ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

ANDRÉ LICHNEROWICZ

Ondes de choc en magnétohydrodynamique relativiste

Annales de l'I. H. P., section A, tome 5, nº 1 (1966), p. 37-75
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1966__5_1_37_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. V, nº 1, 1966, p. 37-75.

Section A :
Physique théorique.

Ondes de choc en magnétohydrodynamique relativiste

par

André LICHNEROWICZ
(Collège de France).

INTRODUCTION

Dans cet article, je me propose d'étudier les propriétés générales des ondes de choc en magnétohydrodynamique relativiste. Ce sujet a fait l'objet d'intéressants travaux [*5*], [*3*], [*9*], mais qui avaient généralement recours à des repères privilégiés, ce que nous évitons de faire ici. Il est ainsi possible d'obtenir des résultats beaucoup plus complets, valables dans le double cadre de la relativité restreinte et de la relativité générale.

L'un des buts du travail est de mettre en évidence la simplicité de la théorie relativiste vis-à-vis de la théorie classique. En particulier pour que l'onde de choc soit onde d'Alfven pour l'état postérieur au choc, il faut et il suffit qu'elle soit onde d'Alfven pour l'état antérieur au choc (choc d'Alfven). Dans le cadre relativiste, il y a donc pure et simple interdiction des phénomènes classiques (mais instables) connus sous le nom de chocs créateurs et chocs destructeurs.

Soit r la densité de matière, i l'enthalpie spécifique du fluide. « L'indice » f du fluide que j'ai introduit systématiquement :

$$f = 1 + \frac{i}{c^2}$$

joue ici un rôle majeur : il en est de même pour la variable :

$$\tau = \frac{f}{r}$$

considérée comme fonction de la pression p et de l'entropie spécifique S, prises comme variables thermodynamiques de base. On est ainsi amené à adopter en relativité, comme conditions de compressibilité les inégalités :

$$\tau'_p < 0 \qquad \tau'_S > 0 \qquad \tau''_{p^2} > 0$$

On forme au paragraphe 10 l'extension relativiste de l'équation d'Hugoniot. A partir de cette équation et des conditions précédentes, on peut étudier élémentairement le signe de la discontinuité au cours du choc des principales variables thermodynamiques (paragraphe 12). Les propriétés simples des chocs d'Alfven permettent d'effectuer de la manière la plus directe l'étude de la compatibilité d'une onde de choc avec les ondes d'Alfven (paragraphe 14).

Au paragraphe 11, on a systématiquement déduit les équations de choc de la magnétohydrodynamique classique à partir de celles correspondant au cadre relativiste. On comprend alors comment un phénomène de dégénérescence permet par exemple l'apparition des chocs créateurs et destructeurs.

ONDES DE CHOC EN MAGNÉTOHYDRODYNAMIQUE RELATIVISTE

1. — Fluide parfait thermodynamique relativiste.

a) Considérons un espace-temps V_4 muni d'une métrique hyperbolique normale ds^2, de signature $+ - - -$. Cette métrique peut s'écrire localement

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3) \tag{1-1}$$

Nous désignons par ∂_α la dérivation ordinaire par rapport à la coordonnée locale x^α, par ∇_α l'opérateur de dérivation covariante dans la connexion définie par la métrique.

Dans V_4, un fluide parfait est décrit par un tenseur d'énergie :

$$T^{(f)}_{\alpha\beta} = (\rho + p) u_\alpha u_\beta - p g_{\alpha\beta} \tag{1-2}$$

où ρ est la densité propre d'énergie du fluide, p sa pression et u_α le vecteur vitesse unitaire (orienté dans le futur) du fluide

$$g^{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta = 1 \tag{1-3}$$

La densité propre d'énergie ρ se compose de la densité propre de la matière et de la densité d'énergie interne du fluide. Nous posons dans la suite :

$$\rho = c^2 r\left(1 + \frac{\varepsilon}{c^2}\right) \tag{1-4}$$

où r est la *densité propre de matière* et ε *l'énergie interne spécifique* du fluide. Celle-ci peut être considérée comme une fonction donnée de deux variables thermodynamiques indépendantes, par exemple r et p, cette fonction dépendant de la structure interne du fluide. Dans (1-2) apparaît le scalaire :

$$\rho + p = c^2 r\left(1 + \frac{\varepsilon}{c^2} + \frac{p}{c^2 r}\right)$$

Nous posons :

$$i = \varepsilon + \frac{p}{r} \tag{1-5}$$

où i est appelée l'enthalpie spécifique du fluide. A cette enthalpie, il est préférable de substituer, dans le cadre relativiste, l'indice du fluide (Lichnerowicz [7]) défini par :

$$f = \left(1 + \frac{i}{c^2}\right) \qquad f > 0 \tag{1-6}$$

Le tenseur d'énergie (1-2) s'écrit alors :

$$T^{(f)}_{\alpha\beta} = c^2 r f u_\alpha u_\beta - p g_{\alpha\beta} \tag{1-7}$$

b) La *température propre* Θ du fluide et son *entropie spécifique* S peuvent être définies, comme en hydrodynamique classique, par la relation différentielle :

$$\Theta dS = d\varepsilon + p d\left(\frac{1}{r}\right) \tag{1-8}$$

où Θ^{-1} est facteur intégrant de la forme différentielle du second membre. De (1-5), il résulte par différentiation :

$$di = d\varepsilon + p d\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{dp}{r}$$

et nous avons :

$$\Theta dS = di - \frac{dp}{r}$$

soit, en termes de l'indice du fluide,

$$\Theta dS = c^2 df - \frac{dp}{r} \tag{1-9}$$

On en déduit :

$$dp = c^2 r df - r\Theta dS. \tag{1-10}$$

Il peut être commode, selon les cas, d'adopter comme variables thermodynamiques indépendantes de base soit p et S, soit f et S.

