ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

I. MORET-BAILLY
A. PAPAPETROU

La structure du champ gravitationnel « non-radiatif » en relativité générale

Annales de l'I. H. P., section A, tome 6, nº 3 (1967), p. 205-218
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1967__6_3_205_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section A :
Vol. VI, n° 3, 1967, p. 205-218. *Physique théorique.*

La structure du champ gravitationnel « non-radiatif » en relativité générale

par

I. MORET-BAILLY et A. PAPAPETROU
(Institut Henri Poincaré).

RÉSUMÉ. — Ce travail établit deux théorèmes valables pour le champ gravitationnel « non-radiatif ». Deux théorèmes analogues ont déjà été démontrés pour le champ électromagnétique en relativité restreinte. La démonstration explicite est faite dans le cas du champ à symétrie axiale étudié par Bondi.

A l'aide de ces théorèmes les conclusions suivantes ont été obtenues : *a*) la quantité c_0 de Bondi n'est pas suffisante pour décrire en détail le rayonnement gravitationnel; *b*) le champ créé par des corps en mouvement purement gravitationnel doit être « radiatif ».

SUMMARY. — In this work two theorems concerning non-radiative gravitational fields will be derived. They are the analogue of two theorems valid for the electromagnetic field in special relativity. The demonstration will be given in detail for the axially symetric gravitational field studied by Bondi.

From these theorems the following conclusions will be obtained: *a*) the quantity c_0 of Bondi is not sufficient to describe gravitational radiation in detail; *b*) bodies in a purely gravitational motion must be the sources of a radiative gravitational field.

1. — INTRODUCTION

Dans le cadre de la relativité restreinte, considérons un champ électromagnétique $F_{\mu\nu}$ qui possède les propriétés suivantes :

a) Il est une solution retardée des équations de Maxwell.

b) Ses sources sont contenues dans un domaine fini, $r < a$, de l'espace.

c) Ses composantes $F_{\mu\nu}$ sont développables en séries entières de $\frac{1}{r}$:

$$F_{\mu\nu} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overset{n}{F}(u, x^i/r)}{r^n}, \qquad u \equiv t - r.$$

d) Dans le domaine $u_1 < u < u_2$ le champ est « non-radiatif », c'est-à-dire :

(1) $$\overset{1}{F}_{\mu\nu} = 0, \qquad \text{pour} \qquad u_1 < u < u_2.$$

En utilisant les équations de Maxwell sous la forme

(2) $$\Box F_{\mu\nu} = 0,$$

on a montré [*1*] pour ce champ les théorèmes suivants :

(A) Le coefficient $\overset{n}{F}_{\mu\nu}$ est un polynôme en u dont le degré est inférieur ou égal à $n - 2$.

(B) Si le champ est stationnaire dans une partie de l'intervalle $u_1 < u < u_2$, il est stationnaire dans la totalité de cet intervalle.

L'analogie profonde des propriétés des champs électromagnétique et gravitationnel suggère l'existence de théorèmes analogues pour le champ gravitationnel. En effet, on a pu montrer [*1*] que, dans le cas d'un champ gravitationnel retardé et « non-radiatif », il n'y a pas d'ondes de choc. Ce résultat est en accord avec le théorème (B), mais plus faible que ce théorème.

Dans le présent travail nous nous proposons de démontrer un théorème (A′) pour le champ gravitationnel analogue au théorème (A). En utilisant ce résultat nous démontrerons alors que le théorème (B) est également valable pour le champ gravitationnel.

Rappelons brièvement les hypothèses et définitions que nous utilisons. Le champ gravitationnel retardé a la forme indiquée par Bondi [*2*] [*3*] quand on utilise ses coordonnées « radiatives ». Nous supposons que, pour $r > a$, ce champ satisfait les équations d'Einstein du vide et que les composantes $g_{\mu\nu}$ du tenseur métrique sont développables en séries entières de $\frac{1}{r}$. Nous dirons que le champ est « non-radiatif » si les développements des composantes du tenseur de courbure :

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overset{n}{R}_{\mu\nu\rho\sigma}}{r^n}$$

ne contiennent pas de termes proportionnels à $\frac{1}{r}$:

$$\overset{1}{R}_{\mu\nu\rho\sigma} = 0. \tag{3}$$

Dans le cas considéré par Bondi [*3*] et avec la notation qu'il utilise, la condition (3) est équivalente à

$$c_{00} = 0. \tag{4}$$

Nous allons traiter en détail le cas de la symétrie axiale considérée par Bondi [*3*]. La même méthode sera appliquée prochainement au cas général traité par Sachs [*4*] et Newman, Penrose et Unti [*7*].

