

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

RÉMI HAKIM

Sur la mécanique statistique relativiste

Annales de l'I. H. P., section A, tome 6, n° 3 (1967), p. 225-244

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1967__6_3_225_0>

© Gauthier-Villars, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Sur la mécanique statistique relativiste

par

Rémi HAKIM

Laboratoire de Physique Théorique et Hautes Énergies
(Orsay, France).

RÉSUMÉ. — Après avoir analysé les raisons pour lesquelles la mécanique statistique relativiste ne peut se mettre sous une forme analogue à celle considérée habituellement nous définissons successivement les notions d'espace de phase, d'ensemble de Gibbs, de densités, de valeurs moyennes. Nous généralisons ensuite, utilisant l'intéressante méthode de Klimontovich, la hiérarchie B. B. G. K. Y. satisfaite par les densités réduites. Enfin nous donnons quelques applications à l'étude d'équations cinétiques relativistes. Dans ce travail nous utilisons le formalisme dit de l'« action à distance ».

ABSTRACT. — After analysing the reasons why relativistic statistical mechanics cannot be cast into a form similar to the usual one, we define the relativistic notions of: phase space, Gibbs ensemble, densities, average values. Next, using the interesting method of Klimontovich, we generalize the usual B. B. G. K. Y. hierarchy satisfied by the reduced densities. Finally we apply the formalism to the study of some relativistic kinetic equations. Throughout this paper we use the « action at a distance » formalism.

1. — INTRODUCTION

Depuis plusieurs années un grand nombre de travaux portant sur la mécanique statistique relativiste ou des questions connexes, ont été publiés. Ce n'est certes pas par hasard et les raisons de cette soudaine abondance sont très nombreuses. L'une des principales raisons doit être trouvée dans

Ce travail, ainsi que les articles de l'auteur cités dans les références, constituent l'objet de la thèse n° 212 soutenue à Orsay en 1966.

l'apparition probable, et ce dans un futur assez proche, de plasmas à températures très élevées, qui sont nécessaires pour obtenir la fusion thermonucléaire. Aussi n'est-il pas étonnant que des études théoriques plus ou moins systématiques des plasmas relativistes soient entreprises dans divers laboratoires. Cependant, les plasmas relativistes *existent effectivement* dans certaines conditions rencontrées en astrophysique (au moins la composante électronique est relativiste) et par conséquent une mécanique statistique relativiste est bien nécessaire si l'on veut les décrire théoriquement. Quoi qu'il en soit, si l'on veut traiter de problèmes de rayonnement, il est bien indispensable d'avoir à sa disposition une théorie relativiste : J. Schwinger ⁽¹⁾ a montré en effet, que les corrections relativistes (dans les problèmes de rayonnement) sont beaucoup plus importantes que les corrections d'ordre quantique et ce, dans un large domaine de fréquences (allant du rayonnement radio jusqu'à l'infrarouge lointain). Un autre cas où la mécanique statistique relativiste est indispensable est celui du gaz d'électrons dégénéré dont l'énergie de Fermi est voisine ⁽²⁾ de mc^2 : même à température nulle l'intervention de la relativité (et aussi de la théorie quantique) est nécessaire. Nous ne considérerons pas un tel cas dans la suite car nous nous limiterons à une théorie *non quantique*.

Cependant, malgré toutes les raisons précédentes il faut bien reconnaître que les cas évoqués ci-dessus peuvent, dans une très large mesure, être traités avec suffisamment de précision en ajoutant à la mécanique statistique non relativiste des *termes correctifs* qui tiennent compte des « grandes vitesses ». Ainsi il est possible d'utiliser l'hamiltonien de Darwin ⁽³⁾ pour obtenir de telles corrections (cf. J. E. Krizan et P. Havas ⁽⁴⁾, J. E. Krizan (1965) ⁽⁵⁾).

Fort heureusement, outre les raisons d'ordre pragmatique déjà indiquées, il existe des raisons théoriques qui, à notre avis, *suffisent* à justifier les travaux consacrés au sujet en question. Plus particulièrement, si l'on considère que la théorie de la relativité restreinte fait partie, dans son ensemble, des lois de la Nature, alors il est nécessaire de généraliser de façon convenable *toutes* les lois de la physique newtonienne et donc la mécanique statistique. Toutefois ces exigences « esthétiques » se comprennent mieux si l'on veut bien remarquer que la théorie de la relativité restreinte implique un certain nombre de caractéristiques qualitatives qui n'existent pas dans la théorie classique et dont on peut attendre des phénomènes nouveaux dans le

(1) J. SCHWINGER, *Phys. Rev.*, t. 75, 1949, p. 1912.

(2) B. JANCOVICI, *Nuovo Cimento*, t. 25, 1962, p. 428.

(3) C. G. DARWIN, *Phil. Mag.*, t. 39, 1920, p. 357.

(4) J. E. KRIZAN et P. HAVAS, *Phys. Rev.*, t. 128, 1962, p. 2916.

(5) J. E. KRIZAN, *Phys. Rev.*, t. 140 A, 1965, p. 1155.

domaine statistique. Ainsi l'équivalence de la masse et de l'énergie ou bien le caractère non instantané des actions peuvent très bien être à la base de phénomènes inconnus dans le domaine classique. Nous verrons dans la suite qu'il en est bien ainsi.

Ce travail est développé dans une série d'articles à paraître ⁽⁶⁾-⁽⁹⁾.

La section 2 est consacrée à des rappels sur la dynamique relativiste des particules en interactions. La partie 3 traite du problème statistique proprement dit. Les densités, valeurs moyennes, etc., sont définies dans la partie 4. Dans la partie 5 nous généralisons d'un point de vue relativiste la hiérarchie habituelle B. B. G. K. Y. Quelques applications simples sont indiquées dans la partie 6.

2. — LES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT

Il nous faut rappeler que dans le cadre de la physique relativiste *non quantique*, seuls trois types de champs sont effectivement connus. On ne connaît guère que des champs scalaires (ou pseudo-scalaires), vectoriels ou tensoriels. Ceux-ci peuvent être considérés comme donnant lieu respectivement à des forces nucléaires « classiques », des forces électromagnétiques et enfin à des forces gravifiques. Bien que cela comporte une part d'arbitraire, on peut classer les forces relativistes en forces d'interaction et en forces extérieures. Parmi ces dernières, il n'y a pas d'exemple physique de forces nucléaires « classiques », bien qu'il ait parfois été suggéré qu'elles pourraient donner lieu à des effets collectifs importants dans les étoiles à neutrons ⁽¹⁰⁾ ⁽¹¹⁾. Au contraire, on ne peut ranger les forces gravitationnelles parmi les forces d'interaction : leur extrême petitesse nécessiterait d'énormes densités lesquelles, à leur tour, exigeraient l'intervention d'une théorie quantique; en outre, même dans des étoiles extrêmement denses, comme les naines blanches, les densités atteintes sont encore trop basses pour donner lieu à des effets appréciables autres que collectifs. Il existe cependant un cas où cette affirmation cesse d'être vraie. C'est le cas — hypo-

⁽⁶⁾ R. HAKIM, à paraître.

⁽⁷⁾ R. HAKIM, à paraître.

⁽⁸⁾ R. HAKIM et A. MANGENEY, à paraître.