2. — Le tenseur d'énergie de la magnétohydrodynamique relativiste.

Supposons notre fluide soumis à un champ électromagnétique avec induction décrit par une 2-forme H champ électrique — induction magnétique et une 2-forme G champ magnétique — induction électrique. Nous posons :

$$\begin{cases} e_\beta = u^\alpha H_{\alpha\beta} & d_\beta = u^\alpha G_{\alpha\beta} \\ b_\beta = u^\alpha (* H)_{\alpha\beta} & h_\beta = u^\alpha (* G)_{\alpha\beta} \end{cases} \tag{2-1}$$

où $(*H)$ et $(*G)$ sont les 2-formes adjointes de H et G par rapport à la métrique. Les vecteurs (ou 1-formes) e et d sont respectivement le champ et l'induction électriques relatifs à la direction temporelle u; les vecteurs h et b sont respectivement le champ et l'induction magnétiques correspondant à u. Il est clair que *e, d, h, b sont orthogonaux à u.* Nous les supposons liés par les relations d'induction :

$$d = \lambda e, \qquad b = \mu h \tag{2-2}$$

où λ est la *permittivité diélectrique* du fluide et μ sa *perméabilité magnétique.*

De (2-1), on déduit aisément qu'on a en termes de calcul extérieur :

$$\begin{cases} H = u \wedge e - *(u \wedge b) & G = u \wedge d - *(u \wedge h) \\ *H = u \wedge b + *(u \wedge e) & *G = u \wedge h + *(u \wedge d) \end{cases} \tag{2-3}$$

De (2-2) on déduit alors la relation :

$$G = \frac{1}{\mu} H + \frac{\lambda\mu - 1}{\mu} u \wedge e \tag{2-4}$$

b) Soit d l'opérateur de différentiation extérieur sur les formes, δ celui de codifférentiation (c'est-à-dire la dérivation covariante contractée au signe près). Nous supposons que, dans le domaine considéré de V_4, le champ électromagnétique satisfait les équations de Maxwell ordinaires :

(2-5) $$dH = 0 \qquad \text{ou} \qquad \delta(*H) = 0$$

et :

(2-6) $$\delta G = J$$

où J est le courant électrique. Ce courant est en général la somme de deux termes correspondant respectivement au courant de convection et au courant de conduction :

(2-7) $$J^\beta = \tau u^\beta + \sigma e^\beta$$

où τ est la *densité propre de charge électrique* et σ la *conductivité* du fluide.

La *magnétohydrodynamique est l'étude des propriétés d'un fluide de conductivité σ infinie.* Le courant électrique J étant essentiellement fini, il en est de même pour le produit σe et *nous avons nécessairement dans ce cas $e = 0$. Par rapport à la direction temporelle définie par la vitesse u du fluide, le champ électromagnétique se réduit à sa partie magnétique.*

De l'équation (2-4) il résulte que G et H sont proportionnels :

(2-8) $$G = \frac{1}{\mu} H$$

et d'après (2-3) :

(2-9) $$*H = \mu(u \wedge h) \qquad G = -*(u \wedge h)$$

Nous supposons dans la suite que la *perméabilité magnétique μ du fluide est une constante donnée*, cette hypothèse $\mu =$ const. n'ayant absolument rien d'essentiel.

c) Le champ électromagnétique considéré admet le tenseur d'énergie :

$$\tau_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} H_{\rho\sigma} G^{\rho\sigma} - H_{\alpha\rho} G_\beta{}^\rho$$

qui est symétrique d'après (2-8) :

$$\tau_{\alpha\beta} \doteq \mu\left[\frac{1}{4} g_{\alpha\beta} G_{\rho\sigma} G^{\rho\sigma} - G_{\alpha\rho} G_\beta{}^\rho\right]$$

Le vecteur h étant orthogonal à u

(2-10) $$u^\alpha h_\alpha = 0$$

est *orienté dans l'espace*. Nous sommes ainsi conduits à introduire le scalaire :

$$|h|^2 = -h^\rho h_\rho \tag{2-11}$$

qui est *strictement positif* pour un champ magnétique non nul. Avec cette notation, il résulte de (2-9) que l'on a :

$$\tau_{\alpha\beta} = \mu \left\{ |h|^2 \left(u_\alpha u_\beta - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \right) - h_\alpha h_\beta \right\} \tag{2-12}$$

Le tenseur d'énergie total du fluide dans le champ électromagnétique peut ainsi s'écrire :

$$\mathrm{T}_{\alpha\beta} = (c^2 rf u_\alpha u_\beta - p g_{\alpha\beta}) + \tau_{\alpha\beta} \tag{2-13}$$

c'est-à-dire, sous forme explicite :

$$\mathrm{T}_{\alpha\beta} = (c^2 rf + \mu\, |h|^2) u_\alpha u_\beta - \left(p + \frac{1}{2} \mu\, |h|^2 \right) g_{\alpha\beta} - \mu h_\alpha h_\beta \tag{2-14}$$

On voit immédiatement que :

$$\mathrm{T}^\alpha{}_\beta u^\beta = \left(c^2 rf - p + \frac{1}{2} \mu\, |h|^2 \right) u^\alpha$$

La densité propre d'énergie correspondante est donc :

$$c^2 rf - p + \frac{1}{2} \mu\, |h|^2 = \rho + \frac{1}{2} \mu\, |h|^2$$

où ρ est la partie dynamique et $\frac{1}{2} \mu\, |h|^2$ la partie magnétique. Nous pouvons d'autre part interpréter le coefficient :

$$q = p + \frac{1}{2} \mu\, |h|^2 \tag{2-15}$$

de $g_{\alpha\beta}$ dans (2-14) en considérant que la présence du champ magnétique crée une pression supplémentaire égale à $\frac{1}{2} \mu\, |h|^2$.

