ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

JACQUELINE BERTRAND

Réduction des représentations unitaires irréductibles du groupe de Poincaré sur le groupe euclidien

Annales de l'I. H. P., section A, tome 5, nº 3 (1966), p. 235-256

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1966__5_3_235_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. V, n° 3, 1966, p. 235-256.

Section A :
Physique théorique.

Réduction des représentations unitaires irréductibles du groupe de Poincaré sur le groupe euclidien

par

Jacqueline BERTRAND
(Institut Poincaré, Paris).

RÉSUMÉ. — Nous montrons comment la théorie des représentations induites de Mackey permet d'obtenir directement une forme globale des représentations unitaires irréductibles du groupe de Poincaré dans une base de moment angulaire. La méthode est générale et mathématiquement rigoureuse; elle peut s'appliquer indifféremment aux cas de masse réelle, nulle ou imaginaire. Comme application, nous calculons les générateurs infinitésimaux pour les représentations physiques et les représentations à spin infini.

SUMMARY. — We apply Mackey's theory of induced representations to the irreducible unitary representations of the Poincaré group and find their global form in an angular momentum basis. The method is direct, mathematically rigourous and general: we could deal with imaginary mass representations as well as real ones. Finally, we compute the infinitesimal generators for physical and infinite spin representations.

INTRODUCTION

Les représentations unitaires irréductibles du groupe de Poincaré ont été discutées dans leur ensemble par E. P. Wigner dans un article paru en 1939 [*1*]. Depuis, la plupart des applications de cette étude ont été faites en explicitant les représentations dans un espace muni d'une base de moment linéaire suivant une méthode proposée initialement par Wigner. Mais dans la résolution de problèmes particuliers, cette base n'est pas toujours la mieux adaptée; il devient alors nécessaire d'écrire les représentations sous une forme isomorphe dans un nouvel espace.

Ainsi, J. S. Lomont et H. E. Moses [*13*] ont étudié la probabilité pour qu'un système physique quelconque dont l'énergie et le moment angulaire ont une valeur bien déterminée, conserve les mêmes caractéristiques dans un repère translaté ou en mouvement uniforme par rapport au repère original. Et ils ont été conduits naturellement à chercher une réalisation des représentations du groupe de Poincaré telle que les opérateurs infinitésimaux correspondant à l'énergie, à l'hélicité, au carré du moment angulaire et à une de ses composantes soient diagonaux. Cette seule condition leur a permis de trouver l'expression de tous les générateurs de l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré; ils en ont déduit la base de moment angulaire sur laquelle les générateurs agissaient par comparaison avec la forme infinitésimale de la représentation de Wigner.

Toutefois, cette méthode de résolution nécessite de longs calculs et divers auteurs ont proposé récemment des solutions plus simples. I. Raszillier [*14*] a déterminé des états de moment angulaire et d'hélicité à partir d'états de moment linéaire, selon une méthode analogue à celle de M. Jacob et G. C. Wick [*7*]; il a ensuite calculé les éléments de matrice des générateurs infinitésimaux. J.-M. Lévy-Leblond [*16*] a obtenu la diagonalisation de l'énergie, du moment angulaire orbital, du moment angulaire total et d'une de ses composantes en combinant des états propres de spin et de moment orbital; il a également calculé les éléments de matrice de l'opérateur de translation spatiale.

Tous ces travaux sont fondés sur les propriétés des générateurs infinitésimaux du groupe de Poincaré. Or, ce sont des opérateurs non bornés. Il faut donc avoir soin d'en déterminer un domaine de définition commun, dense dans l'espace de la représentation et dont l'existence nous est d'ailleurs assurée par les travaux de Nelson [*11*] et L. Gärding [*12*]. Sur ce domaine, les opérateurs infinitésimaux deviennent des opérateurs différentiels dont la diagonalisation correcte ne s'effectue pas nécessairement par des méthodes simples. Les travaux ci-dessus mentionnés éludent pour la plupart ces difficultés, les résultats obtenus étant néanmoins exacts alors que leur justification détaillée s'avérerait longue et pénible d'un point de vue strictement mathématique.

Il serait évidemment plus commode d'effectuer directement la réduction cherchée sur les transformations finies du groupe, car alors, n'ayant affaire qu'à des opérateurs unitaires, nous n'aurions plus à nous préoccuper ni des domaines d'existence ni de l'écriture des opérateurs infinitésimaux. Comme il est bien connu que les représentations unitaires du groupe de Poincaré sont induites, nous allons partir du théorème d'induction-réduction de Mackey pour remplir ce programme, ce qui a aussi l'avantage de la généralité et peut s'appliquer indifféremment aux cas de masse réelle, imaginaire ou nulle.

Nous rappellerons d'abord brièvement, au paragraphe I, comment on obtient les représentations unitaires irréductibles U du groupe de Poincaré par la méthode de Mackey. Puis, au paragraphe II, le théorème d'induction-réduction nous donnera une forme simple de la restriction de U au groupe des rotations à trois dimensions et sa décomposition en représentations irréductibles D_j sera immédiate. Comme nous connaissons une base de moment angulaire pour D_j, nous en avons ainsi trouvé une pour U; et nous avons en même temps la forme globale de la représentation dans cette base.

Comme application directe, nous calculons, au paragraphe III, les générateurs infinitésimaux du groupe de Poincaré dans les cas dits physiques et dans le cas de masse nulle et « hélicité multiple » [*10*] (appelé aussi de spin infini).

I. — FORME GÉNÉRALE DES REPRÉSENTATIONS UNITAIRES DU GROUPE DE LORENTZ INHOMOGÈNE

Rappelons tout d'abord comment on obtient les représentations unitaires irréductibles de $\mathcal{P}$ par la méthode de Mackey [*8*].

Le groupe de Lorentz homogène opère dans l'espace $\mathbf{R}_4$. A tout point $M = (p_0, \vec{p})$ dans $\mathbf{R}_4$, on peut associer une matrice $\underline{M}$ définie par

$$\text{(1)} \qquad \underline{M} = \begin{vmatrix} p_0 - p_3 & p_2 - ip_1 \\ p_2 + ip_1 & p_0 + p_3 \end{vmatrix}$$

A une transformation de Lorentz $\mathcal{L}$ faisant passer de M à M′ correspond alors une matrice complexe unimodulaire Λ agissant sur $\underline{M}$ par

$$\text{(2)} \qquad \underline{M}' = \Lambda\, \underline{M}\, \Lambda^{\dagger}$$

et cette correspondance est un homomorphisme de noyau $(+1, -1)$. C'est ce groupe G des matrices Λ que nous considérerons désormais. Nous écrirons (2) sous la forme

$$\text{(3)} \qquad M' = \Lambda M.$$

D'autre part, le groupe $\mathcal{T}_4$ des translations dans $\mathbf{R}_4$ est abélien. Si a^μ définit une translation, tout caractère de $\mathcal{T}_4$ est de la forme

$$a^\mu \rightarrow e^{ia_\mu b^\mu} \equiv \langle a, b \rangle \tag{4}$$

b^μ étant un élément quelconque de $\mathbf{R}_4$. $\mathcal{T}_4$ peut ainsi être identifié à son dual $\widehat{\mathcal{T}}_4$, ensemble des b^μ, et à $\mathbf{R}_4$.