⁽⁹⁾ R. HAKIM et A. MANGENEY, à paraître.

⁽¹⁰⁾ G. SZAMOSI, dans *High energy astrophysics*, école d'été de Varenna, 1965, à paraître.

⁽¹¹⁾ G. KALMAN, à paraître.

thétique — de l'effondrement gravitationnel d'étoiles très massives ⁽¹²⁾. Cependant, là encore, les phénomènes quantiques (y compris ceux du champ de gravitation) doivent être considérés. Les forces gravitationnelles donnent lieu cependant à des effets collectifs importants et peuvent donc agir en tant que forces extérieures. Par souci de simplicité, nous ne tiendrons pas compte de ces forces de gravitation « extérieures ». Elles n'introduisent en fait, que des modifications mineures dans le formalisme donné dans ce travail. Par exemple, ∂_μ doit être remplacé par la dérivation covariante ∇_μ qui implique des dérivées du tenseur métrique $g^{\mu\nu}$, dépendant lui-même de la fonction de distribution réduite à une particule. Cette dernière affirmation revient d'ailleurs à ne tenir compte que des effets collectifs du champ de gravitation. Seules les forces électromagnétiques donnent aussi bien des contributions aux effets collectifs qu'aux phénomènes individuels.

Bien que les méthodes développées dans ce travail soient tout à fait générales (elles peuvent en particulier s'appliquer à des forces d'un type autre que celui considéré précédemment, telles celles rencontrées dans le formalisme de E. P. Wigner et H. Van Dam ⁽¹³⁾, ou encore à des particules étendues ou douées de spin), nous nous limiterons dans la suite aux seules forces électromagnétiques.

* * *

La dynamique relativiste, non quantique, des systèmes de particules chargées en interaction peut être développée à partir de deux points de vue très différents mais qui conduisent cependant aux mêmes équations du mouvement. Ces deux points de vue sont synthétisés dans les formules « action à distance » et « champ » et ont été comparés par P. Havas ⁽¹⁴⁾. Dans ce travail nous nous limiterons au formalisme de l'action à distance.

Dans ce formalisme, aucun champ n'est nécessaire comme « support » de l'interaction et l'on part *a priori* d'un principe variationnel, c'est-à-dire du principe variationnel de Fokker ⁽¹⁵⁾ :

$$\delta S = \delta \left\{ \sum_{i=1}^{i=N} \int (u_{\mu i} u_i^\mu)^{\frac{1}{2}} m_0 d\tau + \frac{1}{2} \sum_{i,j} e^2 \int \int u_{\mu i} u_j^\mu G(x_i^\mu - x_j^\mu) d\tau_i d\tau_j \right\} = 0$$

⁽¹²⁾ K. THORN, à paraître.

⁽¹³⁾ H. VAN DAM et E. P. WIGNER, *Phys. Rev.*, t. 138 B, 1965, p. 1576 et t. 142, 1966, p. 838.

⁽¹⁴⁾ P. HAVAS, *Phys. Rev.*, t. 74, 1948, p. 939.

⁽¹⁵⁾ A. D. FOKKER, *Z. Phys.*, t. 58, 1929, p. 386. Pour tout ce qui concerne le formalisme de l'action à distance on pourra utilement consulter : J. RZEWUSKI, *Field theory*, part I, P. W. N. Pub., Varsovie, 1964.

où nous avons utilisé la convention de sommation d'Einstein ($\mu = 0, 1, 2, 3$; $c =$ vitesse de la lumière $= 1$; $m_0 =$ masse « nue » ⁽¹⁶⁾; $e =$ charge des particules considérées et supposées être toutes identiques; $\tau_i =$ temps propre de la i -ème particule).

$G(x_\mu)$ représente un noyau que nous choisirons ⁽¹⁶⁾ être la solution élémentaire retardée de l'équation des ondes :

$$\square G = \delta.$$

Soit,

$$G(x_\nu) = \theta(x_0)\delta[x^\mu x_\mu]$$

où $\theta(x_0)$ est la fonction d'Heaviside. Les équations du mouvement se mettent alors sous la forme :

$$m_0 \frac{du_i^\mu}{d\tau_i} = eF_{\text{ret.}}^{\mu\nu}(x_{\nu i})u_{\nu i}, \quad i = 1 \dots N$$

où $F_{\text{ret.}}^{\mu\nu}(x_\nu)$ est une fonctionnelle des trajectoires des particules du système ⁽¹⁵⁾ et que l'on peut identifier avec le champ électromagnétique *total*.

De la décomposition ⁽¹⁶⁾ ⁽¹⁷⁾

$$F_{\text{ret.}}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(F_{\text{ret.}}^{\mu\nu} + F_{\text{av.}}^{\mu\nu}) + \frac{1}{2}(F_{\text{ret.}}^{\mu\nu} - F_{\text{av.}}^{\mu\nu})$$

résultent finalement les équations du mouvement que nous utiliserons désormais, c'est-à-dire les équations de Lorentz-Dirac :

$$m \frac{du_i^\mu}{d\tau_i} = m\tau_0 \Delta^{\mu\nu}(u_{\rho i}) \ddot{u}_{\nu i} + eF_{\text{int.}}^{(i)\mu\nu}(x_{\rho i})u_{\nu i}, \quad i = 1 \dots N \quad (1)$$

avec

$m =$ masse renormalisée

$\tau_0 = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m} =$ « temps de non causalité »

$$\Delta^{\mu\nu}(u_\rho) = g^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu$$

avec

$$g^{00} = -g^{11} = -g^{22} = -g^{33} = 1, \quad g^{\mu\nu} = 0 \text{ si } \mu \neq \nu$$

⁽¹⁶⁾ Nous adoptons ici le point de vue de P. G. BERGMAN, *Handbuch der Physik*, IV, Berlin, 1961, S. Flugge, éd.

⁽¹⁷⁾ Où $F_{\text{av.}}^{\mu\nu}$ correspond à la même expression fonctionnelle que $F_{\text{ret.}}^{\mu\nu}$ avec cette différence que l'on utilise la solution élémentaire *avancée* de l'équation des ondes.

et où $F_{\text{int.}}^{(i)\mu\nu}$ est le « champ » dû à toutes les particules sauf la i -ème et est solution de ⁽¹⁸⁾ :

$$\begin{aligned} \partial_{\mu} F_{\text{int.}}^{(i)\mu\nu} &= 0 \\ \partial_{\mu} F_{\text{int.}}^{(i)\mu\nu} &= \sum_{j \neq i} \int_{-\infty}^{+\infty} 4\pi e \delta[x_i^{\mu} - x_j^{\mu}(\tau_j)] dx_j ; \quad i, j = 1 \dots N \end{aligned} \quad (2)$$

Nous donnons plus loin l'expression explicite de $F_{\text{int.}}^{(i)\mu\nu}$. Compte tenu de la relation $u_i^{\mu} u_{\mu i} = 1$, le terme de réaction de rayonnement apparaissant dans l'équation (1) peut se réécrire :

$$m\tau_0 \Delta^{\mu\nu}(u_{\rho}) \dot{\gamma}_{\nu} = m\tau_0 \{ \dot{\gamma}^{\mu} + \gamma^{\rho} \gamma_{\rho} u^{\mu} \}, \quad \gamma^{\mu} \equiv \dot{u}^{\mu}. \quad (3)$$

Les équations du mouvement (1) admettent des solutions « auto-accélérées » que l'on élimine ⁽¹⁹⁾ au moyen de conditions asymptotiques parmi lesquelles :

$$\lim_{\tau \rightarrow \pm \infty} \gamma^{\mu}(\tau) = 0. \quad (4)$$

Les équations (1) étant *rigoureuses* ⁽²⁰⁾ constitueront donc notre point de départ. Ces équations contiennent absolument *tous* les effets du rayonnement et permettront une nouvelle approche statistique des phénomènes classiques de rayonnement.

