ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

C. BOURRELY
J. MANDELBROJT
J. PASCALE

Nouvelles considérations sur le modèle statique. I. - La fonction de source

Annales de l'I. H. P., section A, tome 6, nº 3 (1967), p. 245-254
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1967__6_3_245_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. VI, n° 3, 1967, p. 245-265.

Section A :
Physique théorique.

Nouvelles considérations sur le modèle statique

I. — La fonction de source

par

C. BOURRELY (*), J. MANDELBROJT
et J. PASCALE
Physique théorique, Faculté des Sciences,
Place Victor-Hugo, 13-Marseille (3^e).

SOMMAIRE. — Une fonction de source est calculée dans le modèle de Chew et Low à partir du potentiel nucléon-nucléon en utilisant un « procédé de convergence canonique ». Sans utiliser de paramètres arbitraires (cutoff par exemple) et sans introduire la masse du nucléon, on trouve que notre fonction de source est négligeable pour $\omega > 6\mu$ (μ, masse du méson π).

ABSTRACT. — A source function in the Chew-Low model is calculated from conditions on the two nucleon potential by using a « canonical convergence procedure ». Without the use of arbitrary parameters (such as a cutoff) and without introducing the mass of the nucleon, our source function is found to be negligible for $\omega > 6\mu$ (μ, mass of the π meson).

I. — INTRODUCTION

Dans un article précédent, l'un de nous (J. Mandelbrojt [*1*]) a introduit un procédé canonique de convergence dans l'espace des impulsions, basé sur des considérations d'analyse fine dues à S. Mandelbrojt [*1*] et [*2*]. Nous

(*) Une thèse partiellement basée sur cet article doit être présentée par C. Bourrely à l'Université d'Aix-Marseille en vue d'obtenir le titre de « Docteur ès Sciences ».

résumons ici une de ces propriétés; elle relie le support de la transformée de Fourier d'une fonction à son comportement asymptotique dans l'espace des x (nous en donnons ici un énoncé moins général que celui donné dans l'article [*2*] mais suffisant pour le but que nous poursuivons).

$C(x)$ $(x > 0)$ étant une fonction non décroissante et continue, on considère la classe des fonctions F qui satisfait aux conditions suivantes :

1° $F(x) \leqslant e^{-C(|x|)}$.

2° $\widehat{F}(k)$, la transformée de Fourier de F, a un support compact contenu dans l'intervalle $(-\delta, +\delta)$.

3° $\widehat{F}(0) = 1$.

Il est bien connu que la condition 2° entraîne que $F(x)$ est la restriction d'une fonction entière $F(z)$ de type exponentiel δ, et que $F(z) \leqslant e^{\delta|y|-C(x)}$ $(\leqslant e^{\delta|y|}$, si $C(x) \geqslant 0)$. On sait également qu'une condition nécessaire et suffisante pour que les conditions 1° et 2° soient compatibles est que

$$\int_1^\infty \frac{C(u)}{u^2}\, du < \infty \tag{1}$$

c'est-à-dire qu'il existe des fonctions $F \not\equiv 0$ satisfaisant aux conditions 1° et 2° si l'intégrale (1) converge. Si cette intégrale diverge et si F satisfait aux conditions 1° et 2° alors $F \equiv 0$.

Considérons alors le produit infini

$$\Pi(x) = \frac{\sin^2 ax}{ax^2} \prod_1^\infty \frac{\sin \mu_n x}{\mu_n x} \tag{2}$$

$\dfrac{1}{\mu_n}$ étant l'abscisse du point où $C(x)$ passe par la valeur n. Ce produit converge uniformément dans tout compact, puisque si l'inégalité (1) a lieu $\Sigma\mu_n < \infty$. En fait ce produit infini converge uniformément dans chaque compact du plan complexe quand on remplace x par $z = x + iy$. $\Pi(x)$ est donc la restriction à l'axe des x d'une fonction entière $\Pi(x)$ (définie par le produit infini (2) lorsque x est remplacé par z). S. Mandelbrojt a montré [*2*] que