2. — LA STRUCTURE DES ÉQUATIONS DU CHAMP

Dans ce paragraphe nous ne faisons pas l'hypothèse (4). Nous reprenons l'étude de la structure des équations d'Einstein du vide traitée dans [*3*] avec de légères modifications dans la notation des développements en séries des $g_{\mu\nu}$, ceci pour des raisons qui paraîtront évidentes ultérieurement. Nous écrivons les développements de γ et β sous la forme :

$$\gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overset{n}{\gamma}}{r_n}, \tag{5}$$

$$\beta = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\overset{n}{\beta}}{r^n}. \tag{6}$$

Nous remplaçons les développements de U et de V par ceux de

$$\mathcal{U} \equiv r\mathrm{U} \quad , \quad \mathcal{V} \equiv \frac{\mathrm{V}}{r}, \tag{7}$$

$$\mathcal{U} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overset{n}{\mathcal{U}}}{r^n}, \quad \mathcal{V} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overset{n}{\mathcal{V}}}{r}. \tag{8}$$

Rappelons que les $\overset{n}{\gamma}$, $\overset{n}{\beta}$, $\overset{n}{\mathcal{U}}$, $\overset{n}{\mathcal{V}}$ sont des fonctions des variables $x^0 = u$, $x^2 = \theta$. Les coefficients $\overset{n}{\gamma}$ du développement de γ joueront le rôle principal dans l'étude des équations du champ. Nous construirons avec ces $\overset{n}{\gamma}$ certaines fonctions que nous appellerons fonctions ψ. Leur introduction dans les calculs simplifie ceux-ci de façon appréciable.

Définition d'une fonction ψ *:* c'est une série entière de $\frac{1}{r}$,

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overset{n}{\psi}}{r^n},$$

dont le coefficient $\overset{n}{\psi}$ de $\frac{1}{r^n}$ est, pour $n \geqslant 1$, une somme de produits tels que

$$a . \overset{i_1}{\Gamma} . \overset{i_2}{\Gamma} \ldots \overset{i_j}{\Gamma} \ldots \overset{i_p}{\Gamma}, \quad \text{avec} \quad i_1 + i_2 + \ldots + i_j + \ldots + i_p = n,$$

où a est une fonction de la variable θ seule et où $\overset{i_j}{\Gamma}$ est, soit $\overset{i_j}{\gamma}$, soit $\overset{i_j}{\gamma}_2 \equiv \frac{\partial \overset{i_j}{\gamma}}{\partial \theta}$, soit $\overset{ij}{\gamma}_{22} \equiv \frac{\partial^2 \overset{i_j}{\gamma}}{\partial \theta^2}$. Pour $n = 0$, $\overset{n}{\psi}$ se réduit à une fonction de la variable θ seule.

L'addition, la multiplication, la dérivation des séries donnent les résultats suivants :

La somme de fonctions ψ est une fonction ψ. Le produit de fonctions ψ est une fonction ψ. La dérivée partielle d'ordre p (si elle existe) par rapport à la variable θ d'une fonction ψ est une fonction ψ. La dérivée partielle d'ordre p par rapport à r d'une fonction ψ est le produit d'une fonction ψ par $\frac{1}{r^p}$.

Remarquons, comme première application de cette définition que γ, γ_2, e^{γ} sont des fonctions ψ.

Nous utilisons les équations du champ de [*3*]. Nous considérons d'abord la première équation principale, équation (22) de [*3*],

$$\beta_1 = \frac{1}{2} r \gamma_1^2 \tag{9}$$

En introduisant (5) et (6) dans (9) et en identifiant les coefficients des puissances successives de $\frac{1}{r}$ on trouve

$$\overset{n+1}{\beta} = -\frac{1}{2(n+1)} \sum_{i+j=n+1} ij \overset{i}{\gamma}\overset{j}{\gamma}, \qquad n = 1, 2 \ldots \tag{10}$$

Ceci signifie que β est une fonction ψ, bien déterminée par la donnée de γ, que nous écrivons :

(10') $$\beta = {}_a\psi.$$

La deuxième équation principale, équation (23) de [3], s'écrit, avec (7),

(11) $$\left[r^3 e^{2(\gamma-\beta)}\left(\mathcal{U}_1 - \frac{\mathcal{U}}{r}\right)\right]_1 = 2r^2\left[\beta_{12} - \gamma_{12} + 2\gamma_1\gamma_2 - \frac{2\beta_2}{r} - 2\gamma_1 \operatorname{cotg}\theta\right].$$