On peut donc effectuer le produit semi-direct de G et $\mathcal{T}_4$ pour obtenir un groupe $\tilde{G} = \mathcal{T}_4 G$ homomorphe au groupe de Lorentz inhomogène ; le produit de deux éléments (a, Λ) et (a', Λ') de $\tilde{G}$ s'effectue selon la règle habituelle

$$(a, \Lambda).(a', \Lambda') = (a + \Lambda a', \Lambda\Lambda'). \tag{5}$$

L'ensemble des éléments $(a, 1)$ est isomorphe à $\mathcal{T}_4$ et l'ensemble des éléments $(0, \Lambda)$ à G. L'action de $\tilde{G}$ sur $\mathcal{T}_4 \approx \mathbf{R}_4$ s'écrit

$$a_0 = (a_0, 1) \rightarrow (a, \Lambda)(a_0, 1)(-\Lambda^{-1}a, \Lambda^{-1}) = (\Lambda a_0, 1) = \Lambda a_0 \tag{6}$$

et sur $\widehat{\mathcal{T}}_4$ elle s'écrit, d'après (4)

$$a_0 \rightarrow \Lambda^{-1} a_0. \tag{7}$$

L'action de $\mathcal{T}_4 \subset \tilde{G}$ sur $\widehat{\mathcal{T}}_4$ se réduit à l'identité.

Enfin, on vérifie que G opère régulièrement dans $\widehat{\mathcal{T}}_4 \approx \mathbf{R}_4$. Alors d'après Mackey, à toute représentation unitaire irréductible U de $\tilde{G}$ est associée une classe d'intransitivité Ω de $\mathbf{R}_4$ suivant $\tilde{G}$. Un point Q_0 choisi dans cette classe a un groupe stationnaire de la forme $\mathcal{T}_4\mathcal{S}$. Et on obtient U, à une équivalence près, en induisant à $\tilde{G}$ une représentation L unitaire irréductible de $\mathcal{T}_4\mathcal{S} \subset \tilde{G}$ telle que sa restriction à $\mathcal{T}_4$ soit un multiple de Q_0, c'est-à-dire de la forme

$$L(a, S) = \langle a, Q_0 \rangle R(S) \tag{8}$$

R(S) étant une représentation unitaire irréductible de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{H}$. Cette représentation induite U^L se réalise dans l'espace $\mathcal{J}$ des fonctions f sur G, à valeurs dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$, de carré sommable pour la mesure $d\mu$ invariante sur Ω et vérifiant les conditions

$$f(S\Lambda) = R(S) f(\Lambda) \tag{9}$$

(10) pour tout $\vec{v}$ dans $\mathcal{H}$, la fonction $\Lambda \rightarrow (f(\Lambda), \vec{v})_{\mathcal{H}}$ est mesurable pour $d\Lambda$, mesure de Haar sur G.

Explicitement, U^L agit par

(11) $$U^L(a, \Lambda) f(\Delta) = \langle a, M \rangle \quad f(\Delta\Lambda)$$

où

(12) $$\Delta, \Lambda \in G; \qquad M = \Delta^{-1}Q_0.$$

Nous ne considérerons ici que les représentations liées aux classes d'intransitivité suivantes :

Ω_m^+, hyperboloïde d'équation $p_0^2 - \vec{p}^2 = m^2$, $p_0 > 0$;

C^+, cône d'équation $p_0^2 - \vec{p}^2 = 0$, $p_0 > 0$.

a) Représentations liées à Ω_m^+.

Choisissons pour Q_0 le point $(m, 0)$, sommet de l'hyperboloïde Ω_m^+ ; ainsi le groupe $\mathcal{G}$ est le groupe des rotations, $\mathcal{R}_3$, dont les représentations unitaires irréductibles D_l, l entier ou demi-entier, sont bien connues. Nous les réaliserons ici dans l'espace $\mathcal{H} = K_{2l}$ des polynômes $P_{2l}(X)$, de degré $2l$, définis par

(13) $$P_{2l}(X) = \sum_{n=-l}^{+l} a_n \frac{X^{l-n}}{\sqrt{(l+n)!\,(l-n)!}}$$

Un point de Ω_m^+ peut être repéré par ses coordonnées p_i, $i = 1, 2, 3$, ou par les coordonnées sphériques r, θ, ψ correspondantes; la mesure invariante $d\mu$ s'écrit alors

(14) $$d\mu = (r^2 \sin \theta dr d\theta d\psi)/p_0.$$

Par induction de D_l à G, on obtient finalement les représentations $U_{m,l}^+$ de $\tilde{G}$ caractérisées par un nombre m positif et un nombre l entier ou demi-entier. Elles décrivent des particules de masse m et de spin l.

b) Représentations liées à C^+.

Choisissons pour Q_0 le point $\left(\frac{1}{2}, 0, 0, -\frac{1}{2}\right)$, par exemple; il lui correspond

(15) $$\underline{Q}_0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Le groupe $\mathcal{S}$ des matrices S vérifiant

$$\underline{Q}_0 = S\underline{Q}_0 S^\dagger \tag{16}$$

est identique au groupe H formé des matrices

$$(z, e^{i\varphi}) \equiv \begin{vmatrix} e^{i\varphi} & ze^{-i\varphi} \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{vmatrix} \tag{17}$$

Les représentations unitaires irréductibles R de H se divisent en deux classes (cf. Appendice I) :

— Les représentations R de dimension finie s'écrivent

$$R(z, e^{i\varphi}) \equiv W_{2l}(z, e^{i\varphi}) = e^{-2il\varphi} \tag{18}$$

avec l entier ou demi-entier.

— Les représentations R de dimension infinie se réalisent dans l'espace $\mathcal{H} = L^2_{d\Theta}(C_\rho, \mathbf{C})$, C_ρ étant un cercle quelconque du plan xy, de rayon ρ et dont les points sont repérés par l'angle Θ (compté à partir du point $(\rho, 0)$); elles s'écrivent

$$E_{\rho\varepsilon}(z, e^{i\varphi})F(\Theta) = e^{i\rho\mathcal{J}(ze^{-i\Theta})}e^{-i\varepsilon\varphi}F(\Theta - 2\varphi), \qquad \varepsilon = 0, 1. \tag{19}$$

La mesure invariante $d\mu$ sur C^+ est donnée par (14) avec $p_0 = r$.

Par induction de W_{2l} à G, on obtient les représentations L_l^+ décrivant des particules de masse nulle et de spin l. Par induction de $E_{\rho,\varepsilon}$ à G, on obtient les représentations $\Lambda_{\rho,\varepsilon}$ qui n'ont pas encore reçu d'interprétation physique.

II. — EXPRESSION GLOBALE DES REPRÉSENTATIONS DANS LA BASE DE MOMENT ANGULAIRE

Nous voulons une base dans laquelle le carré du moment angulaire et une de ses composantes soient diagonaux. Nous allons donc chercher la décomposition en représentations irréductibles de la restriction $U^L/\mathcal{R}_3$ et nous serons ramenés à un problème connu : trouver une base canonique pour exprimer D_j.

