

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

EDUARDO DE RAFAEL

**Théorie relativiste des corrélations angulaires  
et application à l'analyse phénoménologique  
des particules et résonances**

*Annales de l'I. H. P., section A*, tome 5, n° 2 (1966), p. 83-204

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPA\\_1966\\_\\_5\\_2\\_83\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1966__5_2_83_0)

© Gauthier-Villars, 1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# **Théorie relativiste des corrélations angulaires et application à l'analyse phénoménologique des particules et résonances**

par

**Eduardo de RAFAEL**  
Institut des Hautes Études Scientifiques  
91 - Bures-sur-Yvette, France

---

**SOMMAIRE.** — Les principes généraux de l'invariance relativiste sont appliqués à des classes de problèmes de corrélations angulaires en Physique des Hautes Énergies.

Nous avons divisé ce travail en trois parties, plus deux chapitres à titre d'introduction. Dans ceux-ci, nous avons résumé quelques résultats fondamentaux de cinématique relativiste (chapitre I<sup>er</sup>) et les propriétés de la matrice-densité de spin pour des particules de spin quelconque (chapitre II). Dans ce deuxième chapitre nous discutons en détail le lien entre le formalisme covariant et la paramétrisation multipolaire.

La première partie est une description de la cinématique relativiste des fonctions de vertex. Les règles de sélection sont énoncées dans le chapitre III. Dans le chapitre IV nous étudions le développement en fonctions invariantes relativistes (facteurs de forme multipolaires).

La description phénoménologique des processus de désintégration en deux corps est le sujet de la deuxième partie (chapitres V et VI); l'étude correspondante pour les processus de désintégration en trois corps est faite dans la troisième partie (chapitres VII et VIII). Quelques détails techniques ont été rédigés dans des appendices.

Nous avons essayé d'illustrer par des applications l'intérêt des formules obtenues. On en trouvera des applications originales à la détermination du spin de la résonance  $A_2$  (1324) dans le paragraphe 6 *b*; à la détermination du spin et de la parité des résonances baryoniques étranges dans les paragraphes 6 *c* et 8 *d*.

ABSTRACT. — The general principles of relativistic invariance are applied to problems on angular correlations in High Energy Physics.

We have divided this work in three parts, and two chapters of introduction. In the introduction, we recall some fundamental results of relativistic kinematics (chapter I) and the properties of the spin density matrix for particles of arbitrary spin (chapter II). We also discuss, in the second chapter, the connection between the covariant formalism and the multipole parametrisation.

The first part deals with the description of the relativistic kinematics of vertex functions. The selection rules are given in chapter III. In chapter IV we study the expansion in terms of relativistic invariant functions (multipole form factors).

The phenomenological description of two-body decay processes is the subject of the second part (chapters V and VI); and the corresponding study for the three-body decay processes is made in the third part (chapters VII and VIII). Some technical details are given in appendices.

The interest of the formalism developed is illustrated with several applications. Original applications are given: in section 6 *b* to the spin determination of the  $A_2$  (1324) resonance; and in sections 6 *c* and 8 *d* to the spin parity determination of the stranger baryonique resonances.

---

## INTRODUCTION

De nombreuses recherches expérimentales récentes en Physique des Hautes Énergies ont mis en évidence une multitude de nouveaux états physiques qu'on appelle particules ou résonances selon l'ordre de grandeur de leur vie moyenne. Ces états sont labellés par un ensemble de nombres quantiques. Wigner, en 1939, a montré comment l'invariance relativiste nous en fournit deux : la *masse*  $m$  et le *spin*  $j$  qui sont des invariants et qui caractérisent une représentation unitaire irréductible du groupe de Poincaré (groupe de Lorentz inhomogène).

Outre l'invariance relativiste, on sait qu'il existe d'autres formes d'invariance dans la nature; invariances par rapport aux symétries discrètes : parité, renversement du mouvement, conjugaison de charge; invariances de jauge; invariances par rapport aux symétries internes : isospin, hyper-

charge, etc. (on trouvera d'excellents articles sur ces notions dans *Group theoretical concepts and methods in elementary particle physics*, édité par Feza Gürsey, Gordon et Breach, 1964). Bien que la nature « exacte » du lien entre « toutes » ces invariances reste encore mal connue, il est juste de signaler que beaucoup de progrès dans cette direction ont été néanmoins atteints; grâce en grande partie aux analyses phénoménologiques rigoureuses des données expérimentales.

Rappelons très brièvement l'état de nos connaissances à ce sujet. A l'heure actuelle, nous sommes amenés à classer les états physiques, y compris les états stables (photon, neutrinos et antineutrinos; électron et positron; proton et antiproton), soit en *leptons* (charge leptonique  $L_e \neq 0$  ou  $L_\mu \neq 0$  et charge baryonique  $B = 0$ ) soit en *mésons* ( $L_e = L_\mu = 0$ ,  $B = 0$ ) ou *baryons* ( $L_e = L_\mu = 0$ ,  $B \neq 0$ ). Les leptons et les baryons ont spin demi-entier, les mésons spin entier; un fait qui est exprimé par une formule remarquable introduite par Lurçat et Michel en 1961 :

$$(-1)^{2j} = (-1)^{L_e + L_\mu + B}. \quad (1)$$

Chaque lepton et chaque *hadron* (mésion ou baryon) sont encore un état propre de l'opérateur *charge électrique*  $Q$ .

L'hypothèse d'indépendance de charge des interactions fortes a conduit de façon naturelle à la considération d'un groupe de symétrie interne qui est le groupe de l'*isospin*. On introduit ainsi deux nombres quantiques nouveaux, nécessaires pour caractériser un état hadronique : ce sont l'*isospin*  $I_3$  et la troisième composante d'*isospin*  $I_3$ .

L'étude des réactions de production associée a donné lieu à l'introduction d'un nouveau nombre quantique : l'*étrangeté*  $S$ . Gell-Mann et Nishijima en 1953 ont montré que  $B$ ,  $Q$ ,  $I_3$  et  $S$  satisfont à la relation

$$Q = I_3 + \frac{S + B}{2} \quad (2)$$

On appelle *hypercharge* la quantité

$$Y = S + B. \quad (3)$$

Notons que seuls les états hadroniques tels que  $B = I_3 = Y = 0$  sont des états propres de l'opération *conjugaison de charge*  $C$  (opération d'échange particule  $\rightleftharpoons$  antiparticule). En vue de généraliser cette opération à tous les

membres d'un même multiplet d'isospin, Michel en 1953 a introduit l'opération de *parité isotopique*  $G$ , définie par la relation

$$G = C \exp(i\pi I_2) \quad (4)$$

(Rappelons que pour le méson  $\pi$ ,  $G = -1$ ; pour un système à un nombre  $n$  de pions,  $G = (-1)^n$ . En général, pour un système où  $I_3 = 0$  et où  $C$  est bien définie,  $G = C(-1)^I$ . Pour les systèmes

$$K - \bar{K}, N - \bar{N} : G = (-1)^{L+J+I},$$

où  $L$  représente le moment cinétique orbital et  $J$  le spin total).

La formule (2) est le point de départ de la généralisation du groupe d'isospin au groupe de la *symétrie unitaire*  $SU(3)$  introduit par Gell-Mann et Ne'eman en 1961. Dans un supermultiplet de  $SU(3)$ , les états physiques sont classés selon leur contenu en isospin et hypercharge, tous les états d'un même supermultiplet ayant le même spin et la même parité.

L'hypothèse d'*indépendance de spin et de spin unitaire* des interactions fortes a été proposée en 1964 par Gürsey et Radicati, et par Sakita, comme une extension naturelle aux particules élémentaires de la théorie des supermultiplets de Wigner en spectroscopie nucléaire (1937). Dans cette théorie, les mésons pseudoscalaires et vectoriels sont classés dans la représentation 35 du groupe  $SU(6)$ ; les baryons avec  $j = 1/2$  et  $3/2$  et parité  $+1$  sont classés dans la représentation 56. Tous les états d'un même supermultiplet de  $SU(6)$  ont la même parité, mais ils peuvent avoir différents spins.

Le succès de la *symétrie*  $SU(6)$  comme outil pour relier les *propriétés statiques* des particules et des résonances a donné lieu récemment à beaucoup de recherches en vue de généralisations de cette symétrie aux processus de désintégration et aux phénomènes de diffusion (voir, par exemple, les proceedings de la Conférence de Coral Gables en janvier 1965 et les rapports de Dalitz et de Gell-Mann à la Conférence d'Oxford, en septembre 1965). Nous voici arrivés à un *problème-frontière* dans la physique des particules élémentaires.

Il est clair que, lorsque apparaît une nouvelle particule ou résonance, le premier objectif expérimental est la détermination de son ensemble de nombres quantiques. Du point de vue théorique, cette détermination peut signifier la confirmation de l'existence d'un membre d'un supermultiplet dans un des schémas de symétries internes indiqués plus haut; la prédic-

tion, par application d'une formule de masse, de l'existence d'une nouvelle résonance; ou le point de départ vers des modèles de plus en plus raffinés.

En fait, c'est la détermination du spin et de la parité qui présente le plus de difficultés. Bien entendu, les produits de désintégration d'un état physique instable, avec un spin bien défini, ont une distribution caractéristique due à l'invariance relativiste du processus de désintégration. Néanmoins, cette distribution est encore affectée et par le processus de production et par le mécanisme dynamique du processus de désintégration. Le problème qui se pose est de trouver des grandeurs mesurables qui soient reliées par des expressions dépendant uniquement de la cinématique des processus et qui soient très sensibles à la valeur du spin et de la parité. Peu à peu, on a réussi à trouver les expressions convenant aux différents cas particuliers : test d'Adair, en 1955, applicable à la production vers l'avant; test de Lee et Yang, en 1958, applicable aux désintégrations faibles non leptoniques des baryons; méthode des moments de Byers et Fenster, en 1963, applicable aux fermions qui se désintègrent en un baryon de spin  $1/2$  et un méson, etc. (On trouvera des mises au point de tests pour la détermination du spin et de la parité, par exemple dans le cours de Jackson à l'École d'Été des Houches en 1965; et dans l'article de Tripp, Spin and parity determination of elementary particles. *Ann. Rev. Nuclear Science*, vol. 15, p. 325-380).

Une fois que le spin et la parité d'un état sont déterminés, il reste à faire une analyse phénoménologique *rigoureuse* de ses modes de désintégration. Ici, par *rigoureuse*, nous entendons *indépendante de tout modèle dynamique et basée sur des principes premiers : principe de superposition et invariance relativiste*. D'une part, cette analyse doit préciser les restrictions imposées par la *conservation de la parité*; et dans le cas où cela est possible, les restrictions imposées par la conservation de l'opération *conjugaison de charge* et par l'invariance par rapport au *renversement du mouvement*. D'autre part, une analyse rigoureuse doit préciser tout l'*ensemble des paramètres et fonctions invariantes* qui caractérisent chaque mode de désintégration et les *méthodes* pour les mesurer, quand ceci est possible. Les différents modes de désintégration peuvent alors être utilisés comme des *analyseurs* pour déterminer les *éléments de la matrice densité* de l'état initial. Ceux-ci dépendent du mécanisme de production et leur détermination nous donne une information très importante sur la dynamique de la production.

Les notions précédentes forment la base sur laquelle s'appuie ce travail. Alors qu'il existe d'excellents articles sur l'invariance relativiste de la Mécanique Quantique (voir la bibliographie citée au début du chapitre I<sup>er</sup>), les physiciens préfèrent, en général, étudier chaque cas particulier séparément,

en se plaçant dans un système de référence où on applique les techniques non relativistes de la physique nucléaire. Il se trouve que cette méthode est tout à fait commode pour traiter un processus où les particules ont des spins  $1/2$  ou  $1$ . Mais actuellement, avec l'apparition d'états à spins de plus en plus élevés, où on a plusieurs désintégrations successives, les méthodes « pédestres » deviennent de plus en plus pénibles.

C'est pourquoi un travail qui consiste essentiellement à appliquer les principes généraux de l'invariance relativiste à des classes de problèmes de corrélations angulaires en physique des Hautes Énergies nous a semblé utile. Notre but a été d'une part d'obtenir un certain nombre d'expressions générales qui puissent être utilisées directement dans chaque cas particulier par un expérimentateur intéressé par les analyses de corrélations angulaires. D'autre part, nous avons essayé de montrer assez en détail comment obtenir ces expressions à partir des lois de transformation relativiste des états et des opérateurs.

Nous avons divisé ce travail en trois parties, plus deux chapitres à titre d'introduction. Dans ceux-ci, nous avons résumé quelques résultats fondamentaux de cinématique relativiste (chap. I<sup>er</sup>) et les propriétés de la matrice densité de spin pour des particules de spin quelconque (chap. II). La première partie est une description de la cinématique relativiste des fonctions de vertex. Nous étudions les règles de sélection (parité et renversement de mouvement) et le développement des vertex en facteurs de forme multipolaires (chap. III et IV). La description phénoménologique des processus de désintégration en deux corps est le sujet de la deuxième partie (chap. V et VI); l'étude correspondante pour les processus de désintégration en trois corps est faite dans la troisième partie (chap. VII et VIII). Chaque partie et chaque chapitre sont précédés d'une introduction où on trouvera des détails plus techniques, ainsi que des commentaires sur le rapport avec les travaux d'autres auteurs.

Tout au long de ce travail, nous avons essayé d'illustrer par des applications l'intérêt des formules obtenues. On en trouvera des applications originales à la détermination du spin et de la parité dans les § 6 *b*, 6 *c* et 8 *d*.

Quelques détails techniques ont été rédigés dans des appendices (voir la table des matières).

Il est peut-être utile de donner une notice explicative pour la lecture de ce travail, par exemple : appendice B.4 veut dire deuxième appendice au chapitre IV; la formule (7.17) veut dire formule 17 du chapitre VII. Pour la bibliographie, Wigner [39] renvoie à l'article de Wigner de l'année 1939 repris dans la bibliographie finale.

## CHAPITRE PREMIER

RAPPEL DE CINÉMATIQUE RELATIVISTE.  
DÉFINITIONS ET NOTATIONS

Dans ce premier chapitre d'introduction nous allons rappeler quelques résultats de la cinématique des particules élémentaires. Ceci nous permettra de réunir plusieurs lois et formules dont nous aurons besoin par la suite. Il existe d'excellents articles sur ce sujet dans la littérature. Je voudrais citer ici ceux qui ont été précieux pour l'élaboration de ce travail :

E. P. WIGNER, On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group. *Ann. Math.*, t. 40, p. 149 (1939).

V. BARGMAN, Irreducible unitary representations of the Lorentz group. *Ann. Math.*, t. 48, p. 568 (1947).

L. MICHEL, Covariant description of polarization. *Suppl. Nuovo Cimento*, t. 14, p. 95 (1959).

A. S. WIGHTMAN, L'invariance dans la mécanique quantique relativiste, dans *Relations de dispersion et particules élémentaires*. Hermann, Paris, 1960.

H. JOOS, Zur Darstellungstheorie der inhomogenen Lorentz gruppe als Grundlage quantenmechanischer Kinematik. *Forstschritte der Physik*, t. 10, p. 65 (1962).

## § 1 a. — Espace-temps de Minkowski.

Un événement  $x$  de l'espace-temps de Minkowski est caractérisé par un quadrivecteur de composantes

$$x = (x_0, x_1, x_2, x_3). \quad (1.1)$$

La structure d'espace-temps est déterminée par un tenseur métrique  $g_{\mu\nu}$  ;  $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ , tel que le produit scalaire de deux quadrivecteurs  $x$  et  $y$  soit donné par la forme bilinéaire symétrique

$$\begin{aligned} x \cdot y &\equiv g^{\mu\nu} x_\mu y_\nu = g^{\mu\nu} y_\mu x_\nu \\ &= x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Les composantes du tenseur métrique  $g^{\mu\nu}$  sont :

$$\begin{aligned} g^{00} &= 1 ; & g^i &= g^{i0} = 0 ; & g^{ij} &= -\delta_{ij} \\ & & & & i, j &= 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (1.3)$$

On a

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \quad \text{et} \quad g^{\mu}_{\nu} = g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} (= \delta_{\mu\nu}).$$

Nous utilisons partout la convention de sommer sur les indices répétés en haut et en bas. Notons que

$$x^{\mu} = g^{\mu\nu} x_{\nu}$$

a pour composantes

$$x^0 = x_0 \quad \text{et} \quad x^i = -x_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Selon que

$$\left. \begin{array}{l} x \cdot x > 0 \\ x \cdot x = 0 \\ x \cdot x < 0 \end{array} \right\} \text{ nous dirons que } x \text{ est un quadrivecteur de genre } \left\{ \begin{array}{l} \text{temps} \\ \text{lumière} \\ \text{espace.} \end{array} \right. \quad (1.4)$$

Un exemple de quadrivecteur d'espace-temps est l'énergie-impulsion  $p$  d'une particule. Dans un système d'unités avec  $\hbar = c = 1$ , les composantes  $p_{\mu}$  sont

$$p_{\mu} = (p_0 = E, \vec{p})$$

et

$$p_{\mu} p^{\mu} = p^2 = E^2 - \vec{p}^2 = m^2, \quad (1.5)$$

où  $m$  est la masse de la particule.

Nous aurons souvent besoin d'un autre algorithmme d'espace-temps; c'est le tenseur complètement antisymétrique  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$  défini ainsi

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu, \nu, \rho, \sigma \text{ est une permutation paire de } 0, 1, 2, 3; \\ -1 & \text{si } \mu, \nu, \rho, \sigma \text{ est une permutation impaire de } 0, 1, 2, 3; \\ 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases} \quad (1.6)$$

Voici quelques propriétés de  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$  :

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}; \quad (1.7a)$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -4!; \quad (1.7b)$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma'} = -3! g^{\sigma}_{\sigma'}; \quad (1.7c)$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{\mu\nu\rho'\sigma'} = -2! (g^{\rho}_{\rho'} g^{\sigma}_{\sigma'} - g^{\rho}_{\sigma'} g^{\sigma}_{\rho'}); \quad (1.7d)$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{\mu\nu\rho'\sigma'} = -1! (g^{\nu}_{\nu'} g^{\rho}_{\rho'} g^{\sigma}_{\sigma'} + g^{\nu}_{\sigma'} g^{\rho}_{\nu'} g^{\sigma}_{\rho'} + g^{\nu}_{\rho'} g^{\rho}_{\sigma'} g^{\sigma}_{\nu'} - g^{\nu}_{\rho'} g^{\rho}_{\nu'} g^{\sigma}_{\sigma'} - g^{\nu}_{\sigma'} g^{\rho}_{\rho'} g^{\sigma}_{\nu'} - g^{\nu}_{\nu'} g^{\rho}_{\sigma'} g^{\sigma}_{\rho'}). \quad (1.7e)$$

Le mot « tétrade » apparaît très fréquemment dans la suite : c'est un ensemble de 4-quadrivecteurs  $\{t.n^{(i)}\}$   $i = 1, 2, 3$  tel que

$$\text{et } \left. \begin{array}{l} t.n^{(i)} = 0 ; \quad n^{(i)}.n^{(j)} = -\delta_{ij} \quad \text{pour } i, j = 1, 2, 3 \\ t^2 = 1 ; \quad \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} t_\mu n_\nu^{(1)} n_\rho^{(2)} n_\sigma^{(3)} = 1. \end{array} \right\} \quad (1.8)$$

Par rapport à une tétrade de référence  $\{t.\vec{n}\}$ , les composantes du quadrivecteur  $p$  énergie-impulsion d'une particule sont

$$E = p.t \quad \text{et} \quad \vec{p} = -p.\vec{n}. \quad (1.9)$$

### § 1 b. — Transformations de Lorentz.

1° Soit  $(a, \Lambda)$  une transformation linéaire réelle inhomogène des événements d'espace-temps

$$x'_\mu = \Lambda^\nu_\mu x_\nu + a_\mu ; \quad y'_\mu = \Lambda^\nu_\mu y_\nu + a_\mu \quad (1.10)$$

telle que pour tout  $y$  la séparation des événements  $x$  et  $y$  reste invariante

$$(x' - y')^2 = (x - y)^2. \quad (1.11)$$

L'ensemble des transformations  $(a, \Lambda)$  ainsi définies forme le groupe de Poincaré  $\mathfrak{P}$  <sup>(1)</sup>. La loi de multiplication est la suivante

$$(a, \Lambda)(b, \Lambda') = (a + \Lambda b, \Lambda\Lambda'); \quad (1.12)$$

l'élément neutre (unité) est  $(0, 1)$  et l'élément inverse de  $(a, \Lambda)$  est

$$(a, \Lambda)^{-1} = (-\Lambda^{-1}a, \Lambda^{-1}). \quad (1.13)$$

L'ensemble des transformations  $(0, \Lambda)$  forme le groupe de Lorentz  $L$ . D'après (1.10) et (1.11) les éléments de  $\Lambda$  définissent une transformation de Lorentz si et seulement si

$$\Lambda^\nu_\sigma g_{\nu\mu} \Lambda^\mu_\rho = g_{\sigma\rho}. \quad (1.14)$$

L'ensemble des transformations  $(0, \Lambda)$  avec  $\det \Lambda = +1$  forme le groupe de Lorentz propre  $L_+$ . Notons que

$$L = L_+ + TL_+ \quad (1.15)$$

<sup>(1)</sup> Récemment Zeeman [64] a montré comment la causalité implique le groupe  $\mathfrak{P}$  et les dilatations. Nous recommandons l'article de Zeeman au lecteur théoricien.

où  $T$  est l'opération renversement de temps

$$Tx_0 = -x_0; \quad T\vec{x} = \vec{x}. \quad (1.16)$$

L'ensemble des transformations  $(0, \Lambda)$  avec  $\det \Lambda = 1$  et  $\Lambda_0^0 \geq 1$  forme le groupe de Lorentz restreint (groupe de Lorentz propre et orthochrone)  $L_+^\uparrow$ . Notons que

$$L_+ = L_+^\uparrow + PT L_+^\uparrow \quad (1.17)$$

où  $P$  est l'opération inversion d'espace

$$Px_0 = x_0, \quad P\vec{x} = -\vec{x}. \quad (1.18)$$

2° Soit  $n$  un quadrivecteur tel que  $n^2 \neq 0$  et  $\Sigma_n$  l'opération de symétrie pour l'hyperplan orthogonal à  $n$

$$\Sigma_n = 1 - 2 \frac{n \otimes n}{n^2} = \Sigma_{-n}, \quad (1.19)$$

où  $\otimes$  est le symbole produit tensoriel (ici de quadrivecteurs). La réflexion  $\Sigma_n$  appliquée à un quadrivecteur  $x$  s'exprime ainsi

$$\Sigma_n x = x' = x - 2 \frac{(n \cdot x)}{n^2} n. \quad (1.20)$$

Nous utiliserons par la suite le théorème suivant (un cas particulier d'un théorème de Cartan [37]) : « Toute transformation du groupe de Lorentz avec  $\det \Lambda = 1$  (respectivement  $\det \Lambda = -1$ ) est le produit de 2 ou 4 réflexions (respectivement 1 ou 3). Parmi ces réflexions, un nombre pair (0, 2, 4) correspondent à des vecteurs de genre temps si  $\Lambda_0^0 \leq 1$ , un nombre impair (1, 3) si  $\Lambda_0^0 \geq 1$  » (voir par exemple Michel [58] pour une démonstration de ce théorème).

Un cas particulier très important de transformation  $\Lambda$  est celui des transformations de Lorentz pures. Nous allons les discuter un peu en détail.

Soient  $a$  et  $b$  deux quadrivecteurs tels que

$$a^2 = b^2 = 1 \quad \text{et} \quad a_0 > 0; \quad b_0 > 0.$$

Nous appelons transformation de Lorentz pure  $\Lambda_{a \rightarrow b}$  l'opération

$$\Lambda_{a \rightarrow b} = \Sigma_{b+a} \Sigma_a. \quad (1.21)$$

Elle transforme  $a$  en  $b$  et laisse le 2-plan orthogonal à  $a$  et  $b$  invariant. D'après (1.19), on a

$$\Lambda_{a \rightarrow b} = 1 - \frac{(b+a) \otimes (b+a)}{1+a \cdot b} + 2b \otimes a. \quad (1.22)$$

Exprimé en fonction des composantes  $a_\mu$  et  $b_\mu$ , on a

$$b_\mu = (\Lambda_{a \rightarrow b})^\nu{}_\mu a_\nu, \quad (1.23)$$

avec

$$(\Lambda_{a \rightarrow b})^\nu{}_\mu = g^\nu{}_\mu - (1 + a \cdot b)^{-1} \{ b_\mu b^\nu + a_\mu a^\nu + a_\mu b^\nu - [1 + 2(a \cdot b)] b_\mu a^\nu \}. \quad (1.24)$$

Considérons le cas où les composantes de  $a$  et  $b$  sont

$$a_\mu = (1, \vec{0}); \quad b_\mu = (E/m, \vec{p}/m);$$

les éléments de matrice correspondants sont

$$(\Lambda_{a \rightarrow b})^\nu{}_\mu = \left( \frac{E/m}{\vec{p}/m} \left| \frac{\vec{p}/m}{\mathbf{1} + \frac{\vec{p} \otimes \vec{p}}{m(E+m)}} \right. \right); \quad (1.25)$$

ou encore, avec

$$\beta = |\vec{p}|/E; \quad \gamma = E/m \quad \text{et} \quad \hat{v} = \vec{p}/|\vec{p}|, \quad (1.26 \ a, b, c)$$

$$(\Lambda_{a \rightarrow b})^\nu{}_\mu = \left( \frac{\gamma}{\beta \gamma \hat{v}} \left| \frac{\beta \gamma \hat{v}}{\mathbf{1} + \frac{\gamma^2}{1+\gamma} \beta \hat{v} \otimes \beta \hat{v}} \right. \right). \quad (1.27)$$

Lorsque  $\hat{v}$  est dirigé selon la troisième composante d'espace, on a

$$(\Lambda_{a \rightarrow b})^\nu{}_\mu = \begin{pmatrix} \text{ch } \chi & 0 & 0 & \text{sh } \chi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \text{sh } \chi & 0 & 0 & \text{ch } \chi \end{pmatrix}, \quad (1.28)$$

où

$$\text{ch } \chi = \gamma = E/m; \quad \text{sh } \chi = \beta \gamma = |\vec{p}|/m \quad \text{et} \quad \text{th } \chi = \beta = |\vec{p}|/E. \quad (1.29 \ a, b, c)$$

### § 1 c. — Transformations spinorielles <sup>(2)</sup>.

1° A chaque quadrivecteur  $x_\mu$  nous pouvons associer une matrice  $2 \times 2$  de la façon suivante,

$$x_\mu \rightarrow \underset{\sim}{x} = \begin{pmatrix} x_0 - x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 + x_3 \end{pmatrix} = \sum_{\mu=0}^3 x_\mu \tau_\mu = x_0 \tau_0 + \vec{x} \cdot \vec{\tau}, \quad (1.30)$$

<sup>(2)</sup> Pour une introduction au calcul spinoriel voir par exemple Van der Waerden [32].

où  $\tau_0$  est la matrice unité

$$\tau_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.31)$$

et  $\vec{\tau}$  les matrices de Pauli

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}; \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.32 a, b, c)$$

Réciproquement, à toute matrice  $2 \times 2$   $X$  on peut associer un quadri-vecteur  $x_\mu$  par l'opération

$$x_\mu = \frac{1}{2} \text{tr} (\tau_\mu X). \quad (1.33)$$

Si  $X$  est hermitique, alors  $x_\mu$  est réel. Notons que

$$\det \tilde{x} = x^\mu x_\mu \quad (1.34)$$

et

$$x^\mu y_\mu = \frac{1}{2} [\det (\tilde{x} + \tilde{y}) - \det \tilde{x} - \det \tilde{y}]. \quad (1.35)$$

Soit  $A$  une matrice complexe  $2 \times 2$  de déterminant unité et  $\tilde{x}'$  la matrice obtenue à partir de  $\tilde{x}$  par la transformation

$$\tilde{x}' = A \tilde{x} A^*, \quad (1.36)$$

où  $A^*$  est la matrice hermitique conjuguée de  $A$ . Cette transformation est telle que

$$x'^\mu x'_\mu = x^\mu x_\mu,$$

c'est donc une transformation de Lorentz. C'est la transformation <sup>(3)</sup>

$$\Lambda(A)^\nu_\mu = \frac{1}{2} \text{tr} (\tau^\nu A \tau_\mu A^*), \quad (1.37 a)$$

avec  $\tau^\nu = (\tau_0, -\vec{\tau})$ . On peut montrer en plus qu'elle appartient à  $L_+^\uparrow$  <sup>(4)</sup>. Réciproquement, toute transformation de Lorentz  $\Lambda \in L_+^\uparrow$  peut s'écrire sous forme de matrice  $2 \times 2$ . Le passage est donné par la formule suivante <sup>(3)</sup> :

$$\pm A(\Lambda) = \frac{\Lambda^\mu_\nu \tau_\mu \tau^\nu}{[\Lambda^\alpha_\beta \tau_\alpha \tau^\beta \Lambda_\gamma^\delta \tau_\delta \tau^\gamma]^{1/2}}. \quad (1.37 b)$$

<sup>(3)</sup> Voir par exemple MacFarlane [62].

<sup>(4)</sup> Voir par exemple Streater et Wightman [64], chapitre I<sup>er</sup>.

En particulier, la matrice  $2 \times 2$  correspondant à la transformation (1.22) est la suivante

$$\pm A(\Lambda_{a \rightarrow b}) = [2(1 + a \cdot b)]^{-1/2} \{ 1 + [b_0 + \vec{b} \cdot \vec{\tau}] [\vec{a}_0 - \vec{a} \cdot \vec{\tau}] \}. \quad (1.38)$$

2° L'ensemble des matrices complexes  $2 \times 2$  unimodulaires (de déterminant unité) forme le groupe  $SL(2, c)$ . L'application

$$A \rightarrow \Lambda(A) \quad (1.39)$$

est un homomorphisme du groupe  $SL(2, c)$  sur le groupe  $L_+^\uparrow$

$$SL(2, c) \rightarrow L_+^\uparrow.$$

Le noyau de cet homomorphisme contient les matrices unité 1 et  $-1$ ; c'est-à-dire que <sup>(6)</sup>

$$\Lambda(-A) = \Lambda(A).$$

Un sous-groupe important de  $SL(2, c)$  est celui formé par les matrices unitaires, c'est le groupe  $SU(2)$ . En prenant la trace dans (1.36) on trouve, si  $A$  est unitaire,

$$2x'^0 = 2x^0;$$

c'est-à-dire, la direction de temps reste invariante. Pour les matrices  $A$  unitaires, l'application (1.39) est un homomorphisme du groupe  $SU(2)$  sur le groupe de rotations à trois dimensions,

$$SU(2) \rightarrow O_3.$$

Toute représentation finie irréductible de  $SL(2, c)$  est définie par deux nombres positifs  $j_1, j_2$  entiers ou demi-entiers

$$A \in SL(2, C) - D^{(j_1, j_2)}(A). \quad (1.40)$$

La dimension de la représentation est

$$(2j_1 + 1) \times (2j_2 + 1). \quad (1.41)$$

Les représentations (1.40) avec  $j_1 + j_2$  entiers sont des représentations unimodulaires de  $L_+^\uparrow$ . Toutes les autres représentations (1.40) sont des représentations multiformes, à double détermination, de  $L_+^\uparrow$  <sup>(6)</sup>. Ces représentations

<sup>(5)</sup> Pour une discussion détaillée de ces propriétés, voir Michel [62].

<sup>(6)</sup> Pour une étude détaillée des représentations de  $SL(2, c)$ , voir Naïmark [62].

ne sont pas unitaires (<sup>7</sup>). En particulier, la représentation  $D^{(1/2,1/2)}(A)$  est équivalente à la représentation matricielle  $\Lambda_\nu^\mu$ .

Les représentations irréductibles de  $SU(2)$  sont définies par un nombre positif  $j$ , entier ou demi-entier

$$A \in SU(2) \rightarrow D^{(j,0)}(A) \simeq D^{(0,j)}(A) \equiv D^{(j)}(A). \quad (1.42)$$

Ces représentations sont unitaires (<sup>8</sup>). Notons que la représentation de  $SU(2)$  qu'on obtient en imposant à  $A$  dans  $D^{(j_1,j_2)}(A)$  d'être unitaire :  $A \in SU(2)$ , n'est pas irréductible; mais on a

$$D^{(j_1,j_2)}(A) \simeq \bigoplus_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} D^{(j)}(A), \quad \text{pour } A \in SU(2) \quad (1.43)$$

§ 1 d. — Remarque sur le groupe des rotations.

1° Soit  $\{t, \vec{n}\}$  une tétrade de référence (1.8). L'ensemble des transformations  $\Lambda \in L_\perp^\uparrow$  qui laissent invariant  $t$  forme le petit groupe de  $t$ . Puisque  $t$  est de genre temps, il s'agit du groupe des rotations à 3-dimensions.

Avec une transformation de Lorentz  $\Lambda \in L_\perp^\uparrow$  et un quadrivecteur  $u$ , tel que  $u^2 = 1$ , nous pouvons définir une rotation du petit groupe de  $t$  de la façon suivante :

$$R(u, \Lambda) = \Lambda_{t \rightarrow \Lambda u}^{-1} \Lambda \Lambda_{t \rightarrow u}. \quad (1.44)$$

Cette transformation laisse invariant  $t$ ; en effet

$$R(u, \Lambda)t = (\Lambda_{t \rightarrow \Lambda u}^{-1} \Lambda) \Lambda_{t \rightarrow u} t = (\Lambda_{t \rightarrow \Lambda u}^{-1}) \Lambda u = t.$$

La matrice  $3 \times 3$  associée à  $R(u, \Lambda)$  et agissant dans le 3-plan orthogonal à  $t$  est

$$R_j^i(u, \Lambda) = -R(u, \Lambda)^\nu_\mu n_\nu^{(i)} n_{(j)}^\mu; \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1.45)$$

La matrice  $2 \times 2$  unitaire et unimodulaire associée à cette rotation est donnée par la formule (<sup>9</sup>)

$$\pm A[R(u, \Lambda)] = [1 + R_i^i(u, \Lambda)]^{-1/2} 1/2 [1 + R^j(u, \Lambda) \tau_i \tau_j]. \quad (1.46)$$

(<sup>7</sup>) Les représentations unitaires non triviales du groupe de Lorentz sont toutes à un nombre infini de dimensions; voir Naïmark [62]. Pour le groupe de Lorentz à trois dimensions, voir Bargmann [47].

(<sup>8</sup>) Voir par exemple le livre de Wigner [59]. Voir aussi Bargmann [64 a].

(<sup>9</sup>) Voir réf. [3].

Écrivons cette matrice sous la forme

$$A[R(u, \Lambda)] = \begin{pmatrix} a(u, \Lambda) & b(u, \Lambda) \\ -\bar{b}(u, \Lambda) & \bar{a}(u, \Lambda) \end{pmatrix}; \quad (1.47 a)$$

avec

$$|a(u, \Lambda)|^2 + |b(u, \Lambda)|^2 = 1. \quad (1.47 b)$$

Alors l'expression générale des éléments de la représentation  $D^{(j)}[A(u, \Lambda)]^{\lambda' \lambda}$  de SU(2) est la suivante <sup>(8)</sup> :

$$D^{(j)} \{ A[R(u, \Lambda)] \}^{\lambda' \lambda} = \sum_{\zeta} (-1)^{\zeta} \frac{\sqrt{(j+\lambda)! (j-\lambda)! (j+\lambda')! (j-\lambda')!}}{(j-\lambda'-\zeta)! (j+\lambda-\zeta)! \zeta! (\zeta+\lambda'-\lambda)!} \\ \times a(u, \Lambda)^{j-\lambda'-\zeta} \bar{a}(u, \Lambda)^{j+\lambda-\zeta} b(u, \Lambda)^{\zeta} \bar{b}(u, \Lambda)^{\zeta+\lambda'-\lambda}. \quad (1.48)$$

Toute représentation de SU(2) est une représentation, uniforme ou multi-forme selon que  $j$  est entier ou demi-entier, du groupe des rotations. Dans la suite nous utilisons les notations suivantes pour décrire une représentation de rang  $j$  du groupe des rotations :

$$D^{(j)}[R(u, \Lambda)]^{\lambda' \lambda}; \quad D^{(j)}[R(\alpha\beta\gamma)]^{\lambda' \lambda}$$

ou simplement  $D^{(j)}(R)^{\lambda' \lambda}$  lorsque l'argument de  $R$  est sous-entendu. Par  $D^{(j)}[R(u, \Lambda)]^{\lambda' \lambda}$  on entend l'expression (1.48). Si  $\alpha, \beta, \gamma$  sont les angles d'Euler qui définissent la rotation  $R_j^i(u, \Lambda)$  dans (1.45), alors l'expression de  $D^{(j)}[R(\alpha\beta\gamma)]^{\lambda' \lambda}$  est donnée par (1.48) avec

$$a(u, \Lambda) = e^{-i\alpha/2} \cos \beta/2 e^{-i\gamma/2} \quad \text{et} \quad b(u, \Lambda) = -e^{-i\alpha/2} \sin \beta/2 e^{i\gamma/2} \quad (1.49 a, b)$$

Rappelons-nous quelques propriétés des fonctions  $D^{(j)}[R(\alpha\beta\gamma)]^{\lambda' \lambda}$  :

$$D^{(j)}[R(\alpha\beta\gamma)]^{\lambda' \lambda} = e^{i\lambda'\alpha} d^{(j)}(\beta)^{\lambda' \lambda} e^{i\lambda\gamma}; \quad (1.50)$$

$$\overline{D^{(j)}(R)^{\lambda' \lambda}} = (-1)^{\lambda-\lambda'} D^{(j)}(R)^{-\lambda' -\lambda}; \quad (1.51 a)$$

$$D^{(j)}(R^{-1})^{\lambda' \lambda} = (D^{(j)}(R)^{\lambda' \lambda})^* = \overline{D^{(j)}(R)^{\lambda' \lambda}}; \quad (1.51 b)$$

$$\frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi \sin \beta d\beta \int_0^{2\pi} d\gamma \overline{D^{(j_1)}(R)^{\lambda'_1 \lambda_1}} D^{(j_2)}(R)^{\lambda'_2 \lambda_2} = \delta_{\lambda_1 \lambda_2} \delta_{\lambda'_1 \lambda'_2} \delta_{j_1 j_2} \frac{1}{2j_1 + 1}; \quad (1.52)$$

$$D^{(l)}[R(\alpha\beta\gamma)]^m_0 = (-1)^m \left( \frac{4\pi}{2l+1} \right)^{1/2} Y_m^{(l)}(\beta, \alpha), \quad l \text{ entier} \quad (1.53)$$

<sup>(8)</sup> Voir par exemple le livre de Wigner [59]. Voir aussi Bargmann [64 a].

où  $Y_m^{(j)}(\beta, \alpha)$  sont les fonctions harmoniques sphériques du groupe des rotations :

$$D^{(j)}[\mathbf{R}(\alpha\beta\gamma)]_0^0 = P_l(\cos \beta), \quad (1.54)$$

$P_l(\cos \beta)$  sont les polynômes de Legendre.

2° Nous utilisons les symboles  $3-j$  pour décrire les coefficients de Clebsch-Gordan :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix} &= \frac{(-1)^{j_1-j_2-\lambda_3}}{\sqrt{2j_3+1}} (j_1\lambda_1, j_2\lambda_2 | j_1j_2; j_3-\lambda_3) \\ &\equiv \frac{(-1)^{j_1-j_2-\lambda_3}}{\sqrt{2j_3+1}} C(j_1j_2j_3; \lambda_1\lambda_2). \end{aligned} \quad (1.55)$$

Nous avons trouvé très commode de travailler avec les  $3-j$  covariants et contravariants de Wigner <sup>(10)</sup>. Un symbole  $3-j$  contravariant dans un de ses indices est donné en fonction du symbole  $3-j$  ordinaire par l'expression

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \lambda \\ \lambda_1 & \lambda_2 & j \end{pmatrix} = C_{(j)}^{\lambda\lambda'} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda' \end{pmatrix} = (-1)^{j-\lambda} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ \lambda_1 & \lambda_2 & -\lambda \end{pmatrix}. \quad (1.56)$$

Notons que  $C_{(j)}^{\lambda\lambda'}$  sont les éléments de la matrice unitaire  $C$  qui transforme une représentation  $D^{(j)}(\mathbf{R})$  en sa complexe conjuguée

$$CD^{(j)}(\mathbf{R})C^{-1} = \overline{D^{(j)}(\mathbf{R})}. \quad (1.57)$$

Explicitement

$$C_{(j)}^{\lambda\lambda'} = (-1)^{j-\lambda} \delta_{\lambda, -\lambda'}; \quad (1.58 a)$$

$$C_{\lambda\lambda'}^{(j)} = (-1)^{j-\lambda'} \delta_{\lambda, -\lambda'}. \quad (1.58 b)$$

Dans (1.56)  $C_{(j)}^{\lambda\lambda'}$  joue le rôle d'un tenseur métrique. Avec ces notations, les relations d'orthonormalité des symboles  $3-j$  s'expriment ainsi :

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda' \\ j_1 & j_2 & j' \end{pmatrix} = \frac{\delta_{jj'} \delta_{\lambda\lambda'}}{2j+1}, \quad (1.59)$$

et

$$\sum_j (2j+1) \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda'_1 & \lambda'_2 & \lambda \\ j_1 & j_2 & j \end{pmatrix} = \delta_{\lambda_1\lambda'_1} \delta_{\lambda_2\lambda'_2}. \quad (1.60)$$

<sup>(10)</sup> Voir Wigner [59], chapitre XXIV.

Quelques formules complémentaires sont données dans l'appendice A1.

3° La réduction d'un produit de représentations  $D^{(j_1)}(\mathbf{R}) D^{(j_2)}(\mathbf{R})$  en représentations irréductibles est donnée par la formule suivante <sup>(11)</sup>

$$D^{(j_1)}(\mathbf{R})^{\lambda'_1} D^{(j_2)}(\mathbf{R})^{\lambda'_2} = \sum_{j, \lambda'} (2j+1) \begin{pmatrix} \lambda'_1 & \lambda'_2 & \lambda' \\ j_1 & j_2 & j \end{pmatrix} D^{(j)}(\mathbf{R})^{\lambda'} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda \end{pmatrix}. \quad (1.61)$$

Multiplions cette expression par  $\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ \lambda'_1 & \lambda'_2 & \tilde{\lambda} \end{pmatrix}$  avec sommation sur les indices  $\lambda'_1$  et  $\lambda'_2$ . Par application de (1.59) et en utilisant (1.51 a) et (1.56) on déduit la relation

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \lambda' \\ \lambda'_1 & \lambda'_2 & j \end{pmatrix} D^{(j_1)}(\mathbf{R})^{\lambda'_1} D^{(j_2)}(\mathbf{R})^{\lambda'_2} = D^{(j)}(\mathbf{R})^{\lambda'} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \lambda \\ \lambda_1 & \lambda_2 & j \end{pmatrix} \quad (1.62)$$

Une autre relation importante qu'on peut déduire de (1.62) si on prend le complexe conjugué et si on utilise (1.51 b) et (1.56) est

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & j \\ j_1 & j_2 & \lambda \end{pmatrix} D^{(j_1)}(\mathbf{R})^{\lambda'_1} D^{(j_2)}(\mathbf{R})^{\lambda'_2} = D^{(j)}(\mathbf{R})^{\lambda'} \begin{pmatrix} \lambda'_1 & \lambda'_2 & j \\ j_1 & j_2 & \lambda \end{pmatrix}. \quad (1.63)$$

### § 1 e. — Lois de transformation des états à une particule.

Les générateurs infinitésimaux du groupe de Poincaré  $\mathcal{P}_4^\dagger$  sont :

$P_\mu$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ), pour les générateurs du sous-groupe des translations d'espace-temps;

$M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu}$  ( $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ ), pour les générateurs du sous-groupe des transformations de Lorentz dans le 2-plan  $\mu - \nu$  qui laissent invariantes les deux autres coordonnées.

Leurs relations de commutation sont,

$$[P_\mu, P_\nu] = 0; \quad (1.64)$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = i(g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} - g_{\nu\sigma}M_{\mu\rho}); \quad (1.65)$$

$$[M_{\mu\nu}, P_\rho] = i(g_{\nu\rho}P_\mu - g_{\mu\rho}P_\nu). \quad (1.66)$$

<sup>(11)</sup> Voir par exemple Edmonds [57], chapitre IV.

Ces commutateurs définissent l'algèbre de Lie de  $\mathcal{F}_\dagger^\dagger$ . Nous cherchons ici un ensemble complet d'observables qui commutent. Mathématiquement c'est construire une sous-algèbre abélienne maximale de l'algèbre enveloppante définie à partir de l'algèbre de Lie de  $\mathcal{F}_\dagger^\dagger$ . Voici une solution :

$$P^\mu P_\mu; \quad W^\mu W_\mu, \quad (1.67 a, b)$$

où  $W_\mu$  est l'opérateur de polarisation <sup>(12)</sup>

$$W_\mu = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} P^\nu M^{\rho\sigma}; \quad (1.68)$$

$$P_\mu \ (\mu = 0, 1, 2, 3) \text{ et une composante de } W_\mu. \quad (1.67 c, d)$$

Notons que  $P^\mu P_\mu$  et  $W^\mu W_\mu$  commutent avec tous les  $P_\mu$  et  $M_{\mu\nu}$ . Ils appartiennent donc au centre de l'algèbre enveloppante. En vertu du lemme de Schur, pour une représentation unitaire irréductible de  $\mathcal{F}_\dagger^\dagger$ , ils sont multiples de l'opérateur identité I :

$$P^2 \equiv P^\mu P_\mu = m^2 I, \quad (1.67 a)$$

$m$  étant la masse de la particule;

$$W^2 \equiv W^\mu W_\mu = -m^2 j(j+1) I, \quad (1.67 b)$$

$j$  étant le spin de la particule.