$$|\Pi(z)| \leqslant e^{\delta_0|y|-C(|z|)} \leqslant e^{\delta_0|y|-C(|x|)}$$

La propriété essentielle que nous retenons de [*2*] est que lorsque l'inégalité (1) a lieu : *pour toute fonction* F *qui est la restriction d'une fonction entière* $F(z)$ *satisfaisant aux conditions* $\widehat{F}(0) = 1$ et $|F(z)| \leqslant e^{\delta|y|-C(|x|)}$ $(z = x + iy)$ *(la transformée de Fourier de* $\widehat{F}$ *a donc son support compris dans l'intervalle* $(-\delta, \delta)$ *et* $|F(x)| \leqslant e^{-C(|x|)})$ *on a* $\delta \geqslant \alpha\delta_0$, α *étant une* *constante positive indépendante de* F. Certaines conditions de régularité de croissance doivent être satisfaites par $C(x)$ (en fait dans [*2*] l'inégalité à laquelle satisfaisait $F(z)$ était $|F(z)| \leqslant e^{\delta|y|-C(|z|)}$ au lieu de $F(z) \leqslant e^{\delta|y|-C(|x|)}$ mais la démonstration reste valable avec cette dernière inégalité). Remarquons que si les quantités $\frac{1}{\mu_n}$ comprennent les multiples d'un nombre $\frac{1}{q}$ ($q > 0$ entier), α tend vers 1.

L'énoncé que nous avons souligné peut s'exprimer en disant que le « cut off » minimum que l'on peut mettre à une fonction $\widehat{F}$ tout en respectant les conditions 1° et 3° est $\alpha\delta_0$. Au lieu de couper une fonction $\widehat{F}(k)$ à ce « cut off » minimum, on peut, de façon plus cohérente simplement remplacer $\widehat{F}(k)$ par la fonction $\widehat{\Pi}(k)$. Notre procédé canonique de convergence consiste à faire cette substitution.

Lorsque $\int_1^\infty \frac{C(u)}{u^2}\, du$ diverge, mais $\int_1^\infty \frac{C(u)}{u^3}\, du < \infty$ (par exemple pour $C(|u|) = \mu |u|$), aucune fonction $F \not\equiv 0$ (non identiquement nulle) satisfaisant à la condition 1°, ne peut avoir un support compact, mais la fonction $\Pi(x)$ définie par l'expression (2) existe encore et notre procédé canonique de convergence consiste encore dans ce cas à remplacer la fonction $\widehat{F}(k)$ par $\widehat{\Pi}(k)$. Plusieurs raisons que nous énoncerons ci-après justifient cette façon de procéder :

— Le produit infini qui définit $\Pi(x)$ converge encore dans chaque compact de l'axe des x et en fait dans chaque compact du plan complexe lorsque x est remplacé par $z = x + iy$, si bien que notre procédé est bien défini.

— Lorsque $\widehat{F}(k)$ est remplacée par $\widehat{\Pi}(k)$ les conditions 1° et 3° sont encore satisfaites.

— $\widehat{\Pi}(k)$ peut s'écrire de la façon suivante

$$\widehat{\Pi}(k) = \lim_{n\to\infty} \pi(2^n\mu_1\mu_2 \dots \mu_n)^{-1}\int_{-a}^{a} dv \int_{-\mu_n}^{\mu_n} dt_n \dots \times \int_{-\mu_1}^{\mu_1} \Delta(k + v + t_1 + \dots + t_n)dt_1$$

où $\Delta(k) = 1$ pour $|k| \leqslant a$; $\Delta(k) = 0$ pour $|k| > a$.