3. — Les équations fondamentales de la magnétohydrodynamique relativiste.

a) Les équations différentielles de la magnétohydrodynamique relativiste sont fournies par les considérations suivantes; tout d'abord, nous postulons *comme propriété de la densité de matière* que celle-ci est conservative au cours du mouvement. Ce postulat se traduit par l'équation :

$$\nabla_\alpha (r u^\alpha) = 0 \qquad (\nabla \text{ dérivation covariante}) \tag{3-1}$$

D'autre part, en magnétohydrodynamique, le courant électrique J n'est pas connu *a priori*, mais se trouve seulement défini par δG. Les équations de Maxwell se réduisent donc ici à (2-5), c'est-à-dire à :

(3-2) $$\nabla_\alpha(h^\alpha u^\beta - h^\beta u^\alpha) = 0$$

Les équations de la dynamique relativiste sont fournies par la conservation du tenseur d'énergie total, c'est-à-dire par les relations :

(3-3) $$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$$

où $T^{\alpha\beta}$ est donné par (2-14). Dans le cadre de la relativité générale, les équations (3-3) sont des conséquences des classiques équations d'Einstein. Dans le présent article, nous faisons abstraction de ces équations. Les résultats de notre étude sont donc valables aussi bien en relativité restreinte qu'en relativité générale.

Le système (3-1), (3-2), (3-3) constitue le système fondamental des équations de la magnétohydrodynamique relativiste. C'est lui que nous adoptons dans la suite. Parmi ses caractéristiques (d'équation locale $\varphi = 0$) figurent d'une part les *ondes d'Alfven*, solutions (Lichnerowicz [*6*]) de l'équation du premier ordre :

(3-4) $$(c^2rf + \mu\,|\,h\,|^2)(u^\alpha\partial_\alpha\varphi)^2 - \mu(h^\alpha\partial_\alpha\varphi)^2 = 0$$

d'autre part les *ondes magnétosoniques*

(3-5) $$P^{\lambda\mu\nu\rho}\partial_\lambda\varphi\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi\partial_\rho\varphi = 0$$

avec

$$P^{\lambda\mu\nu\rho} = c^2rf\left(\frac{c^2}{v_0^2} - 1\right)u^\lambda u^\mu u^\nu u^\rho + \left(c^2rf + \mu\,|\,h\,|^2\frac{c^2}{v_0^2}\right)g^{(\lambda\mu}u^\nu u^{\rho)} - \mu g^{(\lambda\mu}h^\nu h^{\rho)}$$

où v_0 est la vitesse sonique ($v_0 \leqslant c$).

b) Les équations (3-3) entraînent l'équation de continuité :

$$u_\beta\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0.$$

Compte tenu des équations de Maxwell projetées sur h, celle-ci peut s'écrire :

$$c^2f\nabla_\alpha(ru^\alpha) + r\Theta u^\alpha\partial_\alpha S = 0$$

Le système (3-1), (3-2), (3-3) entraîne donc la relation d'écoulement adiabatique :

(3-6) $$u^\alpha\partial_\alpha S = 0$$

valable en présence comme en absence de champ magnétique.

4. — Équations générales de choc.

Nous supposons toujours les $g_{\alpha\beta}$ et leurs dérivées premières continus sur V_4, de telle sorte que les coefficients de la connexion riemannienne de V_4 soient continus.

a) On appelle *onde de choc* une hypersurface Σ de V_4, orienté dans le temps, à la traversée de laquelle u^α, h^α ou l'une des variables thermodynamiques au moins est discontinue. Localement l'hypersurface Σ partage son voisinage en deux régions dont l'une sera dite antérieure au choc, l'autre postérieure au choc. Pour $x \in \Sigma$, le vecteur u^α en x pour l'état antérieur au choc est soit tangent à Σ (choc tangentiel), soit orienté du côté antérieur au choc au côté postérieur au choc (choc non tangentiel).

Si $\varphi = 0$ est l'équation locale de Σ, $\partial_\alpha\varphi$ définit un vecteur orthogonal à Σ en x. Soit n_α le vecteur normé ($n^\alpha n_\alpha = -1$) colinéaire à $\partial_\alpha\varphi$, orienté du côté antérieur au choc au côté postérieur au choc. Tout vecteur v^α en x, situé du même côté que n^α du plan tangent en x à Σ vérifie, en accord avec la signature de la métrique, $v^\alpha n_\alpha < 0$. En particulier, pour le vecteur vitesse u^α de l'état antérieur au choc, on a :

$$u^\alpha n_\alpha \leqslant 0 \tag{4-1}$$

Nous serons amenés à décomposer le vecteur champ magnétique selon une composante tangente et une composante normale à Σ. Nous posons à cet effet :

$$h^\alpha = t^\alpha - \eta n^\alpha \qquad (t^\alpha n_\alpha = 0) \tag{4-2}$$

où t^α est le champ magnétique tangentiel et où :

$$\eta = h^\alpha n_\alpha. \tag{4-3}$$

De (4-2) on déduit que t^α est orienté dans l'espace et vérifie :

$$|t|^2 = -t^\alpha t_\alpha = |h|^2 - \eta^2 \geqslant 0 \tag{4-4}$$

b) Dans la suite, les quantités correspondant à l'état postérieur (resp. antérieur) au choc sont primées (resp. non primées). Nous désignons par [Q] le saut Q′ — Q d'une quantité à la traversée de Σ.