Effectuons la réduction de U^L à $\mathcal{E}_3$. Les classes d'intransitivité de $\mathcal{E}_3$ dans Ω sont les sphères S_r de rayon r centrées sur l'axe des p_0. Soit Q_r le point de S_r de coordonnées $(p_0, 0, 0, -r)$; il s'obtient à partir de Q_0 par une transformation Λ_r :

$$Q_r = \Lambda_r^{-1}Q_0 \tag{1}$$

Nous prendrons

(2) $$\Lambda_r = \begin{vmatrix} \lambda_r & 0 \\ 0 & \lambda_r^{-1} \end{vmatrix}$$

Le groupe stationnaire de Q_r dans $\mathcal{E}_3$ est $\mathcal{T}_3\mathcal{R}_\varphi$, identique à $\mathcal{E}_3 \cap \Lambda_r^{-1}\mathcal{T}_4\mathcal{R}_3\Lambda_r$, $\mathcal{R}_\varphi$ étant le groupe des rotations autour du troisième axe. Définissons une représentation de $\mathcal{T}_3\mathcal{R}_\varphi$ par

(3) $$L^r(\vec{a}, A_\varphi) = L[\Lambda_r(a, A_\varphi)\Lambda_r^{-1}]$$

où

$$A_\varphi = \begin{vmatrix} e^{-i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi/2} \end{vmatrix}$$

Utilisant (I.5) et (I.8), nous pouvons écrire

(4) $$L^r(\vec{a}, A_\varphi) = \langle \Lambda_r' a, Q_0 \rangle R(\Lambda_r A_\varphi \Lambda_r^{-1}) = \langle a, Q_r \rangle R(A_\varphi)$$

puisque Λ_r a été choisie diagonale.

Induisant cette représentation à $\mathcal{E}_3$, nous obtenons la représentation $U^{S_r} \equiv {}_{\mathcal{E}_3}U^{L_r}$; elle se réalise dans l'espace

$$\mathcal{H}_r \equiv L^2_{d\mu_r}(\mathcal{R}_3, \mathcal{H}),$$
$$d\mu_r = \sin\theta d\theta d\varphi,$$

des fonctions F_r astreintes de plus aux conditions

(5) $$F_r(A_\varphi Z) = R(A_\varphi)F_r(Z), \qquad \forall A_\varphi \in \mathcal{R}_\varphi \quad \text{et} \quad Z \in \mathcal{R}_3$$

(6) pour tout $v \in \mathcal{H}$, la fonction $Z \to (F_r(Z), v)_{\mathcal{H}}$

est mesurable pour dZ, mesure de Haar sur $\mathcal{R}_3$.

Et on a

(7) $$U^{S_r}(\vec{a}, A)F_r(Z) = \langle \vec{a}, Z^{-1}Q_r \rangle {}_{\mathcal{R}_3}U^R F_r(Z)$$

(8) $$= \langle \vec{a}, M \rangle F_r(ZA)$$

si

$$M = Z^{-1}Q_r.$$

D'après le théorème de désintégration de la mesure, il existe une mesure $d\nu(r)$ sur l'espace des doubles classes $\{ S_r \}$ telle que

(9) $$\int g d\mu = \int d\nu(r) \int g d\mu_r$$

g étant une fonction arbitraire sur $\mathcal{R}_3$, sommable pour $d\mu$. On en déduit, dans tous les cas

(10) $$d\nu(r) = \frac{r^2}{p_0}\, dr$$

Alors le théorème d'induction-réduction affirme que la restriction de U^L à $\mathcal{E}_3$ se décompose suivant

(11) $$U^L/\mathcal{E}_3 = \int_{r \geqslant 0}^{\oplus} U^{S_r} \frac{r^2 dr}{p_0}$$

si $U^L/\mathcal{E}_3$ est réalisée dans l'espace $\int_{r \geqslant 0}^{\oplus} \mathcal{H}_r d\nu(r)$ des fonctions F_r, $r \geqslant 0$, de module carré intégrable pour $d\nu(r)$.

Pour la réduction de U^{S_r}, c'est-à-dire d'après (7) de ${}_{\mathcal{R}_3}U^R$, nous devons considérer séparément le cas de chaque classe de représentations.

a) Représentations liées à Ω_m^+.

Dans ce cas, (1) et (2) donnent

(12) $$\lambda_r^2 = \frac{p_0 - r}{m} = \frac{m}{p_0 + r}$$

La décomposition de $R(A_\varphi) = D_l(A_\varphi)$ est immédiate :

(13) $$D_l(A_\varphi) = \sum_{n=-l}^{+l} \oplus V_n(A_\varphi)$$

où V_n est la représentation

(14) $$V_n : A_\varphi \to e^{in\varphi}$$

Nous pouvons en déduire [8]

(15) $${}_{\mathcal{R}_3}U^{D_l} = \sum_{n=-l}^{+l} \oplus\, {}_{\mathcal{R}_3}U^{V_n}$$

et la décomposition correspondante de l'espace de Hilbert

(16) $$\mathcal{H}_r = \sum_{n=-l}^{+l} \oplus\, \mathcal{H}_{r,n}$$

Les éléments de $\mathcal{H}_r$ s'écrivent ici

$$F_r^{l,m}(Z) = \sum_{n=-l}^{+l} a_{r,n}(Z) \frac{X^{l-n}}{\sqrt{(l+n)!}\sqrt{(l-n)!}} \tag{17}$$

et la condition (5) devient

$$a_{r,n}(A_\varphi Z) = e^{in\varphi} a_{r,n}(Z) \qquad \forall Z \in \mathcal{R}_3. \tag{18}$$

b) Représentations liées à C^+.

Dans ce cas (1) et (2) donnent

$$\lambda_r^2 = \frac{1}{2r} \tag{19}$$

— Représentations L_l^+.

Ici $R(A_\varphi) = W_{2l}(A_\varphi) = V_l(A_\varphi)$ est irréductible. Et les fonctions $F_r^{l,0}$ de $\mathcal{H}_r$ sont à valeurs complexes.

— Représentations $\Lambda_{\rho,\varepsilon}$.

Dans ce cas,

$$R(A_\varphi) = E_{\rho,\,\varepsilon}(0, e^{-i\varphi/2}) \tag{20}$$

$$\mathcal{H} = L^2_{d\Theta}(C_\rho, \mathbf{C}) \tag{21}$$

Toute fonction F de $\mathcal{H}$ admet la décomposition

$$F(\Theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{in'\Theta}, \; n' \text{ entier}, \; n = n' + \frac{\varepsilon}{2}, \tag{22}$$

d'où

$$E_{\rho,\varepsilon}(0, e^{-i\varphi/2}) F(\Theta) = e^{i\varepsilon\varphi/2} F(\Theta + \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{i\varepsilon\varphi/2} e^{in'(\Theta+\varphi)} \tag{23}$$

soit

$$E_{\rho,\varepsilon}(0, e^{-i\varphi/2}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \oplus V_n(\varphi) \tag{24}$$

Nous pouvons encore en déduire

(25) $$\mathcal{R}_3 U^{R} \equiv \mathcal{R}_3 U^{E_{\rho,\varepsilon}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \oplus \mathcal{R}_3 U^{V_n}$$

et

(26) $$\mathcal{H}_r = \sum_{n+-\infty}^{+\infty} \oplus \mathcal{H}_{r,n}$$

Les éléments de $\mathcal{H}_r$ s'écrivent

(27) $$F_r^{0,\varepsilon}(Z) = \sum_{n+-\infty}^{+\infty} a_{r,n}(Z) e^{in'\Theta}$$

avec la condition

(28) $$a_{r,n}(A_\varphi Z) = e^{in\varphi} a_{r,n}(Z)$$

Dans tous les cas nous avons à étudier la représentation $\mathcal{R}_3 U^{V_n}$. Cette représentation étant unitaire, l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_{r,n}$ se décompose en une somme directe de sous-espaces orthogonaux $\mathcal{H}_{r,n}^j$, de telle façon que l'on ait