En utilisant les propriétés des fonctions ψ on trouve que le second membre (II) de cette dernière équation est le produit d'une fonction ψ par r dont l'expression est obtenue en introduisant (5), (6) et (10) dans (11)

$$(\mathrm{II}) \equiv 2\overset{1}{\gamma}_2 + 4\overset{1}{\gamma} \operatorname{cotg}\theta + \frac{6\overset{3}{\gamma}_2 + 12\overset{3}{\gamma} \operatorname{cotg}\theta}{r^2} + \ldots$$

Le début du développement du premier membre (I) de (11) s'écrit en utilisant (5), (8), (6) et (10)

$$(\mathrm{I}) \equiv -2\overset{1}{\mathcal{U}} + \frac{4\overset{3}{\mathcal{U}} + 3\overset{2}{\mathcal{U}}\overset{1}{\rho} + 2\overset{1}{\mathcal{U}}\overset{2}{\rho}}{r^2} + \ldots$$

où ρ est une fonction ψ déterminée par la donnée de γ :

$$\rho \equiv e^{2(\gamma-\beta)} \equiv 1 + \frac{\overset{1}{\rho}}{r} + \frac{\overset{2}{\rho}}{r^2} + \ldots,$$

où

$$\overset{1}{\rho} = 2\overset{1}{\gamma}, \qquad \overset{2}{\rho} = \frac{5}{2}(\overset{1}{\gamma})^2 \,; \ldots$$

Par identification des coefficients des puissances successives de $\frac{1}{r}$ dans (I) et (II) on déduit que

a) Seul le coefficient $\overset{2}{\mathcal{U}}$ du développement de $\mathcal{U}$ n'est pas déterminé par (11).

b) $\overset{n}{\mathcal{U}}$, pour $n \neq 2$, est égal à une somme de termes de deux types. Les premiers ne contiennent que des $\overset{n}{\gamma}$, avec $i \leqslant n$, et forment le coefficient ${}_b\overset{n}{\psi}$ d'une fonction ${}_b\psi$ bien déterminée par la donnée de γ. Les autres contiennent $\overset{2}{\mathcal{U}}$ en facteur et des $\overset{i}{\gamma}$, avec $i \leqslant n - 2$, qui font apparaître le coefficient $\overset{n-2}{\underset{c}{\psi}}$ d'une autre fonction $\underset{c}{\psi}$ déterminée par la donnée de γ. On trouve par exemple,

$$\overset{1}{\mathcal{U}} = -(\overset{1}{\gamma}_2 + 2\overset{1}{\gamma}\,\mathrm{cotg}\,\theta),$$

$$\overset{3}{\mathcal{U}} = \frac{3}{2}\overset{3}{\gamma}_2 + 3\overset{3}{\gamma}\,\mathrm{cotg}\,\theta + \frac{1}{2}(\overset{1}{\gamma}_2 + 2\overset{1}{\gamma}\,\mathrm{cotg}\,\theta)\overset{2}{\rho} - \frac{3}{4}\overset{2}{\mathcal{U}}\overset{1}{\rho}.$$

La formule générale est

$$\overset{n}{\mathcal{U}} = \overset{n}{\underset{b}{\psi}} + \overset{2}{\mathcal{U}}\,\overset{n-2}{\underset{c}{\psi}}. \tag{12}$$

Ce que l'on peut aussi écrire sous la forme

$$\mathcal{U} = \underset{b}{\psi} + \frac{\overset{2}{\mathcal{U}}}{r^2}\underset{c}{\psi}. \tag{12'}$$

La troisième équation principale, équation (24) de [*3*], s'écrit, en tenant compte de (7),

$$\begin{aligned}(2\mathcal{V} + r\mathcal{V}_1) = {} & -\frac{1}{2}e^{2(\gamma-\beta)}(r^2\mathcal{U}_1^2 - 2r\mathcal{U}_1\mathcal{U} + \mathcal{U}^2) \\ & + r\mathcal{U}_{12} + r\mathcal{U}_1\,\mathrm{cotg}\,\theta + 3\mathcal{U}_2 + 3\mathcal{U}\,\mathrm{cotg}\,\theta \\ & + 2e^{2(\beta-\gamma)}[1 + 3(\gamma_2 - \beta_2)\,\mathrm{cotg}\,\theta + \gamma_{22} - \beta_{22} - \beta_2^2 - \gamma_2(\gamma_2 - \beta_2)]\end{aligned} \tag{13}$$