Les équations fondamentales (3-1), (3-2), (3-3) doivent être vérifiées au sens des distributions. Il en résulte, par un raisonnement classique, la nullité des mesures singulières portées par Σ introduites par les dérivations. Nous obtenons ainsi les équations générales de choc

$$[ru^\alpha]n_\alpha = 0 \tag{4-5}$$

$$(4\text{-}6) \qquad [h^\alpha u^\beta - u^\alpha h^\beta]n_\alpha = 0$$

$$(4\text{-}7) \qquad [T^{\alpha\beta}]n_\alpha = 0$$

L'équation (4-5) exprime l'invariance au cours du choc du scalaire :

$$(4\text{-}8) \qquad a = ru^\alpha n_\alpha$$

et l'équation (4-6) celle du vecteur

$$(4\text{-}9) \qquad V^\beta = \eta u^\beta - \frac{a}{r} h^\beta$$

où η est défini par (4-3). Notons immédiatement que :

$$V^\beta n_\beta = \eta u^\beta n_\beta - \frac{a}{r}\eta = \frac{a}{r}\eta - \frac{a}{r}\eta = 0$$

Il en résulte que le *vecteur* V^β, *invariant au cours du choc est toujours tangent à l'onde de choc* Σ.

D'après l'expression (2-14) du tenseur d'énergie, l'équation (4-7) exprime l'invariance au cours du choc du vecteur :

$$(4\text{-}10) \quad W^\beta = a\left(c^2\frac{f}{r} + \mu\frac{|h|^2}{r^2}\right)ru^\beta - qn^\beta - \mu\eta h^\beta \qquad \left(q = p + \frac{1}{2}\mu|h|^2\right)$$

où l'on a supposé, comme dans toute la suite, $r > 0$, $r' > 0$.

D'après l'invariance de a, on a :

$$a = ru^\alpha n_\alpha = r'u'^\alpha n_\alpha$$

Par suite, pour que $u^\alpha n_\alpha = 0$, il faut et il suffit que $a = 0$ c'est-à-dire que $u'^\alpha n_\alpha = 0$ (choc tangentiel). Si $u^\alpha n_\alpha < 0$, on a aussi $u'^\alpha n_\alpha < 0$ (choc non tangentiel), ce qui assure la cohérence des notions d'états antérieur et postérieur au choc.

5. — Étude des chocs tangentiels.

Commençons par examiner le cas des chocs tangentiels $a = 0$. On a :

$$(5\text{-}1) \qquad u^\alpha n_\alpha = u'^\alpha n_\alpha = 0$$

Il vient d'après (4-9) et (4-10) :

$$(5\text{-}2) \qquad \eta u^\beta = \eta' u'^\beta$$

$$(5\text{-}3) \qquad (q' - q)n^\beta + \mu(\eta' h'^\beta - \eta h^\beta) = 0$$

Nous sommes ainsi amenés à subdiviser les chocs tangentiels en deux catégories :

a) *Première catégorie* : $\eta \neq 0$. Les vecteurs u^β et u'^β étant unitaires et colinéaires d'après (5-2), on a nécessairement $u'^\beta = \pm u^\beta$. Le signe $-$ est inadmissible en vertu de l'orientation des vecteurs vitesses vers le futur. On a donc :

$$[u^\beta] = 0 \tag{5-4}$$

et $\eta = \eta'$. Par produit de (5-3) par n_β, il vient :

$$-(q' - q) + \mu(\eta'^2 - \eta^2) = 0$$

et par suite $[q] = 0$. De (5-3) résulte ainsi :

$$[h^\beta] = 0 \qquad [p] = 0 \tag{5-5}$$

la discontinuité de r restant indéterminée.

b) *Seconde catégorie* : $\eta = 0$. Il résulte de (5-2) que $\eta' = 0$ et les équations générales de choc donnent seulement ici :

$$u^\alpha n_\alpha = u'^\alpha n_\alpha = 0 \qquad h^\alpha n_\alpha = h'^\alpha n_\alpha = 0 \qquad \left[p + \frac{1}{2}\mu\,|h|^2\right] = 0 \tag{5-6}$$

les autres discontinuités restant indéterminées.

6. — Les invariants des chocs non tangentiels.

Nous supposons désormais $a \neq 0$ (choc non tangentiel) et introduisons le scalaire H, invariant dans le choc, défini par :

$$\mathrm{H} = \frac{1}{a^2}\mathrm{V}^\beta\mathrm{V}_\beta = \frac{\eta^2}{a^2} - \frac{|h|^2}{r^2} \tag{6-1}$$

Pour que H soit > 0, il faut et il suffit que V^β *soit orienté dans le temps.*

a) Nous nous proposons d'abord de mettre le vecteur W^β sous une forme commode. A cet effet exprimons h^β en fonction de u^β et V^β à l'aide de (4-9). Il vient :

$$h^\beta = \frac{\eta}{a} r u^\beta - \frac{r}{a}\mathrm{V}^\beta$$

En reportant dans l'expression (4-10) de W^β, on obtient

$$\mathrm{W}^\beta = a\left(c^2\frac{f}{r} + \mu\frac{|h|^2}{r^2}\right) r u^\beta - q n^\beta - \mu\frac{\eta^2}{a} r u^\beta + \mu\frac{r\eta}{a}\mathrm{V}^\beta$$

soit :

$$W^\beta = a\left(c^2\frac{f}{r} - \mu H\right)ru^\beta - qn^\beta + \mu\frac{r\eta}{a}V^\beta$$