3. — LE PROBLÈME STATISTIQUE

En mécanique statistique classique, les équations du mouvement sont des équations différentielles du second ordre : elles permettent donc de déterminer complètement l'évolution du système connaissant les vitesses et les positions des particules à l'instant zéro. Les probabilités sont ensuite introduites sur les conditions initiales (imprécision, ou caractère aléatoire, des mesures à l'instant zéro effectuées par un « observateur ») et l'évolution au cours du temps de la densité de probabilité s'obtient aisément compte tenu (a) des équations du mouvement et (b) de la conservation du nombre des particules du système.

Qu'en est-il dans le cas relativiste ?

⁽¹⁸⁾ Lorsqu'on choisit la solution arbitraire de l'équation homogène à rajouter comme étant identiquement nulle.

⁽¹⁹⁾ F. ROHRLICH, *Classical charged particles*, Addison-Wesley Pub. Co., Reading, 1965.

⁽²⁰⁾ Ce ne sont nullement des équations approchées, ainsi qu'on l'affirme quelquefois.

Les conditions initiales.

Une première remarque est que, contrairement à ce qui se passe d'un point de vue classique, la mesure de la position d'une particule (par exemple) ne constitue jamais un processus instantané mais exige un certain temps ⁽⁶⁾ ⁽²¹⁾.

Une seconde différence entre le cas relativiste et le cas classique est que les résultats des mesures effectuées sont relatifs à une coupe de l'espace-temps par la nappe « passé » d'un cône de lumière ⁽⁶⁾. En conséquence les « données initiales » *effectivement* mesurées ne sont *jamais* situées sur un 3-plan $t = \text{cte}$, ou même sur une 3-surface du genre espace quelconque. A ce propos, on peut également se poser la question suivante : supposant connues (pour fixer les idées) les positions initiales des particules du système sur une 3-surface du genre espace donnée, un « observateur » ⁽⁶⁾ peut-il *réellement* les avoir mesurées (au moyen des « instruments usuels » des « observateurs », c'est-à-dire de signaux lumineux et d'horloges ⁽²¹⁾) ? Il semble bien que cela ne soit pas possible sans faire intervenir outre les « mesures », la connaissance *détaillée* d'une partie de l'histoire du système.

La différence fondamentale réside cependant dans les caractères spécifiques des équations du mouvement (1) : ce sont des équations intégrodifférentielles non linéaires dont la complexité est telle que l'étude de leurs solutions (si elles existent) est encore à faire. Bien plus, nul ne sait, à l'heure actuelle, quelle est la *nature* des « conditions initiales ». Il *semble* bien (mais ce n'est nullement prouvé) que la connaissance des positions et vitesses des particules sur une 3-surface du genre espace (ou à la rigueur sur la nappe « passé » d'un cône de lumière) soit insuffisante pour spécifier complètement le comportement ultérieur du système. Il *semble* ⁽⁶⁾ que la connaissance de tout le passé du système soit également nécessaire.

En conséquence il apparaît qu'il faille renoncer à introduire les probabilités *ab initio* comme en mécanique statistique classique.

Le problème statistique fondamental. Espace de phase. Ensembles de Gibbs relativistes.

Dénotons par $x_i^{\mu}(\tau_i, \omega)$ les solutions ⁽²²⁾ des équations (1) (où ω désigne les « conditions initiales », dont la nature réelle est inconnue). Nous choisissons encore ω de manière *aléatoire*. En d'autres termes, l'élément statistique

⁽²¹⁾ J. L. SYNGE, *Relativity : the special theory*, ch. 1, North Holl. Pub. Co., Amsterdam, 1958.

⁽²²⁾ ... dont nous supposerons l'existence...

fondamental sera constitué par la donnée aléatoire des trajectoires des N particules du système. *A priori*, cette manière de poser le problème statistique de base semble fort éloignée de la façon de procéder habituelle. En fait, si l'on examine le cas non relativiste un peu attentivement, il est facile de voir que l'on choisit également les trajectoires au hasard. Cependant, en mécanique statistique classique on sait de manière *précise* exhiber la probabilité de tel ou tel ensemble de trajectoires (au moyen de la probabilité initiale...) ce qui n'est pas le cas d'un point de vue relativiste.

Ainsi un ensemble de Gibbs relativiste sera-t-il défini par la donnée (a) de la variété des solutions des équations du mouvement et (b) d'une mesure positive et de masse totale $+1$ sur un σ -corps *ad hoc* de cette variété. Autrement dit, sur l'ensemble $\{\omega\}$ nous postulons l'existence d'une opération de moyenne que l'on notera

$$\langle \quad \rangle = \int (\quad) d\mu(\omega).$$

Nous supposons de plus que cette opération satisfait un certain nombre de propriétés mathématiques naturelles dont

— linéarité :

$$\langle \lambda A + \mu B \rangle = \lambda \langle A \rangle + \mu \langle B \rangle$$

$$- \partial_\mu \langle \quad \rangle = \langle \partial_\mu \quad \rangle$$

$$- \int \langle \quad \rangle = \langle \int \quad \rangle$$

etc.

Répetons encore une fois que la mécanique statistique classique peut très bien être fondée sur de telles bases ⁽²³⁾.

Venons-en maintenant à la question de l'espace de phase relativiste. Sa nature est suggérée par la *forme* des équations du mouvement. Nous le *choisirons* comme étant l'espace à $12N$ dimensions ⁽²⁴⁾.

$$\Gamma = \mathcal{M}^{4N} \times U^{4N} \times \gamma^{4N} \quad (1)$$

⁽²³⁾ C. f. Yu. L. KLIMONTOVICH, *Soviet Phys. J. E. T. P.*, t. 6, 1958, p. 753.

⁽²⁴⁾ En réalité cet espace ne devrait être qu'à $10N$ dimensions, compte tenu des $2N$ contraintes :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_i^\mu u_{\mu i} = 1 \\ u_i^\mu \gamma_{\mu i} = 0 \end{array} \right. \quad i = 1 \dots N$$

En fait, ces contraintes seront incluses dans les densités et il sera préférable d'utiliser cet espace comme espace de phase.

où \mathcal{M}^4 est l'espace-temps, U^4 l'espace des quadrivites et γ^4 l'espace des quadri-accélérations. Cet espace de phase est choisi pour des raisons de simplicité et n'est pas imposé par la nature des conditions initiales, comme c'est le cas de l'espace de phase usuel ⁽²⁵⁾. Cela signifie que Γ est un espace des états du système plutôt qu'un espace de conditions initiales. Insistons encore sur le fait que la dimension de Γ n'a aucun rapport avec la dimension de la variété des solutions. Ce choix de l'espace de phase pourrait se révéler insuffisant pour décrire le système. Nous verrons plus loin qu'en fait il n'en est rien.