Nous pouvons alors décrire la construction de la fonction $\Pi(x)$ de la façon suivante : on prend la fonction $\Delta(k)$ qui est la transformée de Fourier de $\frac{\sin ax}{x}$. Son support qui est $(-a, a)$ est augmenté à chaque intégration successive, simultanément la valeur de la fonction obtenue dans l'espace des impulsions est diminuée surtout aux extrémités de son support, autrement dit à chaque intégration le support de la transformée de Fourier est augmenté par un processus d'étalement de la transformée de Fourier, la fonction elle-même étant multipliée à chaque étape par $\frac{\sin \mu_n x}{\mu_n x}$. Ces augmentations successives du support de la transformée de Fourier semblent être les plus petites possibles compatibles avec le fait que la fonction finale $\left(\frac{\sin^2 ax}{ax^2} \Pi \frac{\sin \mu_n x}{\mu_n x}\right)$ décroisse comme $e^{-C(|x|)}$. Autrement dit, une déformation aussi faible que possible est faite sur une fonction ayant un support compact (dans l'espace des impulsions) pour lui donner un comportement donné à l'avance pour $|x| \to \infty$.

— Lorsque (1) converge, on sait que le support $(-\delta, +\delta)$ de $\widehat{F}(k)$ est lié au comportement de $F(z)$ dans le plan complexe d'après l'inégalité $|F(z)| \leqslant e^{\delta|y|-C(|x|)}$. La fonction $\delta|y|$ est du plus petit ordre possible compatible avec le fait que $\int_0^\infty e^{-C(|x|)}\,dx < \infty$; si nous avions $F(z) \leqslant e^{\varphi|y|-C(|x|)}$ avec $\frac{\varphi(u)}{u} \to 0$, alors on aurait nécessairement $F \equiv 0$ (même si (1) converge).

Si nous considérons maintenant le cas où (1) diverge, nous avons $|\Pi(z)| \leqslant e^{\varphi|y|-C(|x|)}$ où, à un certain point de vue $\varphi(u)$ est la fonction de croissance la « moins rapide » permise pour qu'une fonction $F(z)$ non identiquement nulle puisse satisfaire à l'inégalité $|F(z)| \leqslant e^{\varphi|y|-C(|x|)}$ avec $\int \frac{C(u)}{u^3}\,du < \infty$. Autrement dit $\varphi(|y|)$ joue ici (quand on a l'inégalité (3)) le rôle que jouait la fonction $\delta|y|$ quand on avait l'inégalité (1). $\varphi(t)$ est de la forme

$$\varphi(t) = A\left(t\int_1^t \frac{C(u)}{u^2}\,du + t^2\int_t^\infty \frac{C(u)}{u^3}\,du\right) \tag{4}$$

où A est une constante numérique (on a pris pour simplifier $C(u) = 0$ pour $0 \leqslant u \leqslant 1$).

Comme nous l'avons indiqué c'était grâce au fait que $\varphi(t) = \delta_0 t$ que nous avions $\widehat{\Pi}(u) = 0$ pour $|u| > \delta_0$ (lorsque l'on a la condition 1°).

Lorsque l'on n'a pas l'inégalité (1) mais l'inégalité (3), la manière de décroître de $\widehat{\Pi}(u)$ est équivalente au fait que $\varphi(t)$ a la forme (4) si bien qu'il n'est pas déraisonnable de supposer que $\widehat{F}(u)$ ne doit pas décroître plus rapidement que $\widehat{\Pi}(u)$.

II. — LE POTENTIEL NUCLÉON-NUCLÉON DANS LE MODÈLE DE CHEW ET LOW

L'hamiltonien de source fixe pour le système de deux nucléons interagissant par l'intermédiaire de mésons en ondes P est :

$$H_2(r) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \Big\{ \omega(k)a_\alpha^*(\vec{k})a_\alpha(\vec{k}) + \frac{f_0}{\mu}\sum_{j=1}^{2} \frac{v(k)}{\sqrt{2\omega(k)}}\tau_\alpha^{(j)}[i(\vec{\sigma}^{(j)}.\vec{k})a_\alpha(\vec{k})\exp(i\vec{k}\vec{x}_j) - i(\vec{\sigma}^{(j)}.\vec{k})a_\alpha^*(\vec{k})\exp[-i\vec{k}\vec{x}_j]]\Big\} d^3k$$

où $\vec{r}$ est le vecteur joignant les deux nucléons, $v(k)$ est la fonction de source à symétrie sphérique et $a_\alpha^*(\vec{k})$ et $a_\alpha(\vec{k})$ sont les opérateurs de création et d'annihilation du champ de méson, α l'indice de charge.