(29) $$\mathcal{R}_3 U^{V_n} \equiv U_n = \sum_j \oplus U_n^j$$

avec U_n^j équivalente à D_j. Il existe donc une base canonique de $\mathcal{H}_{r,n}^j$ composée de fonctions $G_{n,k}^j$ telles que l'on ait, pour j fixé

(30) $$U_n(A) G_{nk}^j(Z) = \sum_{s=-j}^{+j} G_{ns}^j(Z) M_{sk}^j(A)$$

Les M_{sk}^j sont les éléments de matrice de la représentation D_j et s'écrivent [3], pour une rotation définie par les angles d'Euler (ψ, θ, φ) (la définition utilisée est celle de H. Goldstein, « Classical Mechanics »)

(31) $$M_{sk}^j(A) = m_{sk}^j(\theta) e^{ik\psi} e^{is\varphi}$$

(32) $$m_{sk}^j(\theta) = (-1)^{j+k} \left[\frac{(j+k)!\,(j-k)!}{(j+s)!\,(j-s)!}\right]^{1/2} \sum_{\alpha=\max(0,-k-s)}^{\min(j-k,\,j-s)} (-1)^\alpha$$
$$\times\, C_{j-s}^{\alpha} C_{j+s}^{j-k-\alpha} \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{k+s+2\alpha} \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{2j-k-s-2\alpha}$$

La définition (30) de G^j_{nk} conduit [3] aux relations

$$\mathcal{H}_{r,n} = \sum_{j \geqslant n} \oplus \mathcal{H}^j_{r,n} \tag{33}$$

$$G^j_{nk} = \sqrt{2j+1}M^j_{nk}, \quad -j \leqslant k \leqslant j, j \geqslant |n|, \quad -l \leqslant n \leqslant l, \tag{34}$$

à une constante de module 1 près.

D'après la construction précédente, l'ensemble des G^j_{nk} constitue une base de moment angulaire pour $\mathcal{H}_{r,n}$ ainsi que pour $\mathcal{H}_r = \sum_{-l}^{+l} \oplus \mathcal{H}_{r,n}$. Une fonction F_r se développera, selon les cas considérés :

$$F^{l,m}_r(Z) = \sum_{n=-l}^{+l} \sum_{j,k} a^j_{n,k}(r) G^j_{nk}(Z) \frac{X^{l-n}}{\sqrt{(l+n)!\,(l-n)!}} \tag{35}$$

$$F^{l,0}_r(Z) = \sum_{j,k} a^j_{l,k}(r) G^j_{lk}(Z) \tag{36}$$

$$F^{0,\varepsilon}_r(Z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{j,k} a^j_{n,k}(r) G^j_{nk}(Z) e^{in'\Theta}, \qquad n' = n - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{37}$$

Nous avons ainsi trouvé une base de moment angulaire pour l'espace $\int^{\oplus}_{r \geqslant 0} \mathcal{H}(r) d\nu(r)$ isomorphe à l'espace $\mathfrak{I}$. Pour expliciter cet isomorphisme, remarquons qu'un élément quelconque Δ de G peut se décomposer suivant

$$\Delta = V \Lambda_r Z \tag{38}$$

où V est une matrice unitaire, Λ_r est définie par (II.2) et Z est une matrice unitaire à laquelle correspond une rotation d'angles d'Euler (ψ, θ, φ) avec φ indépendant de Δ (nous prendrons désormais $\varphi = 0$).

Définissons alors la fonction F_r par

$$F_r(Z) = R(V)^{-1} f(\Delta) \tag{39}$$

c'est-à-dire, d'après (38) et (I.9), par

$$F_r(Z) = f(\Lambda_r Z). \tag{40}$$

Cette fonction F_r appartient à $\mathcal{H}_r$ car

$$\begin{aligned} F_r(A_\varphi Z) &= f(\Lambda_r A_\varphi Z) \\ &= f(A_\varphi \Lambda_r Z), \end{aligned}$$

Λ_r étant diagonale. Et finalement

$$F_r(A_\varphi Z) = R(A_\varphi) f(\Lambda_r Z) \equiv R(A_\varphi) F_r(Z). \tag{41}$$

De plus, la transformation (39) est bien une isométrie car elle conserve la norme.

Dans l'espace $\int_{r \geqslant 0}^{\oplus} \mathcal{H}_r d\nu(r)$, la représentation $\tilde{U}^L$ équivalente à U^L est définie par

$$\begin{aligned} \tilde{U}^L(a, \Lambda) F_r(Z) &= R(V)^{-1} U^L(a, \Lambda) R(V) F_r(Z) \\ &= R(V)^{-1} U^L(a, \Lambda) f(\Delta) \end{aligned} \tag{42}$$

Elle s'écrit donc, d'après (I.11)

$$\tilde{U}^L(a, \Lambda) F_r(Z) = \langle a, M \rangle R(V)^{-1} f(\Delta\Lambda) \tag{43}$$

c'est-à-dire

$$\tilde{U}^L(a, \Lambda) F_r(Z) = \langle a, M \rangle f(\Lambda_r Z \Lambda) \tag{44}$$

Le point M est donné par (I.12) qui s'écrit

$$M = Z^{-1} Q_r = (\Lambda_r Z)^{-1} Q_0 \tag{45}$$

et M′, transformé de M par Λ, s'obtient de la même façon à partir de Q_0 :

$$M' \equiv \Lambda^{-1} M = Z'^{-1} Q_{r'} = (\Lambda_{r'} Z')^{-1} Q_0 \tag{46}$$

Nous en déduisons donc

$$\Lambda_r Z \Lambda = U \Lambda_{r'} Z' \tag{47}$$

avec U dans $\mathcal{S}$.

Alors,

$$f(\Lambda_r Z \Lambda) = R(U) f(\Lambda_{r'} Z') = R(U) F_{r'}(Z') \tag{48}$$

et (42) s'écrit

$$\tilde{U}(a, \Lambda) F_r(Z) = \langle a, M \rangle R(U) F_{r'}(Z') \tag{49}$$

III. — EXPRESSION DES OPÉRATEURS INFINITÉSIMAUX

Les groupes à un paramètre définissant $\tilde{G}$ se composent de quatre translations, de trois rotations d'espace $l_i(t)$ et de trois rotations de Lorentz pures $j_i(t)$ qu'on peut choisir telles que

$$(1)\quad l_1(t) = \begin{vmatrix} \cos\frac{t}{2} & i\sin\frac{t}{2} \\ i\sin\frac{t}{2} & \cos\frac{t}{2} \end{vmatrix}, \quad l_2(t) = \begin{vmatrix} \cos\frac{t}{2} & -\sin\frac{t}{2} \\ \sin\frac{t}{2} & \cos\frac{t}{2} \end{vmatrix}, \quad l_3(t) = \begin{vmatrix} e^{i\frac{t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{t}{2}} \end{vmatrix}$$

$$(2)\quad j_1(t) = \begin{vmatrix} \mathrm{ch}\frac{t}{2} & \mathrm{sh}\frac{t}{2} \\ \mathrm{sh}\frac{t}{2} & \mathrm{ch}\frac{t}{2} \end{vmatrix}, \quad j_2(t) = \begin{vmatrix} \mathrm{ch}\frac{t}{2} & i\,\mathrm{sh}\frac{t}{2} \\ -i\,\mathrm{sh}\frac{t}{2} & \mathrm{ch}\frac{t}{2} \end{vmatrix}, \quad j_3(t) = \begin{vmatrix} e^{\frac{t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{t}{2}} \end{vmatrix}$$