Nous sommes ainsi conduits à introduire la variable scalaire

$$\alpha = c^2\frac{f}{r} - \mu H \tag{6-2}$$

Avec cette notation, il vient :

$$W^\beta = a\alpha ru^\beta - qn^\beta + \mu\frac{r\eta}{a}V^\beta \tag{6-3}$$

Décomposons ru^β selon ses composantes tangente à Σ et normale à Σ. On obtient :

$$ru^\beta = w^\beta - an^\beta \qquad (w^\beta n_\beta = 0) \tag{6-4}$$

et par suite

$$w^\beta = ru^\beta + an^\beta \tag{6-5}$$

Il en résulte immédiatement la décomposition de W^β en somme d'un vecteur X^β tangent à Σ et d'un vecteur normal à Σ. Comme V^β est tangent à Σ, on a :

$$W^\beta = \left(a\alpha w^\beta + \mu\frac{r\eta}{a}V^\beta\right) - (q + a^2\alpha)n^\beta \tag{6-6}$$

où

$$X^\beta = a\alpha w^\beta + \mu\frac{r\eta}{a}V^\beta \tag{6-7}$$

est tangent à Σ. Le vecteur W^β étant invariant au cours du choc, il en est de même de sa composante tangente et de sa composante normale. Ainsi X^β est invariant dans le choc et il en est de même du scalaire $(q + a^2\alpha)$.

Considérons en particulier, à partir de (6-3), le produit scalaire invariant au cours du choc

$$X^\beta V_\beta = W^\beta V_\beta = ar\eta(\alpha + \mu H)$$

soit, d'après la définition de α,

$$X^\beta V_\beta = c^2 af\eta \tag{6-8}$$

Nous sommes ainsi conduits à introduire les deux scalaires invariants :

$$b = f\eta \qquad l = \alpha + \frac{q}{a^2};$$

b) Considérons maintenant le scalaire invariant :

$$K = \frac{1}{a^2} X^\beta X_\beta$$

D'après (6-5), il vient :

$$(6\text{-}9) \qquad w^\beta w_\beta = r^2 + a^2 \qquad w^\beta V_\beta = r u^\beta V_\beta = r\eta$$

Il en résulte :

$$(6\text{-}10) \qquad K = (r^2 + a^2)\alpha^2 + 2\mu \frac{r^2\eta^2}{a^2} \alpha^2 + \mu^2 \frac{r^2\eta^2}{a^2} H$$

En substituant à α sa valeur, on a :

$$K = c^4(r^2 + a^2)\frac{f^2}{r^2} + 2\mu c^2 \frac{f}{r} \left\{ \frac{r^2\eta^2}{a^2} - (r^2 + a^2)H \right\} - \mu^2 H \left\{ \frac{r^2\eta^2}{a^2} - (r^2 + a^2)H \right\}$$

Or d'après la définition de H :

$$\frac{r^2\eta^2}{a} - (r^2 + a^2)H = \frac{r^2\eta^2}{a} - r^2\left(\frac{\eta^2}{a^2} - \frac{|h|^2}{r^2}\right) - a^2 H = |h|^2 - a^2 H$$

Nous posons dans la suite :

$$(6\text{-}11) \qquad k^2 = \frac{r^2\eta^2}{a} - (r^2 + a^2)H = |h|^2 - a^2 H = |t|^2 + \frac{a^2}{r^2}|h|^2$$

où k^2 est *strictement positif pour un champ magnétique non nul.*
Nous obtenons ainsi le scalaire invariant :

$$(6\text{-}12) \qquad K = c^4(r^2 + a^2)\frac{f^2}{c^2} + 2\mu c^2 \frac{f}{r} k^2 - \mu^2 H k^2$$

c) Transformons enfin l'expression de HK, où K est donné par (6-10). De :

$$HK = H(r^2 + a^2)\alpha^2 + \frac{r^2\eta^2}{a^2} \mu H(2\alpha + \mu H)$$

il résulte en substituant à μH sa valeur $c^2 f/r - \alpha$:

$$HK = H(r^2 + a^2)\alpha^2 + \frac{r^2\eta^2}{a^2}\left(c^2\frac{f}{r} + a\right)\left(c^2\frac{f}{r} - \alpha\right)$$

c'est-à-dire :

$$HK = H(r^2 + a^2)\alpha^2 + \frac{r^2\eta^2}{a^2}\left(c^4\frac{f^2}{r^2} - \alpha^2\right)$$

Nous obtenons ainsi :

$$\mathrm{HK} = \left\{ \mathrm{H}(r^2 + a^2) - \frac{r^2\eta^2}{a^2} \right\} \alpha^2 + c^4 \frac{f^2\eta^2}{a^2}$$

où le dernier terme c^4b^2/a^2 du second membre est invariant. Nous sommes ainsi conduits à considérer le scalaire invariant, combinaison des précédents :

$$\mathrm{L} = c^4 \frac{b^2}{a^2} - \mathrm{HK}$$

qui peut s'écrire :

$$\mathrm{L} = \left\{ \frac{r^2\eta^2}{a^2} - (r^2 + a^2)\mathrm{H} \right\} \alpha^2 \tag{6-13}$$

D'après le calcul du b, on a :

$$\mathrm{L} = k^2\alpha^2 \tag{6-14}$$

où k^2 n'est nul que par un champ magnétique nul.