$E(\vec{r})$ étant une valeur propre approximative de $H_2(r)$ pour l'état fondamental des deux nucléons, le potentiel peut être calculé en prenant

$$V(\vec{r}) = E(\vec{r}) - E(\infty)$$

$$V(r) = \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{f^2}{\mu^2}\int \frac{v^2(k)}{2\omega^2(k)} \sum_{j,j'=1}^{2} \tau_\alpha^{(j)}\tau_\alpha^{(j')}(\vec{\sigma}^{(j)}.\vec{k})(\vec{\sigma}^{(j')}.\vec{k}) \exp[ik(x_j - x_{j'})]d^3k \Big|^{\infty}$$

ou

$$V(r) = -\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{f^2}{\mu^2}\int \frac{v^2(k)}{\omega^2(k)}\tau_\alpha^{(1)}\tau_\alpha^{(2)}(\vec{\sigma}^{(1)}.\vec{k})(\vec{\sigma}^{(2)}.k)\cos\vec{k}\vec{r}d^3k$$

f étant la constante de couplage renormalisée.

III. — CONDITIONS SUR LA FONCTION DE SOURCE

Si l'on veut que la théorie de la source fixe ait un lien avec la théorie des champs, $V(x)$ devra quand $|\vec{x}| \to \infty$ tendre asymptotiquement vers le potentiel qui correspond à l'échange d'un méson, lequel est obtenu en remplaçant $v(k)$ par 1.

Ainsi $v(k)$ doit satisfaire les conditions suivantes

$$(\mathrm{A1}) \quad \begin{cases} \lim\limits_{|\vec{x}|\to\infty} V(\vec{x}) \to -\dfrac{1}{(2\pi)^3}\dfrac{f^2}{\mu^2}\displaystyle\int \dfrac{d^3k}{\omega^2(k)}\,\tau_\alpha^{(1)}\tau_\alpha^{(2)}(\sigma^{(1)}.k)(\sigma^{(2)}.k)e^{i\vec{k}\vec{x}} \\ \lim\limits_{k\to 0} v(k) \to 1 \end{cases}$$

Définissons $\widehat{F}(k) = \mu^2 \dfrac{v^2(k)}{k^2+\mu^2}$.

On voit facilement que la condition (A1) est équivalente à la condition (A2)

$$(\mathrm{A2}) \quad \begin{cases} \lim\limits_{r\to\infty} |\,F(r)\,| \to \dfrac{\mu^2}{4\pi}\dfrac{e^{-\mu r}}{r} \qquad r = |\,\vec{x}\,| \\ \widehat{F}(0) = 1 \end{cases}$$

Les conditions de (A2) ne sont pas tout à fait les mêmes que les conditions du 1° et 3° de l'introduction. Car il est évident que la première condition de (A2) ne correspond pas à $|\,F(r)\,| \leqslant e^{-C(r)}$ *pour tout r*, mais dans la construction de la fonction $\widehat{\Pi}(k)$ il est raisonnable de supposer que c'est l'expression de $e^{-C(r)}$ pour r grand qui joue un rôle fondamental, c'est ce que nous vérifierons par la suite.

Envisageons la discussion dans le cas concret.

Les théories sur le potentiel nucléon-nucléon montrent que l'on peut définir qualitativement trois régions, la région extérieure ($\mu r > 1{,}25$) où l'échange d'un pion est dominant, la région intermédiaire ($0{,}7 < \mu r < 1{,}25$) où les processus d'échange de deux pions et plus sont importants, et la région intérieure ($\mu r < 0{,}7$) dans laquelle on ne possède pas d'information [*4*]. En résumé nous avons la situation suivante.

$$V(r) = \begin{cases} V_1(r) \text{ pour } \mu r > 1{,}25 & \text{potentiel dû à l'échange d'un méson,} \\ V_2(r) \text{ pour } 0{,}7 < \mu r < 1{,}25 & \text{potentiel phénoménologique dont on peut fixer une borne supérieure et inférieure,} \\ V_3(r) \text{ pour } \mu r < 0{,}7 & \text{inconnu.} \end{cases}$$

Nous écrirons.