Un état à une particule d'énergie-impulsion  $p$ , de masse  $m > 0$  et spin  $j$  est un état propre des opérateurs

$$P^2 |p, j\lambda\rangle = m^2 |p, j\lambda\rangle; \quad \frac{W^2}{m^2} |p, j\lambda\rangle = -j(j+1) |p, j\lambda\rangle; \quad (1.68 a, b)$$

$$P^\mu |p, j\lambda\rangle = p^\mu |p, j\lambda\rangle \quad \text{et} \quad \frac{W^\mu s_\mu}{m} |p, j\lambda\rangle = \lambda |p, j\lambda\rangle, \quad (1.68 c, d)$$

où

$$s^2 = -1 \quad \text{et} \quad s \cdot p = 0. \quad (1.69)$$

Par rapport à une tétrade de référence  $\{t, \vec{n}\}$  (1.8), il convient de choisir l'axe  $s$  ainsi

$$s = \Lambda_{t \rightarrow p/m} \mathbf{t}^{(3)}. \quad (1.70)$$

La transformation sur les états  $|p, j\lambda\rangle$  induite par une transforma-

---

<sup>(12)</sup> Cet opérateur a été introduit par Pauli (non publié, cité par Lubanski [42]). Voir aussi Bargmann et Wigner [48].

tion  $(a, \Lambda) \in \mathcal{F}_\dagger^\dagger$  est réalisée par un opérateur unitaire  $U(a, \Lambda)$  d'après la loi suivante <sup>(13)</sup>

$$\left. \begin{aligned} U(a, \Lambda) |p, j\lambda\rangle &= e^{i\Lambda p \cdot a} D^{(j)}[R(u, \Lambda)]^\lambda | \Lambda p, j\lambda' \rangle, \\ \text{avec} \quad R(u, \Lambda) &= \Lambda_{t \rightarrow \Lambda u}^{-1} \Lambda \Lambda_{t \rightarrow u} \quad \text{et} \quad u = p/m. \end{aligned} \right\} \quad (1.71)$$

Les états  $|p, j\lambda\rangle$  sont normalisés dans le continuum

$$\langle p', j'\lambda' | p, j\lambda \rangle = 2 |p_0| \delta(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{j'j} \delta_{\lambda\lambda'}. \quad (1.72)$$

L'espace d'Hilbert des états est formé par des vecteurs

$$|\Phi\rangle = \sum_{\lambda=-j}^j \int d\Omega_m(p) |p, j\lambda\rangle \langle p, j\lambda | \Phi \rangle, \quad (1.73)$$

où  $d\Omega_m(p)$  est l'élément de volume invariant

$$d\Omega_m(p) = \frac{d^3\vec{p}}{\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}}. \quad (1.74)$$

La norme de (1.73) est

$$\left. \begin{aligned} \langle \Phi | \Phi \rangle &= \sum_{\lambda=-j}^j \int d\Omega_m(p) |\Phi(p, j\lambda)|^2, \\ \text{avec} \quad \Phi(p, j\lambda) &\equiv \langle p, j\lambda | \Phi \rangle. \end{aligned} \right\} \quad (1.75)$$

La loi de transformation des états  $|p, j\lambda\rangle$  induite par l'opération d'inversion d'espace P (1.18) est réalisée par un opérateur unitaire  $U(P)$  de la façon suivante <sup>(14)</sup>

$$\left. \begin{aligned} U(P) |p, j\lambda\rangle &= \varepsilon |Pp, j\lambda\rangle \\ \text{avec} \quad (Pp)_\mu &= (p_0, -\vec{p}) \quad \text{et} \quad \varepsilon = \pm 1. \end{aligned} \right\} \quad (1.76)$$

La transformation des états  $|p, j\lambda\rangle$  induite par l'opération renversement de temps T (1.16) est réalisée par un opérateur antiunitaire  $U(T)$  de la façon suivante <sup>(14)</sup>

$$U(T) |p, j\lambda\rangle = (-1)^{j+\lambda} |Pp, j-\lambda\rangle. \quad (1.77)$$

Notons que

$$U(T)^2 = (-1)^{2j}, \quad (1.78)$$

<sup>(13)</sup> Une discussion détaillée de cette loi de transformation ainsi que des lois de transformation par inversion d'espace et renversement de temps est faite dans Wigner [62].

<sup>(14)</sup> Voir réf. [13]. Pour une discussion simplifiée voir Wick [65].

## APPENDICE A. 1

**QUELQUES FORMULES COMPLÉMENTAIRES  
SUR LE GROUPE DES ROTATIONS (voir le § 1 d)**

Les formules suivantes sont utilisées fréquemment dans le texte. Pour leurs démonstrations voir par exemple les livres de Edmonds [57] et Wigner [59].

Un cas particulier de (1.52) est

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \bar{Y}_m^{(l)}(\beta, \alpha) Y_m^{(l')}(\beta, \alpha) \sin \beta d\beta d\alpha = \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \quad (\text{A.1 a})$$

Un cas particulier de (1.61) est

$$Y_{m_1}^{(l_1)}(\beta, \alpha) Y_{m_2}^{(l_2)}(\beta, \alpha) = \sum_{l, m} \left[ \frac{(2l_1+1)(2l_2+1)(2l+1)}{4\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l \\ m_1 & m_2 & m \end{pmatrix} \overline{Y_m^{(l)}(\beta, \alpha)} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.1 b})$$

Nous utilisons les symboles  $6-j$  pour décrire les coefficients de Racah <sup>(1)</sup>. Une relation très pratique entre symboles  $3-j$  et  $6-j$  est la suivante

$$(-1)^{2(s_1+s_2+s_3)} \times \begin{pmatrix} j_1 & s_2 & \mu_3 \\ \lambda_1 & \mu_1 & s_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & j_2 & s_3 \\ s_1 & \lambda_2 & \mu_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 & \mu_2 & j_3 \\ \mu_1 & s_2 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.1 c})$$

En particulier <sup>(2)</sup>

$$\sqrt{(2l_1+1)(2l_2+1)} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} s_1 & l_1 & \frac{1}{2} \\ l_2 & s_2 & l_3 \end{Bmatrix} = (-1)^{2(l_1+s_1)} \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & l_3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1 d})$$

Parfois nous aurons besoin aussi des symboles  $9-j$  <sup>(3)</sup> :

$$\begin{Bmatrix} \tilde{L} & j_1 & j_2 \\ \tilde{L} & l_1 & l_2 \\ L' & s_1 & s_2 \end{Bmatrix} = \sum_K (-1)^{2K} (2K+1) \begin{Bmatrix} L & \tilde{L} & L' \\ s_1 & s_2 & K \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_1 & l_1 & s_1 \\ \tilde{L} & K & l_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_2 & l_2 & s_2 \\ K & L & j_1 \end{Bmatrix}. \quad (\text{A.1 e})$$

Quelques expressions algébriques particulières des  $3-j$ ,  $6-j$  et  $9-j$  sont :

$$\begin{pmatrix} j & j & 0 \\ \lambda & -\lambda & 0 \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{j-\lambda}}{\sqrt{2j+1}}; \quad (\text{A.1 f})$$

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{pour } j_1 + j_2 + j_3 \text{ impair}; \quad (\text{A.1 g})$$

$$\begin{pmatrix} j & j & 1 \\ \lambda & -\lambda & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{j-\lambda} \frac{\lambda}{\sqrt{(2j+1)(j+1)j}}; \quad (\text{A.1 h})$$

<sup>(1)</sup> Voir Wigner [59], chapitre XXIV.

<sup>(2)</sup> Voir par exemple Devons et Goldfarb [57], formule (A.17).

<sup>(3)</sup> Voir par exemple Edmonds [57], § 6.9.

$$\begin{pmatrix} j & j & 2 \\ \lambda & -\lambda & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{j-\lambda} \frac{2[3\lambda^2 - j(j+1)]}{\sqrt{(2j+1)(2j+2)(2j+1)2j(2j-1)}}; \quad (\text{A.1 } i)$$

$$\begin{Bmatrix} l & j & s \\ 0 & s & j \end{Bmatrix} = (-1)^{1+j+s} [(2j+1)(2s+1)]^{-1/2}; \quad (\text{A.1 } j)$$

$$\begin{Bmatrix} L & j_1 & j_2 \\ 0 & l & l \\ L & s_1 & s_2 \end{Bmatrix} = \frac{(-1)^{j_1+s_2+l+L}}{\sqrt{(2l+1)(2L+1)}} \begin{Bmatrix} s_1 & j_1 & l \\ j_2 & s_2 & L \end{Bmatrix}. \quad (\text{A.1 } k)$$

Pour une table des valeurs numériques des symboles  $3 - j$  et  $6 - j$  voir Rotenberg, Metropolis, Bivins et Wooten [61].

## CHAPITRE II

### MATRICE DENSITÉ DE SPIN POUR DES PARTICULES DE SPIN QUELCONQUE

Considérons un faisceau monocinétique de particules X de spin  $j$  produites dans un certain processus; par exemple dans la diffusion de deux particules  $a$  et  $b$

$$a + b \rightarrow X + c + \dots \quad (2.1)$$

et supposons qu'on cherche à étudier la distribution de spin dans l'ensemble des particules X. En mécanique quantique cet ensemble est un mélange incohérent de  $(2j+1)$  états purs de polarisation,  $|\Phi_n\rangle$ , chacun avec une probabilité  $c_n$  ( $0 \leq c \leq 1$ ) et il est donc décrit par un opérateur matricedensité <sup>(1)</sup>

$$\rho = \sum_{n=-j}^j |\Phi_n\rangle c_n \langle \Phi_n|. \quad (2.2)$$

Dans ce deuxième chapitre d'introduction nous allons résumer les propriétés générales d'une description relativiste de la matrice densité <sup>(2)</sup>. En particulier, nous discutons en détail le lien entre le formalisme covariant et la paramétrisation multipolaire. Ceci nous permettra de montrer quelques formules que nous utiliserons fréquemment dans la suite.

<sup>(1)</sup> Pour une introduction à l'étude de la matrice densité de spin, voir le chapitre V de Dirac [58]. L'article classique pour des applications à la physique nucléaire est celui de Fano [57].

<sup>(2)</sup> Voir Michel [59].

§ 2 a. — Paramétrisation multipolaire  
de la matrice densité.

Nous désignerons par  $\rho(p)_{\tilde{\lambda}}^{\lambda}$  les éléments de matrice de l'opérateur  $\rho$  dans la base canonique  $|p, j\lambda\rangle$  des états à une particule,

$$\rho(p)_{\tilde{\lambda}}^{\lambda} = \langle p, j\lambda | \rho | p, j\tilde{\lambda} \rangle. \quad (2.3)$$

D'après (1.71), les éléments de matrice (2.3) sont liés à ceux de l'opérateur

$$\rho' = U(\Lambda) \rho U^{-1}(\Lambda), \quad (2.4)$$

par la loi de transformation suivante

$$\rho(p)_{\tilde{\lambda}}^{\lambda} = D^{(j)}[R^{-1}(u, \Lambda)]_{\tilde{\lambda}'}^{\lambda} D^{(j)}[R(u, \Lambda)]_{\tilde{\lambda}}^{\lambda'} \rho'(\Lambda p)_{\tilde{\lambda}'}^{\lambda'}, \quad (2.5)$$

avec

$$R(u, \Lambda) = \Lambda_{t \rightarrow \Lambda u}^{-1} \Lambda \Lambda_{t \rightarrow u} \quad \text{et} \quad u = p/m.$$

Nous pouvons appliquer au produit  $D^{(j)}(R^{-1})D^{(j)}(R)$  la formule de réduction (1.63) en utilisant (1.51 a, b) et (1.56). On trouve ainsi les relations

$$\begin{pmatrix} \tilde{\lambda} & L & j \\ j & M & \lambda \end{pmatrix} \rho(p)_{\tilde{\lambda}}^{\lambda} = D^{(L)}[R(u, \Lambda)]_{\tilde{\lambda}'}^{M'} \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}' & L & j \\ j & M' & \lambda' \end{pmatrix} \rho'(\Lambda p)_{\tilde{\lambda}'}^{\lambda'}, \quad (2.6)$$

où les indices L et M prennent des valeurs entières comprises dans les intervalles

$$0 \leq L \leq 2j \quad \text{et} \quad -L \leq M \leq L. \quad (2.7)$$

Pour chaque valeur de L, l'ensemble des  $2L + 1$  éléments

$$\bar{t}_{\mathbf{M}}^{(L)}(p) = \sqrt{2j+1} \begin{pmatrix} \tilde{\lambda} & L & j \\ j & M & \lambda \end{pmatrix} \rho(p)_{\tilde{\lambda}}^{\lambda} \quad (2.8)$$

sont d'après (2.6) les éléments d'un tenseur irréductible :

$$\bar{t}_{\mathbf{M}}^{(L)}(p) = D^{(L)}[R(u, \Lambda)]_{\mathbf{M}'}^{M'} \bar{t}_{\mathbf{M}'}^{(L)}(\Lambda p). \quad (2.9)$$

L'expression du développement des éléments  $\rho(p)_{\tilde{\lambda}}^{\lambda}$  en termes des paramètres  $\bar{t}_{\mathbf{M}}^{(L)}(p)$  est obtenue par inversion de (2.8). En tenant compte de la relation d'orthogonalité des symboles 3 - j (1.60) on trouve le résultat

$$\rho(p)_{\tilde{\lambda}}^{\lambda} = \frac{(-1)^{2j}}{\sqrt{2j+1}} \sum_{\mathbf{L}, \mathbf{M}} (2L+1) \bar{t}_{\mathbf{M}}^{(L)}(p) \begin{pmatrix} \mathbf{M} & \lambda & j \\ \mathbf{L} & j & \tilde{\lambda} \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Nous appellerons *paramètres multipolaires* de la matrice densité les éléments  $\bar{t}_{\mathbf{M}}^{(L)}(p)$  et *développement multipolaire de la matrice densité* l'expression (2.10).

Voyons quelques propriétés des paramètres  $t_M^{(L)}(p)$  :

1° Le terme  $t_0^{(0)}(p)$  est égal à  $\text{tr } \rho(p)$ . En effet,

$$\bar{t}_0^{(0)}(p) = \sqrt{2j+1} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & j \\ j & 0 & \lambda \end{pmatrix} \rho(p)_{\lambda\lambda} = \sum_{\lambda} \rho(p)_{\lambda\lambda}.$$

La condition  $\text{tr } \rho = 1$  implique donc (\*)

$$t_0^{(0)} = 1. \tag{2.11}$$

2° L'hermiticité de la matrice densité implique les relations

$$\bar{t}_{-M}^{(L)}(p) = (-1)^M t_M^{(L)}(p). \tag{2.12}$$

En effet, les quantités

$$\sqrt{2j+1} (-1)^M \begin{pmatrix} \lambda & L & j \\ j & M & \lambda \end{pmatrix} \overline{\rho(p)}_{\lambda\lambda}^{\sim} = (-1)^M t_M^{(L)}(p)$$

et

$$\sqrt{2j+1} \begin{pmatrix} \tilde{\lambda} & L & j \\ j & -M & \lambda \end{pmatrix} \rho(p)_{\tilde{\lambda}\lambda}^{\lambda} = \bar{t}_{-M}^{(L)}(p)$$

ont la même loi de transformation (2.9). On montre leur égalité en utilisant la condition d'hermiticité  $\overline{\rho(p)}_{\lambda\lambda}^{\sim} = \rho(p)_{\lambda\lambda}^{\lambda}$  et des propriétés de symétrie des symboles 3 - j.

3° Le fait que la matrice densité soit définie positive entraîne des restrictions supplémentaires (\*) pour les paramètres multipolaires  $t_M^{(L)}(p)$ . En particulier,

$$\text{tr } \rho^2(p) \leq \text{tr } \rho(p) \tag{2.13}$$

implique l'inégalité

$$\sum_{L=0}^{2j} \sum_{M=-L}^L (2L+1) |t_M^{(L)}(p)|^2 \leq 2j+1. \tag{2.14}$$

(\*) Notons que, avec la normalisation (1.72), on devrait choisir

$$t_0^{(0)}(p) = 2 |p_0| \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}')$$

Nous faisons un abus de langage en appelant « unité » la mesure invariante

$$2 |p_0| \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}')$$

(\*) A notre connaissance ces restrictions n'ont pas été exploitées d'une façon complète. Williams [64] a réussi à les exprimer en fonction des traces de puissances de  $\rho$ . Malheureusement, le passage aux paramètres multipolaires introduit des expressions algébriquement trop compliquées. Néanmoins, pour  $j = 1$ , voir Zwanziger [64]. Voir aussi Minnaert [65]. Ce problème a été résolu récemment par Pierre Minnaert, « Spin density matrix analysis. Positivity conditions and Eberhard-Good theorem » (Preprint de l'Ecole Polytechnique n° A83.566, 1966). Voir aussi R. H. Dalitz, « Constraints on the Statistical Tensor for Low-Spin particles produced in Strong Interactions » (Preprint, 1966).

En effet,

$$\begin{aligned} \text{tr } \rho^2(p) &= \frac{(-1)^{2j}}{2j+1} \sum_{L,M} \sum_{L',M'} (2L+1)(2L'+1) \bar{t}_M^{(L)}(p) t_{M'}^{(L')}(p) \\ \sum_{\tilde{\lambda}, \lambda} \begin{pmatrix} M & \lambda & j \\ L & j & \tilde{\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M' & \lambda & j \\ L' & j & \tilde{\lambda} \end{pmatrix} &= \frac{1}{2j+1} \sum_{L,M} (2L+1) |t_M^{(L)}(p)|^2 ; \end{aligned}$$

résultat qui porté dans (2.13) entraîne (2.14).

D'autres restrictions pour les  $t_M^{(L)}$  apparaissent lorsqu'on tient compte des symétries dans le processus de production. Nous discuterons celles-ci dans le § 6 a.

L'ensemble des paramètres multipolaires  $t_M^{(L)}(p)$  caractérise entièrement l'information qu'on a sur le système physique décrit par la matrice densité  $\rho$ . En fait, c'est le but principal des chapitres à suivre de discuter la façon de mesurer ces paramètres dans des réalisations physiques particulières. Pour le moment, nous allons nous limiter dans la suite de ce chapitre à l'analyse des propriétés formelles de ces paramètres et à leur interprétation physique.

**§ 2 b. — Développement de la matrice densité  
sur une base d'opérateurs tensoriels irréductibles.  
Degré de polarisation  $2^l$ -polaire. Degré de polarisation.**

L'opérateur polarisation  $W_\mu$  associé à une particule d'énergie-impulsion  $p$  a été déjà défini dans le chapitre précédent. Par rapport à une tétrade de référence  $\{t, \vec{n}\}$  et dans le 3-plan orthogonal à la direction  $u = p/m$  nous allons choisir comme trièdre de base  $\vec{s}$  celui qu'on obtient à partir de  $\vec{n}$  par la transformation de Lorentz pure  $\Lambda_{t \rightarrow u}$  [voir (1.70)]. Les projections de l'opérateur  $W$  sur ce trièdre sont les composantes de l'opérateur de spin

$$\vec{S}_p = -\frac{1}{m} W \cdot \vec{s}. \quad (2.15 a)$$

Nous pouvons aussi introduire une base sphérique de composantes

$$Y_M^{(l)}(\vec{s}_\alpha) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{\sqrt{2}} (s_\alpha^{(1)} - i s_\alpha^{(2)}) & \text{pour } M = -1 \\ s_\alpha^{(0)} & \text{pour } M = 0, \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} (s_\alpha^{(1)} + i s_\alpha^{(2)}) & \text{pour } M = 1 \end{array} \right. \quad (2.16)$$

et définir la projection de l'opérateur  $W$  sur cette base :

$$Y_{\mathbf{M}}^{(1)}(\vec{S}_p) = -\frac{1}{m} W^\alpha Y_{\mathbf{M}}^{(1)}(\vec{s}_\alpha). \quad (2.15 b)$$

L'opérateur ainsi construit est un opérateur tensoriel irréductible d'ordre 1. En effet,

$$U(\Lambda) Y_{\mathbf{M}}^{(1)}(\vec{S}_p) U^{-1}(\Lambda) = -\frac{1}{m} (\Lambda^{-1} W)^\alpha Y_{\mathbf{M}}^{(1)}(\vec{s}_\alpha) = -\frac{1}{m} W^\alpha Y_{\mathbf{M}}^{(1)}[(\Lambda \vec{s})_\alpha], \quad (2.17)$$

mais puisque  $\Lambda = \Lambda_{t \rightarrow \Lambda u} R(u, \Lambda) \Lambda_{t \rightarrow u}^{-1}$  [voir (1.44)] et  $\vec{s} = \Lambda_{t \rightarrow u} \vec{n}$ , le terme de droite dans (2.17) peut aussi s'écrire sous la forme

$$-\frac{1}{m} (\Lambda_{t \rightarrow \Lambda u}^{-1} W)^\alpha Y_{\mathbf{M}}^{(1)}[(R(u, \Lambda) \vec{n})_\alpha].$$

En outre

$$Y_{\mathbf{M}}^{(1)}[(R(u, \Lambda) \vec{n})] = D^{(1)}[R_{ij}(u, \Lambda)]^M Y_{\mathbf{M}'}^{(1)}(\vec{n}),$$

avec

$$R_{ij}(u, \Lambda) = -\Lambda_{t \rightarrow \Lambda u} n^{(i)} \cdot \Lambda \Lambda_{t \rightarrow u} n^{(j)}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1.45)$$

En tenant compte de ces résultats on arrive à la loi de transformation suivante

$$U(\Lambda) Y_{\mathbf{M}}^{(1)}(\vec{S}_p) U^{-1}(\Lambda) = D^{(1)}[R_{ij}(u, \Lambda)]^M Y_{\mathbf{M}'}^{(1)}(\vec{S}_{\Lambda p}) \quad (2.18)$$

avec

$$Y_{\mathbf{M}}^{(1)}(\vec{S}_{\Lambda p}) = -\frac{1}{m} W^\alpha Y_{\mathbf{M}}^{(1)}[(\Lambda_{t \rightarrow \Lambda u} \vec{n})_\alpha].$$

L'expression (2.18) est la généralisation relativiste de la loi de transformation d'un opérateur tensoriel irréductible d'ordre 1.

D'une façon générale, les  $(2L + 1)$  composantes d'un *opérateur tensoriel irréductible d'ordre L* construites à partir de l'opérateur  $\vec{S}_p$  sont données de la manière suivante <sup>(5)</sup> :

$$Y_{\mathbf{M}}^{(L)}(\vec{S}_p) = \left(-\frac{1}{m}\right)^L W^{\alpha_1} W^{\alpha_2} \dots W^{\alpha_L} Y_{\mathbf{M}}^{(L)}(\vec{s}_{\alpha_1}, \vec{s}_{\alpha_2}, \dots, \vec{s}_{\alpha_L}), \quad (2.19)$$

<sup>(5)</sup> Voir Henry et de Rafael [65].

où les fonctions  $Y_M^{(L)}(\vec{s}_{\alpha_1}, \vec{s}_{\alpha_2}, \dots, \vec{s}_{\alpha_L})$  sont des tenseurs d'ordre  $L$  complètement symétriques construits à partir de  $Y_M^{(L)}(\vec{s})$  par symétrisation des produits des composantes  $s^{(i)}i = 1, 2, 3$ . Par exemple,

$$Y_1^{(2)}(\vec{s}_{\alpha_1}, \vec{s}_{\alpha_2}) = -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} (s_{\alpha_1}^{(3)} s_{\alpha_2}^{(1)} + s_{\alpha_1}^{(1)} s_{\alpha_2}^{(3)} + i s_{\alpha_1}^{(3)} s_{\alpha_2}^{(2)} + i s_{\alpha_1}^{(2)} s_{\alpha_2}^{(3)});$$

$$Y_0^{(3)}(\vec{s}_{\alpha_1}, \vec{s}_{\alpha_2}, \vec{s}_{\alpha_3}) = \frac{1}{12} \sqrt{\frac{7}{\pi}} (6 s_{\alpha_1}^{(3)} s_{\alpha_2}^{(3)} s_{\alpha_3}^{(3)} - 3 s_{\alpha_1}^{(2)} s_{\alpha_2}^{(2)} s_{\alpha_3}^{(3)} - 3 s_{\alpha_1}^{(2)} s_{\alpha_2}^{(3)} s_{\alpha_3}^{(2)} - 3 s_{\alpha_1}^{(3)} s_{\alpha_2}^{(2)} s_{\alpha_3}^{(2)} - 3 s_{\alpha_1}^{(1)} s_{\alpha_2}^{(1)} s_{\alpha_3}^{(3)} - 3 s_{\alpha_1}^{(1)} s_{\alpha_2}^{(3)} s_{\alpha_3}^{(1)} - 3 s_{\alpha_1}^{(3)} s_{\alpha_2}^{(1)} s_{\alpha_3}^{(1)}).$$

Les opérateurs  $Y_M^{(L)}(\vec{S}_p)$  ainsi construits ont la loi de transformation

$$U(\Lambda) Y_M^{(L)}(\vec{S}_p) U^{-1}(\Lambda) = D^{(L)}[R_{ij}(\Lambda)]^M Y_M^{(L)}(\vec{S}_{\Lambda p}), \quad (2.20)$$

et leurs éléments de matrice dans la base canonique  $|p, j\lambda\rangle$  s'expriment d'après le théorème de Wigner-Eckart (\*) par la relation

$$\langle p, j\lambda | Y_M^{(L)}(\vec{S}_p) | p, j\tilde{\lambda} \rangle = \sqrt{2j+1} \begin{pmatrix} \lambda & L & j \\ j & M & \tilde{\lambda} \end{pmatrix} \langle p, j | Y^{(L)}(\vec{S}_p) | p, j \rangle, \quad (2.21)$$

où les éléments de matrice réduits  $\langle p, j | Y^{(L)}(\vec{S}_p) | p, j \rangle$  ont d'après (2.20) la propriété d'être invariants relativistes; c'est-à-dire

$$\langle p, j | Y^{(L)}(\vec{S}_p) | p, j \rangle = \langle \Lambda p, j | Y^{(L)}(\vec{S}_{\Lambda p}) | \Lambda p, j \rangle. \quad (2.22)$$

Considérons ensuite les opérateurs suivants :

$$T_M^{(L)*}(p) = (\langle p, j | Y^{(L)}(\vec{S}_p) | p, j \rangle)^{-1} Y_M^{(L)}(\vec{S}_p). \quad (2.23)$$

Le théorème de Wigner-Eckart nous montre d'après (2.21) qu'il est possible d'exprimer les éléments de matrice de ces opérateurs entre les états à une particule en fonction des symboles  $3-j$  (voir table 2.1) :

$$\langle p, j\lambda | T_M^{(L)*}(p) | p, j\tilde{\lambda} \rangle = \sqrt{2j+1} \begin{pmatrix} \lambda & L & j \\ j & M & \tilde{\lambda} \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

Dans cette base d'états à une particule on calcule facilement les relations d'orthonormalité entre les opérateurs  $T_M^{(L)}(p)$ ,

$$\text{tr} (T_M^{(L)}(p) T_M^{(L)*}(p)) = \frac{2j+1}{2L+2} \delta_{LL'} \delta_{MM'} \quad (2.25)$$

(\*) Voir par exemple le chapitre XXIII du livre de Wigner [59].

avec

$$0 \leq L, L' \leq 2j \quad \text{et} \quad -L \leq M \leq L; \quad -L' \leq M' \leq L'.$$

L'équation (2.24) nous montre que les opérateurs tensoriels irréductibles forment une base complète pour l'opérateur matrice densité décrivant un mélange de particules d'énergie-impulsion  $p$  et spin  $j$ . Les coefficients du développement de la matrice densité sur cette base ne sont autres que les paramètres multipolaires  $\bar{t}_M^{(L)}(p)$  définis par l'égalité (2.8) :

$$\rho(p) = \frac{1}{2j+1} \sum_{L=0}^{2j} \sum_{M=-L}^L (2L+1) \bar{t}_M^{(L)}(p) T_M^{(L)}(p); \quad (2.26)$$

les  $\bar{t}_M^{(L)}$  sont donnés d'autre part par la relation

$$\bar{t}_M^{(L)}(p) = \text{tr} (\rho T_M^{(L)*}(p)). \quad (2.27)$$

L'expression (2.26) peut aussi s'exprimer sous une forme explicitement covariante en utilisant les définitions (2.19) et (2.23). On arrive ainsi au résultat suivant :

$$\begin{aligned} \rho = \frac{1}{2j+1} + \sum_{L=1}^{2j} \left(\frac{-1}{m}\right)^L W^{\alpha_1} W^{\alpha_2} \dots W^{\alpha_L} \sigma_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_L} = \frac{1}{2j+1} - \frac{1}{m} W^\alpha \sigma_\alpha \\ + \frac{1}{m^2} W^\alpha W^\beta \sigma_{\alpha\beta} - \frac{1}{m^3} W^\alpha W^\beta W^\gamma \sigma_{\alpha\beta\gamma} + \dots, \end{aligned} \quad (2.28)$$

avec

$$\sigma_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_L} = \frac{2L+1}{2j+1} \sum_{M=-L}^L \bar{t}_M^{(L)}(p) \frac{Y_M^{(L)}(\vec{s}_{\alpha_1}, \vec{s}_{\alpha_2}, \dots, \vec{s}_{\alpha_L})}{\langle p, j \| Y^{(L)}(\vec{S}_p) \| p, j \rangle}. \quad (2.29)$$

D'après ces relations nous voyons qu'il est également possible de prendre comme ensemble de paramètres pour décrire la matrice densité  $\rho$  les composantes des tenseurs  $\sigma_\alpha, \sigma_{\alpha\beta}, \dots, \sigma_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2j}}$ . Le lien entre ces derniers et les paramètres multipolaires  $\bar{t}_M^{(L)}(p)$  est donné par la formule (2.29). D'après cette formule, les tenseurs  $\sigma_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2j}}$  ont les propriétés suivantes

1° Ils sont complètement symétriques

$$\sigma_{\dots \alpha_i \dots \alpha_k \dots} = \sigma_{\dots \alpha_k \dots \alpha_i \dots}, \quad \forall i, k \in (1, 2, \dots, L). \quad (2.30)$$

2° Ils sont orthogonaux à l'énergie-impulsion  $p$

$$\sigma_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_i \dots \alpha_L} p^{\alpha_i} = 0, \quad \forall i \in (1, 2, \dots, L). \quad (2.31)$$

3° Ils s'annulent par contraction de deux indices répétés :

$$\sigma_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_i \dots \alpha_L}^{\alpha_i} = 0, \quad \forall i \in (1, 2, \dots, L). \quad (2.32)$$

Les  $2j$  scalaires  $\sigma_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_L}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_L}$ , d'après la formule (2.29), sont égaux aux quantités

$$\sigma_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_L}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_L} = C(L, j) \sum_{M=-L}^L |t_M^{(L)}(p)|^2 \quad (2.33)$$

avec

$$C(L, j) = \left( \frac{2L+1}{2j+1} \right)^2 \frac{Y_0^{(L)}(\vec{s}_{\alpha_1}, \dots, \vec{s}_{\alpha_L}) Y_0^{(L)}(\vec{s}^{\alpha_1}, \dots, \vec{s}^{\alpha_L})}{(\langle p, j \| Y^{(L)}(\vec{S}_p) \| p, j \rangle)^2}. \quad (2.34)$$

Pour trouver les valeurs explicites des éléments de matrice réduits, il suffit de particulariser la formule (2.21) au cas  $M = 0$  et calculer pour chaque valeur de  $L \in (0, 1, \dots, 2j)$  les quantités

$$\frac{\langle p, j\lambda | Y_0^{(L)}(\vec{S}_p) | p, j\lambda \rangle}{\sqrt{2j+1} \begin{pmatrix} \lambda & L & j \\ j & 0 & \lambda \end{pmatrix}} = \langle p, j \| Y^{(L)}(\vec{S}_p) \| p, j \rangle. \quad (2.35)$$

Par exemple, dans le cas où  $L = 1$  on trouve

$$\langle p, j \| Y^{(1)}(\vec{S}_p) \| p, j \rangle = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sqrt{j(j+1)} \quad (2.36)$$

et

$$C(1, j) = \frac{-9}{(2j+1)^2(j+1)j}; \quad (2.37)$$

dans le cas où  $L = 2$ , on a

$$\langle p, j \| Y^{(2)}(\vec{S}_p) \| p, j \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \sqrt{(2j+3)(2j-1)(j+1)j} \quad (2.38)$$

et

$$C(2, j) = \frac{150}{(2j+1)^2(2j+3)(2j-1)(j+1)j}. \quad (2.39)$$

Nous appellerons *degré de polarisation 2<sup>L</sup>-polaire* la quantité

$$\delta^{(L)} = [(-1)^L \sigma_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_L}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_L}]^{1/2}. \quad (2.40)$$

Lorsqu'on a  $\delta^{(L)} = 0$  pour tout  $L \in (1, 2, \dots, 2j)$  nous dirons que le système n'est pas polarisé. La matrice densité est alors proportionnelle à la matrice

unité. Parfois dans la littérature (\*) on utilise la nomenclature suivante : on dit que le système est *polarisé* s'il y a au moins un  $\delta^{(L)} \neq 0$  pour L impair; et on dit que le système est *aligné* lorsqu'il y a au moins un  $\delta^{(L)} \neq 0$  pour L pair et  $\delta^{(L)} = 0$  pour tout L impair. En général, on dit qu'un système est *orienté* dès qu'un des  $\delta^{(L)}$  pour  $L \neq 0$  est différent de zéro, quelle que soit la parité de L.

Le *degré de polarisation*  $\delta$  est donné, d'après Fano [52], par l'expression

$$\delta^2 = \left[ \text{tr } \rho^2 - \frac{1}{2j+1} \right] \frac{2j+1}{2j}. \quad (2.41)$$

Pour un état pur  $\delta = 1$ ; pour une distribution uniforme sur tous les états,  $\delta = 0$ . L'expression de  $\delta$  en fonction des paramètres multipolaires  $t_M^{(L)}$  est la suivante

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{2j}} \left[ \sum_{L=1}^{2j} (2L+1) \sum_{M=-L}^L |t_M^{(L)}|^2 \right]^{1/2}. \quad (2.42)$$

Parfois il est intéressant d'utiliser le *degré de polarisation polaire*  $\delta_0$  défini par l'expression

$$\delta_0 = \frac{1}{\sqrt{2j}} \left[ \sum_{L=1}^{2j} (2L+1) (t_0^{(L)})^2 \right]^{1/2}. \quad (2.43)$$

Nous allons conclure ce chapitre avec la discussion d'une classe particulière de systèmes physiques décrits par une matrice densité : ceux pour lesquels il existe un axe de symétrie. Dans ce cas, nous choisirons comme axe de quantification précisément l'axe de symétrie. Dans le système au repos ( $t = p/m$ ) les éléments de matrice  $\rho_{\lambda\lambda'}^{\lambda}$  (voir (2.3)) sont alors invariants par rapport aux rotations autour de l'axe de quantification

$$\rho_{\lambda\lambda'}^{\lambda} = e^{i\varphi(\lambda'-\lambda)} \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\lambda'\lambda} \rho_{\lambda\lambda'}^{\lambda};$$

c'est-à-dire que  $\rho_{\lambda\lambda'}^{\lambda}$  est diagonal

$$\rho_{\lambda\lambda'}^{\lambda} = \delta_{\lambda\lambda'} c_{\lambda}$$

et d'après (2.8), seuls les paramètres multipolaires  $t_0^{(L)}$  peuvent être non nuls

$$\bar{t}_M^{(L)} = \delta_{M,0} \sqrt{2j+1} \begin{pmatrix} \lambda & L & j \\ j & 0 & j \end{pmatrix} c_{\lambda}.$$

(\*) Voir par exemple Fraunfelder et al. [65].

Cette dernière relation permet d'obtenir une borne supérieure explicite pour les degrés de polarisation  $\delta^{(L)}$ . En effet, d'après (2.33) et (2.40) on a dans ce cas

$$\delta^{(L)} = \sqrt{(-1)^L C(L, j)} |t_0^{(L)}| \leq \sqrt{(-1)^L (2j+1) C(L, j)} \sum_{\lambda} c_{\lambda} \left| \begin{pmatrix} j & j & L \\ \lambda & -\lambda & 0 \end{pmatrix} \right|,$$

et puisque  $c_{\lambda} \geq 0$  et  $\sum_{\lambda} c_{\lambda} = 1$ ,

$$\delta^{(L)} \leq \left\{ (-1)^L (2j+1) C(L, j) \text{Max}_{\lambda \in (-j, \dots, j)} \begin{pmatrix} j & j & L \\ \lambda & -\lambda & 0 \end{pmatrix}^2 \right\}^{1/2} \quad (2.44)$$

En particulier, pour  $L = 1$ , on trouve

$$\delta^{(1)} \leq \frac{3}{2j+1} \frac{1}{j+1}; \quad (2.45)$$

pour  $L = 2$ , on a

$$\delta^{(2)} \leq \frac{10}{(2j+1)(2j+3)(2j-1)(j+1)} \text{Max}_{\lambda \in (-j, \dots, j)} |3\lambda^2 - j(j+1)|. \quad (2.46)$$

Notons que, bien que (2.44) soit une expression particulière aux systèmes possédant un axe de symétrie, la borne (2.45) de  $\delta^{(1)}$  est un résultat complètement général. En effet, il suffit de se placer dans le système de référence où la composante  $s_{\alpha}^{(3)}$  est parallèle à la direction de polarisation  $\sigma_{\alpha}$  pour qu'on ait  $t_{\pm 1}^{(1)}(p) = 0$ . Puisque  $\rho(p)_{\lambda}^{\lambda} \geq 0$  et  $\sum_{\lambda} \rho(p)_{\lambda}^{\lambda} = 1$ , nous pouvons encore

appliquer la majoration précédente qui permet de trouver le résultat (2.45).

Notons encore que pour les systèmes physiques possédant un axe de symétrie, le degré de polarisation  $\delta$  coïncide avec le degré de polarisation polaire  $\delta_0$ .

TABLE 2.1 <sup>(8)</sup>

Éléments de matrice  $(T_M^{(L)*})_{\lambda}^{\lambda} = \sqrt{2j+1} \begin{pmatrix} \lambda & L & j \\ j & M & \lambda \end{pmatrix}$ , pour  $j = \frac{1}{2}$  et  $L = 1, j = 1$  et  $L = 1, 2; j = 3/2$  et  $L = 1, 2, 3$  (Voir formule (2.24).

$j = 1/2, \quad L = 1$	
$(T_0^{(1)*}) = 1/\sqrt{3} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$	$(T_1^{(1)*}) = -1/\sqrt{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$

<sup>(8)</sup> Notons que les indices des lignes et colonnes sont numérotés en partant de  $-j, -j+1, \dots, j$  pour  $\lambda$  et  $\lambda'$ .

TABLE 2.1 (suite)

$j = 1, \quad L = 1, 2.$	
$(T_0^{(1)})^* = 1/\sqrt{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$	$(T_1^{(1)})^* = -1/\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$(T_0^{(2)})^* = 1/\sqrt{10} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$	$(T_1^{(2)})^* = \frac{1}{2}\sqrt{3/5} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$
$(T_2^{(2)})^* = \frac{1}{2}\sqrt{3/5} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	
$j = 3/2, \quad L = 1, 2, 3.$	
$(T_0^{(1)})^* = 1/\sqrt{15} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix};$	$(T_1^{(1)})^* = -\sqrt{2/15} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$
$(T_0^{(2)})^* = 1/\sqrt{5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$	$(T_1^{(2)})^* = -\sqrt{2/5} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$(T_2^{(2)})^* = \sqrt{2/5} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	
$(T_0^{(3)})^* = -1/\sqrt{35} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$	$(T_2^{(3)})^* = \sqrt{4/35} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
$(T_2^{(3)})^* = -\sqrt{2/7} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$	$(T_3^{(3)})^* = \sqrt{4/7} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

## PREMIÈRE PARTIE

**Cinématique relativiste des fonctions de Vertex.  
Applications.**

## INTRODUCTION

Par fonction de vertex nous entendons la valeur moyenne d'un opérateur densité de courant entre les états physiques à une particule. Dans la représentation de Heisenberg elle est décrite par l'expression

$$\langle p', j'\lambda' | j^\alpha(x) | p, j\lambda \rangle, \quad (\text{I. 1})$$

où l'indice  $\alpha$  indique les composantes de l'opérateur densité de courant et  $|p, j\lambda\rangle$ ,  $|p', j'\lambda'\rangle$  sont des états à une particule d'énergie-impulsion  $p, p'$ ; spin  $j, j'$  et nombre quantique magnétique  $\lambda, \lambda'$  (voir (1.68 a, b, c, d)).

L'invariance d'une fonction de vertex par les translations d'espace-temps s'exprime ainsi

$$\langle p', j'\lambda' | j^\alpha(x) | p, j\lambda \rangle = \langle p', j'\lambda' | U^{-1}(I, a) j^\alpha(x + a) U(I, a) | p, j\lambda \rangle;$$

en particulier pour  $a = -x$ , on déduit en tenant compte de la loi de transformation des états (1.71),

$$\langle p', j'\lambda' | j^\alpha(x) | p, j\lambda \rangle = e^{i(p'-p)x} \langle p, j'\lambda' | j^\alpha(0) | p, j\lambda \rangle. \quad (\text{I. 2})$$

Cette relation permet de nous limiter à l'étude des fonctions de vertex à l'origine d'espace-temps. La quantité

$$q = p' - p \quad (\text{I. 3})$$

est l'énergie-impulsion de transfert du vertex et son carré  $q^2$  est la seule variable scalaire dont dépende le vertex.

A l'heure actuelle, plusieurs modèles phénoménologiques de processus de diffusion consistent essentiellement à factoriser la matrice S sous forme de produit de fonctions de vertex. C'est le cas, par exemple, dans le calcul

de la structure électromagnétique du nucléon, au premier ordre dans le couplage électromagnétique mais en tenant compte des effets d'interaction forte à tous les ordres. C'est aussi le cas dans les interactions faibles lorsqu'on calcule l'amplitude de transition des désintégrations leptoniques des particules hadroniques. C'est encore le cas dans de nombreux processus de diffusion en physique des couplages forts où, à une bonne approximation, les modèles périphériques <sup>(1)</sup> sont valables. Dans ces modèles, toute la structure dynamique du processus est réduite à la connaissance des fonctions de vertex.

Dans le cas où l'état initial et l'état final dans (I.1) correspondent à des particules scalaires et où l'opérateur densité de courant est un scalaire,

$$(\square + m^2)\varphi(x) = j(x),$$

on a

$$\langle p' | j(0) | p \rangle \equiv V(q^2),$$

et le vertex est alors décrit simplement par une fonction scalaire de  $q^2$  dont la forme explicite dépend de la dynamique du type de couplage des trois champs scalaires.

En général, pour des particules avec spin nous aurons une fonction à plusieurs composantes pour décrire le vertex

$$\langle p', j'\lambda' | j^\alpha(0) | p, j\lambda \rangle \equiv V^\alpha(p', p)^{\lambda'\lambda}. \quad (\text{I.4})$$

La conservation de la parité dans le processus décrit par le vertex implique des restrictions sur ces composantes; de même l'invariance par renversement du mouvement. Il est intéressant d'obtenir ces restrictions d'une façon systématique et de les énoncer sous forme de règles de sélection. Ceci fait l'objet du chapitre III.

Dans le chapitre IV nous étudions le développement des composantes  $V^\alpha(p', p)^{\lambda'\lambda}$  en fonctions invariantes relativistes de  $q^2$ , facteurs de forme multipolaires. Nous obtenons ainsi des expressions phénoménologiques rigoureuses pour n'importe quel vertex déduites uniquement du principe d'invariance relativiste.

Quelques résultats des chapitres III et IV sont déjà bien connus; énoncés

<sup>(1)</sup> Un modèle d'échange d'un pion pour décrire la réaction  $\pi + p \rightarrow \pi + \pi + N$  a été introduit par Chew et Low [59]. La généralisation de ce modèle à d'autres processus a été suggérée simultanément par plusieurs auteurs : Drell [60] [61]; Salzman et Salzman [60 a] [60 b]; Ferrari et Selleri [62]. Des raffinements du modèle périphérique (simple échange d'une particule) ont été proposés par : Sopkovich [62]; Gottfried et Jackson [64]; Durand et Chiu [64 a] [64 b] et [65]; Ross et Show [64]. Pour une revue des contributions récentes voir Jackson [65 b].

peut-être sous forme différente <sup>(2)</sup>. Dans cette première partie nous avons essayé de déduire les propriétés cinématiques des vertex en utilisant une technique qui nous semble fort pratique dans le but d'obtenir des formules générales. C'est la même technique qui sera utilisée dans les autres parties.

### CHAPITRE III

#### LES RÈGLES DE SÉLECTION DANS UN VERTEX. APPLICATIONS

Le but de ce chapitre est d'obtenir les règles de sélection qu'on doit imposer aux fonctions de vertex décrivant des processus invariants par rapport aux symétries d'espace-temps : inversion d'espace (parité) et renversement du mouvement. Nous montrerons à partir des lois générales de transformation des états et de l'opérateur densité de courant comment ces règles s'énoncent. On considérera d'abord les cas où l'opérateur densité de courant est un opérateur scalaire ou pseudoscalaire, vectoriel ou pseudovectoriel (voir l'Énoncé 1 dans le § 3 a et l'Énoncé 2 dans le § 3 b). Les éléments de matrice d'un vertex dans l'espace des polarisations sont alors donnés explicitement pour plusieurs types de couplage (voir table 3.1 et table 3.2). Ensuite nous généralisons les discussions précédentes au cas d'un opérateur densité de courant ayant la loi de transformation d'un champ de spin  $s$  quelconque. Le formalisme à  $2s + 1$  composantes rend convenable cette discussion. Les résultats correspondants sont donnés dans l'Énoncé 3 et l'Énoncé 4.