Notons encore, que nous utiliserons dans la suite un autre espace de phase, soit

$$\widehat{\Gamma} = \mathcal{M}^{4N} \times U^{4N} \times \dot{\gamma}^{4N}. \tag{2}$$

En effet cette possibilité découle d'un autre choix de variables indépendantes que $(x_{\mu i}, u_{\mu i}, \gamma_{\mu i}) : \gamma_{\mu}$ (resp. $\dot{\gamma}_{\mu}$) peut s'exprimer en fonction de $\{x_{\mu}, u_{\mu}, \dot{\gamma}_{\mu}$ (resp. $\gamma_{\mu})\}$. Nous utiliserons également cette possibilité dans la suite.

4. — DENSITÉS ET QUESTIONS CONNEXES

Une fois définies les notions de base de la mécanique statistique relativiste, il nous faut maintenant décrire le comportement statistique du système considéré. En particulier il est nécessaire d'étudier des densités sur l'un des espaces Γ ou $\widehat{\Gamma}$. Pour cela, nous définirons des densités dépendant des temps propres des N particules, ceci étant suggéré par le mode de description des trajectoires (i. e. au moyen des temps propres). En fait les densités ayant réellement un sens physique s'obtiendront à partir d'une simple intégration sur les temps propres ⁽⁶⁾. Toutefois comme elles sont beaucoup plus simples et d'un maniement aisé nous les utiliserons désormais. Il sera toujours entendu qu'elles ne constituent qu'un intermédiaire de calcul servant à obtenir les « vraies » densités.

Au préalable nous définirons des densités aléatoires, les densités étant alors des moyennes sur ω . La densité aléatoire à k particules sera

$$R_k(x_{\mu 1}, u_{\mu 1}, \gamma_{\mu 1}; \dots x_{\mu k}, u_{\mu k}, \gamma_{\mu k}; \tau_1 \dots \tau_k) = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k \\ \text{tous différents}}} \prod_{j=1}^{j=k} \delta[X_j - X_{i_j}(\tau_j)];$$

avec $X \equiv (x^\mu, u^\mu, \gamma^\mu)$ (1)

⁽²⁵⁾ L'espace de phase non relativiste est à $6N$ dimensions à la fois parce que l'espace des états est à $6N$ dimensions et que l'ensemble des conditions initiales l'est aussi (c'est-à-dire la variété des solutions).

qui est bien aléatoire à cause des facteurs $X_{i_j}(\tau_j)$ qui contiennent implicitement ω . R_k est alors normalisée par :

$$\int R_k \prod_{i=1}^{i=k} d_{12} X_i = k ! C_N^k. \quad (2)$$

La densité (non aléatoire) à k particules est alors :

$$D_k = (k ! C_N^k)^{-1} \langle R_k \rangle \quad (3)$$

Elle est normalisée à l'unité. Notons les importantes densités suivantes :

$$D_1(X, \tau) = N^{-1} \left\langle \sum_{i=1}^{i=N} \delta[X - X_i(\tau)] \right\rangle \quad (4)$$

$$D_2(X_1, \tau_1; X_2, \tau_2) = [N(N-1)]^{-1} \left\langle \sum_{i \neq j}^{i=N} \delta[X_1 - X_i(\tau_1)] \otimes \delta[X_2 - X_j(\tau_2)] \right\rangle. \quad (5)$$

L'intérêt de ces densités aléatoires vient de leur emploi dans la méthode de Klimontovich. Leur interprétation est donnée dans la référence (6). Outre les densités aléatoires R_k , des densités d'un type plus général sont également nécessaires. Par exemple :

$$P_{2\text{stoch.}}(X_1, \tau_1; X_2, \tau_2) = \sum_{i=1}^{i=N} \delta[X_1 - X_i(\tau_1)] \otimes \delta[X_2 - X_i(\tau_2)] \quad (6)$$

qui représente la densité de probabilité pour qu'une particule *quelconque* soit dans l'état X_1 à τ_1 et que la *même* particule soit dans l'état X_2 à τ_2 . On définit évidemment P_2 par

$$N^{-1} \langle P_{2\text{stoch.}} \rangle = P_2.$$

Ainsi que nous l'avons indiqué plus haut, les « vraies » densités s'obtiennent à partir des D_k , P_k , etc. par intégration sur les temps propres. Ainsi les densités « physiques » à une et deux particules seront-elles :

$$\mathcal{N}_1(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} D_1(X, \tau) d\tau \quad (7)$$

$$\mathcal{N}_2(X_1, X_2) = \int \int_{-\infty}^{+\infty} D_2(X_1, \tau_1; X_2, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (8)$$

etc. Ces densités sont normalisées à l'unité par les relations (6) (26) :

$$\int \int \int_{\Sigma^3} \mathcal{N}_1(X) u^\mu d\Sigma_\mu d_4 u d_4 \gamma = 1, \quad \forall \Sigma^3 \text{ du genre espace} \quad (9)$$

$$\int \int \int \int \int \int_{\Sigma^6} \mathcal{N}_2(X_1, X_2) (u_1^\mu \wedge u_2^\nu) \cdot d\Sigma_{\mu\nu} d_4 u_1 \cdot d_4 \gamma_1 \cdot d_4 u_2 \cdot d_4 \gamma_2 = 1, \quad \forall \Sigma^6 \quad (10)$$

L'arbitraire qui préside au choix de Σ^3 ou Σ^6 impose des relations de conservation que l'on trouve facilement (dans les équations (9) et (10) $d\Sigma_\mu$ et $d\Sigma_{\mu\nu}$ sont les formes « élément de surface » convenables).

* * *

Une fois en possession des densités, il nous faut calculer les grandeurs physiques, c'est-à-dire des moyennes. Étant donné une grandeur physique $A(X_1, \dots, X_N)$ à valeurs tensorielles, sa moyenne sera définie comme le flux du courant associé (6) à travers une surface (c'est l'équivalent relativiste d'une « moyenne au temps t »), soit

$$\bar{A}(\Xi^{(11N)}) = \int_{\Xi^{(11N)}} \mathbf{A}(X_1, \dots, X_N) \mathcal{N}_N(X_1, \dots, X_N) \xi_1^{\Lambda_1} \wedge \dots \wedge \xi_N^{\Lambda_N} \times d\Xi_{\Lambda_1 \dots \Lambda_N} \quad (11)$$

où :

$$\xi_i^{\Lambda_i} = \{ \mathbf{O} \oplus \dots \oplus \mathbf{O} \oplus \boldsymbol{\eta}_i \oplus \mathbf{O} \oplus \dots \oplus \mathbf{O} \}^{\Lambda_i} \quad (12)$$

$\boldsymbol{\eta}_i$ désignant le 12-vecteur de composantes $(\dot{x}_i^\mu, \dot{u}_i^\mu, \dot{\gamma}_i^\mu)$. Il est facile de vérifier (6) que lorsque la surface $\Xi^{(11N)}$ est prise égale à :

$$\Xi^{(11N)} = (t = t_0)^{3N} \times U^{4N} \times \gamma^{4N}$$

alors les moyennes (11) se réduisent aux moyennes usuelles. La définition (11) est la généralisation au cas de plusieurs particules des relations données en théorie cinétique relativiste par J. L. Synge (27) et P. G. Bergman (16). Remarquons encore que l'équation (11) ne permet pas de calculer toutes les moyennes. Cependant, cette expression peut être généralisée en utilisant d'autres densités que \mathcal{N}_N (6). Notons enfin que toutes les définitions données ici utilisent l'espace Γ comme espace de phase. Elles sont cependant encore valables en utilisant l'espace $\hat{\Gamma}$, à condition d'introduire dans les expressions précédentes les symboles \wedge convenables (par exemple : $\hat{X} \equiv \{ x^\mu, u^\mu, \dot{\gamma}^\mu \}$).