Après l'introduction de (5), (8), (12), (6) et (10) dans (13), l'identification des coefficients des puissances successives de $\frac{1}{r}$ de chaque membre de l'équation montre que celle-ci ne détermine pas le coefficient $\overset{1}{\mathcal{V}}$; mais elle détermine tous les autres coefficients $\overset{n}{\mathcal{V}}$ en fonction de $\overset{2}{\mathcal{U}}$ et des $\overset{i}{\gamma}$ avec $i \leqslant n$, le résultat étant donné par la formule

$$\overset{n}{\mathcal{V}} = \overset{n}{\underset{d}{\psi}} + \overset{2}{\mathcal{U}}\,\overset{n-2}{\underset{e}{\psi}} + \overset{2}{\mathcal{U}}_2\,\overset{n-2}{\underset{f}{\psi}} + (\overset{2}{\mathcal{U}})^2\,\overset{n-4}{\underset{g}{\psi}} \tag{14}$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$\mathcal{V} = \frac{\overset{1}{\mathcal{V}}}{r} + \underset{d}{\psi} + \frac{\overset{2}{\mathcal{U}}}{r^2}\underset{e}{\psi} + \frac{\overset{2}{\mathcal{U}}_2}{r^2}\underset{f}{\psi} + \frac{(\overset{2}{\mathcal{U}})^2}{r^4}\underset{g}{\psi} \tag{14'}$$

où $\underset{d}{\psi}$, $\underset{e}{\psi}$, $\underset{f}{\psi}$, $\underset{g}{\psi}$ sont quatre fonctions ψ déterminées par la donnée de γ.

Considérons maintenant la quatrième équation principale, équation (25) de [*3*] qui, avec (7), s'écrit

$$
\begin{aligned}
(15)\quad 2r(r\gamma)_{01} = {} & r\mathcal{V}_1(r\gamma_1 - 1) + r\mathcal{U}_1(\operatorname{cotg}\theta - \gamma_2) \\
& + \mathcal{V}(r^2\gamma_{11} + 2r\gamma_1 - 1) + \mathcal{U}_2(1 - r\gamma_1) \\
& + \mathcal{U}(-2r\gamma_{12} - r\gamma_1 \operatorname{cotg}\theta - \gamma_2 + 2\operatorname{cotg}\theta) \\
& + e^{2(\beta-\gamma)}[1 + (3\gamma_2 - 2\beta_2)\operatorname{cotg}\theta + \gamma_{22} - 2\gamma_2(\gamma_2 - \beta_2)]
\end{aligned}
$$

L'introduction de (5), (10'), (12'), (14') dans (15) et l'identification des coefficients des puissances successives de $\frac{1}{r}$ de chaque membre de cette équation donnent, pour $n > 0$, les $\overset{n+1}{\gamma}_0 \equiv \dfrac{\partial \overset{n+1}{\gamma}}{\partial u}$ en fonction des $\overset{i}{\gamma}$, avec $i \leqslant n$, $\overset{2}{\mathcal{U}}$ et $\overset{1}{\mathcal{V}}$:

$$
(16)\qquad -2n\,\overset{n+1}{\gamma}_0 = \underset{h}{\overset{n}{\psi}} + \overset{1}{\mathcal{V}}\,\underset{i}{\overset{n-1}{\psi}} + \overset{2}{\mathcal{U}}\,\underset{j}{\overset{n-2}{\psi}} + \overset{2}{\mathcal{U}}_2\underset{k}{\overset{n-2}{\psi}} + (\overset{2}{\mathcal{U}})^2\,\underset{l}{\overset{n-4}{\psi}}, \quad \text{avec} \quad n > 0,
$$

où les $\underset{h}{\overset{n}{\psi}}$, $\underset{i}{\overset{n}{\psi}}$, $\underset{k}{\overset{n}{\psi}}$, $\underset{l}{\overset{n}{\psi}}$ sont les coefficients de $\frac{1}{r^n}$ de cinq fonctions ψ construites avec les fonctions ψ qui interviennent dans (10'), (12'), (14'). Ces coefficients sont bien déterminés par la donnée des $\overset{i}{\gamma}$, $i \leqslant n$.

Soulignons que $\overset{1}{\gamma}_0$ n'est pas déterminé par (15). En faisant $n = 1, 2, 3, \ldots$ successivement dans (16), on obtient les $\overset{i}{\gamma}$ avec $i \neq 1$, par intégration par rapport à u.