Il leur correspond respectivement dans la représentation U^L les opérateurs $A(t) \equiv \{ P_\mu(t), L_i(t), J_i(t) \}$. En général les fonctions $A(t)f(\Delta)$ ne sont pas différentiables, à cause de la présence des facteurs $a^j_{nk}(r)$. Mais en se restreignant à l'espace $\mathcal{K}$ des fonctions a^j_{nk} indéfiniment dérivables et à décroissance rapide, on obtient un sous-espace $\mathfrak{D}$ dense dans $\mathcal{H}_r$ et stable par A [1]. Pour F_r dans $\mathfrak{D}$, la limite suivante existe

$$(3)\qquad \lim_{t\to 0} \frac{A(t)F_r(Z) - F_r(Z)}{t}$$

et les opérateurs infinitésimaux peuvent tous être définis par une relation de la forme

$$(4)\qquad AF_r(Z) = \frac{\partial}{\partial t}[A(t)F_r(Z)]|_{t=0}$$

Nous allons écrire l'action des opérateurs infinitésimaux dans $\mathcal{K}$ (cf. Appendice III pour la détermination d'une base).

a) Opérateurs de rotation d'espace.

Les opérateurs liés à $\mathcal{R}_3$ ont la même forme dans toutes les représentations considérées ici puisqu'ils se calculent à l'aide de (II.30).

---

[1] Le domaine $\mathfrak{D}$ est domaine d'existence pour tous les opérateurs de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie de G.

Ainsi, par exemple

$$\text{(5)} \qquad L_3 a^j_{nk}(r) G^j_{nk}(Z) = \frac{\partial}{\partial t}[L_3(t) a^j_{nk}(r) G^j_{nk}(Z)]_{|t=0}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left[\sum_{s=-j}^{+j} a^j_{nk}(r) G^j_{ns}(Z) M^j_{sk}(l_3)\right]_{|t=0}$$

$$\text{(6)} \qquad L_3 \sum_{n,j,k} a^j_{nk}(r) G^j_{nk}(Z) = -i \sum_{n,j,k} k a^j_{nk}(r) G^j_{nk}(Z)$$

d'après (II.32). En faisant le produit scalaire avec G^j_{nk}, on a finalement

$$\text{(7)} \qquad L_3 a^j_{nk}(r) = -ik a^j_{nk}(r)$$

Nous considérerons désormais les opérateurs L'_i définis par

$$\text{(8)} \qquad \begin{cases} L'_3 = iL_3 \\ L'_\pm \equiv L'_2 \pm iL'_1 = iL_1 \mp L_2 \end{cases}$$

Alors

$$\text{(9)} \qquad L'_3 a^j_{nk}(r) = k a^j_{nk}(r)$$

$$\text{(10)} \qquad L'_\pm a^j_{nk}(r) = \sqrt{(j \mp k + 1)(j \pm k)}\, a^j_{n,k\mp 1}(r)$$

b) Opérateurs de translation.

D'après la définition (4) appliquée à (II.49), P_μ est donné par

$$\text{(11)} \qquad P_\mu a^j_{nk}(r) G^j_{nk}(Z) = p_\mu a^j_{nk}(r) G^j_{nk}(Z)$$

p_μ étant les coordonnées du point $M = (\Lambda_r Z)^{-1} Q_0$ de Ω. Les expressions de Q_0 et Λ_r donnent

$$\text{(12)} \qquad \begin{cases} p_1 = -r \sin\theta \sin\psi \\ p_2 = r \sin\theta \cos\psi \\ p_3 = -r \cos\theta \end{cases}$$

Ainsi

$$\text{(13)} \qquad P'_3 a^j_{nk} G^j_{nk} \equiv -iP_3 a^j_{nk} G^j_{nk} = -r\cos\theta\, a^j_{nk} G^j_{nk}$$

$$\text{(14)} \qquad (P'_2 \pm iP'_1) a^j_{nk} G^j_{nk} \equiv -i(P_2 \pm iP_1) a^j_{nk} G^j_{nk} = r \sin\theta\, e^{\mp i\psi} a^j_{nk} G^j_{nk}$$

Il reste à développer les seconds membres sur la base de G^j_{nk} ce qui est facile grâce aux relations de récurrence [4] (cf. Appendice II). Finalement, on obtient pour l'action de $\vec{P}'$ dans $\mathcal{K}$

$$(15)\quad P'_3 a^j_{nk}(r) = -r(\beta \overset{k}{C}_{21} \overset{-n}{C}_{21} a^{j-1}_{n,k}(r) - \overset{k}{C}_{22} \overset{-n}{C}_{22} a^j_{n,k}(r) + \gamma \overset{k}{C}_{23} \overset{-n}{C}_{23} a^{j+1}_{n,k}(r))$$

$$(16)\quad (P'_2 \pm iP'_1) a^j_{nk}(r) = \mp r\sqrt{2}(\beta \overset{\pm k}{C}_{11} \overset{-n}{C}_{21} a^{j-1}_{n,k\pm 1}(r) \mp \overset{\pm k}{C}_{12} \overset{-n}{C}_{22} a^j_{n,k\pm 1}(r) + \gamma \overset{\pm k}{C}_{13} \overset{-n}{C}_{23} a^{j+1}_{n,k\pm 1}(r))$$

les coefficients β, γ et $\overset{k}{C}_{i,j}$ étant définis dans l'Appendice II.

On vérifie que l'hélicité est diagonale par rapport aux variables ψ, θ ; en effet,

$$(17)\quad P'.L' a^j_{nk}(r) G^j_{nk}(Z) \equiv \sum_{i=1}^{3} P'^i L'_i a^j_{nk}(r) G^j_{nk}(Z)$$
$$= \left[-\frac{1}{2}(P'_2 - iP'_1)(L'_2 + iL'_1) - \frac{1}{2}(P'_2 + iP'_1)(L'_2 - iL'_1) - P'_3 L'_3\right] a^j_{nk}(r) \times G^j_{nk}(Z)$$

ou, utilisant (9), (10), (13), (14) et une relation de récurrence [4]

$$(18)\quad P'.L' a^j_{nk}(r) G^j_{nk}(Z) = +nr a^j_{nk}(r) G^j_{nk}(Z)$$

c) Opérateurs de rotation de Lorentz pure.

Ici, il faut d'abord calculer les coordonnées p' du point $j_i^{-1}(t)M$ à l'aide de (2). On en déduit l'expression de $\Lambda_{r'}Z'$, puis celle de U par (II.47) :

$$(19)\quad U = \Lambda_r Z j_i(t)(\Lambda_{r'}Z')^{-1}$$

Mais il suffit de calculer

$$(20)\quad \dot{U} \equiv \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \Lambda_r Z \frac{\partial}{\partial t}[j_i(t)]_{|t=0}(\Lambda_r Z)^{-1} + \Lambda_r Z \frac{\partial}{\partial t}(\Lambda_{r'}Z')^{-1}{}_{|t=0}$$

Appliquant (II.49) aux différentes fonctions F_r et utilisant les relations de récurrence [4], on obtient finalement l'expression explicite de J_i.