7. — Étude des chocs non tangentiels. Notion de choc d'Alfven.

a) De l'étude du paragraphe 6, il résulte que les deux variables thermodynamiques du fluide et les trois scalaires $u^\alpha n_\alpha$, $\eta = h^\alpha n_\alpha$, $|h|$ vérifient les cinq relations :

$$a = ru^\alpha n_\alpha = r'u'^\alpha n_\alpha \tag{7-1}$$

$$b = f\eta = f'\eta' \tag{7-2}$$

$$\mathrm{H} = \frac{\eta^2}{a^2} - \frac{|h|^2}{r^2} = \frac{\eta'^2}{a^2} - \frac{|h'|^2}{r'^2} \tag{7-3}$$

$$l = \alpha + \frac{q}{a^2} = \alpha' + \frac{q'}{a^2} \tag{7-4}$$

(7-5)

$$\mathrm{K} = c^4(r^2+a^2)\frac{f^2}{r^2} + 2\mu c^2k^2\frac{f}{r} - \mu^2\mathrm{H}k^2 = c^4(r'^2+a^2)\frac{f'^2}{r'^2} + 2\mu c^2k'^2\frac{f'}{r'} - \mu^2\mathrm{H}k'^2$$

où k^2 est défini par (6-11).

De (7-2) et (7-3) il résulte que *pour que le champ magnétique soit nul après (resp. avant) le choc, il faut et il suffit qu'il soit nul avant (resp. après) le choc.*

b) Soit $r', f', u'^{\alpha}n_{\alpha}$, $\eta' = h'^{\alpha}n_{\alpha}$, $|h'|$, une solution des équations précédentes et introduisons un instant, au point $x \in \Sigma$, un repère orthonormé $\{e_{(\alpha)}\}$ tel que $e_{(1)}$ coïncide avec n. Dans ce repère, les équations de choc (4-6) et (4-7), en projection sur le plan tangent en x à Σ, se traduisent par les équations :

$$(7\text{-}6)\quad \begin{cases} h'^1u'^i - u'^1h'^i = h^1u^i - u^1h^i \\ (c^2r'f' + \mu\,|\,h'\,|^2)u'^1u'^i - \mu h'^1h'^i = (c^2rf + \mu\,|\,h\,|^2)u^1u^i - \mu h^1h^i \end{cases}$$

où $i = 0, 2, 3$ et où $u'^1 = -\,u'^{\alpha}n_{\alpha}$, $h'^1 = -\,h'^{\alpha}n_{\alpha}$. Considérons le déterminant du premier membre relatif aux inconnues u'^i, h'^i :

$$\mathrm{D}' = (c^2r'f' + \mu\,|\,h'\,|^2)(u'^{\alpha}n_{\alpha})^2 - \mu(h'^{\alpha}n_{\alpha})^2$$

Si D′ *est différent de zéro,* les équations (7-6) déterminent u'^i et h'^i en fonction de quantités connues. Dans les relations (7-1), ..., (7-5), la relation (7-1) est l'une des équations générales de choc et la relation (7-4) exprime l'invariance de la composante normale de W^{β}. Les relations (7-2), (7-3), (7-5) sont des conséquences de (7-1), (7-4) et des équations (7-6) et jouent le rôle de conditions de compatibilité.

D'après (3-4), la relation $\mathrm{D}' = 0$ exprime que Σ *est onde d'Alfven pour l'état postérieur au choc.* Considérons le scalaire :

$$\mathrm{D} = (c^2rf + \mu\,|\,h\,|^2)(u^{\alpha}n_{\alpha})^2 - \mu(h^{\alpha}n_{\alpha})^2 = \left(c^2\frac{f}{r} + \mu\frac{|\,h\,|^2}{r^2}\right)a^2 - \mu\eta^2$$

Il vient :

$$\frac{\mathrm{D}}{a^2} = c^2\frac{f}{r} + \mu\frac{|\,h\,|^2}{r^2} - \mu\frac{\eta^2}{a^2} = c^2\frac{f}{r} - \mu\mathrm{H} = \alpha$$

Ainsi

$$(7\text{-}7)\qquad \frac{\mathrm{D}}{a^2} = \alpha \qquad\qquad \frac{\mathrm{D}'}{a^2} = \alpha'$$

et nous voyons l'interprétation de la variable α en termes de l'opérateur d'onde d'Alfven.

c) D'après (6-14), on a :

$$(7\text{-}8)\qquad k^2\alpha^2 = k'^2\alpha'^2$$

où k^2 et k'^2 sont strictement positifs pour un champ magnétique non nul. Avec des signes convenables pour k et k', nous pouvons écrire (7-8) sous la forme :

$$(7\text{-}9)\qquad k\alpha = k'\alpha'$$

Supposons que Σ *soit onde d'Alfven après le choc* ($\alpha' = 0$). Cette circonstance n'est possible que pour $H > 0$. En particulier le champ magnétique h'^{β} et par suite (voir *a*) le champ magnétique h^{β} ne peuvent être nuls au point envisagé $x \in \Sigma$. Il en résulte que k^2 est > 0. De (7-8) on déduit alors $\alpha = 0$ et Σ *est onde d'Alfven avant le choc*. Nous pouvons énoncer :

THÉORÈME. — *Dans un choc non tangentiel, pour que l'onde de choc Σ soit onde d'Alfven pour l'état postérieur au choc, il faut et il suffit qu'elle soit onde d'Alfven pour l'état antérieur au choc.*

S'il en est ainsi, c'est-à-dire si $\alpha' = \alpha = 0$, nous dirons que nous avons affaire à un *choc d'Alfven*. Nous étudierons ces chocs au paragraphe suivant.

d) Nous allons établir le lemme suivant qui nous sera utile à différentes reprises.