#### § 3 a. — Application du théorème de Bohr aux fonctions de vertex (invariance par partie).

##### Énoncé 1. Exemples.

Considérons le cas où l'opérateur densité de courant d'un vertex est un opérateur scalaire ou pseudoscalaire  $j(x)$ ; ou un opérateur vectoriel ou axial  $j^\mu(x)$  et voyons quelles sont les règles de sélection qui expriment la conservation de la parité dans les vertex décrits par des fonctions du type

$$V(p', p)^{\lambda'}_{\lambda} \equiv \langle p', j^{\lambda'} | j(0) | p, j^{\lambda} \rangle$$

---

<sup>(2)</sup> Voir notamment l'article de Durand, De Celles et Marr [62], voir aussi F. J. Ernst, R. G. Sachs et K. C. Wali [60].

ou

$$V^\mu(p', p)^{\lambda'}_\lambda \equiv \langle p', j'\lambda' | j^\mu(0) | p, j\lambda \rangle$$

pour des valeurs du spin des particules initiales et finales,  $j$  et  $j'$ , arbitraires. Une réponse, particulièrement intéressante pour les applications, est celle donnée par une version du théorème de Bohr [59] adapté aux fonctions de vertex. Du point de vue géométrique, un vertex est un 2-plan orienté dans le temps, celui défini par les quadrivecteurs énergie-impulsion  $p$  et  $p'$  des particules réelles initiale et finale. Dans le 2-plan orthogonal au vertex, il est commode de fixer un quadrivecteur  $n$  comme axe commun de quantification du spin des particules d'énergie-impulsion  $p$  et  $p'$  :

$$n \cdot p = 0 \quad \text{et} \quad n \cdot p' = 0, \quad (3.1 \text{ a, b})$$

avec

$$n^2 = -1. \quad (3.2)$$

La méthode de Bohr consiste à étudier l'invariance du système par l'opération

$$\Sigma_n = 1 + 2n \otimes n; \quad (3.3)$$

c'est-à-dire, l'opération de symétrie pour l'hyperplan orthogonal à  $n$ . Notons que, par rapport à une tétrade de référence  $\{t, \vec{n}\}$ , avec  $n^{(3)} \equiv n$ , on peut aussi écrire (3.3) sous la forme <sup>(1)</sup>

$$\Sigma_n = R_n(\pi)P, \quad (3.4)$$

où  $P$  est l'opération parité et  $R_n(\pi)$  une rotation d'angle  $\pi$  autour de l'axe  $n$ . En tenant compte de cette relation, la loi de transformation des états à une particule induite par  $\Sigma_n$  est alors [voir (1.71) et (1.76)]

$$U(\Sigma_n) |p, j\lambda\rangle = U(R_n(\pi)) U(P) |p, j\lambda\rangle = (-1)^\lambda \in |p, j\lambda\rangle. \quad (3.5)$$

La loi de transformation correspondante pour l'opérateur densité de courant dépend des propriétés spinorielles de celle-ci :

a) pour un opérateur scalaire ou pseudoscalaire,

$$U(\Sigma_n) j(0) U^{-1}(\Sigma_n) = \eta j(0) \quad (3.6)$$

avec  $\eta = +1$  (scalaire),  $\eta = -1$  (pseudoscalaire);

---

<sup>(1)</sup> Par rapport à  $\{t, \vec{n}\}$ , le produit  $\Sigma_{n(1)}\Sigma_{n(2)}$  est une rotation d'angle  $\pi$  autour de l'axe  $n$  :  $R_n^{-1}(\pi) = \Sigma_{n(1)}\Sigma_{n(2)}$ . L'opération  $\Sigma_{n(1)}\Sigma_{n(2)}\Sigma_n$  appartient à  $L_\perp^\uparrow$  et commute avec toutes les opérations du petit groupe de  $t$ ; c'est l'opération parité. Nous avons donc  $P = R_n^{-1}(\pi)\Sigma_n$ , d'où la relation (3.4).

b) pour un opérateur vectoriel ou pseudovectoriel  $j^{a,b}(0)$  ( $\alpha, \beta = \mp 1$ )<sup>(2)</sup>,

$$U(\Sigma_n) j^{\alpha,\beta}(0) U^{-1}(\Sigma_n) = -\eta j^{-\beta,-\alpha}(0), \quad (3.7)$$

avec  $\eta = -1$  (vecteur),  $\eta = +1$  (pseudovecteur).

Dans ces cas, l'invariance des fonctions de vertex par rapport à  $\Sigma_n$  s'exprime donc ainsi,

$$V(p', p)^{\lambda'}_{\lambda} = \eta \varepsilon \varepsilon' (-1)^{\lambda-\lambda'} V(p', p)^{\lambda'}_{\lambda};$$

et

$$V^{\alpha,\beta}(p', p)^{\lambda'}_{\lambda} = \langle p', j^{\alpha,\beta}(0) | p, j^{\lambda} \rangle = -\eta \varepsilon \varepsilon' (-1)^{\lambda-\lambda'} V^{-\beta,-\alpha}(p', p)^{\lambda'}_{\lambda}; \quad (3.8)$$

d'où les règles de sélection suivantes :

### Énoncé I.

L'invariance du vertex par rapport à la réflexion  $\Sigma_n$  [voir (3.3) et (3.4)] implique :

a) Dans les cas d'un courant scalaire ( $\eta = 1$ ) ou pseudoscalaire ( $\eta = -1$ ), seuls les éléments de matrice  $V(p', p)^{\lambda'}_{\lambda}$  tels que

$$\eta \varepsilon \varepsilon' (-1)^{\lambda-\lambda'} = 1, \quad (3.9)$$

où  $\lambda' = -j', \dots, j'$ ;  $\lambda = -j, \dots, j$  peuvent être non nuls.

b) Dans les cas d'un courant vectoriel ( $\eta = -1$ ) ou pseudo-vectoriel ( $\eta = +1$ ), seuls les éléments de matrice  $V^{\mu}(p', p)^{\lambda'}_{\lambda}$  tels que

$$\eta \varepsilon \varepsilon' (-1)^{\lambda-\lambda'} = -1, \quad \text{pour } \mu = 0, 1, 2; \quad (3.10 a)$$

$$\eta \varepsilon \varepsilon' (-1)^{\lambda-\lambda'} = +1, \quad \text{pour } \mu = 3 \quad (3.10 b)$$

(correspondant à la direction de quantification), où  $\lambda' = -j', \dots, j'$ ;  $\lambda = -j, \dots, j$  peuvent être non nuls.

Ces règles sélectionnent certains des éléments de la matrice représentative

---

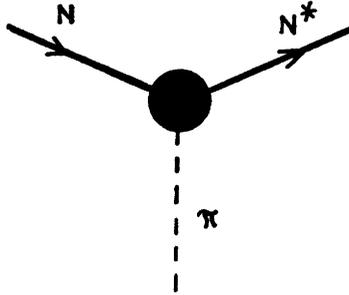
(2) Les opérateurs  $j^{\alpha,\beta}(0)$  sont les composantes de la matrice

$$\begin{pmatrix} j^0(0) - j^3(0) & j^1(0) + ij^2(0) \\ j^1(0) - ij^2(0) & j^0(0) + j^3(0) \end{pmatrix},$$

où  $j^{\mu}(0) = 0, 1, 2, 3$  sont les composantes habituelles d'espace-temps.

du vertex dans l'espace des polarisations selon que la valeur de la parité intrinsèque du vertex est  $\pm 1$ . Nous allons voir ceci dans quelques exemples :

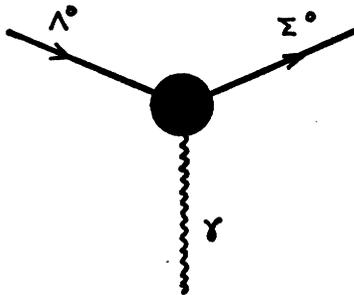
1°  $N + \pi$  (virtuel)  $\rightarrow N_{3/2}^*$ .



Dans ce cas on a  $\eta_{\pi\pi} = -1$  et, d'après la relation (3.9),  $(-1)^{\lambda-\lambda'} = -1$ . La matrice  $V(p', p)_{\lambda\lambda'}$  dans l'espace des polarisations s'écrit :

$$\begin{matrix} \lambda = -1/2, & \lambda = 1/2 \\ \lambda' = -3/2 & \left[ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right] \\ \lambda' = -1/2 & \left[ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right] \\ \lambda' = 1/2 & \left[ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right] \\ \lambda' = 3/2 & \left[ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right] \end{matrix} \quad (3.11)$$

2° Production de  $\Sigma^0$  par excitation coulombienne de  $\Lambda^0$ .

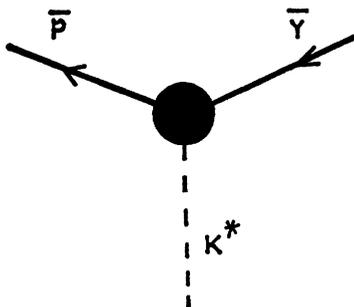


C'est un exemple d'application de la règle (3.10 a),

$$(-1)^{\lambda-\lambda'} = \text{parité relative } \Sigma - \Lambda. \quad (3.12)$$

Cette relation implique que le  $\Sigma^0$  et le  $\Lambda^0$  ont des polarisations parallèles à un même axe orthogonal au vertex; ces polarisations sont de même signe ou de signe contraire selon la parité relative  $\Sigma - \Lambda$  (Nous avons traité ce cas explicitement ailleurs, de Rafael [62]).

$$3^0 \bar{p} \rightarrow \bar{Y} + K^* \text{ (virtuel).}$$



Le  $K^*$  est une particule vectorielle ( $\eta_{\epsilon\epsilon'} = -1$ ). Nous appliquons donc les règles (3.10 a, b). Chaque composante du vertex ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ) est une matrice  $2 \times 2$  qui, dans l'espace des polarisations, s'écrit :

$$\begin{aligned} & \lambda = -1/2 \quad \lambda = 1/2 ; \quad \lambda = -1/2 \quad \lambda = 1/2 ; \\ \lambda' = & -1/2 \left[ \begin{pmatrix} & 0 \\ 0 & \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} & 0 \\ 0 & \end{pmatrix} \right. \\ \lambda' = & 1/2 \left[ \begin{pmatrix} & 0 \\ 0 & \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} & 0 \\ 0 & \end{pmatrix} \right] \quad (3.13) \\ & \mu = 0 \qquad \qquad \qquad \mu = 1 \\ & \lambda = -1/2 \quad \lambda = 1/2 ; \quad \lambda = -1/2 \quad \lambda = 1/2 \\ & \begin{pmatrix} & 0 \\ 0 & \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} & 0 \\ 0 & \end{pmatrix} \\ & \mu = 2 \qquad \qquad \qquad \mu = 3 \end{aligned}$$

Nous reviendrons plus tard sur ces exemples.

### § 3 b. — Invariance par renversement du mouvement. Énoncé 2. Exemples.

Tout en restant dans les cas particuliers d'un courant scalaire ou pseudo-scalaire, ou d'un courant vectoriel ou axial, nous allons étendre la méthode du paragraphe précédent à l'étude de l'invariance du vertex par renversement du mouvement.

Nous étudierons l'invariance du système par rapport au produit d'opérations

$$\pi_t = R_n(\pi)\Sigma_t, \quad (3.14)$$

où  $R_n(\pi)$  est une rotation de  $\pi$  autour de l'axe  $n$  et  $\Sigma_t$  l'opération inversion de temps

$$\Sigma_t = 1 - 2t \otimes t. \quad (3.15)$$

L'opérateur  $U(\Sigma_t)$  étant antiunitaire (Wigner [59], chap. XXVI; voir aussi Bargmann [64 b]), l'invariance du vertex par rapport à  $\pi_t$  s'exprime ainsi

$$V^{\alpha,\beta}(p', p)^{\lambda'} = \langle p', j'\lambda' | U^{-1}(\pi_t) U(\pi_t) j^{\alpha,\beta}(0) U^{-1}(\pi_t) U(\pi_t) | p, j\lambda \rangle. \quad (3.16)$$

D'après les relations (1.71) et (1.77), on a

$$U(\pi_t) | p, j\lambda \rangle = U[R_n(\pi)] U(\Sigma_t) | p, j\lambda \rangle = (-1)^j | p, j - \lambda \rangle; \quad (3.17)$$

en ce qui concerne la transformation de  $j^{\alpha,\beta}(0)$  par  $U(\pi_t)$ , on a :

a) pour un opérateur scalaire ou pseudoscalaire,

$$U(\pi_t) j(0) U^{-1}(\pi_t) = j(0); \quad (3.18)$$

b) pour un opérateur vectoriel ou pseudovectoriel,

$$U(\pi_t) j^{\alpha,\beta}(0) U^{-1}(\pi_t) = j^{-\beta, -\alpha}(0). \quad (3.19)$$

Ces résultats portés dans la relation (3.16) nous donnent les règles suivantes :

### Énoncé 2.

L'invariance du vertex par rapport à l'opération  $\pi_t$  [voir (3.14) et (3.15)] implique :

a) Dans les cas d'un courant scalaire ou pseudoscalaire, les relations

$$\overline{V(p', p)^{\lambda'}} = (-1)^{j-j'} V(p', p)^{-\lambda'}_{-\lambda}; \quad (3.20)$$

$$(\lambda' = -j', \dots, j'; \quad \lambda = -j, \dots, j)$$

b) Dans les cas d'un courant vectoriel ou pseudovectoriel, les relations

$$\overline{V^{\alpha,\beta}(p', p)^{\lambda'}} = (-1)^{j-j'} V^{-\beta, -\alpha}(p', p)^{-\lambda'}_{-\lambda}. \quad (3.21)$$

$$(\lambda' = -j', \dots, j'; \quad \lambda = -j, \dots, j)$$

Ces dernières relations, exprimées pour chacune des composantes vectorielles ou pseudovectorielles  $V^\mu(p', p)^{\lambda'}$ , s'écrivent <sup>(2)</sup> : pour  $\mu = 0, 1, 2$

$$\overline{V^{0,1,2}(p', p)^{\lambda'}} = (-1)^{j-j'} V^{0,1,2}(p', p)^{-\lambda'}_{-\lambda}; \quad (3.22 a)$$

pour  $\mu = 3$  (composante sur la direction de quantification),

$$\overline{V^3(p', p)^{\lambda'}} = (-1)^{j-j'+1} V^3(p', p)^{-\lambda'}_{-\lambda}. \quad (3.22 b)$$

Ces règles imposent certaines restrictions de réalité aux éléments de la matrice représentative du vertex dans l'espace des polarisations. A titre d'*exemple* nous allons les appliquer aux vertex (1), (2) et (3) discutés dans le § 3 a :

$$1^{\circ} N + \pi \text{ (virtuel)} \rightarrow N^*.$$

Les relations (3.20) nous permettent de détailler d'avantage la structure de la matrice (3.11) :

$$\begin{array}{l} \lambda = -1/2, \quad \lambda = 1/2 \\ \lambda' = -3/2 \left[ \begin{array}{cc} -a & 0 \\ 0 & -b \end{array} \right] \\ \lambda' = 1/2 \left[ \begin{array}{cc} \bar{b} & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{array} \right] \end{array} \quad (3.23)$$

$$2^{\circ} \Lambda^0 + \gamma \text{ (coulombienne)} \rightarrow \Sigma^0.$$

La parité relative  $\Sigma - \Lambda$  étant connu à l'heure actuelle <sup>(3)</sup> <sup>(4)</sup> (= + 1), la matrice représentant ce vertex dans l'espace des polarisations s'écrit :

$$\begin{array}{l} \lambda = -1/2 \quad \lambda = 1/2 \\ \lambda' = -1/2 \left( \begin{array}{cc} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{array} \right), \end{array} \quad (3.24)$$

$$3^{\circ} \bar{p} \rightarrow \bar{Y} + K^* \text{ (virtuel)} \text{ } ^{(5)}.$$

Nous appliquons ici les relations (3.22 a, b). La matrice (3.13) s'écrit alors :

$$\begin{array}{l} \lambda = -1/2, \quad \lambda = 1/2; \quad \lambda = -1/2, \quad \lambda = 1/2; \\ \lambda = -1/2 \left( \begin{array}{cc} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{cc} b & 0 \\ 0 & \bar{b} \end{array} \right) \\ \lambda = 1/2 \left( \begin{array}{cc} c & 0 \\ 0 & \bar{c} \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{cc} 0 & d \\ -\bar{d} & 0 \end{array} \right); \end{array} \quad (3.25)$$

<sup>(3)</sup> La première détermination de la parité relative  $\Sigma - \Lambda$ , par une méthode indirecte, a été celle de Trip, Watson et Ferro-Luzzi [62]. L'expérience directe — par mesure du spectre de paires de Dalitz dans  $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda + e^+ + e^-$  — a été faite au C. E. R. N.; voir Courant *et al.* [63]; l'expérience plus récente est celle du groupe de Columbia, Nussbaum *et al.* [65]. Pour une description théorique systématique des processus  $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda^0 + \gamma$  et  $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda^0 + e^+ + e^-$ , voir Michel et Rouhaninejad [61 c].

<sup>(4)</sup> Notons, toutefois l'intérêt du processus  $\Lambda^0 + \gamma$  (coulomb.)  $\rightarrow \Sigma^0$  comme méthode pour mesurer la vie moyenne de  $\Sigma^0$  (voir Dreitlein et Primakoff [62]).

<sup>(5)</sup> L'échange d'un  $K^*$  est un bon modèle pour le processus  $p\bar{p} \rightarrow \Lambda\Lambda$  (voir Bessis, Itzykson et Jacob [63]) (pour une étude des corrélations angulaires dans  $\bar{p}p \rightarrow \bar{Y}Y$  en tenant compte de la possibilité que le faisceau d'antiprotons soit polarisé, voir Nuyts et de Rafael [63]; Messiah et Cohen Tannoudji [64]).

§ 3 c. — **Éléments de matrice dans l'espace des polarisations pour les vertex correspondant à des courants pseudo-scalaires et vectoriels.**

A titre d'application des règles de sélection établies dans le § 3 a et le § 3 b, nous avons construit des tables des matrices représentatives d'un vertex dans l'espace des polarisations, correspondant à des particules hadroniques. Nous suivons des notations standards de la classification des particules par le groupe SU(3) :

- P indique un méson appartenant à l'octet 0<sup>-</sup>;
- V un méson 1<sup>-</sup>;
- B un baryon 1/2<sup>+</sup>;
- et B\* un baryon du décuplet 3/2<sup>+</sup>.

Les diagrammes de la table 3.1 correspondent à des courants pseudo-scalaires; ceux de la table 3.2 à des courants vectoriels.

TABLE 3.1

*Éléments de matrice dans l'espace des polarisations pour les vertex correspondant à des courants pseudoscalaires.*

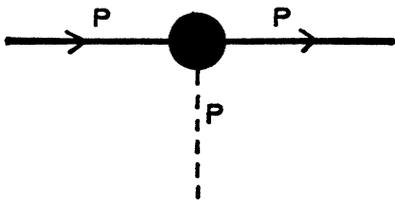
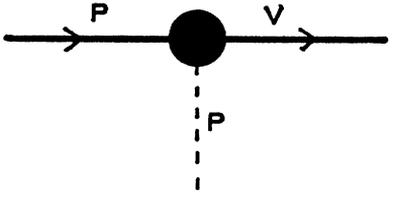
Diagramme	Matrice dans l'espace des polarisations : $V(p', p)^\lambda_\lambda$
	Interdit par conservation de parité
	$\lambda=0$ $\lambda' = -1$ $\lambda' = 0$ $\lambda' = 1$ $\begin{bmatrix} a \\ 0 \\ -\bar{a} \end{bmatrix}$

TABLE 3.1 (suite)

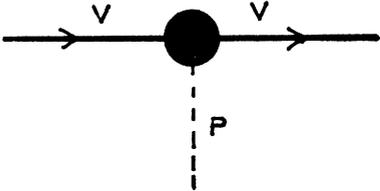
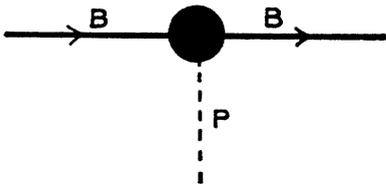
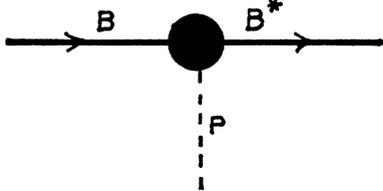
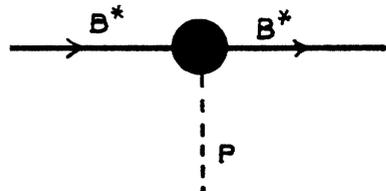
Diagramme	Matrice dans l'espace des polarisations : $V(p', p)^{\lambda' \lambda}$
	$\begin{array}{l} \lambda = -1 \quad \lambda = 0 \quad \lambda = 1 \\ \lambda' = -1 \\ \lambda' = 0 \\ \lambda' = 1 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & \bar{b} \\ 0 & \bar{a} & 0 \end{bmatrix}$
	$\begin{array}{l} \lambda = -1/2 \quad \lambda = 1/2 \\ \lambda' = -1/2 \\ \lambda' = 1/2 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & a \\ \bar{a} & 0 \end{bmatrix}$
	$\begin{array}{l} \lambda = -1/2 \quad \lambda = 1/2 \\ \lambda' = -3/2 \\ \lambda' = -1/2 \\ \lambda' = 1/2 \\ \lambda' = 3/2 \end{array} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \\ -\bar{b} & 0 \\ 0 & -\bar{a} \end{bmatrix}$
	$\begin{array}{l} \lambda = -3/2 \quad \lambda = -1/2 \quad \lambda = 1/2 \quad \lambda = 3/2 \\ \lambda' = -3/2 \\ \lambda' = -1/2 \\ \lambda' = 1/2 \\ \lambda' = 3/2 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & \bar{d} & 0 & \bar{c} \\ \bar{b} & 0 & \bar{a} & 0 \end{bmatrix}$

TABLE 3.2

*Éléments de matrice dans l'espace des polarisations pour les vertex correspondant à des courants vectoriels.*

Diagramme	Matrice dans l'espace des polarisations : $V^\mu(p', p)^{\lambda'\lambda}$	
<p>avec <math>\bar{a}_\mu = a_\mu</math>.</p>	$a_{0,1,2};$ $\mu=0, 1, 2$	$a_3=0$ $\mu=3$
<p>avec <math>\bar{a}_{0,1,2} = -a_{0,1,2}</math></p>	$\lambda=0$ $\lambda' = -1 \begin{bmatrix} 0 \\ a_{0,1,2} \\ 0 \end{bmatrix}$ $\lambda' = 0$ $\lambda' = 1 \begin{bmatrix} 0 \\ a_{0,1,2} \\ 0 \end{bmatrix}$ $\mu=0, 1, 2$	$\lambda=0$ $\lambda' = -1 \begin{bmatrix} b_3 \\ 0 \\ b_3 \end{bmatrix}$ $\lambda' = 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\lambda' = 1 \begin{bmatrix} b_3 \\ 0 \\ b_3 \end{bmatrix}$ $\mu=3$
	$\lambda = -1 \quad \lambda = 0 \quad \lambda = 1$ $\lambda' = -1 \begin{bmatrix} a_{0,1,2} & 0 & b_{0,1,2} \\ 0 & c_{0,1,2} = \bar{c}_{0,1,2} & 0 \\ \bar{b}_{0,1,2} & 0 & \bar{a}_{0,1,2} \end{bmatrix}$ $\mu=0, 1, 2$	$\lambda = -1 \quad \lambda = 0 \quad \lambda = 1$ $\lambda' = -1 \begin{bmatrix} 0 & a_3 & 0 \\ b_3 & 0 & -\bar{b}_3 \\ 0 & -\bar{a}_3 & 0 \end{bmatrix}$ $\mu=3$
	$\lambda = -1/2 \quad \lambda = 1/2$ $\lambda' = -1/2 \begin{bmatrix} a_{0,1,2} & 0 \\ 0 & \bar{a}_{0,1,2} \end{bmatrix}$ $\mu=0, 1, 2$	$\lambda = -1/2 \quad \lambda = 1/2$ $\lambda' = -1/2 \begin{bmatrix} 0 & a_3 \\ -\bar{a}_3 & 0 \end{bmatrix}$ $\mu=3$

TABLE 3.2 (suite)

Diagramme	Matrice dans l'espace des polarisations : $V(p', p)^\lambda$	
	$\lambda = -1/2 \quad \lambda = 1/2$ $\lambda' = -3/2$ $\lambda' = -1/2$ $\lambda' = 1/2$ $\lambda' = 3/2$	$\lambda = -1/2 \quad \lambda = 1/2$ $\lambda' = -3/2$ $\lambda' = -1/2$ $\lambda' = 1/2$ $\lambda' = 3/2$
	$\mu = 0, 1, 2$	$\mu = 3$
	$\lambda = -3/2 \quad \lambda = -1/2 \quad \lambda = 1/2 \quad \lambda = 3/2$ $\lambda' = -3/2$ $\lambda' = -1/2$ $\lambda' = 1/2$ $\lambda' = 3/2$	$\lambda = -3/2 \quad \lambda = -1/2 \quad \lambda = 1/2 \quad \lambda = 3/2$ $\lambda' = -3/2$ $\lambda' = -1/2$ $\lambda' = 1/2$ $\lambda' = 3/2$
	$\mu = 0, 1, 2$	$\mu = 3$

§ 3 d. — Généralisation au cas d'un courant  
 ayant la loi de transformation d'un champ de spin arbitraire.  
 Énoncé 3. Énoncé 4.

Nous allons maintenant généraliser les énoncés 1 et 2 au cas d'un vertex où l'opérateur densité de courant à la loi de transformation d'un champ de spin arbitraire.

Dans le formalisme à  $(2s + 1)$  composantes et dans la représentation d'Heisenberg, on a pour un champ de spin  $s$  <sup>(6)</sup>,

$$(\square + m^2)\varphi^\alpha(x) = j_{(s,0)}^\alpha(x), \quad (\square + m^2)\chi^\alpha(x) = j_{(0,s)}^\alpha(x). \quad (3.26 a, b)$$

Les composantes  $j_{(s,0)}^\alpha(x)$ ,  $j_{(0,s)}^\alpha(x)$  ont la loi de transformation

$$U(a, \Lambda) j_{(s,0)}^\alpha(x) U^{-1}(a, \Lambda) = D^{(s,0)}(\Lambda^{-1})^\alpha_{\alpha'} j_{(s,0)}^{\alpha'}(\Lambda x + a), \quad (3.27 a)$$

$$U(a, \Lambda) j_{(0,s)}^\alpha(x) U^{-1}(a, \Lambda) = D^{(0,s)}(\Lambda^{-1})^\alpha_{\alpha'} j_{(0,s)}^{\alpha'}(\Lambda x + a); \quad (3.27 b)$$

où  $D^{(s,0)}(\Lambda^{-1})$  et  $D^{(0,s)}(\Lambda^{-1})$  sont des représentations irréductibles finies (non unitaires) de  $SL(2, c)$ .

<sup>(6)</sup> Voir par exemple Weinberg [64].

Rappelons-nous aussi les lois de transformation par P et T :

$$U(P)j_{(s,0)}^\alpha(x)U^{-1}(P) = \eta_P j_{(0,s)}^\alpha(Px), \quad (3.28 a)$$

$$U(P)j_{(0,s)}^\alpha(x)U^{-1}(P) = \eta_P j_{(s,0)}^\alpha(Px); \quad (3.28 b)$$

$$U(T)j_{(s,0)}^\alpha(x)U^{-1}(T) = (-1)^{s+\alpha} j_{(s,0)}^{-\alpha}(Tx), \quad (3.29 a)$$

$$U(T)j_{(0,s)}^\alpha(x)U^{-1}(T) = (-1)^{s+\alpha} j_{(0,s)}^{-\alpha}(Tx). \quad (3.29 b)$$

Le vertex est alors décrit par l'ensemble des fonctions

$$V_{(s,0)}^\alpha(p', p)^{\lambda'}_\lambda \equiv \langle p', j' | j_{(s,0)}^\alpha(0) | p, j \rangle \quad (3.30 a)$$

et

$$V_{(0,s)}^\alpha(p', p)^{\lambda'}_\lambda \equiv \langle p', j'\lambda' | j_{(0,s)}^\alpha(0) | p, j\lambda \rangle \quad (3.30 b)$$

Tenant compte des définitions précédentes, les énoncés 1 et 2 se généralisent d'une façon immédiate au cas d'un courant correspondant à un champ de spin arbitraire :

### Énoncé 3.

L'invariance d'un vertex par rapport à l'opération  $\Sigma_n$  (produit de l'opération parité par une rotation d'angle  $\pi$  autour de l'axe  $n$  de quantification) implique les relations (formalisme à  $(2s + 1)$  composantes pour l'opérateur densité de courant)

$$V_{(s,0)}^\alpha(p', p)^{\lambda'}_\lambda = \eta_P \varepsilon \bar{\varepsilon}' (-1)^{\lambda-\lambda'-\alpha} V_{(0,s)}^\alpha(p', p)^{\lambda'}_\lambda \quad (3.31 a)$$

$$V_{(0,s)}^\alpha(p', p)^{\lambda'}_\lambda = \eta_P \varepsilon \bar{\varepsilon}' (-1)^{\lambda-\lambda'-\alpha} V_{(s,0)}^\alpha(p', p)^{\lambda'}_\lambda, \quad (3.31 b)$$

où

$$\alpha = -s, \dots, s; \quad \lambda' = -j', \dots, j'; \quad \lambda = -j, \dots, j.$$

### Énoncé 4.

L'invariance d'un vertex par rapport à l'opération  $\pi_t$  (produit de l'opération renversement de temps par une rotation d'angle  $\pi$  autour de l'axe  $n$  de quantification) implique les relations (formalisme à  $(2s + 1)$  composantes pour l'opérateur densité de courant)

$$\overline{V_{(s,0)}^\alpha(p', p)^{\lambda'}_\lambda} = (-1)^{s+j-j'} V_{(s,0)}^{-\alpha}(p', p)^{-\lambda'}_{-\lambda}; \quad (3.32 a)$$

$$\overline{V_{(0,s)}^\alpha(p', p)^{\lambda'}_\lambda} = (-1)^{s+j-j'} V_{(0,s)}^{-\alpha}(p', p)^{-\lambda'}_{-\lambda}, \quad (3.32 b)$$

où

$$\alpha = -s, \dots, s; \quad \lambda' = -j', \dots, j'; \quad \lambda = -j, \dots, j.$$

Les règles énoncées dans ce chapitre nous seront utiles dans la suite, notamment dans l'étude des développements multipolaires des fonctions de vertex.

## CHAPITRE IV

**PARAMÉTRISATION MULTIPOLAIRE  
DES FONCTIONS DE VERTEX.  
CLASSIFICATION DES FACTEURS DE FORME**

Soit  $q$  le quadrivecteur transfert d'énergie-impulsion dans un vertex,

$$q = p - p' \quad (4.1)$$

avec

$$p^2 = m^2 \quad \text{et} \quad p'^2 = m'^2; \quad (4.2)$$

et désignons par  $k$  le quadrivecteur

$$k = p + p', \quad (4.3)$$

et par  $e$  le quadrivecteur situé dans le 2-plan  $(p, p')$  qui est orthogonal à  $q$  :

$$e = [(k \cdot q)^2 - k^2 q^2]^{-\frac{1}{2}} \{ (k \cdot a)q - (q \cdot a)k \}, \quad (4.4)$$

avec

$$a = \frac{q}{\sqrt{|q^2|}}. \quad (4.5)$$

Par rapport à une tétrade de référence  $\{ t, \vec{n} \}$ , nous introduirons le trivecteur unité

$$\vec{\varepsilon}(a, e) = -e \cdot \Lambda_{t \rightarrow a} \vec{n}, \quad \text{si} \quad q^2 > 0; \quad (4.6 a)$$

$$\vec{\alpha}(e, a) = -a \cdot \Lambda_{t \rightarrow e} \vec{n}, \quad \text{si} \quad q^2 < 0. \quad (4.6 b)$$

Notons que faire le choix de  $t = a$  dans (4.6 a) équivaut à se placer dans le système centre de masse, où la particule virtuelle d'énergie-impulsion  $q$  est au repos, tandis que le choix  $t = e$  dans (4.6 b) revient à se placer dans le système de Breit où le transfert d'énergie-impulsion  $q$  a une composante de temps nulle.

Voyons quelles sont les propriétés de transformation des trivecteurs  $\vec{\varepsilon}(a, e)$  où  $\vec{\alpha}(e, a)$ . Dans ce but, suivant la méthode introduite dans le chapitre premier, nous allons associer à toute transformation de Lorentz  $\Lambda \in L_+^\uparrow$  la rotation du petit groupe de  $t$  :

$$\mathbf{R}(a, \Lambda) = \Lambda_{t \rightarrow \Lambda a}^{-1} \Lambda \Lambda_{t \rightarrow a}, \quad \text{si} \quad q^2 > 0;$$

$$\mathbf{R}(e, \Lambda) = \Lambda_{t \rightarrow \Lambda e}^{-1} \Lambda \Lambda_{t \rightarrow e}, \quad \text{si} \quad q^2 < 0.$$

En appliquant  $R(a, \Lambda)$  et  $R(e, \Lambda)$  aux quadrivecteurs  $\Lambda_{t \rightarrow a}^{-1}e$  et  $\Lambda_{t \rightarrow e}^{-1}a$  respectivement, on trouve d'après (4.6 a, b) les relations

$$\begin{aligned} \text{cas } q^2 > 0, & \quad \vec{\varepsilon}(\Lambda a, \Lambda e) \cdot \vec{n} = \vec{\varepsilon}(a, e) \cdot R(a, \Lambda) \vec{n}, \\ \text{cas } q^2 < 0, & \quad \vec{\alpha}(\Lambda e, \Lambda a) \cdot \vec{n} = \vec{\alpha}(e, a) \cdot R(e, \Lambda) \vec{n}; \end{aligned}$$

c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} \text{cas } q^2 > 0 \quad \varepsilon_i(\Lambda a, \Lambda e) &= \sum_{j=1}^3 R(a, \Lambda)_{ij} \varepsilon_j(a, e), & (4.7 a) \\ i = 1, 2, 3, \quad \text{avec} \quad R(a, \Lambda)_{ij} &= -n^{(i)} \cdot \Lambda_{t \rightarrow \Lambda a}^{-1} \Lambda \Lambda_{t \rightarrow a} n^{(j)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{cas } q^2 < 0, \quad \alpha_i(\Lambda e, \Lambda a) &= \sum_{j=1}^3 R(e, \Lambda)_{ij} \alpha_j(e, a), & (4.7 b) \\ i = 1, 2, 3, \quad \text{avec} \quad R(e, \Lambda)_{ij} &= -n^{(i)} \cdot \Lambda_{t \rightarrow \Lambda e}^{-1} \Lambda \Lambda_{t \rightarrow e} n^{(j)}. \end{aligned}$$

D'une façon générale, les fonctions  $Y_M^{(L)}[\vec{\varepsilon}(a, e)]$  ou  $Y_M^{(L)}[\vec{\alpha}(e, a)]$  sont les harmoniques sphériques du groupe de rotations homomorphe du petit groupe de la direction de temps  $t$  et ont la loi de transformation :

$$\text{cas } q^2 > 0, \quad Y_M^{(L)}[\vec{\varepsilon}(a, e)] = D^{(L)}(\Lambda_{t \rightarrow \Lambda a}^{-1} \Lambda \Lambda_{t \rightarrow a})^{M'}_M Y_M^{(L)}[\vec{\varepsilon}(\Lambda a, \Lambda e)]; \quad (4.8 a)$$

$$\text{cas } q^2 < 0, \quad Y_M^{(L)}[\vec{\alpha}(e, a)] = D^{(L)}(\Lambda_{t \rightarrow \Lambda e}^{-1} \Lambda \Lambda_{t \rightarrow e})^{M'}_M Y_M^{(L)}[\vec{\alpha}(\Lambda e, \Lambda a)]. \quad (4.8 b)$$

Dans la première partie de ce chapitre nous allons montrer comment l'invariance relativiste permet de développer les éléments de matrice

$$V^\mu(p', p)^{\lambda'}_\lambda = \langle p', j' \lambda' | j^\mu(0) | p, j \lambda \rangle$$

en fonction des harmoniques sphériques (4.8 a) ou (4.8 b) selon que  $q^2 > 0$  ou  $q^2 < 0$ . Les coefficients de ce développement sont construits explicitement comme des produits de matrices de représentations du petit groupe de  $t$  par des symboles  $3 - j$ , le tout multiplié par des fonctions de  $q^2$  invariantes relativistes. Nous appelons ces dernières, facteurs de forme.

D'après la relation (1.71), la loi de transformation de  $V^\mu(p', p)^{\lambda'}_\lambda$  par les opérations  $\Lambda \in L^\dagger_\uparrow$  est la suivante :

$$V^\mu(p', p)^{\lambda'}_\lambda = D^{(J')}[R^{-1}(u', \Lambda)]^{\lambda'}_{\tilde{\lambda}'}, \quad D^{(J)}[R(u, \Lambda)]^{\tilde{\lambda}}_\lambda (\Lambda^{-1})^\mu_\nu V^\nu(\Lambda p', \Lambda p)^{\tilde{\lambda}'}_{\tilde{\lambda}}. \quad (4.9)$$

Dans le deuxième membre de cette expression nous avons le produit de l'opération  $\Lambda \in L_{+}^{\uparrow}$  et de deux représentations du petit groupe de  $t$  ( $D^{(j')}$  et  $D^{(j)}$ ) correspondant à des rotations distinctes ( $R^{-1}(u', \Lambda)$  et  $R(u, \Lambda)$ ). Dans le § 4 a, nous étudions les transformations qu'il faut faire sur ce produit de représentations pour obtenir des fonctions irréductibles par rapport au petit groupe de  $t$ . Ceci nous permet de définir ensuite dans le § 4 b les facteurs de forme en termes desquels on peut paramétriser les composantes  $V^{\mu}(p', p)^{\lambda'}$ . Dans le § 4 c nous appliquons aux développements ainsi obtenus les règles de sélection étudiées dans le chapitre précédent. Ces règles imposent des restrictions aux facteurs de forme lorsque le vertex est invariant par réflexion d'espace, par renversement du mouvement, ou par les deux. Nous discutons quelques applications à titre d'exemple.

Le § 4 d est une généralisation des techniques discutées dans les paragraphes précédents au cas d'un vertex où l'opérateur densité de courant a la loi de transformation d'un champ de spin  $s$  quelconque [voir (3.26 a, b)].

#### § 4 a. — Cas d'un courant vectoriel ou axial.

##### Description du vertex en termes de fonctions irréductibles.

Nous définirons une *base canonique* pour les composantes  $V^{\mu}(p', p)^{\lambda'}$  de la façon suivante : selon que  $q^2 > 0$  ou  $q^2 < 0$  nous écrirons :

$$V^{\mu}(p', p)^{\lambda'} = a^{\mu} A(p', p)^{\lambda'} + \vec{f}^{\mu} \cdot \vec{F}(p', p)^{\lambda'}, \quad \text{si } q^2 > 0, \quad (4.10 a)$$

avec  $a^{\mu}$  donné par (4.5) et

$$\vec{f}^{\mu} = \Lambda_{t \rightarrow a} \vec{n}; \quad (4.11 a)$$

ou bien

$$V^{\mu}(p', p)^{\lambda'} = e^{\mu} E(p', p)^{\lambda'} + \vec{h}^{\mu} \cdot \vec{F}(p', p)^{\lambda'}, \quad \text{si } q^2 < 0, \quad (4.10 b)$$

avec  $e^{\mu}$  donné par (4.4) et

$$\vec{h}^{\mu} = (\Lambda_{t \rightarrow e})^{\mu}. \quad (4.11 b)$$

Nous aurons besoin parfois dans la suite d'exprimer  $\vec{F}(p', p)^{\lambda'}$  ou  $\vec{H}(p', p)^{\lambda'}$  dans une base sphérique. Les composantes correspondantes sont données par les relations

$$\left. \begin{aligned} F^{(\pm)}(p', p)^{\lambda'} &= \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \{ F_1 \pm i F_2 \} (p', p)^{\lambda'}, \\ F^{(0)}(p', p)^{\lambda'} &= F_3 (p', p)^{\lambda'}; \end{aligned} \right\} \quad (4.12 a)$$

$$\left. \begin{aligned} H^{(\pm)}(p', p)^{\lambda'}_{\lambda} &= \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \{ H_1 \pm iH_2 \} (p', p)^{\lambda'}_{\lambda}, \\ H^{(0)}(p', p)^{\lambda'}_{\lambda} &= H_3(p', p)^{\lambda'}_{\lambda}. \end{aligned} \right\} \quad (4.12 b)$$

D'après ces définitions en utilisant la relation (4.9) on déduit pour les composantes  $A(p', p)^{\lambda'}_{\lambda}$  et  $\vec{F}(p', p)^{\lambda'}_{\lambda}$  ; ou  $E(p', p)^{\lambda'}_{\lambda}$  et  $\vec{H}(p', p)^{\lambda'}_{\lambda}$  les lois de transformation suivantes (voir Appendice A4) :

cas  $q^2 > 0$ ,

$$A(p', p)^{\lambda'}_{\lambda} = D^{(j')} [R^{-1}(u', \Lambda)]^{\lambda'}_{\tilde{\lambda}'} D^{(j)} [R(u, \Lambda)]^{\tilde{\lambda}}_{\lambda} A(\Lambda p', \Lambda p)^{\tilde{\lambda}'}_{\tilde{\lambda}}, \quad (4.13 a)$$

$$\begin{aligned} F^{(\omega)}(p', p)^{\lambda'}_{\lambda} \\ = D^{(j')} [R^{-1}(u', \Lambda)]^{\lambda'}_{\tilde{\lambda}'} D^{(j)} [R(u, \Lambda)]^{\tilde{\lambda}}_{\lambda} D^{(\alpha)} [R^{-1}(a, \Lambda)]^{\alpha}_{\tilde{\alpha}} F^{(\omega)}(\Lambda p', \Lambda p)^{\tilde{\lambda}'}_{\tilde{\lambda}}, \end{aligned} \quad (4.14 a)$$

avec  $\alpha = +1, 0, -1$  ;

cas  $q^2 < 0$ ,

$$F(p', p)^{\lambda'}_{\lambda} = D^{(j')} [R^{-1}(u', \Lambda)]^{\lambda'}_{\tilde{\lambda}'} D^{(j)} [R(u, \Lambda)]^{\tilde{\lambda}}_{\lambda} E(\Lambda p', \Lambda p)^{\tilde{\lambda}'}_{\tilde{\lambda}}, \quad (4.13 b)$$

$$\begin{aligned} H^{(\omega)}(p', p)^{\lambda'}_{\lambda} \\ = D^{(j')} [R^{-1}(u', \Lambda)]^{\lambda'}_{\tilde{\lambda}'} D^{(j)} [R(u', \Lambda)]^{\tilde{\lambda}}_{\lambda} D^{(\alpha)} [R^{-1}(e, \Lambda)]^{\alpha}_{\tilde{\alpha}} H^{(\omega)}(\Lambda p', \Lambda p)^{\tilde{\lambda}'}_{\tilde{\lambda}}, \end{aligned} \quad (4.16 b)$$

avec  $\alpha = +1, 0, -1$ .