$$(\mathrm{B1}) \quad \begin{cases} |\,V(r)\,| = e^{-C_1(r)} \text{ pour } r\ ]0,\infty) \\ \text{avec :} \\ e^{-C_1(r)} = \begin{cases} V_1(r) \text{ pour } \mu r > 1{,}25 \\ V_2(r) \text{ pour } 0{,}7 < \mu r < 1{,}25 \end{cases} \end{cases}$$

Dans ce cas les conditions de (B1) s'expriment comme.

$$\text{(B2)} \qquad \begin{cases} | F(r) | \leqslant e^{-C(r)} \\ v(0) = 1 \end{cases}$$

$e^{-C(r)}$ est obtenu en dérivant deux fois $e^{-C_1(r)}$, en particulier

$$e^{-C(r)} = \frac{\mu^2}{4\pi}\frac{e^{-\mu r}}{r} \qquad \text{pour} \qquad \mu r > 1{,}25.$$

La fonction $C(r)$ n'est pas déterminée pour $\mu r < 0{,}7$, mais les μ_n étant calculés à partir de l'équation $C\left(\frac{1}{\mu_n}\right) =$ entier, le calcul montre que la valeur de $C(r)$ pour $\mu r < 0{,}7$ n'intervient pas puisque l'on trouve $1/\mu_1 > 0{,}7/\mu$.

Suivant le procédé de convergence canonique nous prendrons comme fonction $F(r)$

$$\Pi(r) = \frac{(\sin ar)^2}{ar^2}\prod_1^\infty \frac{\sin \mu_n r}{\mu_n r}$$

Le paramètre a est calculé par la condition de normalisation $\widehat{\Pi}(0) = 1$. La transformée de Fourier $\widehat{\Pi}(k)$ est représentée sur la figure 1 et $v^2(k)$ est donné par la relation

$$v^2(k) = \frac{k^2 + \mu^2}{\mu^2}\widehat{\Pi}(k)$$

En conclusion on voit que la condition (B2) remplace la condition (A2) dans le cas concret, et satisfait aux conditions 1° et 3° de l'introduction.

Pour voir comment varie $\Pi(k)$ lorsque l'on modifie $C(r)$ pour les petites valeurs de r (on conserve le même comportement asymptotique) nous avons tracé une courbe $\widehat{\Pi}_M(k)$ obtenue en modifiant $\mu_1 \mu_2 \mu_3$ [1], voir figure 1. Les résultats numériques montrent que les deux fonctions $\widehat{\Pi}(k)$ et $\widehat{\Pi}_M(k)$ sont simultanément négligeables pour $\omega \sim 6\mu$. On peut en conclure que l'intervalle en dehors duquel $\widehat{\Pi}(k)$ est négligeable est lié au comportement

---

[1] Les $\mu_1 \mu_2 \mu_3$ que nous avons pris pour construire $\Pi_M(x)$ correspondent à $C(r) = -\log\frac{\mu^2}{4\pi} + \mu r + \text{Log}\, r$ pour $x > 1/\mu_1$.

asymptotique de $C(r)$, de là au comportement asymptotique du potentiel. La forme précise de $\widehat{\Pi}(k)$ dépend par contre du comportement du potentiel pour tout r et en particulier dans la région intermédiaire.