(26) Les normalisations des D_k et \mathcal{N}_k sont évidemment compatibles (6).

(27) J. L. SYNGE, *The relativistic gas*, North Holl. Pub. Co., Amsterdam, 1957.

5. — HIÉRARCHIES POUR LES DENSITÉS RÉDUITES

Une fois les densités définies il est nécessaire de les caractériser de manière plus précise et en particulier de trouver les équations qu'elles satisfont. Pour ce faire nous utiliserons l'élégante méthode de Klimontovich ⁽⁶⁾ ⁽⁷⁾ ⁽⁸⁾ ⁽²⁸⁾ en la modifiant quelque peu. Cette méthode consiste à écrire l'équation satisfaite par une *réalisation* du processus stochastique $R_1(X, \tau)$ (ou de n'importe quelle autre densité aléatoire; toutefois à partir de $R_1(X, \tau)$ toutes les autres densités peuvent s'obtenir aisément ⁽⁶⁾). Cette équation sera appelée l'*équation génératrice* de la hiérarchie. En prenant les moyennes successives de produits tensoriels de R_1 par cette équation on obtient alors la hiérarchie relativiste qui généralise la hiérarchie usuelle B. B. G. K. Y.

L'équation génératrice.

Partant de l'équation évidente ⁽²⁸⁾

$$\frac{\partial R_1}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial X^\Lambda} \left\{ \frac{dX^\Lambda}{d\tau} R_1 \right\} = 0 \quad (1)$$

(équation de continuité dans l'espace des $\{X\} \equiv \{x_\mu, u_\mu, \gamma_\mu\}$) et des équations du mouvement (2-1) on obtient ^(?)

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_1}{\partial \tau} + u^\mu \partial_\mu R_1 + \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial u^\mu} R_1 + \frac{\partial}{\partial \gamma^\mu} \left\{ (\gamma^\mu \tau_0^{-1} - \gamma^\rho \gamma_\rho u^\mu) R_1 \right\} = 4\pi e^2 \tau_0^{-1} \frac{\partial}{\partial \gamma^\mu} \\ \left\{ u_\nu \int d\tau' d_1 x' d_4 u' d_4 \gamma' [u'^\mu \partial^\nu - u'^\nu \partial^\mu] D_{\text{ret.}}(x_\rho - x'_\rho) R_2 \right\}. \quad (2) \end{aligned}$$

⁽²⁸⁾ Elle se vérifie immédiatement en effectuant les diverses dérivations effectuées et en tenant compte des propriétés de la distribution de Dirac. En fait l'équation (1) est légèrement incorrecte, en effet le terme

$$\frac{dX^\Lambda}{d\tau} R_1 \quad \text{doit s'écrire :} \quad \sum_{i=1}^{i=N} \frac{dX_i^\Lambda}{d\tau} \delta[X - X_i(\tau)].$$

Le second membre de cette dernière équation est obtenu en utilisant les facteurs δ contenus dans R_2 et en calculant ⁽ⁱ⁾ explicitement $F_{\text{int.}}^{\mu\nu}$. L'équation génératrice (2) est une équation *rigoureuse* qui possède les caractéristiques suivantes : (a) elle couple R_1 et R_2 , (b) elle est intégró-différentielle (c'est-à-dire *non locale*). La première propriété découle du fait que les équations du mouvement (2-1) ne contiennent pas de termes d'énergie propre. La seconde propriété (la non localité) provient également des équations du mouvement qui sont elles-mêmes non locales.

Prenant maintenant la moyenne de l'équation (2) nous obtenons une équation complètement analogue à cette équation à cette différence près qu'elle relie maintenant D_1 et $(N-1)D_2$: c'est la première équation de la hiérarchie relativiste. La seconde équation de la hiérarchie s'obtient en multipliant tensoriellement l'équation (2) par R_1 et en prenant la moyenne. Après diverses simplifications on obtient (?) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} D_2 + u^\mu \partial_\mu D_2 + \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial u^\mu} D_2 + \frac{\partial}{\partial \gamma^\mu} \{ (\gamma^\mu \tau_0^{-1} - \gamma^\rho \gamma_\rho u) D_2 \} \\ = 4\pi N e^2 \tau_0^{-1} \frac{\partial}{\partial \gamma^\mu} \left\{ u_\nu \int d\tau'' d_4 x'' d_4 u'' d_4 \gamma'' [u''^\mu \partial^\nu - u''^\nu \partial^\mu] D_{\text{ret.}}(x_p - x_p'') \right. \\ \left. \times [D_3 + N^{-1} W_3^2] \right\}; \quad (\text{avec } N \gg 1) \quad (3) \end{aligned}$$

où W_3^2 est définie par :

$$\begin{aligned} W_3^2(X_1 \tau_1; X_2 \tau_2; \{ X_3 \tau_3 \}) [N(N-1)] \\ = \left\langle \sum_{i \neq j} \delta[X_1 - X_i(\tau_1)] \otimes \delta[X_2 - X_j(\tau_2)] \otimes \delta[X_3 - X_j(\tau_3)] \right\rangle. \quad (4) \end{aligned}$$

Il existe naturellement une autre équation satisfaite par D_2 : elle est obtenue en effectuant l'échange $(X_1, \tau_1) \leftrightarrow (X_2, \tau_2)$ dans l'équation (3).

On peut ensuite obtenir des équations pour D_3, W_3^2 , etc.

Une différence très importante avec le cas non relativiste est que cette hiérarchie fait intervenir des densités autres que les D_k . En conséquence, c'est une *hiérarchie infinie*, bien qu'à partir de l'ordre $N + 1$ les équations ne couplent plus de D_k . Cela est dû à ce que la connaissance des D_k nécessite la connaissance détaillée de *toute l'histoire* du système, donc celle de grandeurs telles P_2, W_3^2 , etc.; en d'autres termes tous les moments $\langle R_1 \otimes P \rangle$ sont nécessaires pour spécifier complètement le système.

(29) On trouve :

$$F_{\text{int.}}^{\mu\nu} = \sum_{j \neq i} 4\pi e \int d\tau' d_4 u' d_4 x' d_4 \gamma' \{ u_j^\nu \partial_j^\mu - u_j^\mu \partial_j^\nu \} D_{\text{ret.}}(x_p - x_p') \delta[X - X_j(\tau')]$$

Autre forme de la hiérarchie précédente.