LEMME. — *L'invariant* K *peut se mettre sous la forme*

$$K = c^4 f^2 + \mu \,|\, h \,|^2 c^2 \frac{f}{r} + \mu \,|\, h \,|^2 \alpha + a^2 \alpha^2 \tag{7-10}$$

En effet d'après (7-5), il vient :

$$K = c^4 f^2 + a^2 c^4 \frac{f^2}{r^2} + 2\mu c^2 \frac{f}{r}(\,|\, h \,|^2 - a^2 H) - \mu^2 H(\,|\, h \,|^2 - a^2 H)$$

ce qui peut s'écrire :

$$K = c^4 f^2 + \mu \,|\, h \,|^2 \left(2c^2 \frac{f}{r} - \mu H\right) + a^2 \left(c^4 \frac{f^2}{r^2} - 2c^2 \frac{f}{r} \mu H + \mu^2 H^2\right)$$

En réintroduisant $\alpha = c^2 f/r - \mu H$ dans les deux derniers termes, on a :

$$K = c^4 f^2 + \mu \,|\, h \,|^2 c^2 \frac{f}{r} + \mu \,|\, h \,|^2 \alpha + a^2 \alpha^2$$

et la formule (7-10) est établie.

Supposons maintenant que l'on ait $\alpha' = \alpha \neq 0$. On a en particulier :

$$\left[\frac{f}{r}\right] = 0 \tag{7-11}$$

Il résulte de (7-8) que, sous notre hypothèse, $k'^2 = k^2$ et que, par suite, d'après (6-11),

$$[\,|\, h \,|^2] = 0. \tag{7-12}$$

De (7-4) il résulte $[q] = 0$ donc

$$[p] = 0 \tag{7-13}$$

Dans K donné par (7-10) les trois derniers termes sont invariants au cours du choc. On en déduit :

$$[f] = 0$$

et d'après (7-11)

$$[r] = 0$$

Ainsi, en vertu de (7-1) et (7-2) :

$$[u^\alpha n_\alpha] = 0 \qquad [h^\alpha n_\alpha] = 0$$

Σ n'étant pas onde d'Alfven, il résulte de (7-6) qu'à la traversée de l'hypersurface u^α, h^α et les variables thermodynamiques sont continues; le choc envisagé est donc nul. Nous énonçons :

THÉORÈME. — *Si* $\alpha' = \alpha \neq 0$, le *choc envisagé est nul.*

8. — Étude des chocs d'Alfven.

a) Adoptons f et S comme variables thermodynamiques de base et supposons la structure du fluide relativiste envisagé définie par l'équation d'état $r = r(f, S)$. On sait que si v_0 est la vitesse sonique du fluide

$$\frac{v_0^2}{c^2} = \frac{r}{fr'_f}$$

Nous supposons ici que le fluide considéré est tel que $v_0 < c$, c'est-à-dire que :

(8-1) $$fr'_f - r > 0$$

dans le domaine envisagé des valeurs de f et S.

Examinons sous cette hypothèse les chocs d'Alfven. D'après l'étude du paragraphe 7, on a :

(8-2) $$c^2\frac{f}{r} = c^2\frac{f'}{r'} = \mu H$$

En particulier

(8-3) $$\left[\frac{f}{r}\right] = 0$$

Des relations (7-1), ..., (7-4) il résulte :

(8-4) $$[ru^\alpha n_\alpha] = 0 \qquad [f\eta] = 0 \qquad \left[\frac{\eta^2}{a^2} - \frac{|h|^2}{r^2}\right] = 0 \qquad \left[p + \frac{1}{2}\mu\,|h|^2\right] = 0$$

D'après l'invariance de K pris sous la forme (7-10), on a :

$$\left[c^2 f^2 + \mu \mid h \mid^2 \frac{f}{r}\right] = 0$$

f/r étant invariant au cours du choc, cette relation peut s'écrire :

$$[c^2 r f + \mu \mid h \mid^2] = 0$$

Or, d'après (8-4), $[\mu \mid h \mid^2] = -[2p]$. Il vient ainsi :

(8-5) $$[c^2 r f - 2p] = 0$$

b) Examinons, pour le fluide envisagé, l'indépendance des deux variables thermodynamiques :

$$\varphi = c^2 r f - 2p \qquad \psi = \log (f/r)$$

considérées comme fonctions des variables thermodynamiques f et S. D'après (1-10), on a :

$$dp = c^2 r df - r \Theta d\mathrm{S}$$

Par dérivation de φ et ψ en f et S il vient :

$$\left\{\begin{array}{ll} \varphi'_f = c^2(f r'_f - r) & \psi'_f = -\dfrac{f r'_f - r}{r f} \\ \varphi'_\mathrm{S} = c^2 f r'_\mathrm{S} + 2r\Theta & \psi'_\mathrm{S} = -\dfrac{r'_\mathrm{S}}{r} \end{array}\right.$$

Le jacobien correspondant a donc pour valeur :

$$\frac{d(\varphi, \psi)}{d(f, \mathrm{S})} = (f r'_f - r)\left(-c^2 \frac{r'_\mathrm{S}}{r} + c^2 \frac{r'_\mathrm{S}}{r} + 2\frac{\Theta}{f}\right)$$

c'est-à-dire :

$$\frac{d(\varphi, \psi)}{d(f, \mathrm{S})} = 2\frac{\Theta}{f}(f r'_f - r)$$

Le jacobien étant différent de zéro dans l'hypothèse faite, les variables φ et ψ sont indépendantes. D'après (8-3) et (8-5) ces variables sont continues à la traversée de Σ et il en est donc de même de toutes les variables thermodynamiques du fluide. En particulier :

(8-6) $$[r] = 0 \qquad [f] = 0 \qquad [p] = 0$$

D'après (8-4), on a :