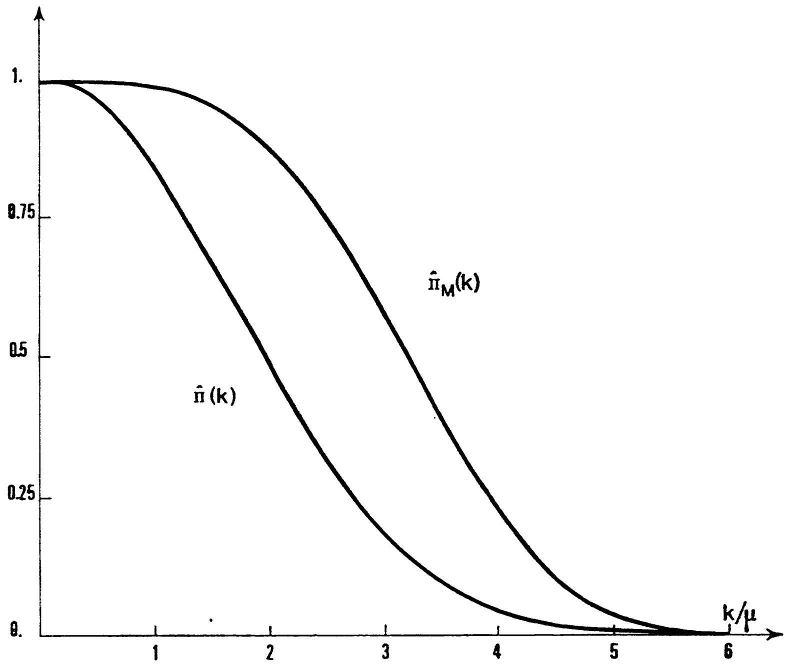

FIG. 1. — $\widehat{\Pi}(k)$ et $\widehat{\Pi}_M(k)$ en fonction de k/μ.

IV. — CONCLUSION

La fonction de source obtenue à partir du procédé de convergence canonique d'après la condition (B2) est très semblable dans l'espace d'impulsion à une fonction dont l'extrémité du support serait $\omega \sim 6\mu$. C'est en fait cette valeur que Chew et Low ont déterminée empiriquement pour obtenir la valeur expérimentale de la résonance (3/2, 3/2).

Remarquons finalement qu'il peut sembler à première vue naturel de trouver une fonction de source dont l'extension dans l'espace d'impulsion (c'est-à-dire l'intervalle où les contributions de $\widehat{\Pi}(k)$ sont « importantes ») est de l'ordre de la masse du nucléon, mais il faut souligner que nulle part dans les calculs nous n'avons introduit la masse du nucléon.

Complément. — B. U. Korenblum a démontré récemment [5] que la constante α correspondant au théorème de S. Mandelbrojt que nous résumons à la fin de la page 246, satisfait à la double inégalité $\frac{2}{\pi} \leqslant \alpha \leqslant 1$. Ceci apporte une justification supplémentaire à notre procédé canonique de convergence.

REMERCIEMENTS

Nous remercions le Professeur H. Morel du « Centre de Calcul Numérique de Marseille » de nous avoir permis d'utiliser le calculateur Pallas. Un des auteurs (C. Bourrely) est redevable au « Commissariat à l'Énergie Atomique » d'une Bourse de Thèse.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. MANDELBROJT et S. MANDELBROJT, *J. Math. Phys.*, t. 6, 1965, p. 974.
[2] S. MANDELBROJT, *J. Anal. Math.* (Jérusalem), t. 10, 1962-1963, p. 381.
[3] G. F. CHEW et F. E. LOW, *Phys. Rev.*, t. 101, 1956, p. 1570.
[4] M. J. MORAVCSIK et H. P. NOYES, *Ann. Rev. Nuclear Sci.*, t. 11, 1961, p. 95.
[5] B. U. Korenblum, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, t. 170, 1966, p. 286.

APPENDICE

Dans l'espace des x la fonction canonique est la transformée de Fourier de

$$\Pi(r) \qquad (r = |\vec{x}|)$$

$$\Pi(r) = \frac{\sin^2 ar}{ar^2} \prod_{1}^{\infty} \frac{\sin \mu_n r}{\mu_n r}$$

avec

$$|\Pi(r)| \leqslant \exp(-C(r))$$

les « μ_n » sont déterminés par l'équation

$$C(1/\mu_n) = n \qquad n \text{ entier.}$$

Les trois premiers μ_n ont pour valeur

$$\mu_1 = 1{,}45 \qquad \mu_2 = 1{,}3 \qquad \mu_3 = 1{,}15.$$

Pour le calcul numérique de la transformée de Fourier nous avons pris 400 valeurs de μ_n.

Le paramètre de normalisation « a » est évalué par la condition

$$\hat{\Pi}_a(0) = 1$$

on trouve $a = 0{,}256$.

(Manuscrit reçu le 14 novembre 1966).