Pour réduire le produit de représentations du petit groupe de  $t$  qui apparaît dans les deuxièmes membres des expressions précédentes, il nous faut d'abord transformer ces relations de façon telle qu'on ait un même argument pour chaque représentation. Voici la méthode que nous avons choisie : selon que  $q^2 > 0$  ou  $q^2 < 0$  et étant donné une transformation  $\Lambda \in L \uparrow$  arbitraire, nous distinguerons une rotation particulière du petit groupe de  $t$  ; elle sera associée au quadrivecteur  $a$  lorsque  $q^2 > 0$ ,

$$R(a, \Lambda) = \Lambda_{t \rightarrow \Lambda a}^{-1} \Lambda \Lambda_{t \rightarrow a}$$

ou au quadrivecteur  $e$  lorsque  $q^2 < 0$ ,

$$R(e, \Lambda) = \Lambda_{t \rightarrow \Lambda e}^{-1} \Lambda \Lambda_{t \rightarrow e}$$

Ensuite nous exprimerons les rotations  $R(u, \Lambda)$  et  $R(u', \Lambda)$  en fonction de  $R(a, \Lambda)$  ou  $R(e, \Lambda)$ . Nous allons prouver à ce propos que pour tout quadrivecteur de genre temps  $u$  on a la relation

$$R(u, \Lambda) = R(\Lambda a, \Lambda_{t \rightarrow \Lambda u}^{-1}) R(a, \Lambda) R^{-1}(a, \Lambda_{t \rightarrow u}^{-1}), \quad \text{lorsque } q^2 > 0; \quad (4.15 a)$$

respectivement,

$$\mathbf{R}(u, \Lambda) = \mathbf{R}(\Lambda e, \Lambda_{t \rightarrow \Lambda u}^{-1}) \mathbf{R}(e, \Lambda) \mathbf{R}^{-1}(e, \Lambda_{t \rightarrow u}^{-1}), \quad \text{lorsque } q^2 < 0. \quad (4.15 b)$$

En effet, considérons par exemple le cas  $q^2 < 0$ . Par définition,

$$\mathbf{R}^{-1}(e, \Lambda_{t \rightarrow u}^{-1}) = \Lambda_{t \rightarrow e}^{-1} \Lambda_{t \rightarrow u} \Lambda_{t \rightarrow \Lambda_{t \rightarrow u}^{-1} e} = \Lambda_{t \rightarrow e}^{-1} \Lambda_{t \rightarrow u} \Lambda_{t \rightarrow u}^{-1} \Lambda_{u \rightarrow e} \Lambda_{t \rightarrow u} = \Lambda_{t \rightarrow e}^{-1} \Lambda_{u \rightarrow e} \Lambda_{t \rightarrow u},$$

et le produit  $\mathbf{R}(\Lambda e, \Lambda_{t \rightarrow \Lambda u}^{-1}) \mathbf{R}(e, \Lambda) \mathbf{R}^{-1}(e, \Lambda_{t \rightarrow u}^{-1})$ , exprimé sous forme de produit de transformations de Lorentz s'écrit donc

$$\begin{aligned} \Lambda_{t \rightarrow \Lambda u}^{-1} \Lambda_{\Lambda u \rightarrow \Lambda e}^{-1} \Lambda_{t \rightarrow \Lambda e} \Lambda_{t \rightarrow \Lambda e}^{-1} \Lambda_{t \rightarrow \Lambda e} \Lambda_{t \rightarrow e} \Lambda_{t \rightarrow e}^{-1} \Lambda_{u \rightarrow e} \Lambda_{t \rightarrow u} \\ = \Lambda_{t \rightarrow \Lambda u}^{-1} \Lambda_{\Lambda u \rightarrow \Lambda e}^{-1} \Lambda_{\Lambda u \rightarrow \Lambda e} \Lambda_{\Lambda u \rightarrow e} \Lambda_{t \rightarrow u} \\ = \Lambda_{t \rightarrow \Lambda u}^{-1} \Lambda_{\Lambda u \rightarrow e} \Lambda_{u \rightarrow e} \Lambda_{t \rightarrow u} = \mathbf{R}(u, \Lambda) \quad \text{c. q. f. d.} \end{aligned}$$

(Notons que le même raisonnement peut être répété de façon complètement analogue avec les expressions correspondant au cas  $q^2 > 0$ ). Dans la suite nous utiliserons la notation suivante

$$\mathbf{R}(u', a) = \Lambda_{t \rightarrow a}^{-1} \Lambda_{u' \rightarrow a} \Lambda_{t \rightarrow u'}. \quad (4.16)$$

En tenant compte des relations (4.15 a b), les lois de transformation (4.13 a, b) et (4.14 a, b) peuvent s'écrire ainsi :

cas  $q^2 > 0$ ,

$$\mathbf{A}(p', p)_{\rho}^{\rho'} = \mathbf{D}^{(j')}[\mathbf{R}^{-1}(a, \Lambda)]_{\rho}^{\rho'} \tilde{\mathbf{D}}^{(j)}[\mathbf{R}(a, \Lambda)]_{\rho}^{\tilde{\rho}} \mathbf{A}(\Lambda p', \Lambda p)_{\tilde{\rho}}^{\tilde{\rho}'}, \quad (4.17 a)$$

avec

$$\mathbf{A}(p', p)_{\rho}^{\rho'} = \mathbf{D}^{(j')}[\mathbf{R}(u', a)]_{\rho}^{\rho'} \mathbf{D}^{(j)}[\mathbf{R}(a, u)]_{\rho}^{\lambda} \mathbf{A}(p', p)_{\lambda}^{\lambda'}; \quad (4.18 b)$$

$$\mathbf{F}^{(\alpha)}(p', p)_{\rho}^{\rho'}$$

$$= \mathbf{D}^{(j')}[\mathbf{R}^{-1}(a, \Lambda)]_{\rho}^{\rho'} \tilde{\mathbf{D}}^{(j)}[\mathbf{R}(a, \Lambda)]_{\rho}^{\tilde{\rho}} \mathbf{D}^{(i)}[\mathbf{R}^{-1}(a, \Lambda)]_{\tilde{\rho}}^{\alpha} \mathbf{F}^{(\alpha)}(\Lambda p', \Lambda p)_{\tilde{\rho}}^{\tilde{\rho}'}, \quad (4.19 a)$$

avec

$$\mathbf{F}^{(\alpha)}(p', p)_{\rho}^{\rho'} = \mathbf{D}^{(j')}[\mathbf{R}(u', a)]_{\rho}^{\rho'} \mathbf{D}^{(j)}[\mathbf{R}(a, u)]_{\rho}^{\lambda} \mathbf{F}(p', p)_{\lambda}^{\lambda'}; \quad (4.20 a)$$

cas  $q^2 < 0$

$$\mathbf{E}(p', p)_{\rho}^{\rho'} = \mathbf{D}^{(j')}[\mathbf{R}^{-1}(e, \Lambda)]_{\rho}^{\rho'} \tilde{\mathbf{D}}^{(j)}[\mathbf{R}(e, \Lambda)]_{\rho}^{\tilde{\rho}} \mathbf{E}(\Lambda p', \Lambda p)_{\tilde{\rho}}^{\tilde{\rho}'}, \quad (4.17 b)$$

avec

$$\mathbf{E}(p', p)^{\rho'}_{\rho} = D^{(j')}[\mathbf{R}(u', e)]^{\rho'}_{\lambda'} D^{(j)}[\mathbf{R}(e, u)]^{\lambda}_{\rho} \mathbf{E}(p', p)^{\lambda'}_{\lambda}; \quad (4.18 b)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^{(\alpha)}(p', p)^{\rho'}_{\rho} \\ = D^{(j')}[\mathbf{R}^{-1}(e, \Lambda)]^{\rho'}_{\tilde{\rho}} D^{(j)}[\mathbf{R}(e, \Lambda)]^{\tilde{\rho}}_{\rho} D^{(\alpha)}[\mathbf{R}^{-1}(e, \Lambda)]^{\alpha}_{\tilde{\alpha}} \mathbf{H}^{(\tilde{\alpha})}(\Lambda p', \Lambda p)^{\tilde{\rho}}_{\tilde{\rho}} \end{aligned} \quad (4.19 b)$$

avec

$$\mathbf{H}^{(\alpha)}(p', p)^{\rho'}_{\rho} = D^{(j')}[\mathbf{R}(u', e)]^{\rho'}_{\lambda'} D^{(j)}[\mathbf{R}(e, u)]^{\lambda}_{\rho} \mathbf{H}(p', p)^{\lambda'}_{\lambda}. \quad (4.20 b)$$

A partir de ces expressions nous pouvons appliquer les techniques habituelles pour réduire les produits  $D^{(j)}(\mathbf{R}^{-1}) D^{(j)}(\mathbf{R})$  dans (4.17 a) ou (4.17 b) et  $D^{(j)}(\mathbf{R}^{-1}) D^{(j)}(\mathbf{R}) D^{(\alpha)}(\mathbf{R}^{-1})$  dans (4.19 a) ou (4.19 b) :

a) Considérons par exemple l'expression (4.17 b) et multiplions à droite et à gauche par le symbole  $3 - j \begin{pmatrix} j' & \rho & L \\ \rho' & j & M \end{pmatrix}$ , en sommant sur les indices  $\rho'$  et  $\rho$ . En tenant compte des formules (1.51 a, b) et (1.63), on trouve la relation,

$$\begin{pmatrix} j' & \rho & L \\ \rho' & j & M \end{pmatrix} \mathbf{E}(p', p)^{\rho'}_{\rho} = D^{(\alpha)}[\mathbf{R}(e, \Lambda)]^m_{\tilde{m}} \begin{pmatrix} j' & \tilde{\rho} & L \\ \tilde{\rho}' & j & M' \end{pmatrix} \mathbf{E}(\Lambda p', \Lambda p)^{\tilde{\rho}}_{\tilde{\rho}}; \quad (4.21 b)$$

c'est-à-dire que pour chacune des valeurs  $L = |j - j'|$ ,  $|j - j' + 1|$ ,  $\dots$ ,  $j + j'$  l'ensemble de fonctions <sup>(1)</sup>

$$\mathbf{E}_M^{(L)}(p', p) = \sqrt{2L + 1} \begin{pmatrix} j' & \rho & L \\ \rho' & j & M \end{pmatrix} D^{(j')}[\mathbf{R}(u', e)]^{\rho'}_{\lambda'} D^{(j)}[\mathbf{R}(e, u)]^{\lambda}_{\rho} \mathbf{E}(p', p)^{\lambda'}_{\lambda}, \quad (4.22 b)$$

avec  $M = -L, \dots, L$ , est irréductible.

b) Le même procédé appliqué à l'expression (4.19 b) nous donne la relation

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} j' & \rho & l \\ \rho' & j & m \end{pmatrix} \mathbf{H}^{(\alpha)}(p', p)^{\rho'}_{\rho} \\ = D^{(\alpha)}[\mathbf{R}(e, \Lambda)]^m_{\tilde{m}} D^{(\alpha)}[\mathbf{R}^{-1}(e, \Lambda)]^{\alpha}_{\tilde{\alpha}} \begin{pmatrix} j' & \tilde{\rho} & l \\ \tilde{\rho}' & j & m' \end{pmatrix} \mathbf{H}^{(\tilde{\alpha})}(\Lambda p', \Lambda p)^{\tilde{\rho}}_{\tilde{\rho}}. \end{aligned} \quad (4.23 b)$$

Nous pouvons poursuivre la réduction du produit  $D^{(j)}(\mathbf{R}) D^{(\alpha)}(\mathbf{R}^{-1})$  en multipliant (4.23 b) par le symbole  $3 - j \begin{pmatrix} 1 & m & L \\ \alpha & l & M \end{pmatrix}$  et en sommant sur les indices  $\alpha$

<sup>(1)</sup> Le facteur  $\sqrt{2L + 1}$  dans (4.22 a, b) est un facteur de normalisation choisi de façon telle que pour  $j' = 0$  on ait

$$\mathbf{E}_M^{(L)}(p', p) = \mathbf{E}_\rho^{(j)}(p', p).$$

et  $m$ . En utilisant les formules (1.51 a, b) et (1.63) on arrive au résultat :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} j' & \rho & l \\ \rho' & j & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & m & L \\ \alpha & l & M \end{pmatrix} \mathbf{H}^{(\omega)}(p', p)^{\rho' \rho} \\ & = D^{(\omega)}[\mathbf{R}(e, \Lambda)]_{\mathbf{M}}^{\mathbf{M}'} \begin{pmatrix} j' & \tilde{\rho} & l \\ \tilde{\rho}' & j & \tilde{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \tilde{m} & L \\ \tilde{\alpha} & l & M' \end{pmatrix} \mathbf{H}^{(\tilde{\omega})}(\Lambda p', \Lambda p)^{\tilde{\rho}' \tilde{\rho}}; \quad (4.24 b) \end{aligned}$$

c'est-à-dire que pour chacune des valeurs  $L = |l - 1|, l, l + 1$ , où  $l = |j - j'|, |j - j' + 1|, \dots, j + j'$ , l'ensemble des fonctions <sup>(2)</sup>

$$\begin{aligned} & \mathbf{H}_{\mathbf{M}}^{(L,l)}(p', p) = \sqrt{(2l + 1)(2L + 1)} \\ & \begin{pmatrix} j' & \rho & l \\ \rho' & j & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & m & L \\ \alpha & l & M \end{pmatrix} D^{(j')}[\mathbf{R}(u', e)]^{\rho' \lambda'} D^{(j)}[\mathbf{R}(e, u)]^{\lambda \rho} \mathbf{H}^{(\omega)}(p', p)^{\lambda' \lambda}, \quad (4.25 b) \end{aligned}$$

avec  $M = -L, \dots, L$ , est irréductible.

Les mêmes opérations appliquées aux expressions (4.17 a) et (4.19 a) correspondant au cas  $q^2 > 0$  nous permettent d'obtenir les fonctions irréductibles suivantes :

$$\begin{aligned} & \mathbf{A}_{\mathbf{M}}^{(L)}(p', p) = \sqrt{2L + 1} \\ & \begin{pmatrix} j' & \rho & L \\ \rho' & j & M \end{pmatrix} D^{(j')}[\mathbf{R}(u', a)]^{\rho' \lambda'} D^{(j)}[\mathbf{R}(a, u)]^{\lambda \rho} \mathbf{A}(p', p)^{\lambda' \lambda}; \quad (4.22 a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{F}_{\mathbf{M}}^{(L,l)}(p', p) = \sqrt{(2l + 1)(2L + 1)} \\ & \begin{pmatrix} j' & \rho & l \\ \rho' & j & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & m & L \\ \alpha & l & M \end{pmatrix} D^{(j')}[\mathbf{R}(u', a)]^{\rho' \lambda'} D^{(j)}[\mathbf{R}(a, u)]^{\lambda \rho} \mathbf{F}(p', p)^{\lambda' \lambda}, \quad (4.25 a) \end{aligned}$$

Pour une valeur de  $q^2$  fixée et par rapport à une tétrade de référence  $\{t, \vec{n}\}$ , les fonctions  $\mathbf{E}_{\mathbf{M}}^{(L)}(p', p)$  et  $\mathbf{H}_{\mathbf{M}}^{(L,l)}(p', p)$  ou  $\mathbf{A}_{\mathbf{M}}^{(L)}(p', p)$  et  $\mathbf{F}_{\mathbf{M}}^{(L,l)}(p', p)$ , selon que  $q^2 < 0$  ou  $q^2 > 0$  ne dépendent que des constantes  $m^2, m'^2$ ; de  $q^2$ ; et des composantes du trivecteur  $\vec{\alpha}(e, a)$  ou  $\vec{\varepsilon}(a, e)$ . Nous allons voir dans le paragraphe suivant comment cette propriété permet de donner aux fonctions irréductibles une structure plus explicite.

#### § 4 b. — Facteurs de forme. Paramétrisation multipolaire.

D'après les lois de transformation (4.8 b) et (4.21), (4.24 b), les fonctions (4.22 b) et (4.25 b) contractées avec les harmoniques sphériques (4.8 a, b) :

$$\sum_{\mathbf{M}} \mathbf{E}_{\mathbf{M}}^{(L)}[q^2; \vec{\alpha}(e, a)] \bar{\mathbf{Y}}_{\mathbf{M}}^{(L)}[\vec{\alpha}(e, a)] \quad (4.26 b)$$

<sup>(2)</sup> Le terme  $\sqrt{(2l + 1)(2L + 1)}$  dans (4.25 a, b) est un facteur de normalisation.

et

$$\sum_M H_M^{(L,l)}[q^2; \vec{\alpha}(e, a)] \bar{Y}_M^{(L)}[\vec{\alpha}(e, a)], \quad (4.27 b)$$

pour chaque valeur de L et (L, l) sont invariantes par rapport aux transformations  $\Lambda \in L_{\uparrow}$ . En effet, pour (4.26 b) par exemple <sup>(3)</sup>, on a

$$\begin{aligned} & \sum_M E_M^{(L)}[q^2; \vec{\alpha}(e, a)] \bar{Y}_M^{(L)}[\vec{\alpha}(e, a)] \\ &= \sum_{M', M, M''} D^{(L)}[R(e, \Lambda)]^{M'}_M \overline{D^{(L)}[R(e, \Lambda)]^{M''}_M} E_{M'}^{(L)}[q^2; \vec{\alpha}(\Lambda e, \Lambda a)] \bar{Y}_{M''}^{(L)}[\vec{\alpha}; (\Lambda e, \Lambda a)] \\ &= \sum_{M'} \delta_{M' M''} E_{M'}^{(L)}[q^2; \vec{\alpha}(\Lambda e, \Lambda a)] \bar{Y}_{M''}^{(L)}[\vec{\alpha}(\Lambda e, \Lambda a)]. \end{aligned}$$

Notons aussi que (4.26 b) et (4.27 b) sont indépendantes du choix de tétrade (t,  $\vec{n}$ ); en effet, d'après (4.6 b),

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}(\Lambda e, \Lambda a) &= -\Lambda a \cdot \Lambda_{t \rightarrow \Lambda e} \vec{n} \\ &= -a \Lambda^{-1} \Lambda_{t \rightarrow \Lambda e} \Lambda \Lambda^{-1} \vec{n} = -a \cdot \Lambda_{\Lambda^{-1} t \rightarrow e} \Lambda^{-1} \vec{n} = \vec{\alpha}'(e, a), \end{aligned}$$

où les composantes de  $\vec{\alpha}'(e, a)$  sont définies par rapport à la tétrade de référence {t' =  $\Lambda^{-1}t$ ,  $\vec{n}' = \Lambda^{-1}\vec{n}$ }. En outre,

$$\begin{aligned} R^{-1}(\Lambda e, \Lambda_{t \rightarrow \Lambda u})_{ij} &= -n^{(i)} \cdot \Lambda_{t \rightarrow \Lambda e}^{-1} \Lambda_{\Lambda u \rightarrow \Lambda e} \Lambda_{t \rightarrow \Lambda u} n^{(j)} \\ &= -n^{(i)} \cdot \Lambda \Lambda_{\Lambda^{-1} t \rightarrow e}^{-1} \Lambda^{-1} \Lambda_{\Lambda u \rightarrow e} \Lambda^{-1} \Lambda_{t \rightarrow \Lambda u} \Lambda \Lambda^{-1} n^{(j)} \\ &= -n^{(i)} \cdot \Lambda_{t' \rightarrow e}^{-1} \Lambda_{u \rightarrow e} \Lambda_{t' \rightarrow u} n^{(j)} \equiv R'^{-1}(e, \Lambda_{t' \rightarrow u})_{ij}; \end{aligned}$$

et on a ainsi,

$$\sum_M E_M^{(L)}[q^2; \vec{\alpha}(e, a)] \bar{Y}_M^{(L)}[\vec{\alpha}(e, a)] = \sum_M E_M^{(L)}[q^2; \vec{\alpha}'(e, a)] \bar{Y}_M^{(L)}[\vec{\alpha}'(e, a)].$$

Dans le cas où  $q^2 < 0$ , nous appellerons *facteurs de forme* du vertex  $V^\mu(p', p)^{\lambda' \lambda}$  les fonctions scalaires obtenues par intégration des quantités (4.26 b) et (4.27 b) sur le petit groupe de t :

$$E^{(L)}(q^2) = \sqrt{\frac{4\pi}{2L+1}} \sum_M \int d\Omega(\vec{\alpha}) E_M^{(L)}(q^2; \vec{\alpha}) \bar{Y}_M^{(L)}(\vec{\alpha}), \quad (4.28 b)$$

$$H^{(L,l)}(q^2) = \sqrt{\frac{4\pi}{2L+1}} \sum_M \int d\Omega(\vec{\alpha}) H_M^{(L,l)}(q^2; \vec{\alpha}) \bar{Y}_M^{(L)}(\vec{\alpha}), \quad (4.29 b)$$

<sup>(3)</sup> Le même raisonnement s'applique aussi bien à (4.27 b).

où  $d\Omega(\vec{\alpha})$  est l'élément de volume invariant du groupe de rotations homomorphe au petit groupe de  $t$ . Les facteurs de forme de  $V^\mu(p', p)^\lambda$  correspondant au cas où  $q^2 > 0$  sont donnés par les expressions :

$$A^{(L)}(q^2) = \sqrt{\frac{4\pi}{2L+1}} \sum_{\mathbf{M}} \int d\Omega(\vec{\varepsilon}) A_{\mathbf{M}}^{(L)}(q^2; \vec{\varepsilon}) \bar{Y}_{\mathbf{M}}^{(L)}(\vec{\varepsilon}), \quad (4.28 a)$$

$$F^{(L,l)}(q^2) = \sqrt{\frac{4\pi}{2L+1}} \sum_{\mathbf{M}} \int d\Omega(\vec{\varepsilon}) F_{\mathbf{M}}^{(L,l)}(q^2; \vec{\varepsilon}) \bar{Y}_{\mathbf{M}}^{(L)}(\vec{\varepsilon}). \quad (4.29 a)$$

Compte tenu de ces définitions et après inversion des relations (4.22 a, b) et (4.25 a, b), le développement des fonctions de vertex  $V^\mu(p', p)^\lambda$  en termes des facteurs de forme  $A^{(L)}(q^2)$  et  $F^{(L,l)}(q^2)$  où  $E^{(L)}(q^2)$  et  $H^{(L,l)}(q^2)$  est donné par les expressions suivantes :

cas  $q^2 > 0$ ,

$$V^\mu(p', p)^\lambda = D^{(j)}[R(a, u)]^\lambda_{\rho'} D^{(j)}[R(u, a)]^\rho_\lambda \times \sum_{\mathbf{L}, \mathbf{M}} \left[ a^\mu \begin{pmatrix} \rho' & j & \mathbf{M} \\ j' & \rho & \mathbf{L} \end{pmatrix} A^{(L)}(q^2) \right. \\ \left. + \bar{f}_{(\alpha)}^\mu \sum_l \sqrt{2l+1} \begin{pmatrix} \rho' & j & m \\ j' & \rho & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & l & \mathbf{M} \\ 1 & m & \mathbf{L} \end{pmatrix} F^{(L,l)}(q^2) \right] \sqrt{4\pi} Y_{\mathbf{M}}^{(L)}(\vec{\varepsilon}(a, e)); \quad (4.30 a)$$

cas  $q^2 < 0$ ,

$$V^\mu(p', p)^\lambda = D^{(j)}[R(e, u)]^\lambda_{\rho'} D^{(j)}[R(u, e)]^\rho_\lambda \times \sum_{\mathbf{L}, \mathbf{M}} \left[ e^\mu \begin{pmatrix} \rho' & j & \mathbf{M} \\ j' & \rho & \mathbf{L} \end{pmatrix} E^{(L)}(q^2) \right. \\ \left. + \bar{h}_{(\alpha)}^\mu \sum_l \sqrt{2l+1} \begin{pmatrix} \rho' & j & m \\ j' & \rho & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & l & \mathbf{M} \\ 1 & m & \mathbf{L} \end{pmatrix} H^{(L,l)}(q^2) \right] \sqrt{4\pi} Y_{\mathbf{M}}^{(L)}(\vec{\alpha}(e, a)). \quad (4.30 b)$$

#### § 4 c. — Règles de sélection pour les facteurs de forme.

Les règles de sélection étudiées dans le chapitre III s'appliquent aux composantes  $V^\mu(p', p)^\lambda$ . Lorsqu'on factorise les fonctions de vertex en termes de facteurs de forme selon la formule (4.30 a) ou (4.30 b), il convient d'exprimer les règles de sélection de telle façon qu'on puisse les appliquer directement aux facteurs de forme. Voyons quelles sont ces règles.

1° D'après l'Énoncé 1 du chapitre III, l'invariance du vertex par rapport à la réflexion  $\Sigma_n$  [voir (3.3)] implique entre les composantes  $A(p', p)^{\lambda' \lambda}$  et  $F^{(\alpha)}(p', p)^{\lambda' \lambda}$  ou  $E(p', p)^{\lambda' \lambda}$  et  $H^{(\alpha)}(p', p)^{\lambda' \lambda}$ , les relations suivantes :

cas  $q^2 > 0$ ,

$$A(p', p)^{\lambda' \lambda} = -\eta \varepsilon \bar{\varepsilon}' (-1)^{\lambda - \lambda'} A(p', p)^{\lambda' \lambda}, \quad (4.31 a)$$

$$F^{(\alpha)}(p', p)^{\lambda' \lambda} = \eta \varepsilon \bar{\varepsilon}' (-1)^{\lambda - \lambda' - \alpha} F^{(\alpha)}(p', p)^{\lambda' \lambda}; \quad (4.32 a)$$

cas  $q^2 < 0$ ,

$$E(p', p)^{\lambda' \lambda} = -\eta \varepsilon \bar{\varepsilon}' (-1)^{\lambda - \lambda'} E(p', p)^{\lambda' \lambda}, \quad (4.31 b)$$

$$H^{(\alpha)}(p', p)^{\lambda' \lambda} = \eta \varepsilon \bar{\varepsilon}' (-1)^{\lambda - \lambda' - \alpha} H^{(\alpha)}(p', p)^{\lambda' \lambda}. \quad (4.32 b)$$

En ce qui concerne les composantes irréductibles  $A_M^{(L)}(p', p)$  et  $F_M^{(L, l)}(p', p)$ , ou  $E_M^{(L)}(p', p)$  et  $H_M^{(L, l)}(p', p)$ , nous allons montrer que l'invariance par rapport à la réflexion  $\Sigma_n$  implique les relations :

cas  $q^2 > 0$ ,

$$A_M^{(L)}(p', p) = -\eta \varepsilon \bar{\varepsilon}' (-1)^M A_M^{(L)}(p', p), \quad (4.33 a)$$

$$F_M^{(L, l)}(p', p) = \eta \varepsilon \bar{\varepsilon}' (-1)^M F_M^{(L, l)}(p', p); \quad (4.34 a)$$

cas  $q^2 < 0$

$$E_M^{(L)}(p', p) = -\eta \varepsilon \bar{\varepsilon}' (-1)^M E_M^{(L)}(p', p), \quad (4.33 b)$$

$$H_M^{(L, l)}(p', p) = \eta \varepsilon \bar{\varepsilon}' (-1)^M H_M^{(L, l)}(p', p). \quad (4.34 b)$$

Voyons par exemple comment on peut obtenir (4.34 b) (\*). D'après (4.24 b), la loi de transformation de  $H_M^{(L, l)}(p', p)$  par rotation de  $\pi$  autour de l'axe  $n$  (rappelons que  $n = n^{(3)}$  et  $n \cdot p = n \cdot p' = 0$ ) est

$$H_M^{(L, l)}(p', p) = (-1)^M \delta_{M, M'} H_M^{(L, l)}(Pp', Pp);$$

en tenant compte, en outre, de la définition (4.25 b) et en utilisant l'invariance par parité, on montre que

$$H_M^{(L, l)}(Pp', Pp) = \eta \varepsilon \bar{\varepsilon}' H_M^{(L, l)}(p', p),$$

d'où le résultat (4.34 b). Ces règles induisent des restrictions très simples sur les facteurs de forme définis par les relations (4.28 a) et (4.29 a) ou (4.28 b) et (4.29 b). Voici les résultats :

cas  $q^2 > 0$

$$A^{(L)}(q^2) = -\eta \varepsilon \bar{\varepsilon}' (-1)^L A^{(L)}(q^2), \quad (4.35 a)$$

$$F^{(L, l)}(q^2) = \eta \varepsilon \bar{\varepsilon}' (-1)^L F^{(L, l)}(q^2); \quad (4.36 a)$$

---

(\*) On peut appliquer le même raisonnement pour obtenir (4.33 a, b) et (4.34 a).

cas  $q^2 < 0$

$$E^{(L)}(q^2) = -\eta\bar{\varepsilon\varepsilon}'(-1)^L E^{(L)}(q^2), \quad (4.35 b)$$

$$H^{(L,l)}(q^2) = \eta\varepsilon\bar{\varepsilon}'(-1)^L H^{(L,l)}(q^2); \quad (4.36 b)$$

c'est-à-dire, l'invariance du vertex par rapport à la réflexion  $\Sigma_n$  implique que, dans les développements (4.30 a) ou (4.30 b), seuls les facteurs de forme du type  $A^{(L)}(q^2)$  ou  $E^{(L)}(q^2)$  tels que

$$(-1)^{L+1} = \eta\bar{\varepsilon\varepsilon}', \quad (4.37)$$

et les facteurs de forme du type  $F^{(L,l)}(q^2)$  ou  $H^{(L,l)}(q^2)$  tels que

$$(-1)^L = \eta\varepsilon\bar{\varepsilon}', \quad (4.38)$$

peuvent être non nuls.

2° L'Énoncé 2 du chapitre III appliqué aux composantes  $A(p', p)^{\lambda'}_{\lambda}$  et  $F^{(\alpha)}(p', p)^{\lambda'}_{\lambda}$  ou  $E(p', p)^{\lambda'}_{\lambda}$  et  $H^{(\alpha)}(p', p)^{\lambda'}_{\lambda}$ , nous donne les relations :

cas  $q^2 > 0$ ,

$$\overline{A(p', p)^{\lambda'}_{\lambda}} = (-1)^{j-j'} A(p', p)^{-\lambda'}_{-\lambda}; \quad (4.39 a)$$

$$\overline{F^{(\alpha)}(p', p)^{\lambda'}_{\lambda}} = (-1)^{j-j'+1} F^{(-\alpha)}(p', p)^{-\lambda'}_{-\lambda}, \quad (4.40 a)$$

cas  $q^2 < 0$ ,

$$\overline{E(p', p)^{\lambda'}_{\lambda}} = (-1)^{j-j'} E(p', p)^{-\lambda'}_{-\lambda}, \quad (4.39 b)$$

$$\overline{H^{(\alpha)}(p', p)^{\lambda'}_{\lambda}} = (-1)^{j-j'+1} H^{(-\alpha)}(p', p)^{-\lambda'}_{-\lambda}. \quad (4.40 b)$$

Nous allons voir ensuite que l'invariance par renversement de mouvement implique pour les composantes irréductibles les restrictions suivantes :

cas  $q^2 > 0$ ,

$$\overline{A_M^{(L)}(Pp', Pp)} = (-1)^{L+M} A_{-M}^{(L)}(p', p), \quad (4.41 a)$$

$$\overline{F_M^{(L,l)}(Pp', Pp)} = (-1)^{L+M} F_{-M}^{(L,l)}(p', p); \quad (4.42 a)$$

cas  $q^2 < 0$ ,

$$\overline{E_M^{(L)}(Pp', Pp)} = (-1)^{L+M} E_{-M}^{(L)}(p', p), \quad (4.41 b)$$

$$\overline{H_M^{(L,l)}(Pp', Pp)} = (-1)^{L+M} H_{-M}^{(L,l)}(p', p). \quad (4.42 b)$$

En effet, considérons par exemple <sup>(6)</sup> la relation (4.42 a). D'après (4.25 a), on a,

$$\begin{aligned} & \overline{F_M^{(L,l)}(Pp', Pp)} \\ &= \sqrt{(2l+1)(2L+1)} \begin{pmatrix} j' & \rho & l \\ \rho' & j & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & m & L \\ \alpha & l & M \end{pmatrix} (-1)^{\lambda'-\rho'} D^{(j')} [R(u', a)]^{-\rho'}_{-\lambda'} \\ & \times (-1)^{\rho-\lambda} D^{(j)} [R(a, u)]^{-\lambda}_{-\rho} \overline{F^{(\alpha)}(Pp', Pp)^{\lambda'}_{\lambda}} \\ &= \sqrt{(2l+1)(2L+1)} (-1)^{j'-j+1} \begin{pmatrix} j' & -\rho & l \\ -\rho' & j & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & m & L \\ \alpha & l & M \end{pmatrix} (-1)^{\lambda'-\lambda} (-1)^m \\ & \times D^{(j')} [R(u', a)]^{-\rho'}_{-\lambda'} D^{(j)} [R(a, u)]^{-\lambda}_{-\rho} \overline{F^{(\alpha)}(Pp', Pp)^{\lambda'}_{\lambda}}; \end{aligned}$$

mais l'invariance par renversement du mouvement appliquée aux composantes  $F^{(\alpha)}(p', p)^{\lambda'}_{\lambda}$  implique,

$$\overline{F^{(\alpha)}(Pp', Pp)^{\lambda'}_{\lambda}} = (-1)^{1+\alpha} (-1)^{j+\lambda} (-1)^{-j'-\lambda'} F^{(-\alpha)}(p', p)^{-\lambda'}_{-\lambda},$$

d'où la relation (4.42 a). En outre, d'après la loi de transformation de  $F_M^{(L,l)}(p', p)$  par rotation de  $\pi$  autour de l'axe  $n$  ( $n = n^{(3)}$  et  $n.p = n.p' = 0$ ), on a

$$\overline{F_M^{(L,l)}(p', p)} = (-1)^M \delta_{M,M'} \overline{F_M^{(L,l)}(p', p)}.$$

Tenant compte de ce résultat et de la relation (4.42 a) on déduit :

$$\overline{F_M^{(L,l)}(p', p)} = (-1)^L F_{-M}^{(L,l)}(p', p). \tag{4.44 a}$$

Cette règle, ainsi que celles correspondant aux autres composantes irréductibles :

$$\overline{A_M^{(L)}(p', p)} = (-1)^L A_{-M}^{(L)}(p', p); \tag{4.43 a}$$

et, dans le cas  $q^2 < 0$ ,

$$\overline{E_M^{(L)}(p', p)} = (-1)^L E_{-M}^{(L)}(p', p), \tag{4.43 b}$$

$$\overline{H_M^{(L,l)}(p', p)} = (-1)^L H_{-M}^{(L,l)}(p', p), \tag{4.44 b}$$

nous donnent pour les facteurs de forme correspondants (voir définitions (4.28 a, b) et (4.29 a, b)) les résultats suivants :

cas  $q^2 > 0$ ,

$$A^{(L)}(q^2) = \overline{A^{(L)}(q^2)}, \tag{4.45 a}$$

$$F^{(L,l)}(q^2) = \overline{F^{(L,l)}(q^2)}; \tag{4.46 a}$$

---

<sup>(6)</sup> On peut appliquer le même raisonnement pour obtenir (4.41 a, b) et (4.42 b).

cas  $q^2 < 0$

$$E^{(L)}(q^2) = \overline{E^{(L)}(q^2)}, \quad (4.45 b)$$

$$H^{(L,l)}(q^2) = \overline{H^{(L,l)}(q^2)}; \quad (4.46 b)$$

c'est-à-dire, l'invariance par renversement du mouvement dans un vertex implique que les facteurs de forme sont relativement réels.

§ 4 d. — Remarque concernant la conservation de l'opérateur densité de courant.

Considérons le cas où l'opérateur  $j^\mu(x)$  dans un vertex est tel que

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0, \quad (4.47)$$

et voyons quelles sont les conséquences de cette équation de continuité pour les éléments de matrice du vertex. Soit  $P^\mu$  le générateur des translations d'espace-temps et rappelons l'équation suivante (\*),

$$[P_\mu, j^\nu(x)] = -i \frac{\partial j^\nu(x)}{\partial x^\mu}. \quad (4.48)$$

La valeur moyenne de cet opérateur entre les états à une particule  $|p, j\lambda\rangle$  et  $|p', j'\lambda'\rangle$  nous donne la relation

$$-i \langle p', j'\lambda' | \frac{\partial j^\nu(x)}{\partial x^\mu} | p, j\lambda \rangle = (p' - p)_\mu \langle p', j'\lambda' | j^\nu(x) | p, j\lambda \rangle;$$

et tenant compte de l'invariance par translation et après intégration par rapport à  $x$  on a

$$-i \int dx \langle p', j'\lambda' | \frac{\partial j^\nu(x)}{\partial x^\mu} | p, j\lambda \rangle = (p', p)_\mu \int dx e^{-i(p-p')x} \langle p', j'\lambda' | j^\nu(0) | p, j\lambda \rangle,$$

ou encore,

$$-i g^\mu_\nu \int dx \langle p', j'\lambda' | \frac{\partial j^\nu(x)}{\partial x^\mu} | p, j\lambda \rangle = (2\pi)^4 \delta(p-p'-q) (p-p')_\mu V^\mu(p', p)^{\lambda'\lambda}.$$

D'après (4.47), le premier membre de l'équation précédente est nul, et on a donc

$$q_\mu V^\mu(p', p)^{\lambda'\lambda} = 0. \quad (4.49)$$

(\*) Voir par exemple Källén [60].

D'après (4.10 a, b), cela veut dire que dans le cas où  $q^2 > 0$ ,

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0 \quad \text{entraîne} \quad A(p', p)^{\lambda'}_{\lambda} = 0; \quad (4.50 a)$$

et dans le cas où  $q^2 < 0$ ,

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0 \quad \text{entraîne} \quad a_\mu \vec{h}^\mu \cdot \vec{H}(p', p)^{\lambda'}_{\lambda} = 0. \quad (4.50 b)$$

Voyons quelles sont les restrictions qu'on déduit de (4.50 a, b) pour les facteurs de forme (voir Appendice B4) :

i) dans le cas où  $q^2 > 0$  on déduit d'après (4.30 a) et (4.50 a)

$$A^{(L)}(q^2) = 0, \text{ pour tout } L : |j - j'|, j - j' + 1, \dots, j + j'; \quad (4.51 a)$$

ii) dans le cas où  $q^2 < 0$  on montre, en tenant compte de (4.30 b), que la condition (4.50 b) implique une relation linéaire entre les facteurs de forme  $H^{(L,l)}(q^2)$ ,

$$\sum_{(L,l)} \sqrt{\frac{2L+1}{2l+1}} \begin{pmatrix} 0 & l & 0 \\ 1 & 0 & L \end{pmatrix} H^{(L,l)}(q^2) = 0. \quad (4.51 b)$$

§ 4 e. — Exemples.

Pour illustrer les applications possibles du formalisme précédent nous allons discuter maintenant quelques exemples.

1°  $K \rightarrow \pi + l + \nu_l$ .

Au premier ordre dans le couplage faible, l'amplitude de transition pour ce processus est proportionnelle à la quantité

$$\langle p' | j^\mu(0) | p \rangle l_\mu, \quad (4.52)$$

où  $l_\mu$  est l'élément de matrice du courant leptonique associé à  $l$  et  $\nu_l$ ;  $p'$  et  $p$  sont les énergies-impulsions du  $\pi$  et du  $K$  respectivement. D'après (4.30 a) le vertex hadronique  $\langle p' | j^\mu(0) | p \rangle$  s'écrit (voir fig. 4.1)

$$V^\mu(p', p) = A^{(0)}(q^2)a^\mu + F^{(1)}(q^2)e^\mu, \quad (4.53)$$

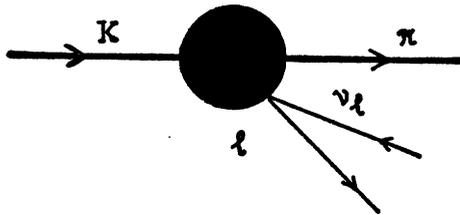


FIG. 4.1. —  $K \rightarrow \pi + l + \nu_l$  au premier ordre dans le couplage faible.

où

$$a^\mu = \frac{q^\mu}{\sqrt{q^2}} \quad \text{et} \quad e^\mu = \frac{(m_K^2 - m_\pi^2 - q^2)p^\mu + (m_\pi^2 - m_K^2 - q^2)p'^\mu}{\sqrt{q^2}\Delta(m_K, m_\pi, \sqrt{q^2})}, \quad (4.54)$$

avec

$$\Delta(a, b, c) = (a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)(a - b - c).$$

La relation entre les facteurs de forme  $A^{(0)}(q^2)$ ,  $F^{(1)}(q^2)$  et les fonctions  $f_+(q^2)$ ,  $f_-(q^2)$  définies par

$$V^\mu(p', p) = f_+(q^2)(p + p')^\mu + f_-(q^2)(p - p')^\mu, \quad (4.55)$$

(expression qu'on trouve couramment dans la littérature <sup>(7)</sup>) est la suivante

$$\frac{1}{\sqrt{q^2}}A^{(0)}(q^2) = \frac{m_K^2 - m_\pi^2}{q^2}f_+(q^2) + f_-(q^2); \quad (4.56 a)$$

$$\frac{1}{\sqrt{q^2}}F^{(1)}(q^2) = \frac{\sqrt{\Delta(m_K, m_\pi, \sqrt{q^2})}}{q^2}f_+(q^2). \quad (4.56 b)$$

A l'approximation où on suppose le courant hadronique conservé, on a

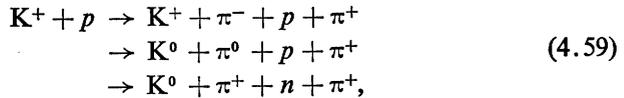
$$A^{(0)}(q^2) = 0; \quad (4.57)$$

c'est-à-dire,

$$f_-(q^2) = f_+(q^2) \frac{m_\pi^2 - m_K^2}{q^2}. \quad (4.58)$$

2°  $K + N \rightarrow K^* + N^*$ .

Dans les réactions <sup>(8)</sup>



une forte proportion des événements finaux correspondent à des configurations  $K^* + N_{3/2}^*$ . On observe pour le  $K^*$  produit dans la réaction

$$K^+ + p \rightarrow K^* + N_{3/2}^*, \quad (4.60)$$

une distribution angulaire fortement piquée vers l'avant, compatible avec le modèle simple d'échange d'un  $\pi$  illustré par le diagramme de la figure 4.2.

<sup>(7)</sup> Voir par exemple Dalitz [64].

<sup>(8)</sup> Voir par exemple : Chinowsky *et al.* [62]; Goldhaber [63]; Ferro-Luzzi *et al.* [63]; Ferro-Luzzi *et al.* [65].

Suivant les techniques développées dans ce chapitre, nous allons discuter ci-dessous la structure des fonctions de vertex correspondant au diagramme précédent. Soient  $p$  et  $p'$  les énergies-impulsions du  $N$  et du  $N^*$ . D'après (4.30 *b*) et en tenant compte de la conservation de parité [voir (4.37)], le vertex  $\pi$  (virtuel)  $+ N \rightarrow N^*$  est décrit par la fonction

$$V(p', p)^{\lambda'}_{\lambda} = D^{(3/2)}[R(e, u)]^{\lambda'}_{\rho'} D^{(1/2)}[R(u, e)]^{\rho}_{\lambda} \times \sum_M \begin{pmatrix} \rho' & 1/2 & M \\ 3/2 & \rho & 1 \end{pmatrix} E^{(1)}(q^2) \sqrt{4\pi} Y_M^{(1)}[\vec{\alpha}(e, a)]. \quad (4.61)$$

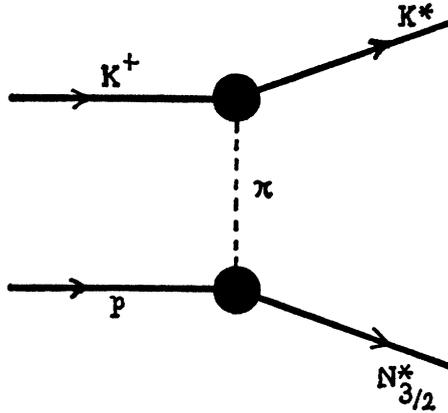


FIG. 4.2. — Modèle d'échange d'un  $\pi$  pour la réaction  $K^+ + p \rightarrow K^* + N^*_{3/2}$ .

Rappelons-nous que  $u = p/m, u' = p'/m'$ ; et

$$\sqrt{|q^2|} a^\mu = (p-p')^\mu, \quad e^\mu = \frac{(m^2 - m'^2 - q^2)p^\mu + (m'^2 - m^2 - q^2)p'^\mu}{\sqrt{|q^2|} \Delta(m, m', \sqrt{q^2})}. \quad (4.62)$$

Les éléments de la matrice  $V(p', p)^{\lambda'}_{\lambda}$  ont une forme particulièrement simple dans le système de Breit, où  $t = e$ ; dans ce système, le vecteur  $q$  n'a pas de composante de temps. Nous pouvons choisir en plus l'axe  $n^{(2)}$  d'espace le long du quadrivecteur  $a$ . On trouve alors le résultat

$$V(E, \vec{p}'; E, \vec{p})^{\lambda'}_{\lambda} = \frac{i}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} E^{(1)}(-\vec{q}^2) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.63)$$

Ceci nous permet d'obtenir tout de suite l'expression de la matrice densité  $\rho(N^*)_{\tilde{\lambda}'}^{\lambda'}$ , décrivant la distribution de spin dans l'ensemble des  $N^*$  produits dans (4.60) par un mécanisme d'échange d'un  $\pi$ . On a

$$\rho(N^*)_{\tilde{\lambda}'}^{\lambda'} = \sum_{\lambda, \tilde{\lambda}} \frac{V(p', p)_{\lambda}^{\lambda'} \rho(p)_{\tilde{\lambda}}^{\lambda} \overline{V(p', p)_{\tilde{\lambda}}^{\lambda'}}}{\frac{1}{2} \text{tr} V(p', p) V^*(p', p)}, \quad (4.64)$$

où  $\rho(p)_{\tilde{\lambda}}^{\lambda}$  est la matrice densité des protons cible. Pour une cible non polarisée on trouve en tenant compte de (4.63)

$$\rho(N^*)_{\tilde{\lambda}'}^{\lambda'} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3 & 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & 3 \end{bmatrix}. \quad (4.65)$$

De la même façon, par application de (4.30 b) et (4.37), on trouve pour le vertex  $K \rightarrow K^* + \pi$  (virtuel), l'expression suivante

$$V(k', k)^{\lambda'} = D^{(1)} \left[ R \left( e', \frac{k'}{m_{K^*}} \right) \right]^{\lambda'} \sum_M \begin{pmatrix} \rho' & 0 & M \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \varepsilon^{(1)}(q^2) \sqrt{4\pi} Y_M^{(1)}[\vec{\alpha}(e', a)], \quad (4.66)$$

avec

$$k'^2 = m_{K^*}^2; \quad k^2 = m_K^2,$$

et

$$e'^{\mu} = \frac{(m_K^2 - m_{K^*}^2 - q^2)p^{\mu} + (m_{K^*}^2 - m_K^2 - q^2)p'^{\mu}}{\sqrt{|q^2|} \Delta(m_K, m_{K^*}, \sqrt{q^2})}. \quad (4.67)$$

Dans le système  $t = e'$  et avec  $n^{(2)} = -a$ , les éléments de matrice  $V(k', k)^{\lambda'}$  s'écrivent simplement

$$V(E, \vec{k}'; E, \vec{k})^{\lambda'} = \frac{-i}{\sqrt{2}} \varepsilon^{(1)}(-\vec{q}^2) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad (4.58)$$

on obtient ainsi pour la matrice densité de l'ensemble des  $K^*$  produits dans (4.59) par un mécanisme d'échange d'un  $\pi$ , le résultat

$$\rho(K^*) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.69)$$

§ 4 f. — Généralisation au cas d'un courant  
ayant la loi de transformation  
d'un champ de spin quelconque.