Nous sommes ainsi arrivés au résultat suivant :

Les quatre équations principales déterminent les $\overset{i}{\gamma}$, $\overset{i}{\beta}$, $\overset{i}{\mathcal{U}}$, $\overset{i}{\mathcal{V}}$ exceptés $\overset{1}{\gamma}$, $\overset{2}{\mathcal{U}}$, $\overset{1}{\mathcal{V}}$; mais seul $\overset{1}{\gamma}$ est arbitraire car $\overset{2}{\mathcal{U}}$ et $\overset{1}{\mathcal{V}}$ doivent satisfaire les deux équations du champ « supplémentaires », équations (35) et (36) de [*3*], qui s'écrivent, compte tenu de (7),

$$
(17)\qquad \overset{1}{\mathcal{V}}_0 = 2(\overset{1}{\gamma}_0)^2 - (\overset{1}{\gamma}_{22} + 3\overset{1}{\gamma}_2 \operatorname{cotg}\theta - 2\overset{1}{\gamma})_0,
$$

$$
(18)\qquad 3\overset{2}{\mathcal{U}}_0 = \overset{1}{\mathcal{V}}_2 + 3\overset{1}{\gamma}\overset{1}{\gamma}_{02} + 7\overset{1}{\gamma}_0\overset{1}{\gamma}_2 + 16\overset{1}{\gamma}\overset{1}{\gamma}_0 \operatorname{cotg}\theta
$$

Quand on a choisi γ^1, le deuxième membre de (17) est connu et par conséquent cette équation détermine le coefficient $\overset{1}{\mathcal{V}}$ après intégration par rapport à u. Mais alors le deuxième membre de (18) est aussi connu et cette dernière équation détermine $\overset{2}{\mathcal{U}}$.

3. — LE CAS DU CHAMP « NON-RADIATIF »

Nous supposons maintenant que le champ gravitationnel est « non-radiatif », c'est-à-dire que nous faisons l'hypothèse (4) qui, ici, se traduit avec la notation $\overset{1}{\gamma} \equiv c$ par

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}\overset{1}{\gamma} = 0 \tag{19}$$

ce qui entraîne que $\overset{1}{\gamma}$ est un polynôme en u de degré un au plus :

$$\overset{1}{\gamma} = \mathrm{A}(\theta)u + \mathrm{B}(\theta).$$

On déduit de (19), (17), (18) que

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}\overset{1}{\mathcal{V}} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^3}{\partial u^3}\overset{2}{\mathcal{U}} = 0. \tag{20}$$

(19) et la définition de $\overset{i}{\psi}$ entraînent $\frac{\partial}{\partial u}\overset{0}{\psi} = 0$, $\frac{\partial^2}{\partial u^2}\overset{1}{\psi} = 0$, car $\overset{1}{\psi}$ est linéaire par rapport à $\overset{1}{\gamma}$, et $\frac{\partial^3}{\partial u^3}\overset{2}{\psi} = 0$, car $\overset{2}{\gamma}$ étant nul, u n'apparaît que dans $\overset{1}{\gamma}$ qui figure au carré dans $\overset{2}{\psi}$.

On fait maintenant $n = 2$ dans (16). On prend la dérivée troisième par rapport à u de chaque membre et on obtient compte tenu de ce qui précède :

$$\frac{\partial^4}{\partial u^4}\overset{3}{\gamma} = 0, \qquad \text{ce qui entraîne} \qquad \frac{\partial^4}{\partial u^4}\overset{3}{\psi} = 0.$$

En répétant les mêmes opérations pour $n = 3, 4, \ldots$ dans (16) on obtient le résultat suivant :

$$\frac{\partial^{n+1}}{\partial u^{n+1}}\overset{n}{\gamma} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^{n+1}}{\partial u^{n+1}}\overset{n}{\psi} = 0. \tag{21}$$

Finalement on déduit des résultats précédents et de (12) et (14)

$$\frac{\partial^{n+1}}{\partial u^{n+1}}\overset{n}{\mathcal{U}} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^{n+1}}{\partial u^{n+1}}\overset{n}{\mathcal{V}} = 0. \tag{22}$$

Nous obtenons donc la conclusion suivante :

Dans le cas d'un champ « non-radiatif » les $\overset{n}{\gamma}$, $\overset{n}{\beta}$, $\overset{n}{\mathcal{U}}$, $\overset{n}{\mathcal{V}}$, des développements de γ, β, $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, sont des polynômes en u dont le degré est inférieur ou égal à n.

Les composantes non nulles du tenseur métrique sont données par l'équation (14) de [3]. Écrites en fonction de γ, β, $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ elles sont :

$$
(23) \qquad \begin{aligned} &g_{00} = \mathcal{V}e^{2\beta} - \mathcal{U}^2 e^{2\gamma} \quad , \quad g_{01} = e^{2\beta} \quad , \quad g_{02} = r\,\mathcal{U}e^{2\gamma} \\ &g_{22} = -\,r^2 e^{2\gamma} \qquad\qquad , \quad g_{33} = -\,r^2 e^{-2\gamma} \sin^2\theta . \end{aligned}
$$

