{2} (\dot{q}_7^2 + \dot{q}_8^2) - \frac{m_2}{r_{23}} - \frac{m_1}{r_{13}}, \\ H_1 &= \frac{3}{2} H_0^2 - \left(\frac{m_1}{r_{23}} + \frac{m_1}{r_{13}} \right)^2. \end{aligned}$$

Nous sommes maintenant dans le cas plat; notons aussi que H_0 et H_1 sont fonctions explicites du temps.

Faisons un premier changement de variables canonique :

$$(138) \quad \begin{aligned} q_7 &= \frac{\partial W}{\partial \dot{q}_7}, & u &= \frac{\partial W}{\partial x}, \\ q_8 &= \frac{\partial W}{\partial \dot{q}_8}, & v &= \frac{\partial W}{\partial y}. \end{aligned}$$

avec,

$$W = \dot{q}_7(x \cos nt - y \sin nt) + \dot{q}_8(x \sin nt + y \cos nt),$$

n est la vélocité angulaire de m_1 , m_2 par rapport au centre de masse, déterminé au premier ordre d'approximation. Comme,

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\dot{q}_7 n x \sin nt - \dot{q}_7 n y \cos nt + \dot{q}_8 n x \cos nt - \dot{q}_8 n y \sin nt,$$

et en plus de (138) :

$$\begin{aligned} u &= \dot{q}_7 \cos nt + \dot{q}_8 \sin nt, \\ v &= -\dot{q}_7 \sin nt + \dot{q}_8 \cos nt, \end{aligned}$$

en calculant le carré et additionnant nous avons :

$$\frac{1}{2} (u^2 + v^2) = \frac{1}{2} (\dot{q}_7^2 + \dot{q}_8^2).$$

Pour la nouvelle fonction de Hamilton nous obtenons,

$$(139) \quad \begin{aligned} K = H - \frac{\partial W}{\partial t} &= \frac{1}{2} (u^2 + v^2) - \frac{m_2}{r_{23}} - \frac{m_1}{r_{13}} + n(uy - vx) \\ &+ \frac{3}{8} (u^2 + v^2)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{m_2}{r_{23}} + \frac{m_1}{r_{13}} \right)^2 - \frac{3}{2} (u^2 + v^2) \left(\frac{m_2}{r_{23}} + \frac{m_1}{r_{13}} \right). \end{aligned}$$

Ce changement, physiquement équivalent à une rotation des axes; maintenant le hamiltonien K ne dépend pas explicitement du temps. Pour cette raison nous aurons [18] :

$$\frac{1}{2} (u^2 + v^2) - F = C - [n(uy - vx)] + \textcircled{2}$$

et d'ici nous pouvons déduire :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} (u^2 + v^2)^2 + \left(\frac{m_2}{r_{23}} + \frac{m_1}{r_{13}} \right)^2 - (u^2 + v^2) \left(\frac{m_2}{r_{23}} + \frac{m_1}{r_{13}} \right) \\ = C^2 + n^2(uy - vx)^2 - 2Cn(uy - vx), \end{aligned}$$

par conséquent (139) peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} K = \frac{1}{2} (u^2 + v^2) + n(uy - vx) - \left(\frac{m_2}{r_{23}} + \frac{m_1}{r_{13}} \right) \\ + n^2(uy - vx)^2 - 2 \left(\frac{m_2}{r_{23}} + \frac{m_1}{r_{13}} \right)^2 - 2Cn(uy - vx). \end{aligned}$$

Nous pouvons encore avoir une forme plus simplifiée en faisant le nouveau changement canonique des variables :

$$x = \frac{\partial W}{\partial u}, \quad p_1 = \frac{\partial W}{\partial q_1},$$

$$y = \frac{\partial W}{\partial v}, \quad p_2 = \frac{\partial W}{\partial q_2},$$

avec,

$$W = q_1(u \cos q_2 + v \sin q_2).$$

Nous avons donc,

$$\bar{H} = \bar{H}_0 + \bar{H}_1.$$

\bar{H}_0 est le terme classique [18] :

$$(140) \quad \bar{H}_0 = \frac{1}{2} \left(p_1^2 + \frac{p_2^2}{q_1^2} \right) - np_2 - \left(\frac{m_2}{r_{23}} + \frac{m_1}{r_{13}} \right),$$

et comme terme correctif il reste seulement :

$$(141) \quad \bar{H}_1 = n^2 p_2^2 - 2 \left(\frac{m_2}{r_{23}} + \frac{m_1}{r_{13}} \right)^2 + 2Cnp_2.$$

CONCLUSION

Dans la première partie nous avons obtenu une méthode pour étudier les variations de la métrique de Schwarzschild, laquelle peut s'appliquer non seulement au cas que nous étudions mais aussi à d'autres cas voisins comme par exemple : variation due à la rotation du corps central, variation due à la déformation du corps central, déformation qui peut même être variable avec le temps.