Nous avons vu dans le chapitre III (voir le § 3 d) que dans le cadre du formalisme à  $(2s + 1)$  composantes, un vertex est décrit d'une façon générale par l'ensemble de fonctions

$$V_{(s,0)}^\alpha(p', p)^{\lambda'}_\lambda = \langle p', j'\lambda' | j_{(s,0)}^\alpha(0) | p, j\lambda \rangle \quad (3.30 a)$$

$$V_{(0,s)}^\alpha(p', p)^{\lambda'}_\lambda = \langle p', j'\lambda' | j_{(0,s)}^\alpha(0) | p, j\lambda \rangle. \quad (3.30 b)$$

Il est facile d'étendre les techniques discutées pour le courant vectoriel (et axial) aux fonctions (3.30 a, b) et de donner leur paramétrisation multipolaire en termes de facteurs de forme. En effet, la loi de transformation des fonctions (3.30 a, b) par rapport aux opérations  $\Lambda \in L_\uparrow^+$  est d'après (1.71) et (3.27 a, b)

$$\begin{aligned} V_{(s,0)}^\alpha(p, p')^{\lambda'}_\lambda &= D^{(j')}[R^{-1}(u', \Lambda)]^{\lambda'}_{\tilde{\lambda}}, D^{(j)}[R(u, \Lambda)]^{\tilde{\lambda}}_\lambda D^{(s,0)}(\Lambda^{-1})^\alpha_\alpha V_{(s,0)}^{\tilde{\alpha}}(\Lambda p', \Lambda p)^{\tilde{\lambda}'}_{\tilde{\lambda}}, \\ & \quad (4.70 a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{(0,s)}^\alpha(p', p)^{\lambda'}_\lambda &= D^{(j')}[R^{-1}(u', \Lambda)]^{\lambda'}_{\tilde{\lambda}}, D^{(j)}[R(u, \Lambda)]^{\tilde{\lambda}}_\lambda D^{(0,s)}(\Lambda^{-1})^\alpha_\alpha V_{(0,s)}^{\tilde{\alpha}}(\Lambda p', \Lambda p)^{\tilde{\lambda}'}_{\tilde{\lambda}}. \\ & \quad (4.70 b) \end{aligned}$$

Dans le cas où  $q^2 > 0$  (resp.  $q^2 < 0$ ) nous multiplierons (4.70 a) par  $D^{(s,0)}(\Lambda_{t \rightarrow a}^{-1})^\beta_\alpha$  et (4.70 b) par  $D^{(0,s)}\Lambda_{(t \rightarrow a)}^{-1})^\beta_\alpha$  (resp. (4.70 a) par  $D_{(s,0)}(\Lambda_{t \rightarrow e}^{-1})^\beta_\alpha$  et (4.70 b) par  $D^{(0,s)}(\Lambda_{t \rightarrow e}^{-1})^\beta_\alpha$ , avec sommation sur l'indice  $\alpha$ . Nous aurons ainsi les nouvelles lois de transformation suivantes :

cas  $q^2 > 0$ ,

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} D^{(s,0)}(\Lambda_{t \rightarrow a}^{-1})^\beta_\alpha V_{(s,0)}^\alpha(p', p)^{\lambda'}_\lambda \\ D^{(0,s)}(\Lambda_{t \rightarrow a}^{-1})^\beta_\alpha V_{(0,s)}^\alpha(p', p)^{\lambda'}_\lambda \end{array} \right\} \\ &= D^{(j')}[R^{-1}(u', \Lambda)]^{\lambda'}_{\tilde{\lambda}}, D^{(j)}[R(u, \Lambda)]^{\tilde{\lambda}}_\lambda D^{(s)}[R^{-1}(e, \Lambda)]^{\tilde{\beta}}_{\tilde{\beta}} \\ & \quad \times \left\{ \begin{array}{l} D^{(s,0)}(\Lambda_{t \rightarrow \Lambda a}^{-1})^{\tilde{\beta}}_{\tilde{\alpha}} V_{(s,0)}^{\tilde{\alpha}}(\Lambda p', \Lambda p)^{\tilde{\lambda}'}_{\tilde{\lambda}} \\ D^{(0,s)}(\Lambda_{t \rightarrow \Lambda a}^{-1})^{\tilde{\beta}}_{\tilde{\alpha}} V_{(0,s)}^{\tilde{\alpha}}(\Lambda p', \Lambda p)^{\tilde{\lambda}'}_{\tilde{\lambda}} \end{array} \right\}, \quad (4.71 a) \end{aligned}$$

cas  $q^2 < 0$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} D^{(s,0)}(\Lambda_{t \rightarrow e}^{-1})^\beta_\alpha V^\alpha_{(s,0)}(p', p)^{\lambda'}_\lambda \\ D^{(0,s)}(\Lambda_{t \rightarrow e}^{-1})^\beta_\alpha V^\alpha_{(0,s)}(p', p)^{\lambda'}_\lambda \end{array} \right\} = D^{(j')} [R^{-1}(u', \Lambda)]^{\lambda'}_{\tilde{\lambda}'} D^{(j)} [R(u, \Lambda)]^{\tilde{\lambda}}_\lambda D^{(s)} [R^{-1}(a, \Lambda)]^\beta_{\tilde{\beta}} \times \left\{ \begin{array}{l} D^{(s,0)}(\Lambda_{t \rightarrow \Lambda e}^{-1})^\beta_{\tilde{\beta}} V^\alpha_{(s,0)}(\Lambda p', \Lambda p)^{\tilde{\lambda}'}_{\tilde{\lambda}} \\ D^{(0,s)}(\Lambda_{t \rightarrow \Lambda e}^{-1})^\beta_{\tilde{\beta}} V^\alpha_{(0,s)}(\Lambda p', \Lambda p)^{\tilde{\lambda}'}_{\tilde{\lambda}} \end{array} \right\}. \quad (4.71 b)$$

Notons que dans ces expressions, les représentations figurant dans le produit  $D^{(j')}D^{(j)}D^{(s)}$  sont identiques à celles qui apparaissent dans (4.14 a, b). La réduction de ce produit en représentations irréductibles a été étudiée dans le § 4 a. Nous pouvons écrire directement les développements des fonctions (3.30 a, b) en termes de facteurs de forme par simple comparaison avec les résultats obtenus dans le cas du courant vectoriel. On trouve ainsi les expressions suivantes :

cas  $q^2 > 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} V^\alpha_{(s,0)}(p', p)^{\lambda'}_\lambda \\ V^\alpha_{(0,s)}(p', p)^{\lambda'}_\lambda \end{array} \right\} = D^{(j')} [R(a, u')]^{\lambda'}_{\rho'} D^{(j)} [R(u, a)]^\rho_\lambda \sum_{L,l} \begin{pmatrix} \rho' & j & m \\ j' & \rho & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta & l & M \\ s & m & L \end{pmatrix} \times \sqrt{4\pi} Y_M^{(L)}[\vec{\varepsilon}(a, e)] \left\{ \begin{array}{l} D^{(s,0)}(\Lambda_{t \rightarrow a})^\alpha_\beta Q^{(L,l)}(q^2) \\ D^{(0,s)}(\Lambda_{t \rightarrow a})^\alpha_\beta P^{(L,l)}(q^2) \end{array} \right\}; \quad (4.72 a)$$

cas  $q^2 < 0$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} V^\alpha_{(s,0)}(p', p)^{\lambda'}_\lambda \\ V^\alpha_{(0,s)}(p', p)^{\lambda'}_\lambda \end{array} \right\} = D^{(j')} [R(e, u')]^{\lambda'}_{\rho'} D^{(j)} [R(u, e)]^\rho_\lambda \sum_{L,l} \begin{pmatrix} \rho' & j & m \\ j' & \rho & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta & l & M \\ s & m & L \end{pmatrix} \times \sqrt{4\pi} Y_M^{(L)}[\vec{\alpha}(e, a)] \left\{ \begin{array}{l} D^{(s,0)}(\Lambda_{t \rightarrow e})^\alpha_\beta Q^{(L,l)}(q^2) \\ D^{(0,s)}(\Lambda_{t \rightarrow e})^\alpha_\beta P^{(L,l)}(q^2) \end{array} \right\}. \quad (4.72 b)$$

Les règles de sélection pour les composantes (3.30 a, b) ont été données dans le chapitre III (voir Énoncé 3 et Énoncé 4). En tenant compte de ces règles on déduit par une méthode analogue à celle décrite dans le § 4 c. Les résultats suivants :

1°  $L$ 'invariance du vertex par rapport à la réflexion  $\Sigma_n$  implique

$$Q^{(L,l)}(q^2) = (-1)^L \gamma_P \bar{\varepsilon} \varepsilon' P^{(L,l)}(q^2); \quad (4.73)$$

2° L'invariance du vertex par rapport à l'opération  $\pi$ , [voir (3.14)] implique

$$Q^{(L,l)}(q^2) = \overline{Q^{(L,l)}(q^2)}, \quad (4.74 a)$$

$$P^{(L,l)}(q^2) = \overline{P^{(L,l)}(q^2)}; \quad (4.74 b)$$

c'est-à-dire que les facteurs de forme du vertex sont relativement réels.

### APPENDICE A.4

#### LOIS DE TRANSFORMATION DES FONCTIONS

$$A(p', p)^{\lambda'}_{\lambda}, E(p', p)^{\lambda'}_{\lambda} \text{ et } F^{(\alpha)}(p', p)^{\lambda'}_{\lambda}, H^{(\alpha)}(p', p)^{\lambda'}_{\lambda}$$

Nous allons déduire les formules (4.13 b) et (4.14 b). Le même procédé s'applique aux formules (4.13 a) et (4.14 a).

Le point de départ est la loi de transformation

$$V^{\mu}(p', p)^{\lambda'}_{\lambda} = D^{(j')} [R^{-1}(u', \Lambda)]^{\lambda'}_{\tilde{\lambda}}, D^{(j)} [R(u, \Lambda)]^{\tilde{\lambda}}_{\lambda} (\Lambda^{-1})^{\mu}_{\nu} V^{\nu}(\Lambda p', \Lambda p)^{\tilde{\lambda}'}_{\tilde{\lambda}}. \quad (4.9)$$

Multiplions cette expression par le quadrivecteur  $e_{\mu}$  défini dans (4.4). On a alors

$$e_{\mu} V^{\mu}(p', p)^{\lambda'}_{\lambda} = D^{(j')} [R^{-1}(u', \Lambda)]^{\lambda'}_{\tilde{\lambda}}, D^{(j)} [R(u, \Lambda)]^{\tilde{\lambda}}_{\lambda} (\Lambda e)_{\mu} V^{\mu}(\Lambda p', \Lambda p)^{\tilde{\lambda}'}_{\tilde{\lambda}}, \quad (A.4 a)$$

d'où la loi de transformation (4.13 b), avec

$$E(p', p)^{\lambda'}_{\lambda} = e_{\mu} V^{\mu}(p', p)^{\lambda'}_{\lambda}, \quad (A.4 b)$$

et

$$E(\Lambda p', \Lambda p)^{\lambda'}_{\lambda} = (\Lambda e)_{\mu} V^{\mu}(\Lambda p', \Lambda p)^{\lambda'}_{\lambda}. \quad (A.4 c)$$

Multiplions ensuite l'expression (4.9) par le quadrivecteur

$$h_{\mu}^{(\alpha)} = (\Lambda_{t \rightarrow e} n^{(\alpha)})_{\mu}, \quad \alpha = +1, 0, -1; \quad (4.11 b)$$

en nous rappelant que

$$n^{(\pm)} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (n^{(1)} \pm i n^{(2)}); \quad n^{(0)} = n^{(3)}.$$

On a

$$\begin{aligned} \bar{h}_{\mu}^{(\alpha)} V^{\mu}(p', p)^{\lambda'}_{\lambda} &= D^{(j')} [R^{-1}(u', \Lambda)]^{\lambda'}_{\tilde{\lambda}}, D^{(j)} [R(u, \Lambda)]^{\tilde{\lambda}}_{\lambda} \\ &\times \bar{n}_{\mu}^{(\alpha)} (\Lambda^{-1} \Lambda^{-1} \Lambda_{t \rightarrow e})_{\mu}^{\nu} (\Lambda^{-1})_{\nu}^{\tilde{\nu}} V^{\nu}(\Lambda p', \Lambda p)^{\tilde{\lambda}'}_{\tilde{\lambda}} \\ &= D^{(j')} [R^{-1}(u', \Lambda)]^{\lambda'}_{\tilde{\lambda}}, D^{(j)} [R(u, \Lambda)]^{\tilde{\lambda}}_{\lambda} \\ &\times \left\{ - \sum_{\alpha = +, 0, -} \bar{n}_{\mu}^{(\alpha)} (\Lambda^{-1} \Lambda^{-1} \Lambda_{t \rightarrow e})_{\mu}^{\nu} \tilde{n}_{\nu}^{(\beta)} (\Lambda^{-1})_{\nu}^{\tilde{\nu}} V^{\tilde{\mu}}(\Lambda p', \Lambda p)^{\tilde{\lambda}'}_{\tilde{\lambda}} \right\} \quad (A4. d) \end{aligned}$$

Mais

$$\Lambda_{t \rightarrow e}^{-1} \Lambda^{-1} \Lambda_{t \rightarrow \Lambda e} = R^{-1}(e, \Lambda),$$

et

$$-\bar{n}_{\mu}^{(\alpha)} \left( \Lambda_{t \rightarrow e}^{-1} \Lambda^{-1} \Lambda_{t \rightarrow \Lambda e} \right)_{\nu}^{\mu} \tilde{n}_{(\beta)}^{\nu} = D^{(1)}[R^{-1}(e, \Lambda)]_{\beta}^{\alpha}. \quad (\text{A.4 f})$$

En outre

$$\bar{n}_{\nu'}^{(\beta)} \left( \Lambda_{t \rightarrow \Lambda e}^{-1} \right)_{\mu}^{\nu'} = \left( \Lambda_{t \rightarrow \Lambda e} \bar{n}_{\mu}^{(\beta)} \right)_{\mu}. \quad (\text{A.4 g})$$

Ces résultats portés dans (A.4 d) nous donnent la relation

$$\begin{aligned} \bar{h}_{\mu}^{(\alpha)} V^{\mu}(p', p)_{\lambda}^{\lambda'} &= D^{(j')} [R^{-1}(u', \Lambda)]_{\tilde{\lambda}}^{\lambda'} D^{(j)} [R(u, \Lambda)]_{\lambda}^{\tilde{\lambda}} D^{(1)} [R^{-1}(e, \Lambda)]_{\beta}^{\alpha} \\ &\quad \times \left( \Lambda_{t \rightarrow \Lambda e} \bar{n}_{\mu}^{(\beta)} \right)_{\mu} V^{\mu}(\Lambda p', \Lambda p)_{\tilde{\lambda}}^{\tilde{\lambda}'}. \end{aligned} \quad (\text{A.4 g})$$

C'est le résultat (4.14 b) avec

$$H^{(\alpha)}(p', p)_{\lambda}^{\lambda'} = -\bar{h}_{\mu}^{(\alpha)} V^{\mu}(p', p)_{\lambda}^{\lambda'} \quad (\text{A.4 h})$$

et

$$H^{(\alpha)}(\Lambda p', \Lambda p)_{\lambda}^{\lambda'} = - \left( \Lambda_{t \rightarrow \Lambda e} \bar{n}_{\mu}^{(\beta)} \right)_{\mu} V^{\mu}(\Lambda p', \Lambda p)_{\tilde{\lambda}}^{\tilde{\lambda}'}. \quad (\text{A.4 i})$$

## APPENDICE B.4

### CONSERVATION DE COURANT ET FACTEURS DE FORME

Considérons d'abord le cas  $q^2 > 0$ . Nous avons vu que

$$\partial_{\mu} j^{\mu}(x) = 0, \quad \text{entraîne} \quad A(p', p)_{\lambda}^{\lambda'} = 0; \quad (\text{4.50 a})$$

c'est-à-dire, d'après (4.30 a),

$$D^{(j')} [R(a', u')]_{\rho}^{\lambda'} D^{(j)} [R(u, a)]_{\lambda}^{\rho} \sum_{L, M} \binom{\rho' \quad j \quad M}{j' \quad \rho \quad L} A^{(L)}(q^2) Y_M^{(L)}[\vec{\varepsilon}(a, e)] = 0. \quad (\text{B.4 a})$$

Multiplions ces expressions par  $D^{(j)} [R(u', a')]_{\tilde{\lambda}'}^{\tilde{\lambda}}$   $D^{(j)} [R(a, u)]_{\tilde{\lambda}}^{\lambda}$  avec sommation sur les indices  $\lambda$  et  $\lambda'$  ( $\tilde{\lambda}$  et  $\tilde{\lambda}'$  fixés). On a alors

$$\sum_{L, M} \binom{\tilde{\lambda}' \quad j \quad M}{j' \quad \tilde{\lambda} \quad L} A^{(L)}(q^2) Y_M^{(L)}[\vec{\varepsilon}(a, e)] = 0. \quad (\text{B.4 b})$$

Multiplions maintenant par  $\binom{j' \quad \tilde{\lambda} \quad L'}{\tilde{\lambda}' \quad j \quad M'}$  avec sommation sur  $\tilde{\lambda}$  et  $\tilde{\lambda}'$ . En utilisant la propriété d'orthogonalité des symboles 3 - j, on déduit

$$\frac{1}{2L' + 1} A^{(L')}(q^2) Y_M^{(L')}[\vec{\varepsilon}(a, e)] = 0. \quad (\text{B.4 c})$$

Ceci étant vrai pour tout  $L'$  et  $M'$ , on conclut donc

$$A^{(L)}(q^2) = 0, \text{ pour tout } L : |j - j'|, |j - j' + 1|, \dots, j + j'. \quad (4.51 a)$$

Dans le cas où  $q^2 < 0$ , nous avons vu que

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0 \text{ entraîne } a_\mu \vec{h}^\mu \cdot \vec{H}(p', p)^\lambda = 0; \quad (4.50 b)$$

c'est-à-dire, d'après (4.30 b)

$$D^{(j')}[\mathbf{R}(e, u')]^\lambda{}_\rho \cdot D^{(j)}[\mathbf{R}(u, e)]^\rho{}_\lambda a_\mu \vec{h}^\mu_{(\alpha)} \sum_{L, M} \sum_l \begin{pmatrix} \rho' & j & m \\ j' & \rho & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & l & M \\ 1 & m & L \end{pmatrix} \times H^{(L, l)}(q^2) Y_M^{(L)}[\vec{\alpha}(e, a)] = 0. \quad (B.4d)$$

Cette expression dans le système de Breit, le système au repos de  $e$ , s'écrit

$$a_\mu \vec{h}^\mu_{(\alpha)} \sum_{L, M} \sum_l \begin{pmatrix} \lambda' & j & m \\ j' & \lambda & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & l & M \\ 1 & m & L \end{pmatrix} H^{(L, l)}(q^2) Y_M^{(L)}[\vec{\alpha}(e, a)], \quad (B.4 e)$$

et si on choisit  $\vec{h}^\mu_{(\alpha)} = a^\mu$  (voir (4.11 b) et (4.6 b)), on trouve

$$\sum_L \sqrt{2L+1} \sum_l \begin{pmatrix} \lambda' & j & m \\ j' & \lambda & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & l & 0 \\ 1 & m & L \end{pmatrix} H^{(L, l)}(q^2) P_L(1) = 0; \quad (B.4 f)$$

c'est-à-dire

$$\sum_{l, L} \sqrt{\frac{2L+1}{2l+1}} \begin{pmatrix} 0 & l & 0 \\ 1 & 0 & L \end{pmatrix} H^{(L, l)}(q^2) = 0. \quad (4.51 b)$$

## DEUXIÈME PARTIE

### Théorie relativiste des corrélations angulaires dans les désintégrations successives en deux corps.

#### Applications.

Nous allons étudier dans cette deuxième partie les propriétés cinématiques des processus où une particule d'énergie-impulsion  $p$  et spin  $j$  se désintègre en deux particules : une d'énergie-impulsion  $p_1$  et spin  $j_1$  et une d'énergie-impulsion  $p_2$  et spin zéro

$$p = p_1 + p_2 \quad (II.1)$$

$$(j \rightarrow j_1, 0)$$

avec

$$p^2 = m^2 \quad \text{et} \quad p_1^2 = m_1^2, \quad p_2^2 = m_2^2 \quad (II.2 a, b, c)$$

Nous discuterons aussi le cas d'une cascade de désintégrations en deux corps; c'est-à-dire celui où la particule  $p_1$  de spin  $j_1$  se désintègre encore en deux particules d'énergies-impulsions  $p_3$  et  $p_4$  et spins  $j_3$  et zéro,

$$\begin{aligned} p_1 &= p_3 + p_4 & (\text{II. 3}) \\ (j_1 &\rightarrow j_3, 0) \end{aligned}$$

avec

$$p_3^2 = m_3^2 \quad \text{et} \quad p_4^2 = m_4^2. \quad (\text{II. 4 a, b})$$

Dans le chapitre VI nous entreprenons l'analyse phénoménologique générale de ces processus. Quelques applications à la détermination du spin et parité des résonances sont discutées dans le chapitre VI.

## CHAPITRE V

### DESCRIPTION PHÉNOMÉNOLOGIQUE DES DÉSINTÉGRATIONS A DEUX CORPS ET ANALYSE MULTIPOLAIRE

Dans une désintégration à deux corps

$$p = p_1 + p_2, \quad (5.1)$$

les invariants du système sont des constantes qui dépendent uniquement des masses des particules :

$$\begin{aligned} p \cdot p_1 &= \frac{1}{2}(m^2 + m_1^2 - m_2^2); & p \cdot p_2 &= \frac{1}{2}(m^2 + m_2^2 - m_1^2); \\ p_1 \cdot p_2 &= \frac{1}{2}(m^2 - m_1^2 - m_2^2). \end{aligned} \quad (5.2 a, b, c)$$

Par rapport à une tétrade de référence  $\{t, \vec{n}\}$ , la distribution d'une configuration finale dans (5.1) est complètement spécifiée par les masses des particules et par l'orientation du trivecteur suivant

$$\vec{e}(p, p_1) = \frac{2}{m} \Delta^{-\frac{1}{2}}(m, m_1, m_2)(p_1 \wedge p)^{\lambda\mu} p_\lambda \vec{s}_\mu, \quad (5.3 a)$$

avec

$$\vec{s} = \Lambda_{t \rightarrow u} \vec{n}; \quad u = p/m \quad (5.3 b)$$

et

$$\Delta(m, m_1, m_2) = (m + m_1 + m_2)(m + m_1 - m_2)(m - m_1 + m_2)(m - m_1 - m_2),$$

$$(p_1 \wedge p)^\lambda{}^\mu = p_1^\lambda p^\mu - p^\lambda p_1^\mu. \quad (5.4)$$

Ce trivecteur, dans le système au repos de la particule  $p(t = u)$ , coïncide avec l'impulsion normalisée de  $p_1$ ,

$$\vec{e}(p, p_1) \rightarrow \vec{p}_1 / |\vec{p}_1|.$$

En général,  $\vec{e}(p, p_1)$  sont les trois composantes de la projection sur  $s_\mu^{(1)}$ ,  $s_\mu^{(2)}$  et  $s_\mu^{(3)}$  [voir (5.3 b)] du quadrivecteur normalisé qui est dans le 2-plan  $p, p_1$  et orthogonal à  $p$ .

Les deux paramètres à mesurer dans chaque événement du type (5.1) sont l'angle polaire  $\theta$  et l'angle azimutal  $\varphi$  de  $\vec{e}(p, p_1)$  : d'après la définition (5.3) on a

$$\cos \theta = -2m\Delta^{-1/2}(m, m_1, m_2)(p_1 \cdot s^{(3)}) \quad (5.5)$$

et

$$\cos \varphi = \left[ \frac{\Delta}{4m^2} - (p_1 \cdot s^{(3)})^2 \right]^{-1/2} (p_1 \cdot s^{(1)}). \quad (5.6)$$

Le but de ce chapitre est de préciser l'information qu'on obtient de l'étude de la dépendance du système en fonction de ces variables angulaires. Dans le § 5 a nous calculons l'expression générale de la distribution angulaire des produits de désintégration dans une transition  $j \rightarrow j_1, 0$ . Cette distribution angulaire a la forme suivante

$$I(p_1, p) = \sum_{L=0}^{2j} \sum_{M=-L}^L X_M^{(L)}(j, j_1; p) Y_M^{(L)}[\vec{e}(p, p_1)]. \quad (5.7)$$

Les coefficients  $X_M^{(L)}(j, j_1; p)$  de ce développement sont calculés explicitement en fonction des paramètres multipolaires  $t_M^{(L)}(p)$  de la matrice densité de la particule initiale et des amplitudes  $A^{(l)}$  de moment orbital

$$l = |j - j_1|, \dots, j + j_1$$

du processus de désintégration (5.1). Dans chaque élément de volume  $d\Omega[\vec{e}(p, p_1)]$  nous aurons un ensemble de particules de spin  $j_1$  produites avec une énergie-impulsion  $p_1$ . La distribution de spin dans cet ensemble est décrite par les paramètres multipolaires  $t_M^{(L)}(p_1, p)$

$$(0 \leq L' \leq 2j_1; -L' \leq M' \leq L').$$

La dépendance angulaire de ces paramètres est calculée dans le § 5 b et le cas particulier qui donne la dépendance angulaire de la polarisation longitudinale est étudié dans le § 5 c. Dans l'étude des désintégrations en cascade il est parfois utile de connaître la valeur moyenne des paramètres  $t_M^{(u)}(p_1, p)$  par rapport à la distribution angulaire  $I(p_1, p)$ . Ce calcul est fait dans le § 5 d. Nous montrons comment les moyennes  $\langle t_M^{(u)}(p_1, p) \rangle$  s'expriment en fonction des paramètres  $t_M^{(u)}(p)$  et des amplitudes  $A^{(l)}$ .

A l'exception du § 5 d, beaucoup des résultats obtenus dans ce chapitre ont été aussi discutés par plusieurs auteurs (1). Néanmoins, la technique que nous employons diffère notablement de celle utilisée par ces auteurs dans le sens que nous ne faisons pas un choix particulier de système de référence ou d'axes de quantification.

### § 5 a. — Distribution angulaire dans une désintégration à deux corps. Cas particuliers.

Dans une transition du type (5.1) les éléments de matrice de l'amplitude de transition sont donnés par l'expression

$$T(p_1, p)^{\lambda_1}_\lambda \equiv \langle p_1, j_1 \lambda_1; p_2 | T | p, j \lambda \rangle. \quad (5.8)$$

Ici l'état final est un produit tensoriel d'états à une particule et  $\lambda, \lambda_1$  sont définis par les relations

$$-\frac{W}{m} \cdot s |p, j \lambda \rangle = \lambda |p, j \rangle, \quad s = \Lambda_{t \rightarrow u} n^{(3)}, \quad u = p/m; \quad (5.9 a)$$

$$-\frac{W}{m_1} \cdot s_1 |p_1, j_1 \lambda_1 \rangle = \lambda_1 |p_1, j_1 \rangle, \quad s_1 = \Lambda_{t \rightarrow u_1} n^{(3)}, \quad u_1 = p_1/m_1. \quad (5.9 b)$$

L'invariance relativiste de la matrice de transition implique

$$T = U(\Lambda) T U^{-1}(\Lambda), \quad \forall \Lambda \in L_{\uparrow} \quad (5.10)$$

et les éléments de matrice (5.8) ont donc la loi de transformation

$$T(p_1, p)^{\lambda_1}_\lambda = D^{(i)}[R^{-1}(u, \Lambda)]^{\lambda_1}_{\tilde{\lambda}_1} D^{(j)}[R(u, \Lambda)]^{\tilde{\lambda}}_\lambda T(\Lambda p_1, \Lambda p)^{\tilde{\lambda}_1}_{\tilde{\lambda}}, \quad (5.11)$$

---

(1) Voir par exemple : Byers et Fenster [63]; Ademollo et Gatto [64]; Ademollo, Gatto et Preparata [64]; Henry et de Rafael [65]; Button-Schafer [65]. Pour une excellente mise au point sur ce sujet voir Jackson [65 a].

avec

$$\mathbf{R}(u, \Lambda) = \Lambda_{t \rightarrow \Lambda u}^{-1} \Lambda \Lambda_{t \rightarrow u} \quad \text{et} \quad \mathbf{R}^{-1}(u_1, \Lambda) = \Lambda_{t \rightarrow u_1}^{-1} \Lambda^{-1} \Lambda_{t \rightarrow u_1}. \quad (5.12 a, b)$$

Pour réduire ce produit de représentations nous allons utiliser de nouveau la technique introduite dans le § 4 a. Notons d'abord que les rotations  $\mathbf{R}(u, \Lambda)$  et  $\mathbf{R}^{-1}(u_1, \Lambda)$  sont liées par la relation

$$\mathbf{R}^{-1}(u_1, \Lambda) = \mathbf{R}^{-1}(u_1, u) \mathbf{R}^{-1}(u, \Lambda) \mathbf{R}(\Lambda u_1, \Lambda u) \quad (5.13)$$

avec

$$\mathbf{R}(u_1, u) \equiv \Lambda_{t \rightarrow u}^{-1} \Lambda_{u_1 \rightarrow u} \Lambda_{t \rightarrow u_1}. \quad (5.14)$$

Cette relation portée dans (5.11) nous donne l'expression suivante :

$$\begin{aligned} D^{(j_1)}[\mathbf{R}(u_1, u)]_{\lambda_1}^{\nu_1} T(p_1, p)_{\lambda}^{\lambda_1} &= D^{(j_1)}[\mathbf{R}^{-1}(u, \Lambda)]_{\tilde{\nu}_1}^{\tilde{\nu}_1} D^{(j)}[\mathbf{R}(u, \Lambda)]_{\tilde{\lambda}}^{\tilde{\lambda}} \\ &\times D^{(j_1)}[\mathbf{R}(\Lambda u_1, \Lambda u)]_{\tilde{\lambda}_1}^{\tilde{\nu}_1} T(\Lambda p_1, \Lambda p)_{\tilde{\lambda}}^{\tilde{\lambda}_1}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Ensuite nous multiplions cette équation par le symbole  $3 - j \begin{pmatrix} j_1 & \lambda & l \\ \nu_1 & j & m \end{pmatrix}$  en sommant sur les indices  $\nu_1$  et  $\lambda$ . En tenant compte des formules (1.51 a, b) et (1.63) on trouve le résultat

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} j_1 & \lambda & l \\ \nu_1 & j & m \end{pmatrix} D^{(j_1)}[\mathbf{R}(u_1, u)]_{\lambda_1}^{\nu_1} T(p_1, p)_{\lambda_1}^{\lambda_1} &= D^{(j)}[\mathbf{R}(u, \Lambda)]_m^{m'} \\ &\times \begin{pmatrix} j_1 & \tilde{\lambda} & l \\ \tilde{\nu}_1 & j & m' \end{pmatrix} D^{(j_1)}[\mathbf{R}(\Lambda u_1, \Lambda u)]_{\tilde{\lambda}_1}^{\tilde{\nu}_1} T(\Lambda p_1, \Lambda p)_{\tilde{\lambda}}^{\tilde{\lambda}_1}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Ceci nous conduit à définir comme amplitudes irréductibles les quantités (\*)

$$T_m^{(j)}(p_1, p) = \sqrt{2l+1} \begin{pmatrix} j_1 & \lambda & l \\ \nu_1 & j & m \end{pmatrix} D^{(j_1)}[\mathbf{R}(u_1, u)]_{\lambda_1}^{\nu_1} T(p_1, p)_{\lambda_1}^{\lambda_1}, \quad (5.17)$$

---

(\*) Le facteur  $\sqrt{2l+1}$  dans (5.17) est un facteur de normalisation choisi de façon telle que pour  $j_1 = 0$  on ait  $T_m^{(j)}(p_1, p) = T(p_1, p)_{\lambda}$ .

avec

$$l = |j - j_1|, \dots, j + j_1.$$

A partir des fonctions  $T_m^{(l)}(p_1, p)$  il est possible de définir des amplitudes invariantes relativistes par la méthode décrite dans le § 4 b pour construire les facteurs de forme  $A^{(l)}(q^2)$  [voir (4.28 a)] et  $E^{(l)}(q^2)$  [voir (4.28 b)]. On a maintenant

$$A^{(l)} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \sum_m \int d\Omega[\vec{e}(p, p_1)] T_m^{(l)}(p_1, p) \bar{Y}_m^{(l)}[\vec{e}(p, p_1)], \quad (5.18)$$

où  $d\Omega(\vec{e})$  est l'élément de volume invariant

$$d\Omega(\vec{e}) = \frac{1}{4\pi} \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (5.19)$$

Le développement des éléments de matrice  $T(p_1, p)_{\lambda}^{\lambda_1}$  en termes des amplitudes invariantes  $A^{(l)}$  est donné par l'expression :

$$T(p_1, p)_{\lambda}^{\lambda_1} = \sqrt{4\pi} D^{(j_1)}[R(u, u_1)]_{\nu_1}^{\lambda_1} \begin{pmatrix} \nu_1 & j & m \\ j_1 & \lambda & l \end{pmatrix} A^{(l)} Y_m^{(l)}[\vec{e}(p, p_1)]. \quad (5.20)$$

Dans ce développement, les seules inconnues sont les amplitudes  $A^{(l)}$  dont la valeur explicite dépend uniquement du mécanisme dynamique responsable du processus de désintégration (5.1).

Soit  $\rho(p)_{\lambda}^{\lambda}$  la matrice densité décrivant la distribution de spin dans l'échantillon de particules initiales d'énergie-impulsion  $p$ . Nous avons vu dans le chapitre II que

$$\rho(p)_{\lambda}^{\lambda} = \frac{(-1)^{2j}}{\sqrt{2j+1}} \sum_{L, M} (2L+1) \bar{t}_M^{(L)}(p) \begin{pmatrix} M & \lambda & j \\ L & j & \lambda \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

La distribution angulaire des produits de désintégration dans (5.1) est donnée par l'expression

$$I(p_1, p) = \frac{\text{tr } T(p_1, p) \rho(p) T^*(p_1, p)}{\int d\Omega \text{ tr } T_{\rho} T^*}, \quad (5.21)$$

où  $T^*(p_1, p)$  est l'amplitude de transition hermitique conjuguée et  $\text{tr}$  l'opération trace dans l'espace des polarisations. En utilisant (5.20) et (2.10) on trouve :

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\tilde{\lambda}, \lambda_1} T(p_1, p)^{\lambda_1}_{\lambda} \rho(p)^{\lambda}_{\tilde{\lambda}} \overline{T(p_1, p)^{\lambda_1}_{\tilde{\lambda}}} \\
 &= \frac{4\pi}{\sqrt{2j+1}} \sum_{i, L, \tilde{l}} \sum_{m, \tilde{m}} (-1)^{j+j_1+\tilde{l}} \begin{pmatrix} \nu_1 & j & m \\ j_1 & \lambda & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & \lambda & j \\ L & j & \tilde{\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\lambda} & j_1 & \tilde{l} \\ j & \nu_1 & \tilde{m} \end{pmatrix} (2L+1) \tilde{t}_{\tilde{M}}^{(L)}(p) \\
 & \quad \times A^{(l)} \bar{A}^{(\tilde{l})} Y_m^{(l)}(\vec{e}) \bar{Y}_{\tilde{m}}^{(\tilde{l})}(\vec{e}) \\
 &= \frac{4\pi}{\sqrt{2j+1}} \sum_{i, L, \tilde{l}} (-1)^{j+j_1+\tilde{l}} (2L+1) \begin{Bmatrix} l & L & \tilde{l} \\ j & j_1 & j \end{Bmatrix} \sum_{m, M, \tilde{m}} \begin{pmatrix} m & M & \tilde{l} \\ l & L & \tilde{m} \end{pmatrix} \\
 & \quad \times \tilde{t}_{\tilde{M}}^{(L)}(p) A^{(l)} \bar{A}^{(\tilde{l})} Y_m^{(l)}(\vec{e}) \bar{Y}_{\tilde{m}}^{(\tilde{l})}(\vec{e}) \\
 &= (-1)^{j+j_1} \sum_{i, L, \tilde{l}} \sqrt{\frac{4\pi(2l+1)(2L+1)(2\tilde{l}+1)}{2j+1}} \begin{Bmatrix} l & L & \tilde{l} \\ j & j_1 & j \end{Bmatrix} \sum_{\tilde{M}} \begin{pmatrix} l & L & \tilde{l} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 & \quad \times A^{(l)} \bar{A}^{(\tilde{l})} \tilde{t}_{\tilde{M}}^{(L)}(p) \bar{Y}_{\tilde{M}}^{(L)}[\vec{e}(p, p_1)], \quad (5.22)
 \end{aligned}$$

où on a utilisé (A.1 c) et (A.1 b).

A partir de cette dernière expression on calcule facilement la quantité  $\int d\Omega(\vec{e}) \text{tr } T\rho T^*$  dans (5.21),

$$\begin{aligned}
 \int d\Omega(\vec{e}) \text{tr } T\rho T^* &= (-1)^{j+j_1} \sum_l \frac{1}{\sqrt{2j+1}} (2l+1) \begin{Bmatrix} l & 0 & l \\ j & j_1 & j \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} l & l & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} |A^{(l)}|^2 \\
 &= (-1)^{j+j_1} \sum_l (-1)^l \sqrt{\frac{2l+1}{2j+1}} \begin{Bmatrix} l & 0 & l \\ j & j_1 & j \end{Bmatrix} |A^{(l)}|^2 = \frac{1}{2j+1} \sum_l |A^{(l)}|^2. \quad (5.23)
 \end{aligned}$$

En tenant compte de (5.22) et (5.23) on trouve finalement pour  $I(p_1, p)$  l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
 I(p_1, p) &= (-1)^{j+j_1} \sqrt{4\pi(2j+1)} \sum_{i, L, \tilde{l}} \sqrt{(2\tilde{l}+1)(2L+1)(2l+1)} \\
 & \quad \begin{Bmatrix} j & L & j \\ l & j_1 & \tilde{l} \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} l & L & \tilde{l} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sum_{\tilde{M}} \tilde{t}_{\tilde{M}}^{(L)}(p) \frac{A^{(l)} \bar{A}^{(\tilde{l})}}{\sum_l |A^{(l)}|^2} Y_{\tilde{M}}^{(L)}[\vec{e}(p, p_1)]. \quad (5.24)
 \end{aligned}$$

La conservation de la parité dans la désintégration (5.1) implique

$$I(p_1, p) = I(Pp_1, Pp).$$

Ceci veut dire que dans le développement (5.24) seuls les termes avec  $L$  pair peuvent avoir une contribution non nulle. Puisque en plus  $\begin{pmatrix} l & L & \tilde{l} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$  pour  $l + L + \tilde{l}$  impair, on aura  $l + \tilde{l}$  pair et les amplitudes  $\Lambda^{(l)}$  ont donc une même parité

$$(-1)^l = \varepsilon \varepsilon_1 \varepsilon_2, \quad (5.25)$$

où  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  sont les parités intrinsèques des particules d'énergie-impulsion  $p$ ,  $p_1$  et  $p_2$ .

La formule (5.24) a une forme particulière très simple dans le cas où  $j_1 = 1/2$ . C'est le cas par exemple des désintégrations

$$\Xi \rightarrow \Lambda + \pi \quad \text{ou} \quad Y^* \rightarrow Y + \pi.$$

En tenant compte de la relation (A1.d), la distribution angulaire  $I(p_1, p)$  dans ces cas est donnée par la formule (3)

$$I(p_1, p) = \sqrt{4\pi(2j+1)} \sum_{L=0}^{2j} \sqrt{2L+1} \frac{1 + (-1)^L + \alpha[1 - (-1)^L]}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & L & j \\ j & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \sum_{M} t_M^{(L)}(p) Y_M^{(L)}[\vec{e}(p, p_1)], \quad (5.26 a)$$

avec

$$\alpha = \frac{2\text{Re}A^{(j-\frac{1}{2})} \overline{A}^{(j+\frac{1}{2})}}{|A^{(j-\frac{1}{2})}|^2 + |A^{(j+\frac{1}{2})}|^2}. \quad (5.26 b)$$

Une valeur non nulle de ce paramètre implique la non-conservation de la parité dans le processus de désintégration. Pour  $L = 1$ , on a

$$\langle Y_0^{(1)}[\vec{e}(p, p_1)] \rangle = \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{t_0^{(1)}}{\sqrt{j(j+1)}} \quad (5.27)$$

et en tenant compte de la borne de  $\delta^{(1)}$  [voir (2.42)] et du fait que  $0 \leq |\alpha| \leq 1$  on déduit de cette dernière expression l'inégalité bien connue de Lee et Yang [58] :

$$|\langle \cos \theta \rangle| \leq \frac{1}{2j+2}. \quad (5.28)$$

(3) Cette formule est connue depuis longtemps; voir par exemple Lee et Yang [58].

§ 5 b. — **Dépendance angulaire des paramètres multipolaires d'une des particules dans l'état final.**

L'état final dans la désintégration (5.1) est caractérisé par la matrice densité

$$\rho(p_1, p) = \frac{T(p_1, p) \rho(p) T^*(p_1, p)}{\text{tr } T(p_1, p) \rho(p) T^*(p_1, p)} \quad (5.29)$$

et d'après (2.8) les paramètres multipolaires associés  $t_M^{(L)}(p_1, p)$  sont donnés par la relation

$$\bar{t}_M^{(L')}(p_1, p) = \sqrt{2j+1} \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_1 & L' & j_1 \\ j_1 & M' & \lambda_1 \end{pmatrix} \rho(p_1, p)_{\tilde{\lambda}_1}^{\lambda_1} \quad (5.30)$$

où

$$0 \leq L' \leq 2j_1 \quad \text{et} \quad -L' \leq M' \leq L'$$

En écrivant  $\rho(p)$  sous forme multipolaire [voir (2.10)] et en tenant compte du développement (5.20) de l'amplitude  $T(p_1, p)$  on trouve l'expression suivante pour les paramètres  $t_M^{(L)}(p_1, p)$  :

$$\begin{aligned} I(p_1, p) \bar{t}_M^{(L')}(p_1, p) &= 4\pi \sqrt{(2j+1)(2j_1+1)} \sum_{L=0}^{2j} \sum_{l, \tilde{l}} (-1)^{j+j_1+\tilde{l}} (2L+1) \\ &\times D^{(j_1)}[R(u, u_1)]_{\nu_1}^{\lambda_1} D^{(j_1)}[R(u_1, u)]_{\tilde{\nu}_1}^{\tilde{\lambda}_1} \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_1 & L' & j_1 \\ j_1 & M' & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 & j & m \\ j_1 & \lambda & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\lambda} & j_1 & \tilde{l} \\ j & \tilde{\nu}_1 & \tilde{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & \lambda & j \\ L & j & \tilde{\lambda} \end{pmatrix} \\ &\times \bar{t}_M^{(L)}(p) \sum_I \frac{A^{(I)} \bar{A}^{(I)}}{|A^{(I)}|^2} Y_m^{(I)}(\vec{e}) \bar{Y}_{\tilde{m}}^{(I)}(\vec{e}) \end{aligned}$$

et en utilisant (1.51 a, b), (1.63) et (A.1 b)

$$\begin{aligned} I(p_1, p) \bar{t}_M^{(L')}(p_1, p) &= (-1)^{j+j_1} \sqrt{4\pi(2j+1)(2j_1+1)} \sum_{L=0}^{2j} \sum_{l, \tilde{l}, \tilde{l}'} (2L+1) \sqrt{(2l+1)(2\tilde{L}+1)(2\tilde{l}+1)} \\ &\times \sum_{\tilde{M}} \begin{pmatrix} j_1 & \tilde{\nu}_1 & L' \\ \nu_1 & j_1 & \tilde{M}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 & j & m \\ j_1 & \lambda & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\lambda} & j_1 & \tilde{l} \\ j & \tilde{\nu}_1 & \tilde{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & \lambda & j \\ L & j & \tilde{\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & \tilde{m} & \tilde{L} \\ m & \tilde{l} & \tilde{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & \tilde{l} & \tilde{L} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{A^{(I)} \bar{A}^{(I)}}{\sum_I |A^{(I)}|^2} \\ &\times \bar{Y}_{\tilde{M}}^{(L)}(\vec{e}) D^{(L')}[R(u_1, u)]_{\tilde{M}'}^{\tilde{M}} \bar{t}_M^{(L)}(p). \end{aligned}$$

En introduisant des symboles  $6 - j$  et en tenant compte des formules (A.1 c) et (A.1 e) on peut aussi écrire l'expression précédente sous la forme

$$\begin{aligned}
 I(p_1, p) \bar{t}_M^{(L')} &= \sqrt{4\pi(2j+1)(2j_1+1)} \sum_{\tilde{l}, \tilde{l}'} \sum_{\tilde{l}} \sqrt{(2l+1)(2\tilde{L}+1)(2\tilde{l}+1)} \\
 &\times \sum_M (2L+1) \left\{ \begin{matrix} L & j & j \\ \tilde{L} & \tilde{l} & l \\ L' & j_1 & j_1 \end{matrix} \right\} \left( \begin{matrix} \tilde{L}' & \tilde{M} & M \\ \tilde{M}' & \tilde{L} & L \end{matrix} \right) \begin{pmatrix} 0 & \tilde{l} & 0 \\ l & 0 & \tilde{L} \end{pmatrix} \frac{A^{(l)\bar{A}^{(\tilde{l})}}}{\sum_l |A^{(l)}|^2} \\
 &\times \bar{t}_M^{(L)}(p) D^{(L')}[R(u_1, u)]_{M'}^{\tilde{M}'} Y_{\tilde{M}}^{(\tilde{L})}[\vec{e}(p, p_1)]. \quad (5.31)
 \end{aligned}$$

Cette formule nous donne la dépendance angulaire des paramètres multipolaires  $\bar{t}_M^{(L')}(p_1, p)$  de la particule finale d'énergie-impulsion  $p_1$  et spin  $j_1$  dans la réaction (5.1) en fonction des paramètres multipolaires  $\bar{t}_M^{(L)}(p)$  de la particule initiale et des amplitudes invariantes  $A^{(l)}$  du processus de désintégration. Dans le paragraphe suivant nous allons considérer quelques cas particuliers de cette formule.