1° *Représentations* $U^{+}_{m,l}$.

$$
\begin{aligned}
(21)\quad (J'_1 \mp iJ'_2)a^j_{nk}(r) &= -(iJ_1 \pm J_2)a^j_{nk}(r)\\
&= \pm \frac{ip_0}{r}\alpha_{-n}\Big[\beta \overset{\pm k}{C}_{11}\overset{-n}{C}_{31}a^{j-1}_{n,k\pm1} \mp \overset{\pm k}{C}_{12}\overset{-n}{C}_{32}a^{j}_{n,k\pm1} + \gamma \overset{\pm k}{C}_{13}\overset{-n}{C}_{33}a^{j+1}_{n,k\pm1}\Big]\\
&\pm \frac{ip_0}{r}\alpha_{n}\Big[\beta \overset{\pm k}{C}_{11}\overset{-n}{C}_{11}a^{j-1}_{n,k\pm1} \mp \overset{\pm k}{C}_{12}\overset{-n}{C}_{12}a^{j}_{n,k\pm1} + \gamma \overset{\pm k}{C}_{13}\overset{-n}{C}_{13}a^{j+1}_{n,k\pm1}\Big]\\
&\mp ip_0\sqrt{2}\frac{\partial}{\partial r}\Big[\beta \overset{\pm k}{C}_{11}\overset{-n}{C}_{21}a^{j-1}_{n,k\pm1} \mp \overset{\pm k}{C}_{12}\overset{-n}{C}_{22}a^{j}_{n,k\pm1} + \gamma \overset{\pm k}{C}_{13}\overset{-n}{C}_{23}a^{j+1}_{n,k\pm1}\Big]\\
\mp\sqrt{(l-n+1)(l+n)}\,\frac{im}{r}&\Big[\beta \overset{\pm k}{C}_{11}\overset{-n}{C}_{11}a^{j-1}_{n-1,k\pm1} \mp \overset{\pm k}{C}_{12}\overset{-n}{C}_{12}a^{j}_{n-1,k\pm1} + \gamma \overset{\pm k}{C}_{13}\overset{-n}{C}_{13}a^{j+1}_{n-1,k\pm1}\Big]\\
\mp\sqrt{(l+n+1)(l-n)}\,\frac{im}{r}&\Big[\beta \overset{\pm k}{C}_{11}\overset{-n}{C}_{31}a^{j-1}_{n+1,k\pm1} \mp \overset{\pm k}{C}_{12}\overset{-n}{C}_{32}a^{j}_{n+1,k\pm1} + \gamma \overset{\pm k}{C}_{13}\overset{-n}{C}_{33}a^{j-1}_{n+1,k\pm1}\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(22)\quad J'_3 a^j_{nk} &\equiv -iJ_3 a^j_{nk}\\
&= -i\frac{p_0}{2r}\alpha_{-n}\sqrt{2}\Big[\beta \overset{k}{C}_{21}\overset{-n}{C}_{31}a^{j-1}_{n,k} - \overset{k}{C}_{22}\overset{-n}{C}_{32}a^{j}_{n,k} + \gamma \overset{k}{C}_{23}\overset{-n}{C}_{33}a^{j+1}_{n,k}\Big]\\
&\quad -i\frac{p_0}{2r}\alpha_{n}\sqrt{2}\Big[\beta \overset{k}{C}_{21}\overset{-n}{C}_{11}a^{j-1}_{n,k} - \overset{k}{C}_{22}\overset{-n}{C}_{12}a^{j}_{n,k} + \gamma \overset{k}{C}_{23}\overset{-n}{C}_{13}a^{j+1}_{n,k}\Big]\\
&\quad + ip_0\frac{\partial}{\partial r}\Big[\beta \overset{k}{C}_{21}\overset{-n}{C}_{21}a^{j-1}_{n,k} - \overset{k}{C}_{22}\overset{-n}{C}_{22}a^{j}_{n,k} + \gamma \overset{k}{C}_{23}\overset{-n}{C}_{23}a^{j+1}_{n,k}\Big]\\
+i\sqrt{(l+n)(l-n+1)}\,\frac{m}{2r}&\sqrt{2}\Big[\beta \overset{l}{C}_{21}\overset{-n}{C}_{11}a^{j-1}_{n-1,k} - \overset{k}{C}_{22}\overset{-n}{C}_{12}a^{j}_{n-1,k} + \gamma \overset{k}{C}_{23}\overset{-n}{C}_{13}a^{j+1}_{n-1,k}\Big]\\
+i\sqrt{(l-n)(l+n+1)}\,\frac{m}{2r}&\sqrt{2}\Big[\beta \overset{k}{C}_{21}\overset{-n}{C}_{31}a^{j-1}_{n+1,k} - \overset{k}{C}_{22}\overset{-n}{C}_{32}a^{j}_{n+1,k} + \gamma \overset{k}{C}_{23}\overset{-n}{C}_{33}a^{j+1}_{n+1,k}\Big]
\end{aligned}
$$

2° *Représentations* L^{+}_{l}.

On obtient les mêmes opérateurs qu'en (21), (22) avec $m = 0$ et $|n| = l$, le signe de n dépendant de la représentation considérée.

3° *Représentations* $\Lambda_{\rho,\varepsilon}$.

Nous avons déjà donné ces résultats dans [*15*].

$$
\begin{aligned}
(23)\quad (J'_1 \mp iJ'_2)a^j_{nk} &\equiv -i(J_1 \pm J_2)a^j_{nk}\\
&= \pm i\alpha_{-n}\Big[\beta \overset{\pm k}{C}_{11}\overset{-n}{C}_{31}a^{j-1}_{n,k\pm1} \mp \overset{\pm k}{C}_{12}\overset{-n}{C}_{32}a^{j}_{n,k\pm1} + \gamma \overset{\pm k}{C}_{13}\overset{-n}{C}_{33}a^{j+1}_{n,k\pm1}\Big]\\
&\pm i\alpha_{n}\Big[\beta \overset{\pm k}{C}_{11}\overset{-n}{C}_{11}a^{j-1}_{n,k\pm1} \mp \overset{\pm k}{C}_{12}\overset{-n}{C}_{12}a^{j}_{n,k\pm1} + \gamma \overset{\pm k}{C}_{13}\overset{-n}{C}_{13}a^{j+1}_{n,k\pm1}\Big]
\end{aligned}
$$

$$\mp ir\sqrt{2}\,\frac{\partial}{\partial r}\,[\beta \overset{\pm k}{C}_{11}\overset{-n}{C}_{21}a^{j-1}_{n,k\pm 1} \mp \overset{\pm k}{C}_{12}\overset{-n}{C}_{22}a^{j}_{n,k\pm 1} + \gamma \overset{\pm k}{C}_{13}\overset{-n}{C}_{23}a^{j+1}_{n,k\pm 1}]$$

$$\mp \frac{i\rho}{2r}\,[\beta \overset{\pm k}{C}_{11}\overset{-n}{C}_{11}a^{j-1}_{n-1,k\pm 1} \mp \overset{\pm k}{C}_{12}\overset{-n}{C}_{12}a^{j}_{n-1,k\pm 1} + \gamma \overset{\pm k}{C}_{13}\overset{-n}{C}_{13}a^{j+1}_{n-1,k\pm 1}]$$

$$\mp \frac{i\rho}{2r}\,[\beta \overset{\pm k}{C}_{11}\overset{-n}{C}_{31}a^{j-1}_{n+1,k\pm 1} \mp \overset{\pm k}{C}_{12}\overset{-n}{C}_{32}a^{j}_{n+1,k\pm 1} + \gamma \overset{\pm k}{C}_{13}\overset{-n}{C}_{33}a^{j+1}_{n+1,k\pm 1}]$$