Nous voyons aussi que les calculs avec des coordonnées sphériques se simplifient beaucoup si nous utilisons la fonction d'univers, puisqu'elle permet d'obtenir le formalisme covariant.

Les résultats obtenus pour le problème des deux corps ont, comme tous les résultats jusqu'à présent obtenus, la remarquable propriété de ne dépendre que d'une seule constante sous des conditions de simplification raisonnables. Dans le cas limite de masse du petit corps tendant à zéro nous retrouvons les géodésiques de Schwarzschild et si $c \rightarrow \infty$, les résultats de la Mécanique Classique. L'étude des termes nouveaux introduits ne peut se faire qu'en précisant l'intérieur du petit corps; dans des conditions simples nous obtenons des perturbations qui sont d'ordre assez supérieur à l'ordre de précision actuel des mesures.

L'étude canonique des équations du mouvement en employant la méthode de variation des constantes permet un calcul rapide des perturbations que les nouveaux termes introduits par la Relativité Générale produisent, notamment la perturbation du retard de passage au périhélie. On pourrait espérer que certaines étoiles doubles dans un proche avenir puissent donner une confirmation de ces résultats.

Pour le problème des trois corps, le hamiltonien obtenu permet d'étudier des problèmes théoriquement importants, comme le Soleil, Jupiter et Saturne, mais les corrections qu'on peut obtenir sont loin d'être observables puisque pour l'instant il y a encore assez de magnitudes de ces corps que nous ne connaissons pas avec la précision nécessaire.

REMERCIEMENTS

Je prie M. Lichnerowicz de trouver ici le témoignage de ma respectueuse gratitude pour l'aide et les encouragements qu'il n'a cessé de m'accorder pendant l'élaboration de ce travail.

Mmes Tonnelat et Choquet m'ont fait l'honneur de participer à mon jury de thèse et je les remercie très vivement de leur sollicitude.

Je remercie M. Papapetrou pour l'intérêt qu'il m'a témoigné au cours de mes recherches.

Je tiens aussi à remercier M. Bel pour toute son aide amicale.

Enfin, je ne saurais oublier l'Institut Français de Barcelone, la « Fundacion Juan March », la « Comisaria de Protection Escolar » et notamment le Centre National de la Recherche Scientifique dont l'aide matérielle m'a permis de réaliser ce travail.

BIBLIOGRAPHIE

Pour la première partie :

- [1] L. BEL, Sur trois problèmes physiques relatifs au ds^2 de Schwarzschild. Cours Sauze d'Ouls, 1964.
- [2] E. BLANCHETON, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 245, 1957, p. 284-287.
- [3] A. EINSTEIN et GROMMER, *Sitz Preuss Akad. Wiss.*, 1927, p. 2-13.
- [4] EINSTEIN-INFELD-HOFFMANN, *Ann. Math.*, t. 39, 1938, p. 66-100.
- [5] V. A. FOCK, *The theory of space time and gravitation*, Pergamon Press.
- [6] F. HENNEQUIN, *Thèse*, Gauthier-Villars, Paris, 1958.
- [7] A. LICHNEROWICZ, *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*, Masson, Paris, 1955.
- [8] A. LICHNEROWICZ, Propagateurs et commutateurs en Relativité Générale. I. H. E. S. Publications Mathématiques, n° 10, 1961.
- [9] A. PAPAPETROU, Equations of motion in general relativity. *Proc. Phys. Soc. A*, t. 64, 1951, p. 57-75.
- [10] J. L. SYNGE, *Relativity, the general theory*. North Holland, 1960.
- [11] L. MAS, Étude du problème des deux corps par variation de la métrique de Schwarzschild. *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 262, 1966, p. 266.

Pour la deuxième partie :

- [12] J. CHAZY, *Mécanique Céleste*, Presses Universitaires de France, 1953.
- [13] INFELD-PLEBANSKY, *Motion and relativity*, Pergamon Press, 1960.
- [14] LANDAU-LIFCHITZ, *Théorie du champ*, Éditions de la Paix, 1965.
- [15] T. LEVI-CIVITA, The relativistic problem of several bodies. *Amer. J. Math.*, t. 69, 1937.
- [16] H. POINCARÉ, *Les méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste*, Gauthier-Villars, 1893.
- [17] H. P. ROBERTSON, *Ann. Math.*, t. 39, 1938, p. 101-104.
- [18] E. T. WHITTAKER, *Analytical Dynamics*, Cambridge Univ. Press, 1937.
- [19] L. MAS, Application de la méthode de variation des constantes au problème des deux corps, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 255, 1962, p. 2376-2378.

(Manuscrit reçu le 27 janvier 1967).