### § 5 c. — Cas particulier : dépendance angulaire de la polarisation longitudinale.

La dépendance angulaire du quadrivecteur polarisation  $\sigma_\alpha(p_1, p)$  de la particule d'énergie-impulsion  $p_1$  et spin  $j_1$  dans (5.1) est donnée d'après la définition (2.29) par la formule (5.31) en faisant  $L' = 1$  :

$$\begin{aligned}
 I(p_1, p) \sigma_\alpha(p_1, p) &= 4\pi \sqrt{\frac{2j+1}{2j_1+1}} \sqrt{\frac{3}{j_1(j_1+1)}} \sum_{\tilde{l}, \tilde{l}'} \sum_{\tilde{l}} \sqrt{(2l+1)(2\tilde{L}+1)(2\tilde{l}+1)} \\
 &\times \sum_L (2L+1) \left\{ \begin{matrix} L & j & j \\ \tilde{L} & l & \tilde{l} \\ 1 & j_1 & j_1 \end{matrix} \right\} \sum_{M', \tilde{M}, M} Y_{M'}^{(l)}(\vec{s}_\alpha) D^{(l)}[R(u, u_1)]_{\tilde{M}'}^{M'} \begin{pmatrix} \tilde{M}' & L & L \\ 1 & \tilde{M} & M \end{pmatrix} \bar{t}_M^{(L)}(p) \\
 &\times \begin{pmatrix} 0 & \tilde{l} & 0 \\ l & 0 & \tilde{L} \end{pmatrix} \frac{A^{(l)\bar{A}^{(\tilde{l})}}}{\sum_l |A^{(l)}|^2} \bar{Y}_{\tilde{M}}^{(\tilde{L})}[\vec{e}(p, p_1)]. \quad (5.32)
 \end{aligned}$$

Rappelons que dans cette expression

$$\vec{s}_\alpha = (\Lambda_{t \rightarrow u_1} \vec{n})_\alpha \quad \text{avec} \quad u_1 = p_1/m_1$$

et

$$R(u, u_1) = \Lambda_{t \rightarrow u_1}^{-1} \Lambda_{u \rightarrow u_1} \Lambda_{t \rightarrow u}.$$

Nous avons vu dans le chapitre II que le degré de polarisation  $\delta^{(1)}$  pour une particule de spin  $j_1 \geq 1/2$  est borné par la quantité

$$\delta^{(1)} = (-\sigma_\alpha \sigma^\alpha)^{1/2} \leq \frac{3}{2j_1 + 1} \frac{1}{j_1 + 1}.$$

Nous allons normaliser le quadrivecteur  $\sigma_\alpha(p_1, p)$  par cette borne

$$\widehat{\sigma}_\alpha(p_1, p) = \sqrt{\frac{2j_1 + 1}{3} (j_1 + 1)} \sigma_\alpha(p_1, p) \quad (5.33)$$

et on aura ainsi

$$-\widehat{\sigma}_\alpha(p_1, p) \widehat{\sigma}^\alpha(p_1, p) \leq 1. \quad (5.34)$$

En outre, soit  $l'_\alpha$  le quadrivecteur situé dans le 2-plan  $(p, p_1)$  qui est orthogonal à  $p_1$ ,

$$l'^\mu = \frac{2}{m_1} \Delta^{-1/2}(m_1, m, m_2)(p \wedge p_1)^{\lambda\mu} p_{1\lambda}, \quad (5.35)$$

avec  $-l' \cdot l' = 1$ . Dans le système au repos de  $p$  les composantes de  $l'_\alpha$  sont

$$l'_\alpha \rightarrow \left( \frac{|\vec{p}_1|}{m_1}, \frac{E_1}{m_1} \frac{\vec{p}_1}{|\vec{p}_1|} \right). \quad (5.36)$$

Pour chaque ensemble de particules produites avec une énergie-impulsion  $p_1$  et par rapport à la tétrade de référence  $\{t, \vec{n}\}$ , la polarisation longitudinale est donnée par la quantité

$$\xi_{\text{long}}(p_1, p) = -l'_\alpha \widehat{\sigma}^\alpha(p_1, p) \quad (5.37)$$

et d'après (5.32), la dépendance angulaire de cette polarisation s'exprime par la relation suivante :

$$\begin{aligned} & I(p_1, p) \xi_{\text{long}}(p_1, p) \\ &= \sqrt{4\pi(2j+1)} \sqrt{\frac{(2j_1+1)(j_1+1)}{j_1}} \sum_{i, \tilde{i}} \sum_{\tilde{l}} \sqrt{(2\tilde{l}+1)(2L+1)(2l+1)} \\ & \times \sum_L (2\tilde{L}+1) \begin{Bmatrix} L & j & j \\ \tilde{L} & l & \tilde{l} \\ 1 & j_1 & j_1 \end{Bmatrix} \sum_M \begin{pmatrix} 0 & \tilde{l} & 0 \\ l & 0 & \tilde{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \tilde{L} & L & 0 \end{pmatrix} \sum_I \frac{A^{(I)\bar{A}}(\vec{t})}{|A^{(I)}|^2} \bar{t}_M^{(L)}(p) \bar{Y}_M^{(L)}[\vec{e}(p, p_1)], \end{aligned} \quad (5.38)$$

où nous avons utilisé la relation

$$Y_M^{(1)}[\vec{e}(p, p_1)] = D^{(1)}[R(u, u_1)]_{M'}^{\tilde{M}'} Y_{M'}^{(1)}[-I_{\alpha}^{\vec{s}'}] \quad (5.39)$$

et les formules (2.12) et (A.1 b). La formule (5.38) admet aussi une expression très simple dans le cas  $j_1 = 1/2$ . On trouve alors

$$\begin{aligned} I(p_1, p) \xi_{\text{long}}(p_1, p) &= \sqrt{4\pi(2j+1)} \sum_{L=0}^{2j} \sqrt{2L+1} \frac{1 - (-1)^L + \alpha[1 + (-1)^L]}{2} \\ &\times \sum_M \begin{pmatrix} 1/2 & L & j \\ j & 0 & 1/2 \end{pmatrix} t_M^{(L)}(p) Y_M^{(L)}[\vec{e}(p, p_1)], \quad (5.40) \end{aligned}$$

où  $\alpha$  est le paramètre d'asymétrie défini dans (5.26 b). Nous voyons d'après (5.26 a) et (5.40) que dans une désintégration du type

$$\begin{aligned} Y^* &\rightarrow Y + \pi \\ (j &\rightarrow 1/2, 0) \end{aligned}$$

conservant la parité, par exemple

$$Y_1^*(1385) \rightarrow Y + \pi; \quad Y_0^*(1520) \rightarrow \Sigma + \pi; \quad \Xi^*(1530) \rightarrow \Xi + \pi,$$

les moments d'ordre pair de la distribution angulaire  $I(p_1, p)$  sont proportionnels aux paramètres  $t_M^{(L \text{ pair})}(p)$  :

$$\begin{aligned} \langle I(p_1, p) Y_M^{(L \text{ pair})}[\vec{e}(p, p_1)] \rangle &= \int d\Omega[\vec{e}(p, p_1)] I(p_1, p) \bar{Y}_M^{(L)}[\vec{e}(p, p_1)] \\ &= \sqrt{\frac{(2j+1)(2L+1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} 1/2 & L & j \\ j & 0 & 1/2 \end{pmatrix} t_M^{(L \text{ pair})}(p); \quad (5.41) \end{aligned}$$

les moments d'ordre impair de la distribution angulaire de la polarisation longitudinale  $I(p_1, p) \xi_{\text{long}}(p_1, p)$  sont proportionnels aux paramètres  $t_M^{(L \text{ impair})}(p)$  :

$$\begin{aligned} \langle I(p_1, p) \xi_{\text{long}}(p_1, p) \bar{Y}_M^{(L \text{ impair})}[\vec{e}(p, p_1)] \rangle &= \int d\Omega[\vec{e}(p, p_1)] I(p_1, p) \\ &\times \xi_{\text{long}}(p_1, p) \bar{Y}_M^{(L \text{ impair})}[\vec{e}(p, p_1)] \\ &= \sqrt{\frac{(2j+1)(2L+1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} 1/2 & L & j \\ j & 0 & 1/2 \end{pmatrix} t_M^{(L \text{ impair})}(p). \quad (5.42) \end{aligned}$$

§ 5 d. — Expression des moyennes des paramètres multipolaires d'une des particules dans l'état final.

La formule (5.32) dans le § 5 b nous donne la valeur des paramètres  $t_{\mathbf{M}'}^{(L)}(p_1, p)$  pour chaque direction de production  $\vec{e}(p, p_1)$ . Voyons maintenant quelle est l'expression correspondant à leur valeur moyenne par rapport à la distribution angulaire  $I(p_1, p)$  :

$$\langle t_{\mathbf{M}'}^{(L)}(p_1, p) \rangle = \int d\Omega[\vec{e}(p, p_1)] I(p_1, p) t_{\mathbf{M}'}^{(L)}(p_1, p). \quad (5.43)$$

En tenant compte de la formule (5.32) on trouve le résultat

$$\begin{aligned} \langle t_{\mathbf{M}'}^{(L)}(p_1, p) \rangle &= \sqrt{(2j+1)(2j_1+1)} \sum_{l=|j-j_1|}^{j+j_1} \sqrt{(2l+1)(2L+1)} \begin{Bmatrix} L & j & j \\ 0 & l & l \\ L & j_1 & j_1 \end{Bmatrix} \\ &\times t_{\mathbf{M}'}^{(L)}(p) \frac{|A^{(l)}|^2}{\sum_l |A^{(l)}|^2} \overline{D^{(L)}[R(u_1, u)]}^{\mathbf{M}'}. \quad (5.44) \end{aligned}$$

En utilisant (2.8) et (A.1 k) on peut encore écrire la relation précédente sous la forme

$$\begin{aligned} \langle t_{\mathbf{M}'}^{(L)}(p_1, p) \rangle &= \sum_l (-1)^{j+j_1+l+L} \sqrt{(2j+1)(2j_1+1)} \\ &\begin{Bmatrix} j_1 & j & l \\ j & j_1 & L \end{Bmatrix} \frac{|A^{(l)}|^2}{\sum_l |A^{(l)}|^2} t_{\mathbf{M}'}^{(L)}(\Lambda_{t \rightarrow u_1}^{-1} p), \quad (5.45) \end{aligned}$$

où

$$t_{\mathbf{M}'}^{(L)}(\Lambda_{t \rightarrow u_1}^{-1} p) = \overline{D^{(L)}[R(u_1, u)]}^{\mathbf{M}'} t_{\mathbf{M}'}^{(L)}(p).$$

Notons que dans le système au repos de la particule  $p(t = u)$  on a

$$t_{\mathbf{M}'}^{(L)}(\Lambda_{u \rightarrow u_1}^{-1} p) = t_{\mathbf{M}'}^{(L)}(p);$$

de même dans le système au repos de la particule  $p_1(t = u_1)$  on a

$$t_{\mathbf{M}'}^{(L)}(p) = t_{\mathbf{M}'}^{(L)}(p).$$

La relation (5.45) nous donne le facteur de proportionnalité entre les moyennes des paramètres multipolaires des particules de spin  $j_1$  produites dans la désintégration (5.1) et les paramètres multipolaires de la particule initiale de spin  $j$ . Ce facteur est une combinaison linéaire des modules carrés des amplitudes de moment orbital  $l = |j - j_1|, \dots, j + j_1$  avec des coefficients qui sont des symboles  $6 - j$ . Pour  $L = 1$  on trouve la formule :

$$\langle t_{m(p_1, p)}^{(1)} \rangle = \sum_l \frac{[j(j+1) + j_1(j_1+1) - l(l+1)]}{2\sqrt{j(j+1)j_1(j_1+1)}} \frac{|A^{(l)}|^2}{\sum_l |A^{(l)}|^2} \overline{D^{(1)}[R(u_1, u)]}^{m'} t_{m'}^{(1)}(p). \quad (5.46)$$

Nous discuterons une application de cette formule à la détermination du spin des résonances dans le chapitre suivant.

## CHAPITRE VI

### APPLICATION A LA DÉTERMINATION DU SPIN ET PARITÉ DES RÉSONANCES

A titre d'application du formalisme développé dans le chapitre précédent nous allons discuter maintenant deux types de tests pour la détermination du spin et parité <sup>(1)</sup> (voir le § 6 b et le § 6 c). Pour être complet, nous avons réuni dans le § 6 a plusieurs propriétés de la matrice densité très importantes dans les applications physiques.

---

<sup>(1)</sup> Pour d'autres tests voir par exemple : Adair [55]; Lee et Yang [58]; Durand, Landovitz et Leitner [58]; Bohr [59]; Meyer, Prentki et Yamagouchi [60]; Peshkin [61]; Byers et Fenster [64]; Shapiro [64]; Wolters [64]; Ademollo et Gatto [64]; Ademollo, Gatto et Preparata [64]; Peshkin [64]; Button-Schafer [65]; Jackson [65 a]; Ademollo, Gatto et Preparata [65]; Zemach [65].

### § 6 a. — Rappel des propriétés de la matrice densité.

Nous avons discuté la matrice densité pour des particules de spin quelconque dans le chapitre II. Nous allons résumer ci-dessous les résultats essentiels pour les applications :

1° La condition  $\text{tr } \rho = 1$  implique

$$t_0^{(0)} = 1 \quad (2.11)$$

2° L'hermiticité de  $\rho$  implique

$$\bar{t}_{-M}^{(L)}(p) = (-1)^M t_M^{(L)}(p). \quad (2.12)$$

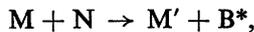
3°  $\text{tr } \rho^2 \leq \text{tr } \rho$  implique

$$\sum_{L=0}^{2j} \sum_{M=-L}^L (2L+1) |t_M^{(L)}|^2 \leq 2j+1. \quad (2.14)$$

Eberhard et Good [60] ont donné aussi une borne inférieure pour la quantité  $\text{tr } \rho^2$ . Pour une matrice densité correspondant à un mélange incohérent de  $Q$  états purs ( $Q < 2j+1$ ) ils ont montré l'inégalité <sup>(2)</sup>

$$4^\circ \quad \sum_{L=0}^{2j} \sum_{M=-L}^L (2L+1) |t_M^{(L)}|^2 \geq \frac{2j+1}{Q}. \quad (6.1)$$

Cette relation s'applique dans la pratique de la façon suivante : considérons par exemple le cas de la matrice densité d'une résonance  $B^*$  produite dans une réaction



où  $M$  et  $M'$  sont des mésons pseudoscalaires et  $N$  un nucléon non polarisé. Alors  $Q = 2$ .

En plus de ces quatre conditions générales, les éléments de matrice densité sont soumis à des restrictions imposées par des propriétés de symétrie dans le processus de production de la particule correspondante :

A) Conservation de la parité (Bohr [59]).

Soit  $X$  une particule de spin  $j$  produite dans une réaction

$$a + b \rightarrow X + c, \quad (6.2)$$

<sup>(2)</sup> On trouve aussi une démonstration de cette inégalité dans le cours de Jackson [65 a] aux Houches.

où la parité est conservée. Quantifions le spin de chaque particule selon la normale  $n$  au plan de production

$$n_\mu = \chi \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p_a^\nu p_b^\rho p_x^\sigma \quad (6.3)$$

avec  $\chi$  tel que  $n_\mu n^\mu = -1$ . Si  $a$  et  $b$  sont des particules non polarisées et si on somme sur les états de polarisation de  $c$ , on a alors

$$t_M^{(L)}(\mathbf{X}) = 0 \quad \text{pour } M \text{ impair.} \quad (6.4)$$

En effet, soit  $\rho_i$  la matrice densité initiale

$$\rho_i = \rho_a \otimes \rho_b$$

et  $T$  la matrice de transition vers l'état final  $\mathbf{X} + c$  avec sommation sur les variables de spin de  $c$ . On a

$$\rho(\mathbf{X}) = \frac{T \rho_i T^*}{\text{tr } T \rho_i T^*}.$$

Soit  $U(\Sigma_n)$  l'opérateur correspondant à la réflexion  $\Sigma_n$  (produit de l'opération parité par une rotation d'angle  $\pi$  autour de l'axe  $n$ ).  $U(\Sigma_n)$  commute avec  $T$  et puisque  $a$  et  $b$  sont non polarisées  $U(\Sigma_n)$  commute aussi avec  $\rho_i$ . On a alors

$$U(\Sigma_n) \rho(\mathbf{X}) U^{-1}(\Sigma_n) = \rho(\mathbf{X});$$

c'est-à-dire

$$\langle p_x, j\lambda' | U(\Sigma_n) \rho(\mathbf{X}) U^{-1}(\Sigma_n) | p_x, j\lambda \rangle = \rho(\mathbf{X})_{\lambda'\lambda}^{\lambda'\lambda}, \quad (6.5)$$

d'où on déduit, en tenant compte de la loi de transformation (3.5)

$$(-1)^{\lambda' - \lambda} = 1;$$

et puisque  $M = \lambda - \lambda'$ , on conclut d'après l'expression (2.8)

$$t_M^{(L)}(\mathbf{X}) = 0 \quad \text{pour } M \text{ impair.} \quad (6.4)$$

Notons que cette conclusion reste valable lorsque la particule  $\mathbf{X}$  est produite dans des états finals  $\mathbf{X} + c + d + \dots$  où, en plus de la particule  $\mathbf{X}$ , on ne mesure que l'énergie-impulsion totale des particules  $c + d + \dots$

## B) Production vers l'avant.

Dans ce cas il est commode de choisir comme axe de quantification la direction vers l'avant. Cette direction est un axe de symétrie et nous avons prouvé dans le § 2 b que dans ce cas la matrice densité est diagonale et on a donc

$$t_M^{(L)}(\mathbf{X}) = 0 \quad \text{pour } M \neq 0. \quad (6.6)$$

Nous allons prouver en plus que, si l'état initial n'est pas polarisé et si on regarde que la particule produite vers l'avant

$$t_0^{(L)}(X) = 0 \quad \text{pour } L \text{ impair.} \quad (6.7)$$

En effet, soit  $n$  un axe quelconque orthogonal à la direction de quantification (la direction vers l'avant). Par conservation de parité nous avons encore l'équation (6.5) où  $U(\Sigma_n) = U[R_n(\pi)]U(P)$ . Mais maintenant

$$U[R_n(\pi)]U(P) |p_x, j\lambda\rangle = \varepsilon d^{(j)}(\pi)_{\lambda}^{\lambda'} |p_x, j\lambda'\rangle, \quad (6.8)$$

et

$$d^{(j)}(\pi)_{\lambda}^{\lambda'} = (-1)^{j+\lambda} \delta_{\lambda', -\lambda}; \quad (6.9)$$

c'est-à-dire

$$\rho(X)_{\lambda}^{\lambda} = \rho(X)^{-\lambda}_{-\lambda}. \quad (6.10)$$

En outre, d'après les propriétés de symétrie des  $3 - j$

$$\sqrt{2j+1} \begin{pmatrix} \lambda & L & j \\ j & 0 & \lambda \end{pmatrix} = (-1)^L \sqrt{2j+1} \begin{pmatrix} -\lambda & L & j \\ j & 0 & -\lambda \end{pmatrix}; \quad (6.11 a)$$

et dans le cas où  $j$  est entier

$$\begin{pmatrix} 0 & L & j \\ j & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{pour } L \text{ impair.} \quad (6.11 b)$$

Puisque

$$t_0^{(L)}(X) = \sqrt{2j+1} \begin{pmatrix} \lambda & L & j \\ j & 0 & \lambda \end{pmatrix} \rho(X)_{\lambda}^{\lambda}, \quad (2.8)$$

on conclut d'après (6.10) et (6.11 a, b) que

$$t_0^{(L)}(X) = 0 \quad \text{pour } L \text{ impair.} \quad (6.7)$$

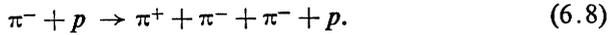
Notons qu'il est encore possible d'obtenir des restrictions supplémentaires pour les éléments de matrice densité lorsqu'on tient compte des symétries internes et quand on compare plusieurs réactions de production. Ceci a été discuté dans le cas de l'indépendance de charge par Michel [61 b] et dans le cadre de la symétrie unitaire  $SU(3)$  <sup>(3)</sup> par de Rafael [65 b]. L'application de la symétrie  $SU(6)_w$  <sup>(4)</sup> des processus vers l'avant, à la détermination des paramètres  $t_0^{(2)}(X)$  a été discutée récemment par Doncel et de Rafael [65].

<sup>(3)</sup> Voir Gell-Mann [61] et Ne'eman [61].

<sup>(4)</sup> Voir Lipkin et Meshkov [65].

§ 6 b. — Test pour la détermination du spin de la résonance  $A_2$  (1324) (de Rafael [64 b]).

Cette résonance (<sup>b</sup>) est produite par exemple dans la réaction



D'après les dernières tables de Rosenfeld *et al.* [65], le  $A_2$  se désintègre fortement dans les modes suivants,

$$A_2 \rightarrow \rho + \pi \sim 91 \% \quad (6.9 a)$$

$$\rightarrow \bar{K} + K \sim (5,5 \pm 1,5) \% \quad (6.9 b)$$

$$\rightarrow \eta + \pi \sim (3,6 \pm 3,0) \% \quad (6.9 c)$$

Le spin isotopique du  $A_2$  est  $I = 1$ . Le mode en  $\rho - \pi$  nous dit que  $G = -1$ . Soit  $l$  le moment orbital du système  $\rho - \pi$  dans (6.9 a) et  $l'$  le moment orbital du système  $K - \bar{K}$  dans (6.9 b). Par conservation de la parité on a

$$\varepsilon = (-1)^l = (-1)^{l'}$$

où  $\varepsilon$  est la parité du  $A_2$ . Pour le système  $\bar{K} - K$

$$G = (-1)^{l'+1};$$

puisque  $G = -1$ ,  $l'$  doit être pair et  $\varepsilon = +1$ . En outre, par conservation du moment cinétique  $j = l'$ ; c'est-à-dire  $j$  est pair. En principe dans (6.9 a), on a

$$\text{soit} \quad l = j \pm 1, \quad \text{soit} \quad l = j;$$

mais, puisque  $l$  et  $j$  doivent être pairs, on a  $l = j$ . En conclusion, les nombres quantiques du  $A_2$  sont

$$I = 1; \quad G = -1; \quad \varepsilon = +1 \quad \text{et} \quad j \text{ pair};$$

le système  $\rho - \pi$  dans (6.9 a) est dans l'état de moment orbital  $l = j$  et le système  $\bar{K} - K$  dans (6.9 b) dans l'état  $l' = j$ . Chaque mode de désintégration se fait par une seule amplitude et en conséquence les distributions angulaires correspondantes dépendent uniquement des paramètres multi-

(<sup>b</sup>) Voir par exemple : Huson *et al.* [63]; Goldhaber *et al.* [64]; Chung *et al.* [64]; Lander *et al.* [64]; Alitti *et al.* [65].

polaires  $t_M^{(l)}$  de la matrice densité du  $A_2$ . Par application de la formule (5.28) aux deux modes de désintégration on trouve les rapports suivants

$$\frac{\langle Y_M^{(L)}(\widehat{\pi}) \rangle}{\langle Y_M^{(L)}(\widehat{K}) \rangle} = 1 - \frac{1}{2} \frac{L(L+1)}{j(j+1)}, \quad \text{pour } L = 2, 4, \dots, 2j. \quad (6.10)$$

Pourvu que  $\langle Y_M^{(L)}(\widehat{\pi}) \rangle \neq 0$  et  $\langle Y_M^{(L)}(K) \rangle \neq 0$ , leur rapport est indépendant du mécanisme de production et détermine d'après (6.10) la valeur  $j$  du spin du  $A_2$ .

**§ 6 c. — Test pour la détermination des spins  
et parité des résonances baryoniques étranges  
(de Rafael [64 a]).**

Considérons une résonance  $Y^*$  ou  $\Xi^*$  avec les modes successifs de désintégration

$$Y^* \rightarrow Y + \pi \quad (Y = \Sigma \text{ ou } \Lambda) \quad (6.11 a)$$

$$\quad \quad \quad \downarrow \rightarrow N + \pi; \quad (6.11 b)$$

ou

$$\Xi^* \rightarrow \Xi + \pi \quad (6.12 a)$$

$$\quad \quad \quad \downarrow \rightarrow \Lambda + \pi. \quad (6.12 b)$$

Par exemple, pour  $Y_1^*(1660)$  et  $\Xi^*(1530)$ ; les spins et parité de ces deux résonances ne sont pas encore bien établis. Nous allons déduire dans ce paragraphe un test qui permet de déterminer le spin et la parité en même temps.

La formule (5.27) appliquée au processus (6.11 b) nous dit

$$\langle Y_0^{(l)}[\vec{e}(p_Y, p_N)] \rangle = \frac{\alpha_Y}{\sqrt{4\pi}} t_0^{(l)}(p_Y).$$

La moyenne de cette quantité par rapport à la distribution angulaire  $I(p_Y, p_{Y^*})$  est d'après (5.46)

$$\begin{aligned} \langle\langle Y_0^{(l)}[\vec{e}(p_Y, p_N)] \rangle\rangle &= \int d\Omega[\vec{e}(p_{Y^*}, p_Y)] I(p_Y, p_{Y^*}) \int d\Omega[\vec{e}(p_N, p_Y)] \\ &\times I(p_Y, p_N) Y_0^{(l)}[\vec{e}(p_Y, p_N)] \\ &= \frac{\alpha_Y}{3} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} D^{(l)}[R(p_Y, p_{Y^*})]_0^M t_M^{(l)}(p_{Y^*}) \times \left\{ \begin{array}{l} -\sqrt{\frac{j}{j+1}}, \text{ si } l=j+1/2 \\ \sqrt{\frac{j+1}{j}}, \text{ si } l=j-1/2 \end{array} \right. \end{aligned} \quad (6.13 a)$$

$$(6.13 b)$$

En outre, d'après la formule (5.42)

$$\langle I(p_Y, p_{Y^*}) \xi_{\text{long}}(p_Y, p_{Y^*}) Y_0^{(1)} \vec{e}(p_{Y^*}, p_Y) \rangle = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{t_0^{(1)}(p_{Y^*})}{2\sqrt{j(j+1)}}. \quad (6.14)$$

Il est commode de quantifier le spin du  $Y^*$  selon la normale  $n$  au 3-plan de la réaction de production du  $Y^*$ . Alors, par conservation de parité [voir (6.4)], on a

$$t_{M'}^{(1)}(p_{Y^*}) = \delta_{M',0} t_0^{(1)}(p_{Y^*}).$$

En fait, les expérimentateurs préfèrent utiliser au lieu de  $t_0^{(1)}$  une quantité  $\eta$  telle que

$$0 \leq \eta^2 \leq 1.$$

D'après la borne (2.45) on a, pour une particule de spin  $j$ ,

$$\eta_{Y^*} = \sqrt{\frac{j+1}{j}} t_0^{(1)}(p_{Y^*}).$$

Les formules (6.13 a, b) s'écrivent alors de la façon suivante

$$\langle\langle \cos \theta \rangle\rangle = \frac{\alpha_Y}{3} \eta_{Y^*} \times \begin{cases} -j/j+1, & \text{si } l=j+1/2; \\ 1, & \text{si } l=j-1/2; \end{cases} \quad (6.15 a)$$

$$(6.15 b)$$

où

$$\begin{aligned} \cos \theta &= -2M\Delta^{-1/2}(M, m, \mu)(p_N \cdot s) \\ &= 2M\Delta^{-1/2}(M, m, \mu) \left\{ (p_Y \cdot n) \left[ \frac{2(p_N \cdot p_{Y^*}) + M^2 + m^2 - \mu^2}{2 + M^{*2} + M^2 - \mu^2} \right] - (p_N \cdot n) \right\}. \end{aligned} \quad (6.16)$$

$M$ ,  $m$  et  $\mu$  sont les masses des particules  $Y$ ,  $N$  et  $\pi$  respectivement (\*). Pour comparer la formule (6.14) avec l'expérience il faut connaître la dépendance

---

(\*) Il y a une correction à faire dans notre article; de Rafael [64 a] : la formule (8) doit s'écrire ainsi

$$\cos \theta = \frac{2M_B M_F}{[\Delta(M_B, M_F, M_\pi)]^{1/2}} \left\{ (B, n) \frac{F(B+R)}{1+B \cdot R} - (F, n) \right\}$$

Ceci ne change pas les conclusions du papier.

angulaire de  $\xi_{\text{long}}(p_Y, p_{Y^*})$ . Pour déterminer celle-ci il faut analyser les produits de désintégration  $Y \rightarrow N + \pi$ . La quantité à mesurer est

$$\langle\langle \cos \varphi \cos \psi \rangle\rangle = \frac{\alpha_Y \eta_{Y^*}}{6j + 6}, \quad (6.17)$$

où

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= P^{(1)}[\vec{e}(p_{Y^*}, p_Y) \cdot \vec{e}(p_Y, p_N)] \\ &= \frac{4M^2(p_{Y^*} \cdot p_N) - (M^{*2} + M^2 - \mu^2)(M^2 + m^2 - \mu^2)}{\Delta^{1/2}(M^*, M, \mu) \Delta^{1/2}(M, m, \mu)} \end{aligned} \quad (6.18)$$

et

$$\cos \psi = -2M^* \Delta^{-1/2}(M^*, M, \mu) (p_Y, n). \quad (6.19)$$

Notons que, dans le système au repos de  $Y$ ,

$$\cos \theta = \widehat{p_N} \cdot \widehat{s}$$

et

$$\cos \varphi = -\widehat{p_{Y^*}} \cdot \widehat{p_N};$$

dans le système au repos de  $Y^*$ ,

$$\cos \psi = \widehat{p_Y} \cdot \widehat{n}.$$

Le rapport des relations (6.15 a, b) et (6.17) est indépendant de la dynamique et détermine la valeur du spin  $j$  et la parité du  $Y^*$  selon le signe qu'on trouve :

$$\frac{\langle\langle \cos \theta \rangle\rangle}{\langle\langle \cos \varphi \cos \psi \rangle\rangle} = \begin{cases} 2j + 2, & \text{si } l = j - 1/2; \\ -2j, & \text{si } l = j + 1/2. \end{cases} \quad (6.20 a)$$

$$(6.20 b)$$

La parité du  $Y^*$  est

$$\varepsilon = (-1)^{j+1/2} \text{ si le rapport précédent est positif; } \quad (6.21 a)$$

$$\varepsilon = (-1)^{j+1/2} \text{ si le rapport précédent est négatif. } \quad (6.21 b)$$

Nous espérons avoir montré avec cet exemple comment utiliser le formalisme développé dans les chapitres précédents pour obtenir des expressions covariantes comparables avec l'expérience.

## TROISIÈME PARTIE

**Théorie relativiste des corrélations angulaires  
dans les désintégrations à trois corps. Applications.**

## INTRODUCTION

Considérons un processus où une particule d'énergie-impulsion  $p$  se désintègre en trois particules d'énergies-impulsions  $p_i$ ;  $i = 1, 2, 3$ ,

$$p = p_1 + p_2 + p_3, \quad (\text{III.1})$$

avec

$$p^2 = m^2, \quad p_i^2 = m_i^2, \quad i = 1, 2, 3. \quad (\text{III.2})$$

Appelons  $s, t, u$  les paramètres invariants définis ainsi,

$$\begin{aligned} s &= (p - p_1)^2 = (p_2 + p_3)^2; & t &= (p - p_2)^2 = (p_3 + p_1)^2; \\ u &= (p - p_3)^2 = (p_1 + p_2)^2, \end{aligned} \quad (\text{III.3})$$

avec, d'après (III.1) et (III.2),

$$s + t + u = m^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2; \quad (\text{III.4})$$

et soit  $\vec{X}$  un trièdre dans le 3-plan orthogonal à la direction de  $p$  dont les composantes sont définies de la façon suivante :  $X_{(3)}$  est choisi le long de la normale à  $p_1, p_2, p_3$ ,

$$X_{(3)}^\lambda = \frac{\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}}{\sqrt{N(s, t, u)}} p_{1\mu} p_{2\nu} p_{3\rho} \quad (\text{III.5 a})$$

avec  $N(s, t, u)$  tel que  $X_{(3)} \cdot X_{(3)} = -1$ ;  $X_{(1)}$  est dans le 2-plan  $(p, p_1)$  et orthogonal à  $p$ ,

$$X_{(1)}^\lambda = \frac{2}{m} \Delta^{-4/2}(m, m_1, \sqrt{s}) (p_1 \wedge p)^{\lambda\mu} p_{\mu}, \quad (\text{III.5 b})$$

avec

$$\begin{aligned} &\Delta(m, m_1, \sqrt{s}) \\ &= (m + m_1 + \sqrt{s}) (m + m_1 - \sqrt{s}) (m - m_1 + \sqrt{s}) (m - m_1 - \sqrt{s}); \end{aligned} \quad (\text{III.6})$$

et  $X_{(2)}$  est tel que,

$$\varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho} p^\lambda X_{(1)}^\mu X_{(2)}^\nu X_{(3)}^\rho = m. \quad (\text{III. 7})$$

Dans la désintégration (III. 1), une configuration du système final est complètement caractérisée par l'ensemble de deux des paramètres  $s, t, u$ ; et par l'orientation du trièdre  $\vec{X}$  par rapport à une tétrade de référence  $\{t, \vec{n}\}$ . Cette orientation est fixée par les trois angles d'Euler ( $\alpha, \beta, \gamma$ ) de la rotation <sup>(1)</sup> qui amène le trièdre  $\vec{n}$  au trièdre

$$\{ \Lambda_{t \rightarrow p/m}^{-1} X_{(1)}, \Lambda_{t \rightarrow p/m}^{-1} X_{(2)}, \Lambda_{t \rightarrow p/m}^{-1} X_{(3)} \}, \quad (\text{III. 8})$$

où  $\Lambda_{t \rightarrow p/m}^{-1}$  est la transformation de Lorentz pure [voir (1.22)],

$$\Lambda_{t \rightarrow p/m}^{-1} = 1 - \frac{(t + p/m) \otimes (t + p/m)}{1 + \frac{p \cdot t}{m}} + 2t \otimes p/m. \quad (\text{III. 9})$$

Notons que, en particulier, dans le système au repos de la particule  $p(t=p/m)$ , les variables  $s, t, u$  sont liées aux énergies des particules par les relations,

$$E_1 = \frac{1}{2m} (m^2 + m_1^2 - s); \quad E_2 = \frac{1}{2m} (m^2 + m_2^2 - t); \quad E_3 = \frac{1}{2m} (m^2 + m_3^2 - u), \quad (\text{III. 10})$$

avec

$$E_1 + E_2 + E_3 = m; \quad (\text{III. 11})$$

et les composantes de  $X_{(1)}, X_{(2)}, X_{(3)}$  sont

$$X_{(1)} = \left( 0, \frac{\vec{p}_1}{|\vec{p}_1|} \right); \quad X_{(2)} = \left( 0, \frac{\widehat{z} X \vec{p}_1}{|\vec{p}_1|} \right); \quad X_{(3)} = (0, \widehat{z}), \quad (\text{III. 12})$$

où  $\widehat{z}$  est le vecteur de longueur unité orthogonal au plan  $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ .

Deux remarques concernant les variables  $s, t, u; \alpha, \beta, \gamma$  :

a) Le calcul du produit  $X_{(3)} \cdot X_{(3)} = -1$ , avec  $X_{(3)}$  défini par (III. 5 a),

---

<sup>(1)</sup> Les conventions pour la définition des angles d'Euler sont celles d'Edmonds [57], chapitre I<sup>er</sup> : par rapport au trièdre fixe  $\vec{n}$ , on fait d'abord une rotation d'angle  $\gamma$  autour de l'axe  $n^{(3)}$ ; ensuite une rotation d'angle  $\beta$  autour de l'axe  $n^{(2)}$  et finalement une rotation d'angle  $\alpha$  autour de l'axe  $n^{(3)}$ .

montre que la fonction  $N(s, t, u)$  est le déterminant formé avec les invariants  $p_i \cdot p_j$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ ; c'est-à-dire,

$$N(s, t, u) = \begin{vmatrix} m_1^2 & \frac{1}{2}(u - m_1^2 - m_2^2) & \frac{1}{2}(t - m_3^2 - m_1^2) \\ \frac{1}{2}(u - m_1^2 - m_2^2) & m_2^2 & \frac{1}{2}(s - m_2^2 - m_3^2) \\ \frac{1}{2}(t - m_3^2 - m_1^2) & \frac{1}{2}(s - m_2^2 - m_3^2) & m_3^2 \end{vmatrix}. \quad (\text{III. 13})$$

Notons que lorsque deux quadrivecteurs  $p_i, p_j$  sont colinéaires, on a

$$N(s, t, u) = 0 \quad (*)$$

La région de Dalitz <sup>(\*)</sup> est définie par l'ensemble des configurations physiques possibles dans une désintégration en trois corps. Pour le processus (III. 1) elle est déterminée par les relations,

$$\left. \begin{array}{l} N(s, t, u) \geq 0 \\ s + t + u = m^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 \end{array} \right\} \quad (\text{III. 14 a})$$

où

$$\left. \begin{array}{l} (m_2 + m_3)^2 \leq s \leq (m - m_1)^2 \\ (m_3 + m_1)^2 \leq t \leq (m - m_2)^2 \\ (m_1 + m_2)^2 \leq u \leq (m - m_3)^2 \end{array} \right\}. \quad (\text{III. 14 b})$$

b) On peut donner une définition covariante des angles d'Euler <sup>(1)</sup>  $\{\alpha, \beta, \gamma\}$  de la façon suivante : soit  $\vec{s}$  le trièdre obtenu à partir de  $\vec{n}$  par la transformation de Lorentz pure  $\Lambda_{t \rightarrow p/m}$ ,

$$s^{(i)} = \Lambda_{t \rightarrow p/m} n^{(i)}, \quad i = 1, 2, 3; \quad (\text{III. 15})$$

l'angle  $\beta$  est alors donné par  $\cos \beta = -s^{(3)} \cdot X_{(3)}$ ; c'est-à-dire,

$$\cos \beta = \frac{\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}}{\sqrt{N(s, t, u)}} p_{1\lambda} p_{2\mu} p_{3\nu} s_{\rho}^{(3)}; \quad (\text{III. 16 a})$$

<sup>(\*)</sup> Une étude complète des propriétés de la surface  $N(s, t, u) = 0$  a été faite par Byers et Yang [64].

<sup>(\*)</sup> Dalitz [53]. Voir aussi Fabri [54].

L'angle  $\alpha$  est donné par  $\cos \alpha = -m'^{(3)} \cdot n^{(1)}$ , où  $m'^{(3)}$  est le quadrivecteur situé dans le 2-plan  $(\Lambda_{t \rightarrow p/m}^{-1} X_{(3)}, n^{(3)})$  tel que  $m'^{(3)} \cdot n^{(3)} = 0$  et  $m'^{(3)} \cdot m'^{(3)} = -1$ ; c'est-à-dire,

$$m'^{(3)} = \frac{1}{\sin \beta} (n^{(3)} \cos \beta - \Lambda_{t \rightarrow p/m}^{-1} X_{(3)}),$$

et

$$\cos \alpha = \frac{\epsilon^{\lambda\mu\nu\rho}}{\sin \beta \sqrt{N(s, t, u)}} s_{\lambda}^{(1)} p_{1\mu} p_{2\nu} p_{3\rho}; \quad (\text{III. 16 } b)$$

et l'angle  $\gamma$  est donné par  $\cos \gamma = -n'^{(3)} \cdot \Lambda_{t \rightarrow p/m}^{-1} X_{(1)}$ , avec

$$n'^{(3)} = \frac{1}{\sin \beta} (n^{(3)} - \cos \beta \Lambda_{t \rightarrow p/m}^{-1} X_{(3)});$$

c'est-à-dire

$$\cos \gamma = \frac{-2m}{\sin \beta \sqrt{\Delta(m, m_1, \sqrt{s})}} (s^{(3)} \cdot p_1). \quad (\text{III. 16 } c)$$

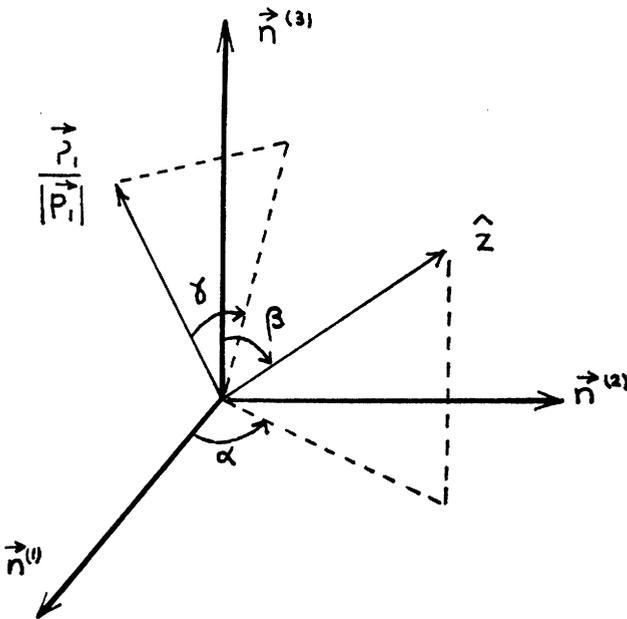


FIG. 7.1. — Angles d'Euler  $\alpha, \beta, \gamma$  dans le système au repos de la particule  $p$  [voir (III. 16 a, b, c)].

Notons que dans le système au repos de la particule  $p$ , les angles  $\beta$  et  $\alpha$  sont respectivement l'angle polaire et l'angle azimutal par rapport au trièdre  $\vec{n}$  de la normale  $\hat{z}$  au plan de désintégration  $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ ; l'angle  $\gamma$  est celui défini par la projection de  $\vec{p}_1 / |\vec{p}_1|$  sur le plan  $(\hat{z}, \vec{n}^{(3)})$  (voir fig. 7.1).

Dans cette dernière partie, nous allons étudier la dépendance des processus de désintégration en trois corps en fonction des paramètres  $s, t, u$ ;  $\alpha, \beta, \gamma$ . Dans le chapitre VII nous entreprenons l'analyse phénoménologique général de ces processus. Plus particulièrement, nous considérons la densité de la probabilité (marginale) de transition à une configuration finale dans l'espace des variables  $\alpha, \beta, \gamma$  lorsqu'on somme sur le domaine de variation des variables  $s, t, u$  <sup>(4)</sup> (région de Dalitz). Le formalisme est appliqué dans le chapitre VIII à l'analyse phénoménologique des résonances.

## CHAPITRE VII

### DESCRIPTION PHÉNOMÉNOLOGIQUE DES DÉSINTÉGRATIONS A TROIS CORPS

Dans ce chapitre nous allons obtenir l'expression générale de l'amplitude de transition du processus (III.1) en fonction d'amplitudes invariantes relativistes (voir le § 7 a et le § 7 b). Les différents types de densité de probabilité pour les transitions à trois corps sont définis dans le § 7 c.

#### § 7 a. — Réduction de l'amplitude de transition en amplitudes irréductibles.

Nous écrivons l'amplitude de transition correspondant au processus

$$p \rightarrow p_1 + p_2 + p_3, \quad (\text{III.1})$$

sous la forme abrégée

$$T(p_1, p_2, p_3)^{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \equiv \langle p_1, j_1 \lambda_1; p_2, j_2 \lambda_2; p_3, j_3 \lambda_3 | T | p, j \lambda \rangle, \quad (7.1)$$

---

<sup>(4)</sup> Cette idée a été développée indépendamment, dans le cadre du formalisme de l'hélicité par Berman et Jacob [65]. Voir aussi Jackson [65 a].

avec  $\lambda, \lambda_i (i = 1, 2, 3)$  définies par les relations

$$-\frac{W}{m} \cdot s |p, j\lambda\rangle = \lambda |p, j\lambda\rangle, \quad s = \Lambda_{t \rightarrow u} n^{(3)}, \quad u = p/m; \quad (7.2a)$$

$$-\frac{W}{m_i} \cdot s_i |p_i, j_i \lambda_i\rangle = \lambda_i |p_i, j_i \lambda_i\rangle, \quad s_i = \Lambda_{t \rightarrow u_i} n^{(3)}, \quad u_i = p_i/m_i. \quad (7.2b)$$

La loi de transformation des amplitudes  $T(p_1, p_2, p_3)^{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}_\lambda$  est, d'après (1.71),

$$T(p_1, p_2, p_3)^{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}_\lambda = \prod_i D^{(j_i)}(\Lambda_{t \rightarrow u_i}^{-1} \Lambda^{-1} \Lambda_{t \rightarrow \Lambda u_i})^{\lambda_i}_{\tilde{\lambda}_i} \\ \times D^{(j)}(\Lambda_{t \rightarrow \Lambda u}^{-1} \Lambda \Lambda_{t \rightarrow u})^{\tilde{\lambda}}_\lambda T(\Lambda p_1, \Lambda p_2, \Lambda p_3)^{\tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 \tilde{\lambda}_3}_{\tilde{\lambda}}. \quad (7.3)$$

Pour réduire le produit des représentations qui apparaît dans le deuxième membre de (7.3), nous allons appliquer la même technique que celle utilisée dans le § 4 a et le § 5 a : si on appelle  $A(p_1, p_2, p_3)^{\nu_1 \nu_2 \nu_3}_\lambda$  les nouvelles amplitudes définies par la relation

$$A(p_1, p_2, p_3)^{\nu_1 \nu_2 \nu_3}_\lambda = \prod_i D^{(j_i)}[R^{-1}(u, u_i)]^{\nu_i}_{\lambda_i} T(p_1, p_2, p_3)^{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}_\lambda \quad (7.4)$$

avec

$$R^{-1}(u, u_i) = \Lambda_{t \rightarrow u}^{-1} \Lambda_{u_i \rightarrow u} \Lambda_{t \rightarrow u_i}, \quad (7.5)$$

la loi de transformation (7.3) s'écrit

$$A(p_1, p_2, p_3)^{\nu_1 \nu_2 \nu_3}_\lambda = \prod_i D^{(j_i)}[R^{-1}(u, \Lambda)]^{\nu_i}_{\tilde{\nu}_i} D^{(j)}[R(u, \Lambda)]^{\tilde{\lambda}}_\lambda A(\Lambda p_1, \Lambda p_2, \Lambda p_3)^{\tilde{\nu}_1 \tilde{\nu}_2 \tilde{\nu}_3}_{\tilde{\lambda}} \quad (7.6)$$

et c'est à partir de cette expression qu'on peut appliquer les méthodes habituelles de réduction d'un produit de représentations du petit groupe de  $t$ .

Deux cas d'intérêt notable dans les applications sont : celui où  $j_1 = j_2 = j_3 = 0$ , par exemple pour l'étude des désintégrations

$$\omega \rightarrow \pi^+ + \pi^0 + \pi^-; \quad K\pi\pi(1175) \rightarrow K + \pi + \pi;$$

et celui où  $j_2 = j_3 = 0$ , mais  $j_1 \neq 0$ , par exemple pour l'étude des modes de désintégration

$$Y_1^*(1660) \rightarrow Y + \pi + \pi; \quad K\pi\pi\pi(1660) \rightarrow K^* + \pi + \pi; \\ \Xi^*(1820) \rightarrow \Xi + \pi + \pi.$$

Dans le premier cas ( $j_1 = j_2 = j_3 = 0$ ) les amplitudes (7.4) ont d'après (7.6) la propriété d'être irréductibles; en effet, elles ont la loi de transformation

$$A(p_1, p_2, p_3)_\lambda = D^{(j)}[R(u, \Lambda)]_\lambda^{\tilde{\lambda}} A(\Lambda p_1, \Lambda p_2, \Lambda p_3)_{\tilde{\lambda}}; \quad (7.7)$$

dans le deuxième cas, en multipliant (7.6) par le symbole  $3 - j \begin{pmatrix} j_1 & \lambda & l \\ \nu_1 & j & m \end{pmatrix}$  avec sommation sur les indices  $\nu_1$  et  $\lambda$  et tenant compte des formules (1.51 a, b) et (1.63), on arrive au résultat

$$\begin{pmatrix} j_1 & \lambda & l \\ \nu_1 & j & m \end{pmatrix} A(p_1, p_2, p_3)_{\lambda}^{\nu_1} = D^{(1)}[R(u, \Lambda)]_m^{m'} \begin{pmatrix} j_1 & \tilde{\lambda} & l \\ \tilde{\nu}_1 & j & m' \end{pmatrix} A(\Lambda p_1, \Lambda p_2, \Lambda p_3)_{\tilde{\lambda}}^{\tilde{\nu}_1};$$

d'où l'on déduit que, pour chacune des valeurs

$$l = |j - j_1|, |j - j_1 + 1|, \dots, j + j_1,$$

l'ensemble d'amplitudes <sup>(1)</sup>

$$A_m^{(l)}(p_1, p_2, p_3) = \sqrt{2l + 1} \begin{pmatrix} j_1 & \lambda & l \\ \nu_1 & j & m \end{pmatrix} A(p_1, p_2, p_3)_{\lambda}^{\nu_1} \quad (7.8)$$

avec  $m = -l, \dots, l$  est irréductible.

Le cas général, correspondant à une transition d'une particule de spin  $j$  en trois particules de spins  $j_1, j_2, j_3$ , peut être traité de la façon suivante : si  $j$  est entier (demi-entier), il y a au moins une particule dans l'état final qui a spin entier (demi-entier), par exemple la particule  $p_1$ ; pour réduire le produit des quatre représentations dans (7.6), nous ferons d'abord les couplages  $(j, j_1)$  et  $(j_2, j_3)$  séparément et ensuite le couplage des deux systèmes. Par application des relations (1.51 a, b) et (1.63) dans (7.6), on a,

$$\begin{pmatrix} j_1 & \lambda & K \\ \nu_1 & j & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_2 & j_3 & K' \\ \nu_2 & \nu_3 & \mu' \end{pmatrix} A(p_1, p_2, p_3)_{\lambda}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} = D^{(K')} [R(u, \Lambda)]_{\mu'}^{\tilde{\mu}'} D^{(K)} [R(u, \Lambda)]_{\mu}^{\tilde{\mu}} \\ \times \begin{pmatrix} j_1 & \tilde{\lambda} & K \\ \tilde{\nu}_1 & j & \tilde{\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_2 & j_3 & K' \\ \tilde{\nu}_2 & \tilde{\nu}_3 & \tilde{\mu}' \end{pmatrix} A(\Lambda p_1, \Lambda p_2, \Lambda p_3)_{\tilde{\lambda}}^{\tilde{\nu}_1 \tilde{\nu}_2 \tilde{\nu}_3};$$

et, après réduction de ce nouveau produit de représentations,

$$\begin{pmatrix} j_1 & \lambda & K \\ \nu_1 & j & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_2 & j_3 & K' \\ \nu_2 & \nu_3 & \mu' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu' & \mu & l \\ K' & K & m \end{pmatrix} A(p_1, p_2, p_3)_{\lambda}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} = D^{(1)} [R(u, \Lambda)]_m^{\tilde{m}} \\ \times \begin{pmatrix} j_1 & \tilde{\lambda} & K \\ \tilde{\nu}_1 & j & \tilde{\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_2 & j_3 & K' \\ \tilde{\nu}_2 & \tilde{\nu}_3 & \tilde{\mu}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mu}' & \tilde{\mu} & l \\ K' & K & \tilde{m} \end{pmatrix} A(\Lambda p_1, \Lambda p_2, \Lambda p_3)_{\tilde{\lambda}}^{\tilde{\nu}_1 \tilde{\nu}_2 \tilde{\nu}_3}.$$

<sup>(1)</sup> Le facteur  $\sqrt{2l + 1}$  dans la définition de  $A_m^{(l)}$  est un facteur de normalisation choisi de façon telle que, pour  $j_1 = 0$ , on ait  $A_{\lambda}^{(j)}(p_1, p_2, p_3) = A(p_1, p_2, p_3)_{\lambda}$ .