Jusqu'à présent nous avons utilisé l'espace Γ , les densités et le formalisme qui en résultent. En fait nous pouvons également utiliser l'espace $\widehat{\Gamma}$ et les densités \widehat{R} ou \widehat{D} sur cet espace. Si le premier formalisme est utile pour traiter, par exemple, de problèmes de rayonnement ⁽³⁰⁾, le second permet plus aisément l'obtention d'équations cinétiques qui tiennent compte des effets du rayonnement. Par les mêmes techniques que précédemment, on obtient l'équation génératrice que vérifient \widehat{R}_1 et \widehat{R}_2 . Intégrant maintenant cette équation sur les variables $\dot{\gamma}$, on obtient alors ⁽³¹⁾ :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \tau} \widetilde{R}_1(x_\nu, u_\nu; \tau) + u^\mu \partial_\mu \widetilde{R}_1(x_\nu, u_\nu; \tau) + 4\pi \frac{e^2}{m} \frac{\partial}{\partial u^\mu} \\ & \left\{ u_\nu \int d\tau' d_4 x' d_4 u' [u'^\mu \partial^\nu - u'^\nu \partial^\mu] \cdot D_{\text{ret.}}(x_\rho - x'_\rho) \widetilde{R}_2(x_\nu, u_\nu, \tau; x'_\nu, u'_\nu, \tau') \right\} \\ & = -\tau_0 \frac{\partial}{\partial u_\mu} \left\{ \Delta^{\mu\nu}(u_\rho) \int d_4 \dot{\gamma} \cdot \dot{\gamma}_\nu R_1(x_\nu, u_\nu, \dot{\gamma}_\nu; \tau) \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

L'avantage de cette dernière équation génératrice vient de ce que les termes dus aux effets du rayonnement sont nettement séparés : ce sont les termes situés dans le membre de droite de l'équation (5). Un autre avantage (d'importance) est que cette équation permet d'obtenir une hiérarchie approchée, à un ordre donné en τ_0 .

La hiérarchie à l'ordre zéro en τ_0 .

A l'ordre zéro en τ_0 , l'équation génératrice (5) se réduit à :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \widetilde{R}_1}{\partial \tau} + u^\mu \partial_\mu \widetilde{R}_1 + \frac{4\pi e^2}{m} \frac{\partial}{\partial u^\mu} \\ & \left\{ u_\nu \int d\tau' d_4 x' d_4 u' [u'^\mu \partial^\nu - u'^\nu \partial^\mu] D_{\text{ret.}}(x_\rho - x'_\rho) \widetilde{R}_2 \right\} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

⁽³⁰⁾ Le champ électromagnétique rayonné par une particule dépend, en effet, des variables d'accélération.

⁽³¹⁾ Nous désignons par \widetilde{R}_k les densités « réduites » :

$$\widetilde{R}_k = \int R_k d_4 \dot{\gamma}_1 \dots d_4 \dot{\gamma}_k = \int \widehat{R}_k d_4 \dot{\gamma}_1 \dots d_4 \dot{\gamma}_k.$$

qui constitue l'équation génératrice de la hiérarchie de Klimontovich renormalisée (?). En effet, la hiérarchie donnée par Klimontovich (32) contient des divergences d'énergie propre; l'équation génératrice obtenue par Klimontovich s'écrit (avec nos notations) de la même manière que l'équation (6) à ceci près que le terme intégral contient $\tilde{R}_1 \otimes \tilde{R}_1$ au lieu de \tilde{R}_2 .

La hiérarchie renormalisée s'obtient ensuite facilement. A l'aide d'hypothèses convenables, on en déduit diverses équations cinétiques : équations de Vlasov et de Landau relativistes (?). Ces équations ne tiennent évidemment pas compte des phénomènes dus au rayonnement.

La hiérarchie à l'ordre un en τ_0 .

L'analyse dimensionnelle de l'équation *rigoureuse* (5) montre que son second membre, qui contient les effets du rayonnement, est important (8) lorsque la condition

$$kT \sim mc^2 \tag{7}$$

est réalisée : ce qui est le cas (par définition) d'un gaz relativiste. Dès lors il semble intéressant de trouver une équation génératrice contenant les effets du rayonnement à l'ordre le plus bas, c'est-à-dire à l'ordre un (33) en τ_0 . Cette équation est obtenue en évaluant dans l'équation (5)

$$\frac{\partial}{\partial u^\mu} \left\{ \Delta^{\mu\nu} \int d_4 \dot{\gamma} \dot{\gamma}_\nu \hat{R}_1 \right\} \tag{8}$$

à l'ordre zéro en τ_0 . Utilisant pour cela, les facteurs δ contenus dans \hat{R}_1 et remarquant qu'à cet ordre

$$\dot{\gamma}_i^\mu \sim \frac{e}{m} F_{int}^{(\mu\nu)} u_{\nu i} \tag{9}$$

$\dot{\gamma}_\nu$ s'évalue facilement; reportant alors le résultat obtenu pour $\dot{\gamma}_\nu$ dans

(32) Yu. L. KLIMONTOVICH, *Soviet Phys. J. E. T. P.*, t. 10, 1960, p. 524 et t. 11, 1960, p. 876.

(33) D'après F. ROHRLICH (19) « il est empiriquement bien connu, que seul l'ordre un en τ_0 est physiquement significatif ».

l'équation (8) et tenant encore une fois compte des facteurs δ contenus dans $\widehat{\mathbf{R}}_1$, il vient :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \widetilde{\mathbf{R}}_1}{\partial \tau} + u^\mu \partial_\mu \widetilde{\mathbf{R}}_1 + \frac{4\pi e^2}{m} \frac{\partial}{\partial u^\mu} \left\{ u_\nu \int d\tau' d_4 x' d_4 u' [u'^\mu \partial^\nu - u'^\nu \partial^\mu] D_{\text{ret.}}(x_p - x'_p) \widetilde{\mathbf{R}}_2 \right\} \\
 = -\tau_0 \frac{\partial}{\partial u^\mu} \left\{ \Delta^{\mu\nu}(u_p) \times \left[\left[\frac{4\pi e^2}{m} u^\rho u^\alpha \int d\tau' d_4 x' d_4 u' \right. \right. \right. \\
 \left. \left. \left. \{ u'_\alpha \partial_\nu - u'_\nu \partial_\alpha \} D_{\text{ret.}}(x_p - x'_p) \widetilde{\mathbf{R}}_2 \right] \right. \right. \\
 + \left[\left(\frac{4\pi e^2}{m} \right)^2 u_\alpha \int \int d\tau' d_4 x' d_4 u' d\tau'' d_4 x'' d_4 u'' \right. \\
 \times \{ u'_\nu \partial_\beta - u'_\beta \partial_\nu \} D_{\text{ret.}}(x_p - x'_p) \\
 \times \{ u''^\beta \partial_\alpha - u''^\alpha \partial_\beta \} D_{\text{ret.}}(x_p - x'_p) \\
 \left. \left. \left. \times \{ \widetilde{\mathbf{R}}_3 + W_{\text{stoch.}}^2 \} \right] \right] \right\} \quad (10)
 \end{aligned}$$

où nous avons désigné par $W_{\text{stoch.}}^2$ la *densité aléatoire* qui après passage à la moyenne donne $N^2 W_2^2$ ($N \gg 1$).