$$(24)\quad J'_3 a^j_{nk} \equiv -\,iJ_3 a^j_{nk}$$

$$= -\frac{i}{2}\alpha_{-n}\sqrt{2}[\beta \overset{k}{C}_{21}\overset{-n}{C}_{31}a^{j-1}_{n,k} - \overset{k}{C}_{22}\overset{-n}{C}_{32}a^{j}_{nk} + \gamma \overset{k}{C}_{23}\overset{-n}{C}_{33}a^{j+1}_{n,k}]$$

$$-\frac{i}{2}\alpha_{n}\sqrt{2}[\beta \overset{k}{C}_{21}\overset{-n}{C}_{11}a^{j-1}_{n,k} - \overset{k}{C}_{22}\overset{-n}{C}_{12}a^{j}_{nk} + \gamma \overset{k}{C}_{23}\overset{-n}{C}_{13}a^{j+1}_{n,k}]$$

$$+\,ir\frac{\partial}{\partial r}\,[\beta \overset{k}{C}_{21}\overset{-n}{C}_{21}a^{j-1}_{n,k} - \overset{k}{C}_{22}\overset{-n}{C}_{22}a^{j}_{n,k} + \gamma \overset{k}{C}_{23}\overset{-n}{C}_{23}a^{j+1}_{n,k}]$$

$$+\frac{i\rho}{4r}\sqrt{2}[\beta \overset{k}{C}_{21}\overset{-n}{C}_{11}a^{j-1}_{n-1,k} - \overset{k}{C}_{22}\overset{-n}{C}_{12}a^{j}_{n-1,k} + \gamma \overset{k}{C}_{23}\overset{-n}{C}_{13}a^{j+1}_{n-1,k}]$$

$$+\frac{i\rho}{4r}\sqrt{2}[\beta \overset{k}{C}_{21}\overset{-n}{C}_{31}a^{j-1}_{n+1,k} - \overset{k}{C}_{22}\overset{-n}{C}_{32}a^{j}_{n+1,k} + \gamma \overset{k}{C}_{23}\overset{-n}{C}_{33}a^{j+1}_{n+1,k}]$$

Je tiens à remercier M. G. Rideau qui m'a suggéré ce travail et dont les conseils m'ont été précieux tout au long de sa réalisation.

APPENDICE I

REPRÉSENTATIONS UNITAIRES IRRÉDUCTIBLES DE H [8].

On remarque que tout élément $(z, e^{i\varphi})$ de H se décompose univoquement suivant

$$(z, e^{i\varphi}) = (z, 1)(0, e^{i\varphi}) \tag{1}$$

Les éléments $(z, 1)$ forment un sous-groupe H′ isomorphe au plan complexe **C**; les éléments $(0, e^{i\varphi})$ appartiennent au groupe $\mathcal{R}_{2\varphi}$ qui opère sur H′ par

$$(z, 1) \to (0, e^{-i\varphi})(z, 1)(0, e^{i\varphi}) = (ze^{-2i\varphi}, 1) \tag{2}$$

H est donc le produit semi-direct de H′ et de $\mathcal{R}_{2\varphi}$ et on peut appliquer les résultats de Mackey. Tout caractère sur H′ est de la forme

$$z \to e^{i\,\mathfrak{J}(z\hat{z})} \tag{3}$$

$\hat{z}$ étant un nombre complexe. Le dual $\hat{H}'$ de H′, ensemble des $\hat{z}$ s'identifie encore à **C**. Et comme

$$\langle ze^{-2i\varphi}, \hat{z} \rangle \equiv e^{i\,\mathfrak{J}(ze^{2i\varphi}\hat{z})} = \langle z, \hat{z}e^{-2i\varphi} \rangle \tag{4}$$

$\mathcal{R}_{2\varphi}$ agit dans $\hat{H}'$ par

$$\hat{z} \to \hat{z}e^{-2i\varphi} \tag{5}$$

Les classes d'intransitivité de $\hat{H}' \approx \mathbf{C}$ suivant $\mathcal{R}_{2\varphi}$ sont les cercles C_ρ de centre 0 et de rayon ρ. Choisissons un point $Q_\rho = (\rho, 0)$ dans chaque classe et soit $\mathcal{S}'$ son stabilisateur. Toute représentation unitaire irréductible de H sera induite par la représentation

$$(z, S') \to \langle z, Q_\rho \rangle T(S') \tag{6}$$

de $H'\mathcal{S}'$, T étant une représentation unitaire irréductible de $\mathcal{S}'$.

Si $\rho = 0$, C_ρ se réduit au point 0; $\mathcal{S}'$ est $\mathcal{R}_{2\varphi}$ tout entier et T est donnée par

$$T_{2l} : A_{-2\varphi} \in \mathcal{R}_{2\varphi} \to e^{-2il\varphi} \tag{7}$$

Par induction à H, nous obtenons bien les représentations $W_{2l}(z, e^{i\varphi})$ données en (I.18).

Si $\rho > 0$, le groupe stabilisateur de Q_ρ est $\mathcal{R}_{2\eta\pi}$, $\eta = 0$ ou 1. L'expression (7) de T se réduit à

$$T_\varepsilon : A_{-2\eta\pi} \to e^{-i\varepsilon\eta\pi} \tag{8}$$

avec $\varepsilon = 0$ ou 1.

La représentation induite à $\mathcal{R}_{2\varphi}$ par T_ε se réalisera dans $L^2_\sigma(C_\rho, \mathbf{C})$ puisque $\mathcal{R}_{2\varphi}/\mathcal{S}'$ est isomorphe à C_ρ. Un point quelconque $\hat{z}$ de C_ρ est repéré par l'angle Θ tel que

$$\hat{z} = Q_\rho e^{-i\Theta} \tag{9}$$

Alors la mesure invariante sur le cercle s'écrit

$$d\sigma = d\Theta. \tag{10}$$

Il reste à trouver une fonction B sur H à valeurs dans les opérateurs unitaires sur $L^2_\sigma(C_\rho, \mathbf{C})$ et telle que

(11) $$\forall v_1, v_2 \in L^2_\sigma(C_\rho, \mathbf{C}), \langle v_1, Bv_2 \rangle$$

est mesurable pour $d\Theta$.

(12) $$B(0, e^{i\eta\pi})(z, e^{i\varphi}) = e^{-i\varepsilon\eta\pi} \qquad B(z, e^{-i\varphi})$$

Nous pouvons prendre

(13) $$B(z, e^{i\varphi}) = e^{-i\varepsilon\varphi}$$

Alors, d'après la théorie générale

(14) $$E_{\rho\varepsilon}(z, e^{i\varphi}) \qquad F(\Theta) = \langle z, \widehat{z} \rangle e^{-i\varepsilon\varphi} \qquad F(\Theta - 2\varphi)$$

expression donnée en (I.19).