Les quantités $e^{2\gamma}$, $e^{-2\gamma}$, $e^{2\beta}$ étant des fonctions ψ et les $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, ayant les développements de (12′) et de (14′) on voit immédiatement que les composantes $g_{\alpha\beta}$ ont les développements suivants :

$$
(24) \qquad \left.\begin{aligned} g_{ik} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overset{n}{g}_{ik}}{r^n} \\ g_{iA} &= r \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overset{n}{g}_{iA}}{r^n} \\ g_{AB} &= r^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overset{n}{g}_{AB}}{r^n} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &i,\ k = 0,\ 1\ ; \\ &\mathrm{A},\ \mathrm{B} = 2,\ 3. \end{aligned}
$$

Si le champ est « non-radiatif » chacune des quantités $e^{2\gamma}$, $e^{-2\gamma}$, $e^{2\beta}$, $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ a, d'après (21) et (22), la propriété suivante : dans le développement par rapport à $\frac{1}{r}$ le coefficient de $\frac{1}{r^n}$ est un polynôme en u dont le degré est inférieur ou égal à n. On vérifie immédiatement que cette propriété est valable aussi pour le produit de deux quelconques de ces quantités. On arrive ainsi au théorème (A′) suivant :

Si le champ est « non-radiatif » les coefficients $\overset{n}{g}_{\alpha\beta}$ sont des polynômes en u dont le degré est inférieur ou égal à n.

Nous avons vu que, dans le cas d'un champ non-radiatif, le coefficient $\overset{1}{\gamma}$ est un polynôme en u dont le degré est un ou zéro. Ce degré est invariant par rapport aux transformations de Bondi-Metzner, comme le montre immédiatement la première formule de la page 51 de [3]. Les degrés par rapport à u des *autres coefficients* de la métrique ne sont pas en général invariants. En effet, considérons le champ de Schwarzschild d'abord avec un système de coordonnées de Bondi dans lequel les $g_{\mu\nu}$ sont indépendants de u. Tous les $\overset{n}{g}_{\alpha\beta}$ sont dans ce cas des polynômes en u dont le degré est zéro. Mais, après une transformation de Bondi-Metzner correspondant à une transformation de Lorentz, la métrique dépend de u et par conséquent les coefficients $\overset{n}{g}_{\alpha\beta}$ ne sont plus tous de degré zéro. Il s'ensuit que le champ est nécessairement non-stationnaire quand le degré de $\overset{1}{\gamma}$ est un. Mais il peut être stationnaire [1] ou non-stationnaire quand le degré de $\overset{1}{\gamma}$ est zéro.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème (B) pour le champ gravitationnel. Nous supposons que le champ est « non-radiatif » dans l'intervalle

$$(\alpha) \qquad u_1 < u < u_2,$$

et stationnaire dans l'intervalle

$$(\beta) \qquad u_1 < u < u_2', \qquad \text{avec} \qquad u_2' < u_2.$$

Nous pouvons introduire un système de coordonnées de Bondi tel que les $g_{\mu\nu}$ soient indépendants de u dans l'intervalle (β). Le champ étant « non-radiatif » dans (α), les coefficients $\overset{n}{g}_{\mu\nu}$ sont dans cet intervalle des polynômes en u. Mais le champ est indépendant de u dans la partie (β) de (α) et par conséquent le degré de tous ces polynômes est zéro : le champ est donc stationnaire dans l'intervalle (α), ce qui constitue le théorème (B) pour le champ gravitationnel.

On peut arriver au même résultat par le raisonnement suivant. Un champ « non-radiatif » dépend, d'après le théorème (A'), de la coordonnée u par l'intermédiaire des fonctions élémentaires u^λ, $\lambda = 0, 1, 2, \ldots$ Il s'ensuit qu'au passage d'un champ stationnaire à un champ non-stationnaire, il y aurait nécessairement une onde de choc. Mais il a été déjà démontré qu'il n'y a pas d'onde de choc dans le cas d'un champ « non-radiatif », ce qui redonne le théorème (B).

4. — LES CHAMPS NON-STATIONNAIRES ET « NON-RADIATIFS » : EXEMPLES ET APPLICATIONS

Nous donnerons deux exemples de champs électromagnétiques de ce type. L'utilité de ces exemples consiste en ce qu'ils nous donnent une idée des propriétés caractéristiques de tels champs.

---

[1] Le champ gravitationnel est dit stationnaire dans un domaine de la variété espace-temps s'il existe, dans ce domaine, un champ de vecteurs de Killing orientés dans le temps.