Notons que dans le second membre de l'équation (10) nous avons remplacé $\widetilde{\mathbf{R}}_2$ à l'ordre zéro par $\widetilde{\mathbf{R}}_2$, ce qui est légitime car cela n'ajoute que des termes négligeables (en 0 (τ_0^2)).

On obtient ensuite aisément la hiérarchie recherchée.

6. — UNE APPLICATION SIMPLE

A partir de la hiérarchie à l'ordre un en τ_0 , il est possible d'obtenir plusieurs équations cinétiques contenant les effets du rayonnement ⁽⁸⁾ ⁽⁹⁾. La plus simple est une équation valable à l'ordre ⁽³⁴⁾ $\sim (ne^2 \tau_0)$ (n = densité du plasma électronique); c'est-à-dire à l'approximation de Vlasov :

$$\widetilde{\mathbf{D}}_2 = \widetilde{\mathbf{D}}_1 \otimes \widetilde{\mathbf{D}}_1. \quad (1)$$

⁽³⁴⁾ Notons, que du fait de l'existence d'une constante universelle supplémentaire en relativité (c'est-à-dire la vitesse de la lumière), il existe un paramètre de développement (sans dimension) supplémentaire. D'ailleurs les développements en ne^2 et en τ_0 n'ont pas du tout le même sens physique.

A cette approximation, la première équation de la hiérarchie se réduit à l'équation cinétique suivante (*)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{D}_1}{\partial \tau} + u^\mu \partial_\mu \tilde{D}_1 + \frac{4\pi e^2}{m} u_\nu \int d\tau' d_4 x' d_4 u' \\ [u'^\mu \partial_\nu - u'^\nu \partial_\mu] D_{\text{ret.}}(x_p - x'_p) \tilde{D}_1 \otimes \frac{\partial}{\partial u^\mu} \tilde{D}_1 \\ = - \tau_0 \frac{\partial}{\partial u^\mu} \left\{ \Delta^{\mu\nu}(u) \frac{4\pi e^2}{m} u^\alpha u^\alpha \int d\tau' d_4 x' d_4 u' \right. \\ \left. \{ u'_\alpha \partial_\nu - u'_\nu \partial_\alpha \} D_{\text{ret.}}(x_p - x'_p) \tilde{D}_1 \otimes \tilde{D}_1 \right\} \quad (2) \end{aligned}$$

qui tient compte de la réaction sur le plasma de l'émission du rayonnement collectif.

A partir de l'équation cinétique (2), il est possible de déduire une relation de dispersion pour la propagation d'ondes électromagnétiques dans le plasma. Cette relation de dispersion contient des *termes d'amortissement supplémentaires* dus à l'émission de rayonnement (*).

7. — CONCLUSION

Nous avons donné un *formalisme général* pour la mécanique statistique relativiste. Ce formalisme permet l'étude du rayonnement de manière beaucoup plus simple ⁽³⁵⁾ qu'avec les méthodes traditionnelles. Il permet également la déduction d'équations cinétiques relativistes. Notons encore que ce formalisme est facilement généralisable : il s'applique aussi bien au cas de particules à spin ou étendues qu'à des modèles dynamiques plus compliqués.

Toutefois, ce formalisme n'est pas complètement satisfaisant dans la mesure où les *très importants* problèmes dynamiques sous-jacents ⁽³⁶⁾ ne sont pas résolus.

Une autre grave lacune du formalisme est que nous n'avons pas traité les *problèmes d'équilibre*. Ceux-ci sont discutés dans la référence (*).

⁽³⁵⁾ R. HAKIM, à paraître.

⁽³⁶⁾ P. HAVAS, Some basic problems in the formulation of relativistic statistical mechanics, in *Statistical mechanics of equilibrium and non equilibrium*, J. Meixner, ed., North Holl. Pub. Co., Amsterdam, 1965.

Une bibliographie quasi-exhaustive sur le sujet est donnée dans cet article. Nous donnons dans l'appendice, une bibliographie un peu plus complète.

APPENDICE BIBLIOGRAPHIQUE

- I. ABONYI, *Z. Angew. Math. Phys.*, t. 11, 1960, p. 169.
 I. ABONYI, *C. R. Acad. Sci.*, t. 252, 1961, p. 3757.
 I. ABONYI, *Cahiers de Physique*, t. 18, 1964, p. 461.
 I. ABONYI, *Beitr. Plasma Phys.*, t. 5, 1965, p. 1.
 R. BALESCU, *Physica*, t. 31, 1965, p. 1599.
 R. BALESCU, in *1964 Cargese Summer School*, à paraître chez Gordon and Breach.
 R. BALESCU et T. KOTERA, On the covariant formulation of classical relativistic statistical mechanics, à paraître dans *Physica*, 1966.
 R. BALESCU, T. KOTERA et E. PINA, Lorentz transformation in phase space and in physical space, à paraître dans *Physica*, 1966.
 S. T. BELIAEV et G. I. BUDKER, *Soviet Phys. Dokl.*, t. 1, 1956, p. 218.
 F. BERENCZ, *Acta Phys. Chem. Szeged*, t. 6, 1960, p. 18.
 P. G. BERGMANN, *Phys. Rev.*, t. 84, 1951, p. 1026.
 P. G. BERGMANN, in *Handbuch der Physik*, vol. 4, S. Flügge ed., Springer-Verlag, Berlin, 1961.
 K. BICHTELER, *Z. für Phys.*, t. 182, 1965, p. 521.
 K. BICHTELER, *Beiträge zur relativistischen kinetischen Gas Theorie*, Hambourg, 1965.
 B. BUTI, *Phys. Fluids*, t. 5, 1962, p. 1.
 B. BUTI, *Phys. Fluids*, t. 6, 1963, p. 89.
 B. BUTI, *Phys. Fluids*, t. 6, 1963, p. 100.
 N. A. CHERNIKOV, *Soviet Phys. Dokl.*, t. 1, 1956, p. 103.
 N. A. CHERNIKOV, *Soviet Phys. Dokl.*, t. 2, 1957, p. 248.
 N. A. CHERNIKOV, *Soviet Phys. Dokl.*, t. 5, 1960, p. 764.
 N. A. CHERNIKOV, *Soviet Phys. Dokl.*, t. 5, 1960, p. 786.
 N. A. CHERNIKOV, *Soviet Phys.*, t. 7, 1962, p. 397.
 N. A. CHERNIKOV, *Soviet Phys. Dokl.*, t. 7, 1962, p. 414.
 N. A. CHERNIKOV, *Soviet Phys. Dokl.*, t. 7, 1962, p. 428.
 N. A. CHERNIKOV, *Phys. Letters*, t. 5, 1963, p. 115.
 N. A. CHERNIKOV, *Acta Phys. Pol.*, t. 23, 1963, p. 629.
 N. A. CHERNIKOV, *Acta Phys. Pol.*, t. 26, 1964, p. 1069.
 N. A. CHERNIKOV, *Acta Phys. Pol.*, t. 27, 1964, p. 465.
 P. C. CLEMMOW et A. J. WILSON, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, t. 53, 1957, p. 222.
 D. VAN DANTZIG, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.*, t. 42, 1939 c, p. 608.
 J. EHLERS, *Abhandl. Akad. Wiss. Mainz. Math. Naturw. Kl.*, 1961, n° 11.
 K. GOTO, *Progr. Theor. Phys.*, t. 20, 1958, p. 1.
 Ph. DE GOTTAL et I. PRIGOGINE, *Physica*, t. 31, 1965, p. 677.
 Ph. DE GOTTAL, *Physica*, t. 32, 1966, p. 123.
 Ph. DE GOTTAL, Hydrodynamics equations for a relativistic electron gas, à paraître dans *Phys. Fluids*, 1966.
 A. GUESSOUS, *C. R. Acad. Sci.*, t. 260, 1965, p. 6811.
 R. HAKIM, A covariant theory of Brownian motion, Congrès d'Aix-la-Chapelle, 1964.
 R. HAKIM, A covariant theory of relativistic brownian motion. II. Approach towards local equilibrium. Rapport Orsay TH/68, 1964.
 R. HAKIM, *J. Math. Phys.*, t. 6, 1965, p. 1482.
 R. HAKIM, *C. R. Acad. Sci.*, t. 260, 1965, p. 2997.
 R. HAKIM, *C. R. Acad. Sci.*, t. 260, 1965, p. 3861.