Nous voyons donc que dans le cas le plus général, les amplitudes irréductibles sont définies par l'ensemble des fonctions <sup>(2)</sup>

$$A_m^{(l;K,K')}(p_1, p_2, p_3) = \sqrt{(2K+1)(2l+1)(2K'+1)} \begin{pmatrix} j_1 & \lambda & K \\ \nu_1 & j & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_2 & j_3 & K' \\ \nu_2 & \nu_3 & \mu' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu' & \mu & l \\ K' & K & m \end{pmatrix} A(p_1, p_2, p_3)^{\nu_1 \nu_2 \nu_3}_{\lambda}. \quad (7.9)$$

On obtient le développement de l'amplitude de transition  $T(p_1, p_2, p_3)^{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}_{\lambda}$  en termes des amplitudes irréductibles  $\Lambda_m^{(l;K,K')}(p_1, p_2, p_3)$  par inversion des relations (7.4) et (7.9) :

$$T(p_1, p_2, p_3)^{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}_{\lambda} = \sum_{K,K',l} \sqrt{(2K+1)(2l+1)(2K'+1)} \prod_i [D^{(j_i)}[R(u, u_i)]^{\lambda_i}_{\nu_i} \begin{pmatrix} \nu_1 & j & \mu \\ j_1 & \lambda & K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_2 & \nu_3 & \mu' \\ j_2 & j_3 & K' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K' & K & m \\ \mu' & \mu & l \end{pmatrix} A_m^{(l;K,K')}(p_1, p_2, p_3). \quad (7.10)$$

Dans le paragraphe suivant nous allons voir qu'il est possible de spécifier davantage la structure des éléments de matrice  $T(p_1, p_2, p_3)^{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}_{\lambda}$ . Nous montrerons à ce propos comment chaque fonction irréductible  $A_m^{(l;K,K')}(p_1, p_2, p_3)$  peut s'exprimer, à des fonctions des variables  $s, t, u$  près, en termes des fonctions sphériques construites à l'aide des angles d'Euler  $\{\alpha, \beta, \gamma\}$  définis par les relations (III. 16 a, b, c).

§ 7 b. — Paramétrisation de l'amplitude de transition en amplitudes invariantes relativistes.

Appelons  $\{Z_{(1)}, Z_{(2)}, Z_{(3)}\}$  les composantes du trièdre défini dans (III. 8) :

$$Z_{(1)} = \Lambda_{t \rightarrow u}^{-1} X_{(1)}, \quad Z_{(2)} = \Lambda_{t \rightarrow u}^{-1} X_{(2)}, \quad Z_{(3)} = \Lambda_{t \rightarrow u}^{-1} X_{(3)} \quad (III. 8)$$

et  $\{Z'_{(1)}, Z'_{(2)}, Z'_{(3)}\}$  celles du trièdre

$$Z'_{(1)} = \Lambda_{t \rightarrow \Lambda u}^{-1} \Lambda X_{(1)}, \quad Z'_{(2)} = \Lambda_{t \rightarrow \Lambda u}^{-1} \Lambda X_{(2)}, \quad Z'_{(3)} = \Lambda_{t \rightarrow \Lambda u}^{-1} \Lambda X_{(3)}, \quad (7.11)$$

où  $\Lambda$  indique une transformation de Lorentz arbitraire  $\epsilon L_{+}^{\uparrow}$ . On voit d'après ces définitions que la rotation  $R(u, \Lambda)$  du petit groupe de  $t$ , associée à la transformation  $\Lambda$  et au quadrivecteur  $u$  :

$$R(u, \Lambda) = \Lambda_{t \rightarrow \Lambda u}^{-1} \Lambda \Lambda_{t \rightarrow u}$$

---

<sup>(2)</sup> Le facteur de normalisation  $\sqrt{(2K+1)(2l+1)(2K'+1)}$  est tel que pour  $j_2 = j_3 = 0$  on a  $A_m^{(l)}(p_1, p_2, p_3) = A_{\mu}^{(K)}(p_1, p_2, p_3)$ .

transforme le trièdre  $\vec{Z}$  dans le trièdre  $\vec{Z}'$ . En effet,

$$R(u, \Lambda)Z_{(i)} = \Lambda_{t \rightarrow \Lambda u}^{-1} \Lambda X_{(i)} = Z'_{(i)}; \quad i = 1, 2, 3.$$

Soit  $R_{(\alpha\beta\gamma)}$  la rotation qui amène le trièdre  $\vec{n}$  au trièdre  $\vec{Z}$ ; et  $R_{(\alpha'\beta'\gamma')}$  celle qui amène le trièdre  $\vec{n}$  au trièdre  $\vec{Z}'$ . D'après (7.12), on a la relation

$$R_{(\alpha'\beta'\gamma')} = R(u, \Lambda) R_{(\alpha\beta\gamma)}, \quad (7.13)$$

qui, exprimée en terme de représentations, s'écrit

$$D^{(l)}[R(u, \Lambda)]_{\lambda}^{\tilde{\lambda}} D^{(l)}[R_{(\alpha\beta\gamma)}]_{\lambda'}^{\tilde{\lambda}'} = D^{(l)}[R_{(\alpha'\beta'\gamma')}]_{\lambda}^{\tilde{\lambda}}. \quad (7.14)$$

Considérons maintenant les fonctions [voir (7.8)]

$$\sum_{m'=-l}^l A_{m'}^{(l)}(p_1, p_2, p_3) D^{(l)}[R_{(\alpha\beta\gamma)}]_{m'}^{m'}$$

Pour chaque couple de valeurs  $(l, m)$  fixes possibles, ces fonctions ont la loi de transformation,

$$\begin{aligned} \sum_{m'=-l}^l A_{m'}^{(l)}(p_1, p_2, p_3) D^{(l)}[R_{(\alpha\beta\gamma)}]_{m'}^{m'} &= \sum_{m', \tilde{m}', m''} D^{(l)}[R(u, \Lambda)]_{m'}^{\tilde{m}'} \\ &\times A_{\tilde{m}'}^{(l)}(\Lambda p_1, \Lambda p_2, \Lambda p_3) D^{(l)}[R^{-1}(u, \Lambda)]_{m''}^{m'} D^{(l)}[R_{(\alpha'\beta'\gamma')}]_{m''}^{m''} \\ &= \sum_{m''=-l}^l A_{m''}^{(l)}(\Lambda p_1, \Lambda p_2, \Lambda p_3) D^{(l)}[R_{(\alpha'\beta'\gamma')}]_{m''}^{m''}; \end{aligned}$$

c'est-à-dire, elles sont invariantes pour toutes les configurations  $(\Lambda p, \Lambda p_i)$ ;  $i = 1, 2, 3$  avec  $\Lambda \in L_+^{\uparrow}$ . Elles sont aussi invariantes par rapport au choix de tétrade de référence  $\{t, \vec{n}\}$ ; en effet, une configuration  $(\Lambda p, \Lambda p_i)$  par rapport à  $\{t, \vec{n}\}$  est équivalente à une configuration  $(p, p_i)$  par rapport à  $\{\Lambda^{-1}t, \Lambda^{-1}\vec{n}\}$ : d'après (III.16 a, b, c) et tenant compte des notations (7.11), on a les relations

$$\begin{aligned} \cos \beta' &= -Z'_{(3)} \cdot n^{(3)} = -\Lambda_{\Lambda^{-1}t \rightarrow u}^{-1} X_{(3)} \cdot \Lambda^{-1}n^{(3)}; \\ \cos \alpha' &= \frac{1}{\sin \beta'} Z'_{(3)} \cdot n^{(1)} = \frac{1}{\sin \beta'} \Lambda_{\Lambda^{-1}t \rightarrow u}^{-1} X_{(3)} \cdot \Lambda^{-1}n^{(1)}; \\ \cos \gamma' &= \frac{-1}{\sin \beta'} Z'_{(1)} \cdot n^{(3)} = \frac{-1}{\sin \beta'} \Lambda_{\Lambda^{-1}t \rightarrow u}^{-1} X_{(1)} \cdot \Lambda^{-1}n^{(3)}; \end{aligned}$$

c'est-à-dire que  $R_{(\alpha',\beta',\gamma')}$  s'exprime aussi bien à l'aide de  $(\Lambda p, \Lambda p_i)$  dans la tétrade  $\{t, \vec{n}\}$ , qu'à l'aide de  $(p, p_i)$  dans la tétrade  $\{\Lambda^{-1}t, \Lambda^{-1}\vec{n}\}$ . Nous arrivons ainsi au résultat que pour chaque valeur possible du couple  $(l, m)$  dans (7.8) la fonction

$$U_m^{(l)}(s, t, u; X^{(i)}.s^{(j)}) = \sum_{m'=-l}^l A_{m'}^{(l)}(p_1, p_2, p_3) D^{(l)}[R_{(\alpha\beta\gamma)}]_{m'}^{m'} \quad (7.15)$$

est invariante relativiste (par rapport aux transformations  $\Lambda \in L_{\uparrow}$ ) et ne dépend que des invariants  $s, t, u$  [voir (III.3) et (III.4)] et des produits scalaires  $X^{(i)}.s^{(j)}$  [voir (III.5 a, b) et (III.15)].

Appelons  $A_m^{(l)}(\alpha, \beta, \gamma; s, t, u)$  les amplitudes (7.8) où on a spécifié l'argument  $(p_1, p_2, p_3)$  en fonction des variables  $(s, t, u; \alpha, \beta, \gamma)$  et soient  $a_m^{(l)}(s, t, u)$  les fonctions invariantes définies ainsi :

$$a_m^{(l)}(s, t, u) = \sum_{m'=-l}^l \int d\Omega(\alpha\beta\gamma) A_{m'}^{(l)}(\alpha, \beta, \gamma; s, t, u) D^{(l)}[R_{(\alpha\beta\gamma)}]_{m'}^m, \quad (7.16 a)$$

où  $d\Omega(\alpha, \beta, \gamma)$  est l'élément de volume invariant du groupe de rotations,

$$d\Omega(\alpha\beta\gamma) = \frac{1}{8\pi^2} \sin \beta d\beta d\alpha d\gamma.$$

L'expression (7.16 a) nous donne les coefficients du développement de  $A_{m'}^{(l)}(\alpha\beta\gamma; s, t, u)$  en termes des fonctions sphériques  $D^{(l)}[R_{(\alpha\beta\gamma)}]_{m'}^m$  :

$$A_{m'}^{(l)}(\alpha, \beta, \gamma; s, t, u) = \sum_{m=-l}^l a_m^{(l)}(s, t, u) D^{(l)}[R_{(\alpha,\beta,\gamma)}]_{m'}^m. \quad (7.18)$$

D'après cette relation, l'amplitude de transition  $T(p_1, p_2, p_3)^{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}_\lambda$  [voir (7.10)] exprimée en fonction des amplitudes invariantes

$$a_m^{(l;K,K')} (s, t, u) = \sum_{m'=-l}^l \int d\Omega(\alpha\beta\gamma) A_{m'}^{(l;K,K')}(\alpha, \beta, \gamma; s, t, u) D^{(l)}[R_{(\alpha\beta\gamma)}]_{m'}^m \quad (7.16 b)$$

s'écrit

$$T(p_1, p_2, p_3)^{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}_\lambda = \sum_{K,K',l} \sqrt{(2K+1)(2l+1)(2K'+1)} \prod_i [D^{(j_i)}[R(u, u_i)]^{\lambda_i}_{\nu_i}] \times \begin{pmatrix} \nu_1 & j & \mu \\ j_1 & \lambda & K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_2 & \nu_3 & \mu' \\ j_2 & j_3 & K' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K' & K & m' \\ \mu' & \mu & l \end{pmatrix} D^{(l)}[R_{(\alpha\beta\gamma)}]_{m'}^m a_m^{(l;K,K')}(s, t, u). \quad (7.17)$$

Cette expression contient toute l'information que l'invariance relativiste (invariance par rapport à  $L_{\uparrow}$ ) donne sur les éléments de la matrice de transition du processus (III.1). La structure du mécanisme dynamique du processus étant réduite à la forme explicite des fonctions  $a^{(l;K,K')}_m(s, t, u)$ .

§ 7 c. — Étude de la distribution angulaire des événements finaux.

Appelons  $dV(s, t, u)$  l'élément de volume dans l'espace des variables  $s, t, u$  :

$$dV(s, t, u) = \chi^{-1} ds dt du \delta\left(s + t + u - m^2 - \sum_i m_i^2\right), \quad (7.18 a)$$

avec

$$\chi = \int_{D(s,t,u)} ds dt du \delta\left(s + t + u - m^2 - \sum_i m_i^2\right), \quad (7.18 b)$$

où  $D(s, t, u)$  est le domaine (III.14) correspondant à la région de Dalitz. L'élément de volume dans l'espace des variables  $\alpha, \beta, \gamma$  est donné par

$$d\Omega(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{8\pi^2} \sin \beta d\beta d\alpha d\gamma.$$

Dans le processus (III.1), le nombre d'événements finaux dans l'élément de volume  $d\Omega(\alpha, \beta, \gamma) dV(s, t, u)$  rapporté au nombre total d'événements produits est donné par la quantité

$$\frac{dN(\alpha, \beta, \gamma; s, t, u)}{N} = I(\alpha, \beta, \gamma; s, t, u) d\Omega(\alpha, \beta, \gamma) dV(s, t, u) \quad (7.19)$$

avec

$$I(\alpha, \beta, \gamma; s, t, u) = \frac{\text{tr } T(p_1, p_2, p_3) \rho(p) T^*(p_1, p_2, p_3)}{\int dV d\Omega \text{Tr } T \rho T^*} \quad (7.20)$$

où  $\rho(p)$  est la matrice densité décrivant le mélange dans l'échantillon de particules initiales;  $T(p_1, p_2, p_3)$  est l'amplitude de transition (7.17); et  $T^*(p_1, p_2, p_3)$  l'amplitude de transition hermitique conjuguée.

A partir de la densité de probabilité  $I(\alpha\beta\gamma; stu)$  nous pouvons définir les densités de probabilité marginales (\*)

$$I(s, t, u) = \int_{(\alpha\beta\gamma)} d\Omega(\alpha\beta\gamma) I(\alpha\beta\gamma; stu), \quad (7.21)$$

(\*) Voir par exemple Cramer [62], chapitre IX.

et

$$I(\alpha\beta\gamma) = \int_{D(stu)} dV(stu) I(\alpha\beta\gamma; stu); \quad (7.22)$$

avec

$$\int_{D(stu)} dV(stu) I(stu) = 1 \quad \text{et} \quad \int_{(\alpha\beta\gamma)} d\Omega(\alpha\beta\gamma) I(\alpha\beta\gamma) = 1.$$

Notons que d'après la relation (7.19),

$$I(stu) dV(stu) = \int_{(\alpha\beta\gamma)} d\Omega(\alpha\beta\gamma) \frac{dN(\alpha\beta\gamma; stu)}{N} \quad (7.23)$$

et

$$I(\alpha\beta\gamma) d\Omega(\alpha\beta\gamma) = \int_{D(stu)} dV(stu) \frac{dN(\alpha\beta\gamma; stu)}{N} \quad (7.24)$$

c'est-à-dire :  $I(stu) dV(stu)$  est le nombre d'événements finaux dans l'élément de volume  $dV(stu)$  rapporté au nombre total d'événements produits et  $I(\alpha, \beta, \gamma) d\Omega(\alpha, \beta, \gamma)$  est le nombre d'événements finaux dans l'élément de volume  $d\Omega(\alpha, \beta, \gamma)$  rapporté au nombre total d'événements produits.

On peut donner une forme plus explicite aux expressions (7.21) et (7.22) utilisant les formules (2.10) et (7.17). Par exemple, on trouve (\*) dans le cas où  $j_1 \neq 0$  et  $j_2 = j_3 = 0$  :

$$I(stu) = \frac{\sum_{l,m} |a_m^{(l)}(stu)|^2}{\sum_{l,m} \int_{D(stu)} dV(stu) |a_m^{(l)}(stu)|^2}, \quad (7.25)$$

et

$$I(\alpha\beta\gamma) = \sum_{L=0}^{2j} \sum_{M, M' = -L}^L F^{(L)}(M, M') D^{(L)}[R_{(\alpha\beta\gamma)}]_{M M'}^M; \quad (7.26)$$

les coefficients  $F^{(L)}(M, M')$  pouvant être calculés explicitement (\*) en fonction des paramètres  $t_M^{(L)}(p)$  et des quantités

$$\Gamma(\tilde{l}, l)_{m,m} \sim \frac{\int_{D(stu)} \bar{a}_m^{(\tilde{l})}(stu) a_m^{(l)}(stu) dV(stu)}{\sum_{l,m} \int_{D(stu)} |a_m^{(l)}(stu)|^2 dV(stu)}. \quad (7.27)$$

(\*) Voir l'appendice A8 pour les détails de ce calcul.

La densité de probabilité  $I(\alpha\beta\gamma)$  nous donne la distribution angulaire des événements finaux dans (III.1) par rapport à une tétrade de référence  $\{t, \vec{n}\}$ . Si la particule initiale a spin zéro, ou si elle n'est pas polarisée

$$(t_M^{(L)}(p) = \delta_{L0}\delta_{M0}),$$

la distribution angulaire  $I(\alpha\beta\gamma)$  doit être isotrope. La présence d'une corrélation ( $I(\alpha\beta\gamma) \neq 1$ ) permet de mesurer les quantités  $F^{(L)}(M, M')$  et éventuellement les paramètres  $t_M^{(L)}$  et  $\Gamma(\vec{l}, l)_{m,m}$ . Les valeurs de  $F^{(L)}(M, M')$  sont alors obtenues de l'expérience mesurant la valeur moyenne des fonctions  $\overline{D^{(L)}[R_{(\alpha\beta\gamma)}]_{M'}^M}$  par rapport à  $I(\alpha, \beta, \gamma)$  :

$$\frac{1}{2L+1} F^{(L)}(M, M') = \frac{1}{8\pi^2} \int \sin \beta d\beta d\alpha d\gamma I(\alpha\beta\gamma) \overline{D^{(L)}[R_{(\alpha\beta\gamma)}]_{M'}^M} = \langle \overline{D^{(L)}[R_{(\alpha\beta\gamma)}]_{M'}^M} \rangle.$$

Il est parfois intéressant d'utiliser une densité de probabilité conditionnelle définie de la façon suivante <sup>(3)</sup>

$$I(\alpha\beta\gamma | stu) = \frac{I(\alpha\beta\gamma; stu)}{I(stu)}; \quad (7.28)$$

l'élément de probabilité correspondant :  $I(\alpha\beta\gamma | stu) d\Omega(\alpha\beta\gamma)$  est égal au nombre d'événements finaux, avec des valeurs  $s, t, u$  fixées, produits dans l'élément de volume  $d\Omega(\alpha\beta\gamma)$ .

## CHAPITRE VIII

### APPLICATION A L'ANALYSE PHÉNOMÉNOLOGIQUE DES RÉSONANCES

Nous avons montré dans le chapitre précédent que pour une transition  $j \rightarrow j_1, 0, 0$ , la distribution angulaire  $I(\alpha, \beta, \gamma)$  a la forme suivante

$$I(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{L=0}^{2j} \sum_{M, M'=-L}^L F^{(L)}(M, M') D^{(L)}[R_{(\alpha\beta\gamma)}]_{M'}^M. \quad (7.26)$$

Notre but dans ce chapitre est le calcul de l'expression des termes  $F^{(L)}(M, M')$  en fonction des paramètres multipolaires  $t_M^{(L)}(p)$  de la matrice densité de la

particule initiale et des paramètres qui caractérisent le processus de désintégration; ainsi que l'étude des restrictions imposées aux moments  $F^{(L)}(M, M')$  par la conservation de la parité dans la réaction de production et dans la désintégration. Dans le § 8 a nous discutons en détail le cas d'une particule de spin  $j$  qui se désintègre en trois particules sans spin; dans le § 8 b, celui d'une particule de spin  $j$  qui se désintègre en une particule de spin  $j_1$  et deux particules sans spin. La dépendance angulaire de la polarisation de la particule finale est calculée dans le § 8 c. Finalement, dans le § 8 d, nous discutons un test pour la détermination du spin des résonances baryoniques étranges se désintégrant en trois corps.

**§ 8 a. — Distribution angulaire  
pour des processus du type  $j \rightarrow 0, 0, 0$ .  
Applications.**

Nous avons dans ce cas pour l'amplitude de transition l'expression simple (voir le § 7 a)

$$T(stu; \alpha\beta\gamma)_\lambda = D^{(j)}[R_{(\alpha\beta\gamma)}]_\lambda^{\lambda'} a_{\lambda'}(s, t, u); \quad (8.1)$$

où, d'après (7.16),

$$a_{\lambda'}(stu) = \int d\Omega(\alpha\beta\gamma) T(stu; \alpha\beta\gamma)_\lambda D^{(j)}[R_{(\alpha\beta\gamma)}]_\lambda^{\lambda'}; \quad (8.2)$$

et pour la densité de la probabilité de transition (7.20) on trouve, en tenant compte de (2.10) et (8.1), le résultat

$$I(\alpha\beta\gamma; stu) = \sqrt{2j+1} \sum_{L=0}^{2j} (2L+1) \bar{t}_M^{(L)}(p) D^{(L)}[R_{(\alpha\beta\gamma)}]_{M'}^M \times \sum_{\lambda', \lambda''} \begin{pmatrix} M' & \lambda' & j \\ L & j & \lambda'' \end{pmatrix} \frac{a_{\lambda'}(stu) \bar{a}_{\lambda''}(stu)}{\sum_{\lambda} \int_{D(stu)} dV(stu) |a_{\lambda}(stu)|^2} \quad (8.3)$$

Appelons  $\Gamma_{\lambda\lambda'}$  les quantités

$$\Gamma_{\lambda\lambda'} = \frac{\int_{D(stu)} a_{\lambda'}(stu) \bar{a}_{\lambda}(stu) ds dt du \delta\left(s+t+u-m^2-\sum_i m_i^2\right)}{\sum_{\lambda} \int_{D(stu)} |a_{\lambda}(stu)|^2 ds dt du \delta\left(s+t+u-m^2-\sum_i m_i^2\right)} \quad (8.4)$$

et notons que,

$$\sum_{\lambda} \Gamma_{\lambda\lambda} = 1 \quad \text{et} \quad \Gamma_{\lambda'\lambda''} = \bar{\Gamma}_{\lambda''\lambda'} \quad (8.5 a, b)$$

La *distribution angulaire* (7.26) est alors donnée par l'expression

$$I(\alpha\beta\gamma) = \sum_{L=0}^{2j} \sum_{M, M'=-L}^L X^{(L)}(M, M') D^{(L)}[R_{(\alpha\beta\gamma)}]_{M'}^M \quad (8.6)$$

avec

$$X^{(L)}(M, M') = (2L+1) \bar{i}_M^{(L)}(p) \sqrt{2j+1} \sum_{\lambda', \lambda''} \begin{pmatrix} M' & \lambda' & j \\ L & j & \lambda'' \end{pmatrix} \Gamma_{\lambda'\lambda''} \quad (8.7)$$

La *conservation de la parité dans le processus* (III.1) interdit la présence de certains des moments  $X^{(L)}(M, M')$  dans la distribution angulaire (8.6). Dans une transition  $j \rightarrow 0, 0, 0$  conservant la parité, l'application du théorème de Bohr [59] implique la relation <sup>(1)</sup>

$$T(s, t, u; \alpha, \beta, \gamma)_{\lambda} = \bar{\varepsilon}_1 \bar{\varepsilon}_2 \bar{\varepsilon}_3 (-1)^{\lambda} T(s, t, u; \alpha + \pi, \beta, \gamma + \pi)_{\lambda} \quad (8.8)$$

où  $\varepsilon_i$  sont les parités intrinsèques des particules d'énergie-impulsion  $p, p_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . On a alors, d'après la définition (8.2),

$$a_{\lambda}(s, t, u) = \omega \int d\Omega(\alpha\beta\gamma) (-1)^{\lambda'} T(s, t, u; \alpha + \pi, \beta, \gamma + \pi)_{\lambda'} D^{(j)}[R_{(\alpha\beta\gamma)}]_{\lambda}^{\lambda'}$$

où  $\omega = \bar{\varepsilon}_1 \bar{\varepsilon}_2 \bar{\varepsilon}_3$ . Dans cette intégrale nous pouvons faire le changement de variables :  $\alpha' = \alpha + \pi$ ;  $\beta' = \beta$ ;  $\gamma' = \gamma + \pi$  et utiliser l'invariance de l'élément de volume  $d\Omega$  et la propriété

$$D^{(j)}[R_{(\alpha'-\pi, \beta', \gamma'-\pi)}]_{\lambda}^{\lambda'} = (-1)^{-\lambda'-\lambda} D^{(j)}[R_{(\alpha'\beta'\gamma')}]_{\lambda}^{\lambda'}$$

<sup>(1)</sup> En effet, soit  $\Sigma_n(3)$  l'opération de symétrie pour l'hyperplan orthogonal à  $n^{(3)}$  [voir (1.19)]. La loi de transformation d'un état à une particule induite par l'opération  $\Sigma_n(3)$  est d'après (1.71) et (1.76)

$$U(\Sigma_n(3)) |p, j\lambda\rangle = \varepsilon D^{(j)}[R_{(\pi, 0, 0)}]_{\lambda}^{\lambda'} | \Sigma_n(3)p, j\lambda' \rangle = \varepsilon (-1)^{\lambda} | \Sigma_n(3)p, j \rangle;$$

et l'invariance de  $T(p_1, p_2, p_3)_{\lambda}$  par rapport à  $\Sigma_n(3)$  implique donc,

$$T(p_1, p_2, p_3)_{\lambda} = \bar{\varepsilon}_1 \bar{\varepsilon}_2 \bar{\varepsilon}_3 (-1)^{\lambda} T_{\Sigma_n(3)p_1, \Sigma_n(3)p_2, \Sigma_n(3)p_3} \lambda.$$

Soient  $(s, t, u; \alpha, \beta, \gamma)$  les paramètres qui spécifient la configuration définie par  $p_1, p_2, p_3$ . Les paramètres correspondant à la configuration  $(\Sigma_n(3)p_1, \Sigma_n(3)p_2, \Sigma_n(3)p_3)$  sont alors  $(s, t, u; \alpha + \pi, \beta, \gamma + \pi)$ , d'où la relation (8.8).

on obtient ainsi la relation

$$(-1)^\lambda a_\lambda(s, t, u) = \omega a_\lambda(s, t, u); \quad (8.9)$$

c'est-à-dire : dans une transition  $j \rightarrow 0, 0, 0$ , les seules amplitudes  $a_\lambda(s, t, u)$  permises par conservation de la parité sont celles avec  $\lambda$  pair (si  $\omega = +1$ ) ou  $\lambda$  impair (si  $\omega = -1$ ). Ceci implique pour les quantités  $\Gamma_{\lambda'\lambda''}$  définies dans (8.4), les restrictions suivantes :

— dans le cas où  $\omega = +1$ ,  $\Gamma_{\lambda'\lambda''} = 0$ , lorsque  $\lambda'$  ou (et)  $\lambda''$  sont impaires; (8.10 a)

— dans le cas où  $\omega = -1$ ,  $\Gamma_{\lambda'\lambda''} = 0$ , lorsque  $\lambda'$  ou (et)  $\lambda''$  sont paires. (8.10 b)

Notons aussi que d'après (8.7) :  $M' + \lambda' - \lambda'' = 0$ ; en conséquence, dans les deux cas ( $\omega = \pm 1$ ),  $M'$  est pair et les moments  $X^{(\omega)}(M, M')$  pour  $M'$  impair sont donc nuls [un résultat qui peut être obtenu directement à partir de (7.52), lorsqu'on impose  $I(\alpha, \beta, \gamma) = I(\alpha, \beta, \gamma + \pi)$  <sup>(2)</sup>]. Rappelons-nous, en outre, que dans le cas où la particule  $p$  dans (III.1) est produite dans une réaction conservant la parité, on a  $t_M^{(\omega)} = 0$  pour  $M$  impair (voir le § 6 a). On peut résumer ces propriétés dans l'énoncé suivant :

*La conservation de la parité dans la production de la particule  $p$  et dans le processus de désintégration  $p = p_1 + p_2 + p_3$ , correspondant à une transition  $j \rightarrow 0, 0, 0$ , implique :*

$$X^{(\omega)}(M, M') = 0, \quad \text{lorsque } M \text{ ou (et) } M' \text{ sont impairs.} \quad (8.11)$$

Notons que les moments  $X^{(\omega)}(0, 0)$  sont proportionnels aux valeurs moyennes des polynômes de Legendre <sup>(3)</sup> de  $\cos \beta$ ,

$$\frac{1}{2L+1} X^{(\omega)}(0, 0) = \langle P_L(\cos \beta) \rangle. \quad (8.12)$$

Nous allons prouver que les quantités  $\langle P_L(\cos \beta) \rangle$  satisfont à l'inégalité,

$$\sum_{L=0}^{2j} (2L+1) \langle P_L(\cos \beta) \rangle \leq 2j+1. \quad (8.13)$$

<sup>(2)</sup> L'argument  $(\alpha, \beta, \gamma + \pi)$  correspond aux angles d'Euler de la rotation qui amène le trièdre  $\vec{n}$  au trièdre  $\{ \Lambda_{t \rightarrow P u}^{-1} P x_i \}$   $i = 1, 2, 3$ ; où  $P$  est l'opération d'inversion d'espace.

<sup>(3)</sup> Rappelons que  $D^{(1)}[R_{(\alpha\beta\gamma)}]_0^0 = P_1(\cos \beta)$  [voir (1.54)].

Par définition,

$$X^{(L)}(0, 0) = (2L + 1)t_0^{(L)} \sqrt{2j + 1} \sum_{\lambda} \begin{pmatrix} 0 & \lambda & j \\ L & j & \lambda \end{pmatrix} \Gamma_{\lambda\lambda},$$

et

$$\rho(p)_{\lambda}^{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2j + 1}} \sum_{L=0}^{2j} (2L + 1)t_0^{(L)}(p) \begin{pmatrix} 0 & \lambda & j \\ L & j & \lambda \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\frac{1}{2j + 1} \sum_{L=0}^{2j} X^{(L)}(0, 0) = \sum_{\lambda} \rho_{\lambda}^{\lambda} \Gamma_{\lambda\lambda}. \quad (8.14)$$

Mais  $\rho(p)_{\lambda}^{\lambda} \geq 0$  (voir le § 2 a) et d'après (8.4),  $0 \leq \Gamma_{\lambda\lambda} \leq 1$ . Par application de l'inégalité de Schwartz on a donc

$$\left( \sum_{\lambda} \rho(p)_{\lambda}^{\lambda} \Gamma_{\lambda\lambda} \right)^2 \leq \sum_{\lambda} \rho(p)^{\lambda 2\gamma} \sum_{\lambda} \Gamma_{\lambda\lambda}^2,$$

et puisque  $\sum_{\lambda} \rho_{\lambda}^{\lambda 2} \leq \sum_{\lambda} \rho_{\lambda}^{\lambda} = 1$ ; et  $\sum_{\lambda} \Gamma_{\lambda\lambda}^2 \leq \sum_{\lambda} \Gamma_{\lambda\lambda} = 1$ , on peut

conclure  $\sum_{\lambda} \rho(p)_{\lambda}^{\lambda} \Gamma_{\lambda\lambda} \leq 1$ , d'où la relation (8.13).

Voyons quelques *applications* des résultats précédents à des exemples de désintégrations du type  $j \rightarrow 0, 0, 0$  :

a) une *transition*  $0^+ \rightarrow 0^-, 0^-, 0^-$  est interdite par conservation de parité;

b) dans une *transition*  $0^- \rightarrow 0^-, 0^-, 0^-$ , la distribution angulaire  $I(\alpha\beta\gamma)$  est isotrope,  $X^{(0)}(0, 0) = 1$ ;

c) considérons une *transition*  $1^- \rightarrow 0^-, 0^-, 0^-$ ; par exemple la désintégration

$$\omega \rightarrow \pi^+ + \pi^0 + \pi^-. \quad (8.15)$$

D'après (8.10 a), on a

$$\Gamma_{\lambda'\lambda''} = \delta_{\lambda',0} \cdot \delta_{\lambda'',0}, \quad (8.16)$$

c'est-à-dire,

$$X^{(L)}(M, M' \neq 0) = 0; \quad (8.17)$$

et, en particulier pour  $L = 1$  [voir (8.7)]

$$X^{(1)}(M, 0) = 3\sqrt{3} \bar{t}_M^{(1)}(p) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0. \quad (8.18)$$

Tenant compte encore du fait que le  $\omega$  est produit dans des réactions conservant la parité, on a en plus

$$X^{(1)}(M \text{ impair}, 0) = 0; \quad (8.19)$$

et les seuls moments de la distribution  $I(\alpha, \beta, \gamma)$ , *a priori* non nuls, sont donc

$$X^{(2)}(2, 0); \quad X^{(2)}(0, 0); \quad \text{et} \quad X^{(2)}(-2, 0) = \overline{X^{(2)}(2, 0)}.$$

D'après la formule (8.7) on trouve pour ces quantités les valeurs

$$X^{(2)}(M, 0) = -\sqrt{10} \bar{t}_M^{(2)}. \quad (8.20)$$

Nous voyons donc que dans une désintégration du type  $1^- \rightarrow 0^-, 0^-, 0^-$ , l'analyse de la distribution angulaire de la normale au plan de désintégration par rapport à un certain trièdre de référence permet de mesurer les paramètres

$$t_0^{(2)} = -\sqrt{5/2} \langle P_2(\cos \beta) \rangle \quad \text{et} \quad \bar{t}_{\pm 2}^{(2)} = -\sqrt{2\pi} \langle Y_{\pm 2}^{(2)}(\beta, \alpha) \rangle \quad (8.21 a, b)$$

de la matrice densité de la particule initiale. La forme explicite de  $I(\alpha, \beta, \gamma)$  pour un processus  $1^- \rightarrow 0^-, 0^-, 0^-$  est

$$I(\alpha, \beta, \gamma) = 1 + \sqrt{\frac{5}{2}} t_0^{(2)} (1 - 3 \cos^2 \beta) - \sqrt{15} \sin^2 \beta (\text{Re } t_2^{(2)} \cos 2\alpha + \text{Im } t_2^{(2)} \sin 2\alpha). \quad (8.22)$$

d) Dans le cas d'une transition <sup>(4)</sup>  $1^+ \rightarrow 0^-, 0^-, 0^-$ , on peut construire avec les quantités  $\Gamma_{\lambda', \lambda''}$  non nulles [ $\lambda'$  et  $\lambda''$  impaires d'après (8.10 b)] une matrice

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{1,1} & 0 & \Gamma_{1,-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ \Gamma_{-1,1} & 0 & \Gamma_{-1,-1} \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad \Gamma_{1,1} + \Gamma_{-1,-1} = 1; \quad \text{et} \quad \Gamma_{1,-1} = \bar{\Gamma}_{-1,1}. \quad (8.23)$$

Les moments de  $I(\alpha, \beta, \gamma)$ , *a priori* non nuls, sont dans ce cas  $X^{(1)}(M, 0)$ ; et  $X^{(2)}(M, \pm 2)$ ,  $X^{(2)}(M, 0)$ . D'après (8.7) ils ont les valeurs

$$X^{(1)}(M, 0) = 3/\sqrt{2} \bar{t}_M^{(1)} [\Gamma_{1,1} - \Gamma_{-1,-1}] \quad (8.24)$$

et

$$X^{(2)}(M, 2) = \sqrt{15} \bar{t}_M^{(2)} \bar{\Gamma}_{1,-1}; \quad X^{(2)}(M, 0) = \sqrt{\frac{5}{2}} \bar{t}_M^{(2)}; \\ X^{(2)}(M, -2) = \sqrt{15} \bar{t}_M^{(2)} \Gamma_{1,-1}, \quad (8.25 a, b, c)$$

---

(4) Un candidat possible est la désintégration  $D(1286) \rightarrow K\bar{K}\pi$ .

Nous voyons donc que dans une transition  $1^+ \rightarrow 0^-, 0^-, 0^-$ , l'analyse de la distribution angulaire du trièdre de désintégration (III.8) par rapport au trièdre de référence  $\vec{n}$  permet de mesurer les paramètres :

$$\bar{t}_M^{(1)}[\Gamma_{1,1} - \Gamma_{-1,-1}] = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{4\pi} \langle Y_{-M}^{(1)}(\beta, \alpha) \rangle; \quad (8.26)$$

et

$$\operatorname{Re} \Gamma_{1,-1} = \sqrt{\frac{5}{3}} \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \frac{\langle D^{(2)}[R_{(\alpha\beta\gamma)}]_{-2}^M \rangle + \langle D^{(2)}[R_{(\alpha\beta\gamma)}]_{2}^M \rangle}{2 \langle Y_{-M}^{(2)}(\beta, \alpha) \rangle}, \quad (8.27 a)$$

$$\operatorname{Im} \Gamma_{1,-1} = \sqrt{\frac{5}{3}} \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \frac{\langle D^{(2)}[R_{(\alpha\beta\gamma)}]_{-2}^M \rangle - \langle D^{(2)}[R_{(\alpha\beta\gamma)}]_{2}^M \rangle}{2 \langle Y_{-M}^{(2)}(\beta, \alpha) \rangle}, \quad (8.27 b)$$

$$\bar{t}_M^{(2)} = \sqrt{8\pi} \langle Y_{-M}^{(2)}(\beta, \alpha) \rangle. \quad (8.28)$$

L'expression de la distribution angulaire  $I(\alpha\beta\gamma)$  pour un processus du type  $1^+ \rightarrow 0^-, 0^-, 0^-$  est donc

$$I(\alpha, \beta, \gamma) = 1 + \sum_M \left\{ \sqrt{4\pi} \left[ \sqrt{\frac{3}{2}} (\Gamma_{1,1} - \Gamma_{-1,-1}) t_{-M}^{(1)} Y_M^{(1)}(\beta, \alpha) + \frac{t_{-M}^{(2)}}{\sqrt{2}} Y_M^{(2)}(\beta, \alpha) \right] + \sqrt{15} \bar{t}_M^{(2)} [\Gamma_{1,-1} D^{(2)}[R_{(\alpha\beta\gamma)}]_{2}^M + \Gamma_{1,-1} D^{(2)}[R_{(\alpha\beta\gamma)}]_{-2}^M] \right\}. \quad (8.29)$$

Nous voyons que dans le cas d'une désintégration  $1^+ \rightarrow 0^-, 0^-, 0^-$ , l'analyse de la distribution  $I(\alpha, \beta, \gamma)$  permet de mesurer les paramètres :

$$\bar{t}_M^{(2)}; \quad \operatorname{Re} \Gamma_{1,-1}; \quad \operatorname{Im} \Gamma_{1,-1};$$

et le « produit »

$$t_M^{(1)}[\Gamma_{1,1} - \Gamma_{-1,-1}].$$

On peut encore mesurer  $t_M^{(1)}$  « à un signe près »<sup>(5)</sup> si on a un nombre suffisant d'événements pour déterminer une densité de probabilité conditionnelle (voir le § 7 c).

$$I(\alpha\beta\gamma | stu) = \frac{I(\alpha\beta\gamma; stu)}{I(stu)}. \quad (7.28)$$

(5) A ce propos, nous ne sommes pas d'accord avec Berman et Jacob [65]. Ces auteurs prétendent que dans une désintégration  $1^+ \rightarrow 0^-, 0^-, 0^-$ , l'analyse de la distribution  $I(\alpha\beta\gamma)$  permet la détermination de « tous » les éléments de la matrice-densité de la particule initiale.

En effet, soit

$$A(stu) = \frac{|a_1(stu)|^2 - |a_{-1}(stu)|^2}{|a_1(stu)|^2 + |a_{-1}(stu)|^2}; \quad (8.30 a)$$

$$B(stu) = \frac{2\text{Re } a_1(stu)\overline{a_{-1}(stu)}}{|a_1(stu)|^2 + |a_{-1}(stu)|^2}; \quad (8.30 b)$$

$$C(stu) = \frac{2\text{Im } a_1(stu)\overline{a_{-1}(stu)}}{|a_1(stu)|^2 + |a_{-1}(stu)|^2}. \quad (8.30 c)$$

On a

$$A^2(stu) + B^2(stu) + C^2(stu) = 1. \quad (8.31)$$

Appelons  $\langle \rangle_{stu}$  la moyenne par rapport à  $I(\alpha\beta\gamma | stu)$ . On a alors,

$$B(stu) = \sqrt{\frac{5}{3}} \sqrt{\frac{1}{8\pi}} \frac{\langle D^{(2)}[R_{(\alpha\beta\gamma)}]_{-2}^M \rangle_{stu} + \langle D^{(2)}[R_{(\alpha\beta\gamma)}]_2^M \rangle_{stu}}{\langle Y_{-M}^{(2)}(\beta, \alpha) \rangle_{stu}}; \quad (8.32 a)$$

$$C(stu) = \sqrt{\frac{5}{3}} \sqrt{\frac{1}{8\pi}} \frac{\langle D^{(2)}[R_{(\alpha\beta\gamma)}]_{-2}^M \rangle_{stu} - \langle D^{(2)}[R_{(\alpha\beta\gamma)}]_2^M \rangle_{stu}}{\langle Y_{-M}^{(2)}(\beta\alpha) \rangle_{stu}}; \quad (8.32 b)$$

et d'après (8.31),  $A(stu)$  est déterminé au signe près. En outre,

$$A(stu)\bar{t}_M^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{4\pi} \langle Y_{-M}^{(1)}(\beta, \alpha) \rangle_{stu}, \quad (8.33)$$

ce qui permet de déterminer  $\bar{t}_M^{(1)}$  « au signe près ».

### § 8 b. — Distribution angulaire pour des processus du type $j \rightarrow j_1, 0, 0$ .

L'amplitude de transition pour une désintégration du type  $j \rightarrow j_1, 0, 0$ , est celle donnée par l'expression (7.17) pour  $j_2 = j_3 = 0$  :

$$T(p_1, p_2, p_3)_{\lambda}^{\lambda_1} = \sum_1 \sqrt{2l+1} D^{(j_1)}[R(u, u_1)]_{\nu_1}^{\lambda_1} \begin{pmatrix} \nu_1 & j & m' \\ j_1 & \lambda & l \end{pmatrix} D^{(l)}[R_{(\alpha\beta\gamma)}]_{m'}^m a_m^{(1)}(s, t, u). \quad (8.34)$$

A l'aide des fonctions  $a_m^{(l)}(s, t, u)$  nous avons défini dans (7.27) les quantités  $\Gamma(\tilde{l}, l)_{m,m}$ . Notons qu'elles satisfont aux relations

$$\sum_{l,m} \Gamma(l, l)_{m,m} = 1 \quad (8.35)$$

et

$$\Gamma(\tilde{l}, l)_{m,m} = \overline{\Gamma(l, \tilde{l})_{m,m}}. \quad (8.36)$$

La *distribution angulaire*  $I(\alpha, \beta, \gamma)$  des événements finaux est obtenue à l'aide de (8.34) par substitution dans la formule (7.20) et tenant compte des relations (2.10) et (7.22). Le calcul explicite est fait dans l'Appendice A.8. Nous donnons ci-dessous le résultat final,

$$I(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{L=0}^{2j} \sum_{M, M'=-L}^L Y^{(L)}(M, M') D^{(L)}[\mathbf{R}_{(\alpha, \beta, \gamma)}]_{M'}^M, \quad (8.37)$$

avec

$$Y^{(L)}(M, M') = (2L+1) \bar{t}_M^{(L)}(p) \sum_{i, \tilde{l}} \sqrt{(2L+1)(2j+1)(2\tilde{l}+1)} \\ (-1)^{j+J_1+\tilde{l}} \left\{ \begin{matrix} l & L & \tilde{l} \\ j & j_1 & j \end{matrix} \right\} \sum_{m, \tilde{m}} \left( \begin{matrix} M' & \tilde{l} & m \\ L & \tilde{m} & l \end{matrix} \right) \Gamma(\tilde{l}, l)_{m,m}. \quad (8.38)$$

La *conservation de la parité* dans le processus de désintégration implique

$$Y^{(L)}(M, M' \text{ impair}) = 0. \quad (8.39)$$

On trouve cette restriction lorsqu'on impose dans l'expression (8.37) la condition  $(^2) I(\alpha, \beta, \gamma) = I(\alpha, \beta, \gamma + \pi)$ ; ou indirectement par application du théorème de Bohr [59] aux amplitudes  $A(p_1, p_2, p_3)_{\lambda}^{\nu_1}$  :

$$A(\alpha, \beta, \gamma; s, t, u)_{\lambda}^{\nu_1} = \varepsilon \bar{\varepsilon}_1 \bar{\varepsilon}_2 \bar{\varepsilon}_3 (-1)^{\lambda-\nu_1} A(\alpha + \pi, \beta, \gamma + \pi; s, t, u)_{\lambda}^{\nu_1},$$

ce qui implique, tenant compte de (7.8),

$$A_m^{(l)}(\alpha, \beta, \gamma; s, t, u) = \omega (-1)^m A_m^{(l)}(\alpha + \pi, \beta, \gamma + \pi; s, t, u)$$

avec  $\omega = \varepsilon \bar{\varepsilon}_1 \bar{\varepsilon}_2 \bar{\varepsilon}_3$  et d'après la définition des amplitudes invariants [voir (7.16 a)]

$$(-1)^m a_m^{(l)}(s, t, u) = \omega a_m^{(l)}(s, t, u). \quad (8.40)$$

On a ainsi pour les paramètres  $\Gamma(\tilde{l}, l)_{m,m}$  [voir (7.27)] :

$$\Gamma(\tilde{l}, l)_{m,m} = 0, \quad \text{pour } \tilde{m} \text{ et (ou) } m \text{ impairs,} \quad \text{si } \omega = +1; \quad (8.41 a)$$

$$\Gamma(\tilde{l}, l)_{m,m} = 0, \quad \text{pour } \tilde{m} \text{ et (ou) } m \text{ pairs,} \quad \text{si } \omega = -1. \quad (8.41 b)$$

Dans tous les cas  $M' = \tilde{m} - m$  est pair, d'où la conclusion (8.39).