On a d'après (1) et (2)

$$\overset{1}{F}_{\mu\nu} = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial u}\overset{2}{F}_{\mu\nu} = 0 \quad , \quad \mu, \nu = 1, 2, 3, 4.$$

a) Le champ le plus simple ([2]) est celui pour lequel on a

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}\overset{3}{F}_{\mu\nu} = 0 \quad , \quad \overset{n}{F}_{\mu\nu} = 0 \qquad \text{pour } n > 3$$

Un tel champ est créé par un dipôle électrique dont le moment croît linéairement avec le temps. En choisissant pour direction de l'axe Oz celle du dipôle, on trouve, par un calcul élémentaire :

$$(25) \quad \begin{gathered} F_{12} = 0 \quad , \quad F_{23} = \frac{\alpha y}{r} \cdot \frac{1}{r^2} \quad , \quad F_{31} = \frac{-\alpha x}{r} \cdot \frac{1}{r^2}, \\ F_{14} = \frac{-3\alpha xz}{r^2}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{t-r}{r^3}\right) \quad , \quad F_{24} = \frac{-3\alpha yz}{r^2}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{t-r}{r^3}\right), \\ F_{34} = \alpha\left(1 - \frac{3z^2}{r^2}\right)\left(\frac{1}{r^2} + \frac{t-r}{r^3}\right), \end{gathered}$$

où α est une constante. Le potentiel A_μ correspondant est

$$A_1 = A_2 = 0 \quad , \quad A_3 = -\alpha . \frac{1}{r} \quad , \quad A_4 = \alpha . \frac{z}{r}\left(\frac{1}{r} + \frac{t-r}{r^2}\right).$$

Il est facile de trouver la distribution des sources correspondante. Considérons deux charges ponctuelles $Q_1 = \beta t$ et $Q_2 = -\beta t$ aux points $M_1\left(0, 0, \frac{l}{2}\right)$ et $M_2\left(0, 0, -\frac{l}{2}\right)$. Pour satisfaire la loi de conservation des charges nous devons introduire encore un courant d'intensité β sur le segment (M_2M_1). Si on fait tendre β vers l'infini et l vers zéro de manière que $\beta l = \alpha$, on vérifie immédiatement que c'est cette distribution de sources qui produit le champ (25).

b) On obtient un champ « non-radiatif » tel que

$$\frac{\partial^3}{\partial u^3}\overset{4}{F}_{\mu\nu} = 0 \quad , \quad \overset{n}{F}_{\mu\nu} = 0 \quad , \quad \text{pour } n > 4,$$

([2]) L'exemple le plus simple d'un champ non-stationnaire et « non-radiatif » est donné par le champ créé par deux particules chargées en mouvement avec des vitesses constantes et inégales. Mais dans ce cas les sources du champ ne sont pas contenues, pour toutes les valeurs de t, dans une région finie $r < a$.

en considérant quatre charges, $Q_1 = Q_2 = \beta t^2$, $Q_3 = Q_4 = -\beta t^2$, aux points

$$M_1\left(0, \frac{l_1}{2}, \frac{l_2}{2}\right), \quad M_2\left(0, -\frac{l_1}{2}, -\frac{l_2}{2}\right), \quad M_3\left(0, -\frac{l_1}{2}, \frac{l_2}{2}\right), \quad M_4\left(0, \frac{l_1}{2}, -\frac{l_2}{2}\right),$$

et deux courants d'intensité $2\beta t$ sur les segments (M_4M_1) et (M_3M_2). Il y a donc dans ce cas un quadrupôle proportionnel à t^2 et une distribution de dipôles proportionnelle à t. D'une manière analogue on peut construire des champs électromagnétiques « non-radiatifs » contenant des puissances de plus en plus élevées.

On doit s'attendre à des situations analogues pour le champ gravitationnel en relativité générale, mais on ne peut pas donner d'exemples exacts. Nous ne citerons que le cas le plus simple dans le cadre de la première approximation pour champs faibles. C'est le champ gravitationnel produit par une distribution matérielle telle qu'il y a un moment quadrupolaire d^{ik} proportionnel à t^3. En effet on trouve [5] que, si $\dddot{d}^{ik}$ n'est pas nul mais indépendant du temps, le terme de $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ qui est proportionnel à $\frac{1}{r}$ s'annule, c'est-à-dire que le champ est « non-radiatif » (³). Il s'agit du cas (4), $c_{00} = 0$, mais avec $c_0 \neq 0$.