- R. HAKIM, Remarks on relativistic statistical mechanics. I. Generalities. Rapport Orsay TH/107, octobre 1965 (*à paraître*).
- R. HAKIM, Remarks on relativistic statistical mechanics. II. Hierarchies for the reduced densities. Rapport Orsay TH/137, février 1965 (*à paraître*).
- R. HAKIM, Relativistic statistical mechanics of a neutron star (*à paraître*).
- R. HAKIM, Equilibrium of a relativistic gas in an external force field (*à paraître*).
- R. HAKIM et A. MANGENEY, Relativistic kinetic equations with radiation effects. I. Vlasov approximation (*à paraître*).
- R. HAKIM et A. MANGENEY, Relativistic kinetic equations with radiation effects. II. Landau approximation (*à paraître*).
- R. HAKIM, Relativistic stochastic processes (*à paraître*).
- P. HAVAS, Some basic problems in the formulation of a relativistic statistical mechanics, in *Statistical mechanics of equilibrium and non-equilibrium*, J. Meixner, ed., North Holl. Pub. Co., Amsterdam, 1965.
- F. HENIN, *Physica*, t. 29, 1963, p. 1233.
- F. HENIN, *Bull. Acad. Roy. Belgique (Cl. Sci.)*, t. XLIX, 1963, p. 395.
- W. ISRAEL, *J. Math. Phys.*, t. 4, 1963, p. 1163.
- B. JANCOVICI, *Nuovo Cimento*, t. 25, 1962, p. 428.
- F. JÜTTNER, *Ann. Phys.*, t. 34, 1911 a, p. 856.
- F. JÜTTNER, *Ann. Phys.*, t. 35, 1911 b, p. 145.
- F. JÜTTNER, *Z. phys.*, t. 47, 1928, p. 542.
- G. KALMAN, *Nuovo Cimento*, t. 23, 1962, p. 908.
- Yu. L. KLIMONTOVICH, *Soviet Phys. Dokl.*, t. 7, 1963, p. 1120.
- Yu. L. KLIMONTOVICH, *Soviet Phys. J. E. T. P.*, t. 10, 1960, p. 524.
- Yu. L. KLIMONTOVICH, *Soviet Phys. J. E. T. P.*, t. 11, 1960, p. 876.
- J. E. KRIZAN et P. HAVAS, *Phys. Rev.*, t. 128, 1962, p. 2916.
- J. E. KRIZAN, *Phys. Rev.*, t. 140 A, 1965, p. 1155.
- B. KURSUNOGLU, *Nuclear Fusion*, t. 1, 1961, p. 213.
- B. KURSUNOGLU, Relativistic Plasma, in *Proceedings of the 5th International conference on Ionization Phenomena in Gases*, Munich, 1961, North Holl. Pub. Co., Amsterdam, 1962.
- B. KURSUNOGLU, *Nuovo Cimento*, t. 43, 1966, p. 209.
- P. T. LANDSBERG et J. DUNNING-DAVIES, *Phys. Rev.*, t. 138 A, 1965, p. 1049.
- A. LICHNEROWICZ et R. MARROT, *C. R. Acad. Sci.*, t. 210, 1940, p. 759.
- R. W. LINDQUIST, *Ann. Phys.*, t. 37, 1966, p. 487.
- V. LOZUPONE, *Ricerca Sci.*, II, A, t. 7, 1964, p. 683.
- F. LURCAT et P. MAZUR, *Nuovo Cimento*, t. 31, 1964, p. 140.
- A. MANGENEY, *Thèse Ann. Phys.*, t. 10, 1965, p. 191.
- C. MARLE, *C. R. Acad. Sci.*, t. 260, 1965, p. 6300; *C. R. Acad. Sci.*, t. 260, 1965, p. 6539.
- C. MARLE, Modèle cinétique relativiste pour un gaz avec conduction thermique, viscosité, diffusion, Institut Français du Pétrole, février 1966.
- R. MARROT, *J. Math.*, t. 25, 1946, p. 93.
- S. S. MOISEEV, *Soviet Phys. J. E. T. P.*
- PHAM MAU QUAN, *C. R. Acad. Sci.*, t. 263, 1966, p. 106.
- G. PICHON, Équation de Boltzmann relativiste et applications, Séminaire Lichnerowicz (Collège de France), février 1966.
- I. PRIGOGINE, Some aspects of relativistic statistical mechanics, in *Statistical mechanics of equilibrium and non-equilibrium*, J. Meixner, ed., North Holl. Pub. Co., Amsterdam, 1965.
- M. SASAKI, in *Max-Planck-Festschrift 1958*. V. E. B. Deutsches Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1958, p. 129.
- A. E. SCHEIDEGGER et C. D. MCKAY, *Phys. Rev.*, t. 83, 1951, p. 125.

- A. E. SCHEIDEGGER et R. V. KROTKOV, *Phys. Rev.*, t. 89, 1953, p. 1096.
SERBAN TITEICA, *Studii si cercetari de Fizica*, t. VII, 1956, p. 7.
A. SIMON, *Phys. Fluids*, t. 4, 1961, p. 586.
R. N. SUDAN, *Phys. Fluids*, t. 8, 1965, p. 153.
J. L. SYNGE, *The relativistic gas*, North Holl. Pub. Co., Amsterdam, 1957.
G. E. TAUBER et J. W. WEINBERG, *Phys. Rev.*, t. 122, 1961, p. 1342.
K. M. WATSON, S. A. BLUDMAN et M. N. ROSENBLUTH, *Phys. Fluids*, t. 3, 1960,
p. 741.
K. M. WATSON, S. A. BLUDMAN et M. N. ROSENBLUTH, *Phys. Fluids*, t. 3, 1960,
p. 747.
S. YADAVALLI, *J. Franklin Inst.*, t. 271, 1961, p. 368.
G. M. ZASLAVSKII et S. S. MOISEEV, *Soviet Phys. J. E. T. P.*, t. 15, 1962, p. 731.
G. ZEPP, *C. R. Acad. Sci.*, t. 256, 1963, p. 3426.

(Manuscrit reçu le 14 novembre 1966).