APPENDICE II

FONCTIONS SPHÉRIQUES GÉNÉRALISÉES

Les $m^j_{nk}(\theta)$ sont reliées aux fonctions $u^j_{nk}(\theta)$ définies par Guelfand *et al.* [*4*] par

$$m^j_{nk}(\theta) = (-1)^{j+n}(i)^{-n-k}u^j_{-nk}(\pi - \theta) \tag{1}$$

D'autre part, si on prend comme définition des polynômes de Jacobi

$$\mathrm{P}^{\alpha\beta}_q(x) = \frac{(-1)^q}{2^q q\,!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^q}{dx^q}[(1+x)^{\beta+q}(1-x)^{\alpha+q}] \tag{2}$$

on voit que les m^j_{nk} peuvent s'exprimer en fonction de P par

$$\begin{aligned}(3)\quad & m^j_{nk}(\theta) \\ & = \frac{(-1)^{j+k}}{2^k}\left[\frac{(j-k)\,!\,(j+k)\,!}{(j-n)\,!\,(j+n)\,!}\right]^{1/2}(1-\cos\theta)^{\frac{k-n}{2}}(1+\cos\theta)^{\frac{k+n}{2}}\mathrm{P}^{k+n,k-n}_{j-k}(-\cos\theta)\end{aligned}$$

On peut établir de nombreuses relations de récurrence entre les m^j_{nk}. Toutes celles utilisées dans le texte sont données dans Guelfand [*4*] dont nous avons employé les notations :

$$\alpha_n = [(j+n)(j-n+1)]^{1/2}$$

$$\overset{k}{\mathrm{C}}_{11} = \left[\frac{(j-k)(j-k+1)}{2(j+1)(2j+1))}\right]^{1/2} = \overset{-k}{\mathrm{C}}_{31}$$

$$\overset{k}{\mathrm{C}}_{12} = \left[\frac{(j+k+1)(j-k)}{2j(j+1)}\right]^{1/2} = -\overset{-k}{\mathrm{C}}_{32}$$

$$\overset{k}{\mathrm{C}}_{13} = \left[\frac{(j+k)(j+k+1)}{2j(2j+1)}\right]^{1/2} = \overset{-k}{\mathrm{C}}_{33}$$

$$\overset{k}{\mathrm{C}}_{21} = \left[\frac{(j+k+1)(j-k+1)}{(2j+1)(j+1)}\right]^{1/2}$$

$$\overset{k}{\mathrm{C}}_{22} = \frac{k}{[j(j+1)]^{1/2}}$$

$$\overset{k}{\mathrm{C}}_{23} = \left[\frac{(j+k)(j-k)}{j(2j+1)}\right]^{1/2}$$

D'autre part, nous avons posé

$$\beta = \left[\frac{2j-1}{2j+1}\right]^{1/2}$$

$$\gamma = \left[\frac{2j+3}{2j+1}\right]^{1/2}$$

APPENDICE III

COMPARAISON AVEC LES RÉSULTATS DE LOMONT ET MOSES

Pour pouvoir comparer nos résultats à ceux de Lomont et Moses [13], nous allons chercher une base de $\mathcal{K}$.

Posons tout d'abord

(1) $$\varphi^j_{nk}(p_0) = ra^j_{nk}(r)$$

où

$$r = \sqrt{p_0^2 - m^2}$$

Dans l'espace $\mathcal{K}'$ des fonctions φ, le produit scalaire s'écrit, d'après (II.10)

(2) $$\langle \varphi, \varphi' \rangle = \int \frac{dp_0}{r} \varphi(p_0)\varphi'(p_0)$$

Les fonctions propres de P_0 et $\vec{P}.\vec{L}$ sont définies par

(3) $$\left.\begin{aligned} P_0\varphi_E(p_0) &\equiv p_0\varphi_E(p_0) = E\varphi_E(p_0) \\ \vec{P}.\vec{L}\varphi_E(p_0) &\equiv inr\varphi_E(p_0) = inr_E\varphi_E(p_0) \end{aligned}\right\} r_E = \sqrt{E^2 - m^2}$$

Ce sont donc les distributions $\delta(p_0 - E)$ qui n'appartiennent pas à $\mathcal{K}'$ mais pour lesquelles on peut écrire formellement

(4) $$\varphi(p_0) = \int dE\delta(p_0 - E)\varphi(E)$$

quel que soit φ dans $\mathcal{K}'$, ou

(5) $$\varphi(p_0) = \int \frac{dE}{r_E} \delta[\log (r + p_0) - \log (r_E + E)]\varphi(E)$$

puisque

$$d[\log (r_E + E)] = \frac{dE}{r_E}$$

Nous pouvons écrire l'action des générateurs infinitésimaux sur les éléments

(5) $$\Phi(E, j, n, k) \equiv \delta[\log (r + p_0) - \log (r_E + E)]G^j_{nk}(Z)$$

en remarquant que

(6) $$\frac{p_0}{r} \delta [\log (r + p_0) - \log (r_E + E)] = \frac{E}{r_E} \delta [\log (r + p_0) - \log (r_E + E)]$$

et

(7) $$p_0 \frac{\partial}{\partial r} \delta [\log (r + p_0) - \log (r_E + E)] = - r_E \frac{\partial}{\partial E} \delta [\log (r + p_0) - \log (r_E + E)]$$

Les résultats obtenus sont identiques à ceux donnés par Lomont et Moses dans le cas de spin fini, la correspondance entre notations s'écrivant

	E	m	r_E	l	n	j	k
LM	E	μ	p	S	α	j	m

BIBLIOGRAPHIE

Sur les représentations des groupes de Lorentz.

[1] E. P. WIGNER, *Ann. Math.*, t. 40, 1939, p. 149.
[2] V. BARGMANN, *Ann. Math.*, t. 48, 1947, p. 568.
[3] M. A. NAÏMARK, *Les représentations linéaires du groupe de Lorentz*. Dunod, 1962, chap. 2, § 3 et 4 et chap. 3, § 5.
[4] I. M. GUELFAND, R. A. MINLOS et Z. Ia. CHAPIRO, *Représentations du groupe des rotations et du groupe de Lorentz* (édition russe, 1958), chap. 2.
[5] Iu. M. SHIROKOV, *Soviet Physics JETP*, t. 6, 1958, p. 664, 918, 929; t. 7, 1958, p. 493.
[6] H. JOOS, *Fortschritte der Physik*, t. 10, 1962, p. 65.
[7] M. JACOB et G. C. WICK, *Ann. Phys.*, t. 7, 1959, p. 404.
[8] G. RIDEAU et C. GEORGES, Séminaire sur la représentation des groupes, Institut H. Poincaré, 1963-1964.
[9] P. MOUSSA et R. STORA, Some remarks on the product of irreducible representations of the inhomogeneous Lorentz group, 1965 (preprint).
[10] D. J. CANDLIN, *Nuovo Cimento*, t. 37, 1965, p. 1396.
[11] E. NELSON, *Ann. Math.*, t. 70, 1959, p. 572.
[12] L. GARDING, *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 88, 1960, p. 73.

Sur une base de moment angulaire pour les représentations unitaires irréductibles du groupe de Poincaré.

[13] J. S. LOMONT et H. E. MOSES, *J. Math. Phys.*, t. 5, 1964, p. 294, 1438.
H. E. MOSES, *J. Math. Phys.*, t. 6, 1965, p. 928, 1244.
H. E. MOSES et S. C. WANG, *Nuovo Cimento*, t. 36, 1965, p. 788.
[14] I. RASZILLIER, *Nuovo Cimento*, t. 39, 1965, p. 967.
[15] J. BERTRAND, Générateurs infinitésimaux du groupe de Poincaré dans une base de moment angulaire. *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 261, 1965, p. 3053.
[16] J.-M. LÉVY-LEBLOND, *Nuovo Cimento*, t. 40, 1965, p. 748.

(Manuscrit reçu le 6 mai 1966).