Les équations du champ électromagnétique ou gravitationnel admettent des solutions qui peuvent être « non-radiatives » dans l'intervalle infini $-\infty < u < +\infty$. Ces solutions deviennent singulières sur les hypersurfaces $u = \pm\infty$ et sont par conséquent inadmissibles au point de vue physique. Les exemples que nous venons de citer montrent qu'on pourrait éventuellement réaliser des distributions de sources produisant des champs « non-radiatifs », mais seulement pendant un intervalle de temps fini

$$(\gamma) \qquad u_1 < u < u_2.$$

On arrive à des conclusions intéressantes en supposant que dans cet intervalle on a $c_{00} = 0$ mais $c_0 \neq 0$. Nous supposons encore qu'en dehors de l'intervalle

$$(\delta) \qquad u_1' < u < u_2' \quad , \quad \text{avec} \quad u_1' < u_1 \quad , \quad u_2 < u_2',$$

(³) Dans le cas électromagnétique le moment quadrupolaire est proportionnel à t^2. La différence s'explique par le fait que le rôle de $F_{\mu\nu}$ est maintenant pris par $R_{\mu\nu\rho\sigma}$; $F_{\mu\nu}$ contient les dérivées premières de A_μ, tandis que $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ contient les dérivées secondes de $g_{\mu\nu}$.

le champ est stationnaire. On a donc $c_0 = 0$ pour $u \leqslant u'_1$ et pour $u'_2 \leqslant u$. Il s'ensuit que $c_{00} \neq 0$ dans chacun des deux intervalles

$$(\varepsilon) \qquad u'_1 < u \leqslant u_1 \qquad \text{et} \qquad u_2 \leqslant u < u'_2.$$

Le champ est donc nécessairement « radiatif » dans les intervalles (ε), c'est-à-dire que le développement de $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ a un terme proportionnel à $\frac{1}{r}$ dans chacun des intervalles (ε), tandis qu'il commence avec un terme proportionnel à $\frac{1}{r^2}$ dans l'intervalle (γ) et avec un terme proportionnel à $\frac{1}{r^3}$ dans les intervalles $u \leqslant u'_1$ et $u'_2 \leqslant u$. Ceci signifie que le rayonnement gravitationnel est émis essentiellement dans les intervalles (ε). Cette remarque montre que la quantité c_0^2 n'est appropriée que pour le calcul de l'énergie *totale* du rayonnement gravitationnel émis dans l'intervalle (ε) où le champ est variable. Mais c_0^2 ne peut décrire la *distribution détaillée* du rayonnement dans cet intervalle. Cette distribution est évidemment décrite d'une manière satisfaisante par la quantité c_{00}. Mais nous nous trouvons en face de la difficulté caractéristique : cette dernière quantité ne peut pas déterminer l'énergie du rayonnement.

Les résultats déduits de l'analyse des champs « non-radiatifs » nous permettent d'arriver immédiatement à une autre conclusion intéressante. Un champ gravitationnel « non-radiatif » ne peut pas être engendré par des sources en mouvement purement gravitationnel [*6*]. En effet il suffit de considérer le cas d'une étoile double, dont les composantes ont des vitesses telles que dans la théorie newtonienne de la gravitation les trajectoires soient elliptiques. Il n'y a pas de doute que ce champ est décrit en relativité générale par des fonctions $g_{\mu\nu}$ presque périodiques en u. Cela entraîne que les coefficients du développement des $g_{\mu\nu}$ sont aussi des fonctions presque périodiques en u. Il est donc impossible que ces coefficients soient des polynômes en u : le champ est nécessairement « radiatif » bien que ces sources soient en mouvement purement gravitationnel. Le même raisonnement montre d'ailleurs qu'on ne doit pas s'attendre à ce que les champs gravitationnels « non-radiatifs » soient engendrés par des sources obéissant à des équations d'état réversibles [*3*].

RÉFÉRENCES

[*1*] A. Papapetrou, *J. Math. Phys.*, Vol. 6, n° 9, septembre 1965, p. 1405.
[*2*] H. Bondi, *Nature*, London, Vol. 186, p. 535.
[*3*] H. Bondi, M. Van der Burg et A. Metzner, *Proc. Roy. Soc.*, t. A 269, 1962, p. 21.

[4] R. SACHS, *Proc. Roy. Soc.*, t. A 270, 1962, p. 103.
[5] A. PAPAPETROU, *Nuclear Physics*, t. 57, 1964, p. 319 (pour la relation entre Ω^{ik} et $\dddot{d}^{ik}$ voir A. PAPAPETROU, *C. R. Acad. Sc.*, t. 255, 1962, p. 1578).
[6] L. INFELD et J. PLEBANSKI, *Motion and Relativity*, London, Pergamon Press., 1960.
[7] E. NEWMAN et R. PENROSE, *J. Math. Phys.*, t. 3, 1962, p. 566.
E. NEWMAN et T. W. J. UNTI, *J. Math. Phys.*, t. 3, 1962, p. 891.

Manuscrit reçu le 19 septembre 1966.