Voyons quel est le nombre d'amplitudes invariantes  $a_m^{(l)}(s, t, u)$  dans le cas  $j_1 = 1/2$ . On a alors

$$l = j - 1/2 \quad \text{et} \quad l = j + 1/2$$

avec  $m$  pair ou impair; c'est-à-dire :

$$\text{nombre d'amplitudes} = \frac{1}{2} [2(j - 1/2) + 1 + 2(j + 1/2) + 1] = 2j + 1. \quad (8.42)$$

### § 8 c. — Dépendance angulaire des paramètres multipolaires de la particule finale.

Considérons l'ensemble des particules de spin  $j_1$  produites dans une transition

$$\begin{aligned} p &= p_1, p_2, p_3 \\ (j &\rightarrow j_1, 0, 0). \end{aligned} \quad (8.43)$$

Il est clair que les paramètres multipolaires des particules de spin  $j_1$  dépendent de la direction de production de  $p_1$ . Formellement, la dépendance angulaire de la matrice-densité des particules de spin  $j_1$  est donnée par l'expression

$$\begin{aligned} \rho_1(\alpha\beta\gamma) &= \int dV(stu) I(\alpha\beta\gamma; stu) \frac{T(\dots)\rho_{in}T(\dots)^*}{\text{tr } T(\dots)\rho_{in}T(\dots)^*} \\ &= \frac{\int dV(stu) T(\dots)\rho_{in}T^*(\dots)}{\int dVd\Omega \text{tr } T\rho T^*}; \end{aligned} \quad (8.44)$$

avec, d'après (7.22),

$$\text{tr } \rho_1(\alpha\beta\gamma) = I(\alpha\beta\gamma). \quad (8.45)$$

La dépendance en  $\alpha, \beta, \gamma$  des paramètres multipolaires de  $p_1$ ,

$$i_M^{(L')}(\alpha\beta\gamma) \quad \text{avec} \quad 0 \leq L' \leq 2j_1 \quad \text{et} \quad -L' \leq M' \leq L',$$

est alors donnée, d'après (2.8), par

$$\bar{i}_M^{(L')}(\alpha\beta\gamma) = \sqrt{2j_1 + 1} \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_1 & L' & j_1 \\ j_1 & M' & \lambda_1 \end{pmatrix} \frac{\rho_1(\alpha\beta\gamma)^{\lambda_1 \tilde{\lambda}_1}}{I(\alpha\beta\gamma)}. \quad (8.46)$$

Voyons quelle est la forme explicite de cette expression. En portant les équations (2.10) et (8.34) dans (8.44) on trouve après quelques manipulations

algébriques analogues à celles effectuées dans le § 5 b, le résultat suivant

$$\begin{aligned}
 I(\alpha\beta\gamma) t_{\mathbf{M}'}^{(\overline{\mathbf{L}'})}(\alpha\beta\gamma) &= \sqrt{(2j+1)(2j_1+1)} \sum_{\mathbf{L}, \tilde{\mathbf{L}}} (2\tilde{\mathbf{L}}+1)(2\mathbf{L}+1) \\
 &\times \begin{pmatrix} \mathbf{L} & j & j \\ \tilde{\mathbf{L}} & \tilde{l} & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{L}' & \tilde{\mathbf{L}} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M}'' & \tilde{\mathbf{M}} & \mathbf{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{l} & m' & \tilde{\mathbf{M}}' \\ \tilde{m}' & l & \tilde{\mathbf{L}} \end{pmatrix} t_{\mathbf{M}}^{(\overline{\mathbf{L}'})} \\
 &\times D^{(\mathbf{L}')} [\mathbf{R}(u_1, u)]_{\mathbf{M}'}^{\mathbf{M}''} D^{(\tilde{\mathbf{L}'})} [\mathbf{R}_{(\alpha\beta\gamma)}]_{\tilde{\mathbf{M}}'}^{\tilde{\mathbf{M}}} \Gamma(l, \tilde{l})_{m', \tilde{m}'}. \quad (8.47)
 \end{aligned}$$

En particulier, pour  $\mathbf{L}' = 1$ , ce résultat nous donne la dépendance angulaire de la polarisation de la particule finale  $\sigma_{\mu}(\alpha\beta\gamma)$ .

Dans la pratique il convient d'utiliser une polarisation normalisée (voir le chapitre II et le § 5 b).

$$\hat{\sigma}_{\mu}(\alpha\beta\gamma) = \sqrt{\frac{2j_1+1}{3}} (j_1+1) \sigma_{\mu}(\alpha\beta\gamma). \quad (8.48)$$

En utilisant la formule (2.29) pour  $\mathbf{L} = 1$ , avec

$$\vec{s}_{1\mu} = (\Lambda_{t \rightarrow u_1} \vec{n})_{\mu}, \quad (8.49)$$

on a d'après (8.47)

$$\begin{aligned}
 I(\alpha\beta\gamma) \hat{\sigma}_{\mu}(\alpha\beta\gamma) &= \sqrt{4\pi} \sqrt{\frac{2j_1+1}{j_1}} \sum_{\mathbf{L}, \tilde{\mathbf{L}}} \sum_{l, \tilde{l}} (2\mathbf{L}+1)(2\tilde{\mathbf{L}}+1) \begin{pmatrix} \mathbf{L} & j & j \\ \tilde{\mathbf{L}} & \tilde{l} & l \\ 1 & j_1 & j_1 \end{pmatrix} \\
 &\times \sum_{\mathbf{M}} \begin{pmatrix} \mathbf{M}'' & \tilde{\mathbf{L}} & \mathbf{L} \\ 1 & \tilde{\mathbf{M}} & \mathbf{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{l} & m' & \tilde{\mathbf{M}}' \\ \tilde{m}' & l & \tilde{\mathbf{L}} \end{pmatrix} Y_{\mathbf{M}'}^{(1)}(\vec{s}_{1\mu}) D^{(\mathbf{L}')} [\mathbf{R}_{(u, u_1)}]_{\mathbf{M}'}^{\mathbf{M}''} t_{\mathbf{M}}^{(\overline{\mathbf{L}'})} D^{(\tilde{\mathbf{L}'})} [\mathbf{R}_{(\alpha\beta\gamma)}]_{\tilde{\mathbf{M}}'}^{\tilde{\mathbf{M}}} \\
 &\Gamma(\tilde{l}, l)_{\tilde{m}', m'}. \quad (8.50)
 \end{aligned}$$

A partir de cette formule, nous pouvons calculer par exemple, la valeur moyenne de  $\hat{\sigma}_{\mu}(\alpha\beta\gamma)$  par rapport à la distribution angulaire  $I(\alpha\beta\gamma)$ ,

$$\begin{aligned}
 \langle \hat{\sigma}_{\mu}(\alpha\beta\gamma) \rangle &= \int d\Omega(\alpha\beta\gamma) I(\alpha\beta\gamma) \hat{\sigma}_{\mu}(\alpha\beta\gamma) \\
 &= \sqrt{4\pi} \sqrt{\frac{2j+1}{j_1}} \sum_{\mathbf{M}} D^{(\mathbf{L}')} [\mathbf{R}(u, u_1)]_{\mathbf{M}}^{\mathbf{M}'} Y_{\mathbf{M}}^{(1)}(\vec{s}_{1\mu}) t_{\mathbf{M}}^{(\mathbf{L}')} \\
 &\times \sum_l \sqrt{\frac{3}{2l+1}} \begin{Bmatrix} 1 & j & j \\ 0 & l & l \\ 1 & j_1 & j_1 \end{Bmatrix} \sum_m \Gamma(l, l)_{m, m}; \quad (8.51)
 \end{aligned}$$

et en utilisant la formule (A.1 K),

$$\langle \hat{\sigma}_\mu(\alpha\beta\gamma) \rangle = \sqrt{4\pi} \sqrt{\frac{2j+1}{j_1}} \sum_{\mathbf{M}} D^{(1)}[\mathbf{R}(u, u_1)]_{\mathbf{M}}^{M'} Y_{\mathbf{M}}^{(1)}(\vec{s}_{1\mu}) t_{\mathbf{M}}^{(1)} \\ \times \sum_l \frac{1}{2l+1} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j & l \\ j & j_1 & 1 \end{matrix} \right\} \sum_m \Gamma(l, l)_{m,m} \quad (8.52)$$

Dans le cas où  $j_1 = 1/2$  on a

$$l = l_+ = j + 1/2 \quad \text{et} \quad l = l_- = j - 1/2,$$

et d'après (8.35)

$$\Gamma_+ + \Gamma_- = 1, \quad (8.53 a)$$

avec

$$\Gamma_+ = \sum_m \Gamma(j + 1/2, j + 1/2)_{m,m}, \quad (8.53 b)$$

et

$$\Gamma_- = \sum_m \Gamma(j - 1/2, j - 1/2)_{m,m}, \quad (8.53 c)$$

En portant ces expressions dans (8.52) on trouve

$$\langle \hat{\sigma}_\mu(\alpha\beta\gamma) \rangle = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \sum_{\mathbf{M}} D^{(1)}[\mathbf{R}(u, u_1)]_{\mathbf{M}}^{M'} Y_{\mathbf{M}}^{(1)}(\vec{s}_{1\mu}) t_{\mathbf{M}}^{(1)} \\ \times \left\{ \frac{\Gamma_+}{2j+2} \sqrt{\frac{j}{j+1}} + \frac{\Gamma_-}{2j} \sqrt{\frac{j+1}{j}} \right\}, \quad (8.54)$$

formule que nous allons appliquer à la détermination du spin dans le paragraphe suivant.

Il est peut-être intéressant de discuter la covariance de la formule (8.54). L'expression de  $t_{\mathbf{M}}^{(1)}$  en fonction de la polarisation normalisée  $\hat{\sigma}_\nu$  de la particule initiale est d'après (2.29) et (8.48)

$$t_{\mathbf{M}}^{(1)} = - \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \sqrt{\frac{2j+1}{3}} j_{\sigma_\nu} \bar{Y}_{\mathbf{M}}^{(1)}(\vec{s}^\nu), \quad (8.55)$$

avec

$$\vec{s}^\nu = (\Lambda_{t \rightarrow \mu} \vec{n})^\nu.$$

Un choix convenable de la tétrade de référence consiste à prendre  $t = u$ . Alors on a simplement

$$\sqrt{\frac{4\pi}{3}} \sum_{\mathbf{M}} \mathbf{D}^{(1)}[\mathbf{R}(u, u_1)]^{\mathbf{M}'}_{\mathbf{M}} \mathbf{Y}_{\mathbf{M}'}^{(1)}(\vec{s}_{1\mu}) t_{\mathbf{M}}^{(1)} = -\sqrt{\frac{2j+1}{3}} j s_{1\mu} \hat{\sigma}_\nu s_\nu,$$

avec

$$s_{1\mu} = (\Lambda_{u \rightarrow u_1} s)_\nu;$$

où  $s_\nu = n_\nu^{(3)}$  est l'axe de quantification de la particule initiale ; et la formule (8.54) s'exprime ainsi

$$s_1^\mu \langle \hat{\sigma}_\mu(\alpha\beta\gamma) \rangle = \sqrt{\frac{2j+1}{3}} j s_\nu \hat{\sigma}_\nu \left\{ \frac{\Gamma_+}{2j+2} \sqrt{\frac{j}{j+1}} + \frac{\Gamma_-}{2j} \sqrt{\frac{j+1}{j}} \right\}. \quad (8.56)$$

#### § 8 d. — Test pour la détermination du spin.

Par rapport à la tétrade de référence où  $t = u$ , appelons  $\langle \xi_{\text{tr}}(\alpha\beta\gamma) \rangle$  la composante

$$\langle \xi_{\text{tr}}(\alpha\beta\gamma) \rangle = -s_1^\mu \langle \hat{\sigma}_\mu(\alpha\beta\gamma) \rangle. \quad (8.57)$$

On a d'après (8.54),

$$\langle \xi_{\text{tr}}(\alpha\beta\gamma) \rangle = t_0^{(1)} \left\{ \frac{\Gamma_+}{2j+2} \sqrt{\frac{j}{j+1}} + \frac{\Gamma_-}{2j} \sqrt{\frac{j+1}{j}} \right\}. \quad (8.58)$$

Rappelons (voir le chapitre II) que  $t_0^{(1)}$  a la borne supérieure suivante

$$|t_0^{(1)}| \leq \sqrt{2j+1} \text{Max}_{\lambda \in (-j, \dots, j)} \left| \begin{pmatrix} \lambda & 1 & j \\ j & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\frac{j}{j+1}}. \quad (8.59)$$

On a alors pour  $|\langle \xi_{\text{tr}}(\alpha\beta\gamma) \rangle|$  :

$$\begin{aligned} |\langle \xi_{\text{tr}}(\alpha\beta\gamma) \rangle| &\leq \left| \frac{\Gamma_-}{2j} + \frac{\Gamma_+}{2j+2} \frac{j}{j+1} \right| = \frac{1}{2j+2} \left| \frac{j+1}{j} \Gamma_- + \frac{j}{j+1} \Gamma_+ \right| \\ &\leq \frac{1}{2j+2} \frac{j+1}{j} (\Gamma_- + \Gamma_+) = \frac{1}{2j}. \end{aligned} \quad (8.60)$$

Cette borne fournit un test pour la détermination du spin  $j$  d'une particule  $Y^*$  telle que (\*)

$$Y^* \rightarrow Y + \pi + \pi,$$

(\*) Par exemple  $Y_1^*(1660) \rightarrow Y + \pi + \pi$ ;  $\Xi^*(1816) \rightarrow \Xi + \pi + \pi$ .

où Y est un baryon  $\Lambda$ ,  $\Sigma^+$  ou  $\Xi$ . En effet, si Y se désintègre faiblement dans

$$Y \rightarrow B + \pi_1,$$

avec un paramètre d'asymétrie  $\alpha_Y \neq 0$  [voir la définition dans (5.26 b)], on a d'après (5.27)

$$\langle \cos \theta \rangle_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{3} \alpha_Y \xi_{\text{tr}}(\alpha\beta\gamma),$$

avec

$$\cos \theta = -2M_Y \Delta^{-1/2} (M_Y, M_B, M_{\pi_1})(p_B \cdot s_1).$$

La moyenne de  $\langle \cos \theta \rangle_{\alpha\beta\gamma}$  par rapport à  $I(\alpha\beta\gamma)$  est

$$\langle \langle \cos \theta \rangle_{\alpha\beta\gamma} \rangle = \int d\Omega(\alpha\gamma\beta) I(\alpha\beta\gamma) \langle \cos \theta \rangle_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\alpha_Y}{6j} \langle \xi_{\text{tr}}(\alpha\beta\gamma) \rangle; \quad (8.61)$$

et d'après (8.60)

$$|\langle \langle \cos \theta \rangle_{\alpha\beta\gamma} \rangle| \leq \frac{|\alpha_Y|}{6j} \leq \frac{1}{6j}. \quad (8.62)$$

Dans les cas où  $|\langle \langle \cos \theta \rangle_{\alpha\beta\gamma} \rangle| \neq 0$  l'inégalité (8.62) fournit une borne supérieure du spin  $j$ . Ce test est en quelque sorte analogue à celui de Lee et Yang [58], voir (5.28), pour les désintégrations en deux corps.

### APPENDICE A.8

#### CALCUL DE LA DISTRIBUTION ANGULAIRE $I(\alpha, \beta, \gamma)$ POUR DES PROCESSUS DU TYPE $j \rightarrow j_1, 0, 0$ .

Le point de départ est l'expression (7.20) pour  $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ ,

$$I(\alpha, \beta, \gamma; s, t, u) = \frac{\sum_{\lambda', \lambda, \lambda_1} T(p_1, p_2, p_3)_{\lambda'}^{\lambda_1} \rho(p)_{\lambda'}^{\lambda} \overline{T(p_1, p_2, p_3)}_{\lambda'}^{\lambda_1}}{\int dV d\Omega \text{tr } T_{\rho} T^*}, \quad (A.8 a)$$

avec

$$\rho(p)_{\lambda'}^{\lambda} = \frac{(-1)^{2j}}{\sqrt{2j+1}} \sum_{L, M} (2L+1) t_M^{(L)}(p) \begin{pmatrix} M & \lambda & j \\ L & j & \lambda' \end{pmatrix}; \quad (2.10)$$

et

$$T(p_1, p_2, p_3)_{\lambda'}^{\lambda_1} = \sum_l \sqrt{2l+1} D^{(j_1)} [R_{(u, u_1)}]_{\nu_1}^{\lambda_1} \begin{pmatrix} \nu_1 & j & m' \\ j_1 & \lambda & l \end{pmatrix} D^{(l)} [R_{(\alpha\beta\gamma)}]_{m'}^m a_m^{(l)}(s, t, u), \quad (8.34)$$

Calcul du numérateur de  $I(\alpha, \beta, \gamma; s, t, u)$  dans (A.8 a) :

$$\begin{aligned} & \sum_{\lambda', \lambda, \lambda_1} T(\dots)_{\lambda}^{\lambda_1} \rho_{\lambda'}^{\lambda} \overline{T(\dots)}_{\lambda'}^{\lambda_1} \\ &= \sum_{l, L, \tilde{l}} \sqrt{\frac{(2l+1)(2\tilde{l}+1)}{2j+1}} \begin{pmatrix} \nu_1 & j & m' \\ j_1 & \lambda & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & \lambda & j \\ L & j & \lambda' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda' & j_1 & \tilde{l} \\ j & \nu_1 & m'' \end{pmatrix} (-1)^{-j+j_1+\tilde{l}} \\ & \times \sum_{m, \tilde{m}} (2L+1) D^{(l)} [R_{(\alpha\beta\gamma)}]_{m'}^m D^{(\tilde{l})} [R_{(\alpha\beta\gamma)}]_{\tilde{m}}^{m''} \bar{a}_m^{(l)}(stu) \bar{a}_{\tilde{m}}^{(\tilde{l})}(stu) \bar{t}_m^{(l)}(p) \\ &= \sum_{l, L, \tilde{l}} \sqrt{\frac{(2l+1)(2\tilde{l}+1)}{2j+1}} (2L+1) \left\{ \begin{matrix} l & L & \tilde{l} \\ j & j_1 & j \end{matrix} \right\} \sum_{m, \tilde{m}} \begin{pmatrix} \tilde{l} & m & M' \\ \tilde{m} & l & L \end{pmatrix} D^{(l)} [R_{(\alpha\beta\gamma)}]_{m'}^m \\ & \times (-1)^{j+j_1+\tilde{l}} \bar{t}_m^{(l)}(p) a_m^{(l)}(stu) \bar{a}_{\tilde{m}}^{(\tilde{l})}(stu), \tag{A.8 b} \end{aligned}$$

où on a utilisé (1.62), (1.51 a, b) et (A.1 c).

Voyons ensuite quelle est l'expression explicite pour  $\int dV d\Omega t T_{\rho} T^*$  :

$$\int d\Omega \operatorname{tr} T_{\rho} P^* = \sum_{l, m} \frac{2l+1}{\sqrt{2j+1}} \left\{ \begin{matrix} l & 0 & l \\ j & j_1 & j \end{matrix} \right\} \sum_m \begin{pmatrix} l & m & 0 \\ m & l & 0 \end{pmatrix} (-1)^{j+j_1+l} \times |a_m^{(l)}(stu)|^2;$$

mais

$$\left\{ \begin{matrix} l & 0 & l \\ j & j_1 & j \end{matrix} \right\} = \frac{(-1)^{j+j_1+l}}{\sqrt{(2l+1)(2j+1)}} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} l & m & 0 \\ m & l & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2l+1}}.$$

On a donc

$$\int d\Omega \operatorname{tr} T_{\rho} T^* = \frac{1}{2j+1} \sum_{l, m} |a_m^{(l)}(stu)|^2, \tag{A.8 c}$$

et finalement

$$\int dV d\Omega \operatorname{tr} T_{\rho} T^* = \chi^{-1} \frac{1}{2j+1} \int_{D(stu)} ds dt du \sum_{l, m} |a_m^{(l)}(stu)|^2 \delta(s+t+u-m^2-\Sigma m^2), \tag{A.8 d}$$

avec

$$\chi = \int_{D(stu)} ds dt du \delta\left(s+t+u-m^2-\sum_i m_i^2\right). \tag{A.8 e}$$

Nous pouvons maintenant calculer  $I(\alpha\beta\gamma)$  en utilisant la formule (7.22) et les résultats (A8.b) et (A8.d). On trouve ainsi

$$\begin{aligned} I(\alpha\beta\gamma) &= \sum_L (2L+1) \bar{t}_m^{(L)} \sum_{l, \tilde{l}} \sqrt{(2l+1)(2j+1)(2\tilde{l}+1)} (-1)^{j+j_1+\tilde{l}} \left\{ \begin{matrix} l & L & \tilde{l} \\ j & j_1 & j \end{matrix} \right\} \\ & \times \sum_{m, \tilde{m}} \begin{pmatrix} M' & \tilde{l} & m \\ L & \tilde{m} & l \end{pmatrix} D^{(L)} [R_{(\alpha\beta\gamma)}]_{m'}^m \frac{\int_{D(stu)} dV(stu) \bar{a}_{\tilde{m}}^{(\tilde{l})}(stu) a_m^{(l)}(stu)}{\sum_{l, m} \int_{D(stu)} dV(stu) |a_m^{(l)}(stu)|^2}, \tag{A.8 f} \end{aligned}$$

d'où les résultats (7.26), (7.27) et (8.37), (8.38) dans le texte. En utilisant (7.21) et les formules (A8.b) et (A8.d) on trouve encore

$$I(stu) = \frac{\sum_{l,m} |a_m^{(l)}(stu)|^2}{\sum_{l,m} \int_{D(stu)} dV(stu) |a_m^{(l)}(stu)|^2}. \quad (7.25)$$

## BIBLIOGRAPHIE

- ABOLINS M. (Voir LANDER) (1964).  
 ADAIR R., *Phys. Rev.*, t. 100, p. 1540 (1955).  
 ADEMOLLO M. et GATTO R., *Phys. Rev.*, t. 133, p. B 531 (1964 a).  
 ADEMOLLO M., GATTO R. et PREPARATA G., *Phys. Rev. Let.*, t. 12, p. 462 (1964 b).  
 ADEMOLLO M., GATTO R. et PREPARATA G., *Phys. Rev.*, t. 140, p. B 192 (1965).  
 ALITTI J., BATON J. P., DELER B., NEVEA-RENE M., CRUSSARD J., GINESTET J.,  
 TRAN A. M., GESSAROLI R. et ROMANO A., *Phys. Rev. Let.*, t. 15, p. 69 (1965).  
 ALFF C., GELFAND N., NAUENBERG U., NUSSBAUM M., SCHULTZ J., BRUGGER H.,  
 STEINBERGER J., KIRSCH L., PLANO R., BERLEY D. et PRODELL A., *Phys. Rev.*,  
 t. 137, p. B 1105 (1965).  
 BARBARO-GALTIERI A. (Voir ROSENFELD) (1965).  
 BARGMANN V., *Ann. Math.*, t. 48, p. 568 (1947).  
 BARGMANN V. et WIGNER E. P., *Proc. Nat. Acad. Sc.*, t. 34, p. 211 (1948).  
 BARGMANN V., *Rev. Mod. Physics*, t. 34, p. 829 (1964 a).  
 BARGMANN V., *Jour. Math. Phys.*, t. 5, p. 862 (1964 b).  
 BARKAS N. H. (Voir ROSENFELD) (1965).  
 BASTIEN P. L. (Voir ROSENFELD) (1965).  
 BATON J. P. (Voir ALITTI) (1965).  
 BERLEY D. (Voir ALFF) (1965).  
 BERMAN S. M. et JACOB M., *Phys. Rev.*, t. 139, p. B 1023 (1965).  
 BESSIS D., ITZYKSON C. et JACOB M., *Nu. Cim.*, t. 27, p. 376 (1963).  
 BIVINS R. (Voir ROTENBERG) (1961).  
 BOHR A., *Nuc. Phys.*, t. 10, p. 486 (1959).  
 BROWN J. L. (Voir GOLDBABER) (1964).  
 BRUGGER H. (Voir ALFF) (1965).  
 BURNSTEIN R. A. (Voir COURANT) (1963).  
 BUTTON-SHAFFER J., *Phys. Rev.*, t. 139, p. B 607 (1965).  
 BYERS N. et FENSTER S., *Phys. Rev. Let.*, t. 11, p. 52 (1963).  
 BYERS N. et YANG C. N., *Rev. Mod. Physics*, t. 36, p. 595 (1964).  
 CARMONY D. D. (Voir LANDER) (1964).  
 CARTAN E., *La théorie des spineurs*. Hermann, Paris (1937).  
 DE CELLES P. C. (Voir DURAND III) (1962).  
 CHEW G. F. et LOW F. E., *Phys. Rev.*, t. 113, p. 1640 (1959).  
 CHINOWSKY W., GOLDBABER G., GOLDBABER S., LEE W. et O'HALLARAN T.,  
*Phys. Rev. Let.*, t. 9, p. 330 (1962).  
 CHUNG S. U., DAHL O. I., HARDY L. M., KALBFLEISCH G. R., KIRZ J., MIL-  
 LER D. H. et SMITH G. A., *Phys. Rev. Let.*, t. 12, p. 621 (1964).  
 COHEN-TANNOUDJI G. (Voir MESSIAH) (1964).

- COURANT H., FILTHUTH H., FRANZINI P., GLASSER R. G., MINGUZZI-RANZI A., SEGAR A., WILLIS W., BURNSTEIN R. A., DAY T. B., KEHOE B., HERZ A. J., SAKITT M., SECHI-ZORN B., SEEMAN N. et SNOW G. A., *Phys. Rev. Let.*, t. 10, p. 409 (1963).
- CRAMÉR H., *The elements of probability theory and some of its applications*. Wiley, New York.
- CRUSSARD J. (Voir ALITTI) (1965).
- DAHL O. I. (Voir CHUNG) (1964).
- DALITZ R. H., *Phil. Mag.*, t. 44, p. 1068 (1953).
- DALITZ R. H., *Properties of weak interactions*. École d'Été, Varenna (1964).
- DAY T. B. (Voir COURANT) (1963).
- DELER B. (Voir ALITTI) (1965).
- DEVONS S. et GOLDFARB L. J. B., Angular Correlations dans *Handbuch der Physik*, t. 42, p. 362 (1957).
- DIRAC P. A. M., *The principles of Quantum Mechanics*, 4th edition. Oxford University Press (1958).
- DONCEL M. G. et DE RAFAEL E., *Tests of SU(6)<sub>w</sub> from predictions on spin alignments* Preprint (1965).
- DREITLEIN J. et PRIMAKOFF H., *Phys. Rev.*, t. 125, p. 1671 (1962).
- DRELL S. D., *Phys. Rev. Let.*, t. 5, p. 342 (1960).
- DRELL S. D., *Rev. Mod. Phys.*, t. 33, p. 458 (1961).
- DURAND III L., LANDOVITZ L. F. et LEITNER J., *Phys. Rev.*, t. 112, p. 273 (1958).
- DURAND III L., DE CELLES P. C. et MARR R. B., *Phys. Rev.*, t. 126, p. 1882 (1962).
- DURAND III L. et CHIU Y. T., *Phys. Rev. Let.*, t. 12, p. 399 (1964 a).
- DURAND III L. et CHIU Y. T., *Phys. Rev. Let.*, t. 13, p. 45 (1964 b).
- DURAND III L. et CHIU Y. T., *Phys. Rev.*, t. 137, p. B 1530 (1965).
- EBERHARD P. et GOOD M. L., *Phys. Rev.*, t. 120, p. 1442 (1960).
- EDMONDS A. R., *Angular momentum in quantum mechanics*. Princeton University Press (1957).
- ERNST F. J., SACHS R. G. et WALI K. C., *Phys. Rev.*, t. 119, p. 1105 (1960).
- FABRI E., *Nu. Cim.*, t. 11, p. 479 (1954).
- FANO U., *Phys. Rev.*, t. 90, p. 577 (1952).
- FANO U., *Rev. Modern Phys.*, t. 29, p. 74 (1957).
- FERRARI E. et SELLERI F., *Suppl. Nu. Cim.*, t. 24, p. 453 (1962).
- FERRO-LUZZI M., GEORGE R., GOLDSCHMIDT-CLERMONT Y., HENRI V. P., JONGEJANS B., LEITH D., LYNCH G., MULLER F. et PERREAU J. M., *Proc. Sienna Conf. on Elementary Particles*, t. 1, p. 189 (1963).
- FERRO-LUZZI M., GEORGE R., GOLDSCHMIDT-CLERMONT Y., HENRI V. P., JONGEJANS B., LEITH D., LYNCH G., MULLER F. et PERREAU J. M., *The reaction KN  $\pi\pi$  at 3 GeV/c and the production mechanism of K<sup>\*</sup>N<sup>\*</sup>*. CERN preprint (1965).
- FILTHUTH H. (Voir COURANT) (1963).
- FRANZINI P. (Voir COURANT) (1963).
- FRAUENFELDER H., STEFFEN R. M., DE GROOT S. R., TOLHOEK H. A. et HUISKAMP N. J., Angular distribution of nuclear radiation dans  $\alpha$ .  $\gamma$ .  $\beta$ -Ray Spectroscopy, vol. 2. North Holland P. Co.
- FRETTER N. B. (Voir HUSON) (1963).
- GATTO R. (Voir ADEMOLLO) (1964 a).
- GATTO R. (Voir ADEMOLLO) (1964 b).
- GATTO R. (Voir ADEMOLLO) (1965).
- GELFAND N. (Voir ALFF) (1965).
- GELL-MANN M., *Phys. Rev.*, t. 92, p. 833 (1953).
- GELL-MANN M., California Inst of Technology, Report n° CTSL-20 (1961).
- GELL-MANN M., *Phys. Rev.*, t. 125, p. 1067 (1962).

- GELL-MANN M., Rapport à la Conférence d'Oxford (1965).
- GEORGE R. (Voir FERRO-LUZZI) (1963).
- GEORGE R. (Voir FERRO-LUZZI) (1965).
- GESSAROLI R. (Voir ALITTI) (1965).
- GINESTET J. (Voir ALITTI) (1965).
- GLASSER R. G. (Voir COURANT) (1963).
- GOEBEL C., *Phys. Rev. Let.*, t. 1, p. 337 (1958).
- GOLDFARB L. J. B. (Voir DEVONS) (1957).
- GOLDHABER G. (Voir CHINOWSKY) (1962).
- GOLDHABER G., BROWN J. L., GOLDHABER S., KADYK J. A., SHEN B. C. et TRILING G. H., *Phys. Rev. Let.*, t. 12, p. 336 (1964).
- GOLDHABER S. (Voir CHINOWSKY) (1962).
- GOLDHABER S., Proc. Athens Topical Conf. *Recently discovered resonant particles*, p. 92. Ohio Univ., Athens (1963).
- GOLDHABER S. (Voir GOLDHABER G.) (1964).
- GOLDSCHMIDT-CLERMONT Y. (Voir FERRO-LUZZI) (1963).
- GOLDSCHMIDT-CLERMONT Y. (Voir FERRO-LUZZI) (1965).
- GOOD M. L. (Voir EBERHARD) (1960).
- GOTTFRIED K. et JACKSON J. D., *Nu. Cim.*, t. 34, p. 735 (1964).
- DE GROOT S. R. (Voir FRAUENFELDER) (1965).
- GÜRSEY F., *Group theoretical concepts and methods in elementary particle physics*. Gordon and Breach (1964).
- GÜRSEY F. et RADICATI L. A., *Phys. Rev. Let.*, t. 13, p. 173 (1965).
- HARDY L. M. (Voir CHUNG) (1964).
- HENDRICKS T. (Voir LANDER) (1964).
- HENRY C. et DE RAFAEL E., *Ann. Inst. Henri Poincaré*, t. 2, p. 87 (1965).
- HENRY V. P. (Voir FERRO-LUZZI) (1963).
- HENRY V. P. (Voir FERRO-LUZZI) (1965).
- HERZ A. J. (Voir COURANT) (1963).
- HUISKAMP W. J. (Voir FRAUENFELDER) (1965).
- HUSON F. R. et FRETTER W. B., *Bull. Am. Phys. Soc.*, t. 8, p. 325 (1963).
- ITZYKSON C. (Voir BESSIS) (1963).
- JACKSON J. D. (Voir GOTTFRIED) (1964).
- JACKSON J. D., Particle and polarization angular distributions for two and three body decays. École d'Été, Les Houches (1965 a).
- JACKSON J. D., Cours à l'École d'Été des Houches (1965 b).
- JACOB M. (Voir BESSIS) (1963).
- JACOB M. (Voir BERMAN) (1965).
- JONGEJANS B. (Voir FERRO-LUZZI) (1963).
- JONGEJANS B. (Voir FERRO-LUZZI) (1965).
- JOOS H., *Fortschritte der Physik*, t. 10, p. 65 (1962).
- KADYK J. A. (Voir GOLDHABER G.) (1964).
- KALBFLEISCH G. R. (Voir CHUNG) (1964).
- KÄLLEN G., Properties of Vacuum expectation values of field operators dans *Relations de dispersion et particules élémentaires*. Hermann, Paris (1960).
- KEHOE B. (Voir COURANT) (1963).
- KIRSCH L. (Voir ALFF) (1965).
- KIRZ J. (Voir CHUNG) (1964).
- KIRZ J. (Voir ROSENFELD) (1965).
- LANDER R. L., ABOLINS M., CARMONY D. D., HENDRICKS T., XUONG M. et YAGER P. M., *Phys. Rev. Let.*, t. 13, p. 346 (1964).
- LANDOVITZ L. F. (Voir DURAND III) (1958).
- LEE T. D. et YANG C. N., *Phys. Rev.*, t. 109, p. 1755 (1958).

- LEE W. (Voir CHINOWSKY) (1962).  
 LEITH D. (Voir FERRO-LUZZI) (1963).  
 LEITH D. (Voir FERRO-LUZZI) (1965).  
 LEITNER J. (Voir DURAND III).  
 LIPKIN H. J. et MESHKOV S., *Phys. Rev. Let.*, t. 14, p. 670 (1965).  
 LOW F. E. (Voir CHEW) (1959).  
 LUBANSKI J. K., *Physica*, t. 9, p. 310 (1942).  
 LURÇAT F. et MICHEL L., *Nu. Cim.*, t. 21, p. 574 (1961) et *Comptes Rendus de la Conf. d'Aix-en-Provence*, p. 183.  
 LYNCH G. (Voir FERRO-LUZZI) (1963).  
 LYNCH G. (Voir FERRO-LUZZI) (1965).  
 MACFARLANE A. J., *J. Math. Phys.*, t. 3, p. 1116 (1962).  
 MARR R. B. (Voir DURAND III) (1962).  
 MESHKOV S. (Voir LIPKIN) (1965).  
 MESSIAH A. M. L. et COHEN-TANNOUJJI G., *Nu. Cim.*, t. 33, p. 853 (1964).  
 METROPOLIS N. (Voir ROTENBERG) (1961).  
 MEYER Ph., PRENTKI J. et YAMAGUCHI Y., *Phys. Rev. Let.*, t. 5, p. 442 (1960).  
 MICHEL L., *Nu. Cim.*, t. 10, p. 319 (1953).  
 MICHEL L., Cours sur la théorie des groupes. École d'Été, Varenne (1958).  
 MICHEL L., *Suppl. Nu. Cim.*, t. 14, p. 95 (1959).  
 MICHEL L. (Voir LURÇAT) (1961 a).  
 MICHEL L., *Nu. Cim.*, t. 22, p. 203 (1961 b).  
 MICHEL L. et ROUHANINEJAD H., *Phys. Rev.* t. 122, p. 242 (1961 c).  
 MICHEL L., *Invariance in Quantum Mechanics and Group Extensions*. Group theoretical concepts and methods in elementary particle physics; lectures of the Istanbul summer school of theoretical physics. Edited by Feza Gürsey; Gordon and Breach.  
 MILLER D. H. (Voir CHUNG) (1964).  
 MINGUZZI-RANZI A. (Voir COURANT) (1963).  
 MINNAERT P., *Positivity conditions for the density matrix of spin one particles*. Preprint.  
 MULLER F. (Voir FERRO-LUZZI) (1963).  
 MULLER F. (Voir FERRO-LUZZI) (1965).  
 NAIMARK M. A. *Les représentations linéaires du groupe de Lorentz*. Dunod, Paris (1962).  
 NE'MAN Y., *Nuc. Phys.*, t. 26, p. 222 (1961).  
 NEVEU-RENÉ M. (Voir ALITTI) (1965).  
 NISHIJIMA K., *Prog. Theor. Phys.*, t. 12, p. 107 (1954).  
 NISHIJIMA K., *Prog. Theor. Phys.*, t. 13, p. 285 (1955).  
 NUSSBAUM M. (Voir ALFF) (1965).  
 NUYTS J. et DE RAFAEL E., *Nu. Cim.*, t. 30, p. 443 (1963).  
 O'HALLARAN T. (Voir CHINOWSKY) (1962).  
 PAULI W. (Voir LUBANSKI) (1942).  
 PERREAU J. M. (Voir FERRO-LUZZI) (1963).  
 PERREAU J. M. (Voir FERRO-LUZZI) (1965).  
 PESHKIN M., *Phys. Rev.*, t. 123, p. 637 (1961).  
 PESHKIN M., *Phys. Rev.*, t. 133, p. B 428 (1964).  
 PLANO R. (Voir ALFF) (1965).  
 PRENTKI J. (Voir MEYER) (1960).  
 PREPARATA G. (Voir ADEMOLLO) (1964 b).  
 PREPARATA G. (Voir ADEMOLLO) (1965).  
 PRIMAKOFF H. (Voir DREITLIN) (1962).  
 PRODELL A. (Voir ALFF) (1965).

- RADICATI L. A. (Voir GÜRSEY) (1965).  
DE RAFAEL E., *Phys. Rev.*, t. 128, p. 2435 (1962).  
DE RAFAEL E. (Voir NUYTS) (1963).  
DE RAFAEL E., *Nu. Cim.*, t. 33, p. 237 (1964 a).  
DE RAFAEL E., *Phys. Rev. Let.*, t. 11, p. 260 (1964 b).  
DE RAFAEL E. (Voir HENRY) (1965 a).  
DE RAFAEL E., *Implications of unitary symmetry on angular correlations* (non publié) (1965 b).  
DE RAFAEL E. (Voir DONCEL) (1965 c).  
ROMANO A. (Voir ALITTI) (1965).  
ROSS M. H. et SHAW G. L., *Phys. Rev. Let.*, t. 12, p. 627 (1964).  
ROSS M. (Voir ROSENFELD) (1965).  
ROSENFELD A. H., BARBARO-GALTIERI A., BARKAS W. H., BASTIEN P. L., KIRZ J. et ROSS M., U. C. R. L. 80 30. August (1965).  
ROTENBERG M., BIVINS R., METROPOLIS N. et WOOTEN J. K., *The 3-j and 6-j symbols*. Techn. Press M. I. T. (1961).  
ROUHANINEJAD H. (Voir MICHEL) (1961).  
SACHS R. G. (Voir ERNST) (1960).  
SAKITA B., *Phys. Rev.*, t. 136, p. B 1756 (1964).  
SAKITT M. (Voir COURANT) (1963).  
SALZMAN F. et SALZMAN G., *Phys. Rev. Let.*, t. 5, p. 377 (1960 a).  
SALZMAN F. et SALZMAN G., *Phys. Rev.*, t. 120, p. 599 (1960 b).  
SCHLEIN P. E. et al., *Phys. Rev. Let.*, t. 11, p. 167 (1963).  
SCHULTZ J. (Voir ALFF) (1965).  
SECHI-ZORN B. (Voir COURANT) (1963).  
SEGAR A. (Voir COURANT) (1963).  
SELLERI F. (Voir FERRARI) (1962).  
SHAPIRO G., *Phys. Rev.*, t. 134, p. B 1393 (1964).  
SHEN B. C. (Voir GOLDBERGER G.) (1964).  
SEEMAN N. (Voir COURANT) (1963).  
SMITH G. A. (Voir CHUNG) (1964 a).  
SNOW G. A. (Voir COURANT) (1963).  
SOPKOVICH N. J., *Nu. Cim.*, t. 26, p. 186 (1962).  
STEINBERGER J. (Voir ALFF) (1965).  
STEFFEN R. M. (Voir FRAUENFELDER) (1965).  
STREATER R. F. et WIGHTMAN A. S., *PCT, Spin and statistics, and all that*. W. A. Benjamin, Inc. (1964).  
TOLHOEK H. A. (Voir FRAUENFELDER) (1965).  
TRAN A. H. (Voir ALITTI) (1965).  
TRILLING G. H. (Voir GOLDBERGER G.) (1964).  
TRIPP R., WATSON M. et FERRO-LUZZI M., *Phys. Rev. Let.*, t. 8, p. 175 (1962).  
TRIPP R., *Ann. Rev. Nuc. Science*, t. 15, p. 325 (1965).  
WAERDEEN B. L. VAN DER, *Die Gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik*. Springer, Berlin (1932).  
WALI K. C. (Voir ERNST) (1960).  
WATSON M. (Voir TRIPP) (1962).  
WATSON H. D. D., *Nu. Cim.*, t. 29, p. 1338 (1963).  
WEINBERG S., *Phys. Rev.*, t. 133, p. B 1318 (1964).  
WICK G. L., *Symmetries in Quantum Mechanics*. Cours à l'École d'Été des Houches (1965).  
WIGHTMAN A. S., *L'invariance dans la mécanique quantique relativiste, dans Relations de dispersion et particules élémentaires*. Hermann, Paris (1960).  
WIGHTMAN A. S. (Voir STREATER) (1964).

- WIGNER E. P., *Ann. Math.*, t. 40, p. 149 (1939).  
WIGNER E. P. (Voir BARGMANN) (1948).  
WIGNER E. P., *Group theory and its application to the quantum mechanics of atomic spectra*. Academic Press, New York (1959).  
WIGNER E. P., *Unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group including reflections*. Group theoretical concepts and methods in elementary particle physics; Lectures of the Istanbul Summer school of theoretical physics; edited by Feza Gursey, Gordon and Breach (1964).  
WILLIAMS D. N., Communication privée (1964).  
WILLIS W. (Voir COURANT) (1963).  
WOLTERS G. F., *A study of resonances in view of spin determination*. Thèse, Drukkerij Holland, N. V., Amsterdam (1964).  
WOOTEN J. K. (Voir ROTENBERG) (1961).  
XUONG M. (Voir LANDER) (1964).  
YAGER P. M. (Voir LANDER) (1964).  
YAMAGOUCHI Y. (Voir MEYER) (1960).  
YANG C. N. (Voir LEE) (1958).  
YANG C. N. (Voir BYERS) (1964).  
ZEEMAN E. C., *J. Math. Phys.*, t. 5, p. 490 (1964).  
ZEMACH C., *Phys. Rev.*, t. 140, p. B 109 (1965).  
ZWANZIGER D., *Positive-definite and covariant spin-1 polarization matrix*. Lorentz Symposium, Boulder (1964).

(Manuscrit reçu le 21 avril 1966).

---

## TABLE DES MATIÈRES

	Pages
INTRODUCTION. . . . .	84
CHAPITRE PREMIER. — Rappel de cinématique relativiste. Définitions et notations . . . . .	89
CHAPITRE II. — Matrice densité de spin pour des particules de spin quelconque . . . . .	103

*PREMIÈRE PARTIE***CINÉMATIQUE RELATIVISTE DES FONCTIONS DE VERTEX.  
APPLICATIONS**

CHAPITRE III. — Les règles de sélection dans un vertex. Applications . . . . .	116
CHAPITRE IV. — Paramétrisation multipolaire des fonctions de vertex. Classification des facteurs de forme . . . . .	128

*DEUXIÈME PARTIE***THÉORIE RELATIVISTE DES CORRÉLATIONS ANGULAIRES  
DANS LES DÉSINTÉGRATIONS SUCCESSIVES EN DEUX CORPS.  
APPLICATIONS**

CHAPITRE V. — Description phénoménologique des désintégrations à deux corps et analyse multipolaire . . . . .	150
CHAPITRE VI. — Application à la détermination du spin et parité des résonances . . . . .	162

*TROISIÈME PARTIE***THÉORIE RELATIVISTE DES CORRÉLATIONS ANGULAIRES  
DANS LES DÉSINTÉGRATIONS A TROIS CORPS.  
APPLICATIONS**

CHAPITRE VII. — Description phénoménologique des désintégrations à trois corps. . . . .	174
CHAPITRE VIII. — Application à l'analyse phénoménologique des résonances . . . . .	182
APPENDICE A.1. — Quelques formules complémentaires sur le groupe des rotations. . . . .	102
APPENDICE A.4. — Lois de transformation des fonctions $A(p', p)^{\lambda'}$ , $E(p', p)^{\lambda'}$ et $F^{(\alpha)}(p', p)^{\lambda'}$ , $H^{(\alpha)}(p', p)^{\lambda'}$ . . . . .	147

	Pages
APPENDICE B.4. — Conservation de courant et facteurs de forme . . . . .	148
APPENDICE A.8. — Calcul de la distribution angulaire $I(\alpha, \beta, \gamma)$ pour des processus du type $j \rightarrow j_1, 0, 0$ . . . . .	195
BIBLIOGRAPHIE. . . . .	197
TABLE 2.1. — Éléments de matrice $(T_M^{(L)})_{\tilde{\lambda}}^{*\lambda} = \sqrt{2j+1} \begin{pmatrix} \lambda & L & j \\ j & M & \tilde{\lambda} \end{pmatrix}$ , pour $j = 1/2$ et $L = 1$ ; $j = 1$ et $L = 1, 2$ ; $j = 3/2$ et $L = 1, 2, 3$ . . . . .	112
TABLE 3.1. — Éléments de matrice dans l'espace des polarisations pour les vertex correspondant à des courants pseudoscalaires . . . . .	123
TABLE 3.2. — Éléments de matrice dans l'espace des polarisations pour les vertex correspondant à des courants vectoriels . . . . .	126

---