(8-7) $$[u^\alpha n_\alpha] = 0 \qquad [h^\alpha n_\alpha] = 0 \qquad [\,|h|^2] = 0$$

La direction du champ magnétique tangentiel après le choc demeure indéterminée, la vitesse tangentielle du fluide après le choc étant donnée à partir du champ magnétique tangentiel par les relations (7-6). On a ainsi :

$$\left(c^2 \frac{f}{r} + \mu \frac{|h|^2}{r^2}\right) r u^\alpha n_\alpha [w^\beta] - \mu\eta [t^\beta] = 0 ;$$

c) Posons pour abréger les notations :

(8-8) $$\beta = \sqrt{\frac{c^2 r f + \mu\,|h|^2}{\mu}}$$

L'équation aux ondes d'Alfven (3-4) peut s'écrire :

$$\beta^2 (u^\alpha \partial_\alpha \varphi)^2 - (h^\alpha \partial_\alpha \varphi)^2 = \{\beta u^\alpha \partial_\alpha \varphi + h^\alpha \partial_\alpha \varphi\}\{\beta u^\alpha \partial_\alpha \varphi - h^\alpha \partial_\alpha \varphi\} = 0$$

et les ondes d'Alfven se décomposent en deux espèces, dénommées ondes A et ondes B, et vérifiant respectivement :

(A) $(\beta u^\alpha + h^\alpha)\partial_\alpha \varphi = 0$; (B) $(\beta u^\alpha - h^\alpha)\partial_\alpha \varphi = 0$

Ainsi les ondes d'Alfven sont engendrées par les trajectoires soit du champ de vecteurs :

(8-9) $$A^\alpha = \beta u^\alpha + h^\alpha$$

soit du champ de vecteurs :

(8-10) $$B^\alpha = \beta u^\alpha - h^\alpha$$

Les vecteurs A^α et B^α sont temporels et, β étant positif, sont orientés vers le futur.

Étudions les vecteurs A^α et B^α dans un choc d'Alfven. En adoptant un instant en $x \in \Sigma$, le repère introduit au paragraphe 7, *b*, on a d'après (7-6) :

(8-11) $$\beta^2 u^\alpha n_\alpha [u^i] - h^\alpha n_\alpha [h^i] = 0$$

Si le choc est d'espèce A, c'est-à-dire si Σ est engendrée par des trajectoires de A^α :

$$A^\alpha n_\alpha = \beta u^\alpha n_\alpha + h^\alpha n_\alpha = 0$$

et (8-11) s'écrit :

$$\beta u^\alpha n_\alpha [\beta u^i + h^i] = 0$$

soit le choc étant non tangentiel :

$$[\beta u^i + h^i] = [A^i] = 0$$

A^1 étant manifestement invariant au cours du choc d'Alfven, on a :

$$[A^\alpha] = 0 \tag{8-12}$$

Nous pouvons énoncer le théorème naturel *a priori* :

THÉORÈME. — *Dans un choc d'Alfven d'espèce* A *(resp.* B*) le vecteur* A^α *(resp.* B^α*) reste invariant au cours du choc.*

9. — Le vecteur U^β pour un choc non tangentiel.

Nous considérons maintenant un choc non tangentiel qui n'est pas choc d'Alfven ($a\alpha \neq 0$) et pour lequel V^β n'est pas isotrope ($H \neq 0$).

a) D'après la définition de V^β, ce vecteur peut s'exprimer par une combinaison linéaire des composantes tangentielles w^β/r de la vitesse et t^β du champ magnétique

$$V^\beta = \frac{\eta}{r} w^\beta - \frac{a}{r} t^\beta \tag{9-1}$$

D'après (6-9), w^β est temporel et non nul; le vecteur t^β est spatial et d'après:

$$t^\beta V_\beta = h^\beta V_\beta = \frac{a}{r} | h |^2$$

ne peut s'annuler pour un choc non tangentiel à moins que h^β ne soit nul. supposons qu'il n'en soit pas ainsi; *le vecteur* V^β *ne peut donc être colinéaire à* w^β.

D'après (6-7), X^β est dans le 2-plan en $x \in \Sigma$ défini par V^β et w^β; α étant $\neq 0$, ce 2-plan peut être défini par les vecteurs V^β et X^β, donc demeure invariant au cours du choc. Dans la suite nous désignons par Π_x ce 2-plan.

Ainsi les *composantes tangentielles de la vitesse et du champ magnétique en* $x \in \Sigma$ *demeurent dans un 2-plan* Π_x *fixe au cours du choc.*

b) Dans Π_x, considérons le vecteur U^β défini par :

$$\alpha U^\beta = \frac{H}{a} X^\beta - c^2 \frac{b}{a^2} V^\beta \tag{9-2}$$

Le vecteur αU^β est manifestement invariant au cours du choc. Il est de plus orthogonal à V^β; en effet, d'après (6-8),

$$\alpha U^\beta V_\beta = \frac{H}{a} X^\beta V_\beta - c^2 bH = c^2(bH - bH)$$

Ainsi :

(9-3) $$U^\beta V_\beta = 0$$

En remplaçant X^β dans (9-2) par sa valeur tirée de (6-7), on a :

$$\alpha U^\beta = \frac{H}{a}\left(a\alpha w^\beta + \mu \frac{r\eta}{a} V^\beta\right) - c^2 \frac{f\eta}{a^2} V^\beta$$

soit :

$$\alpha U^\beta = \alpha H w^\beta - \frac{r\eta}{a^2}\left(c^2 \frac{f}{r} - \mu H\right) V^\beta$$

Il vient ainsi :

(9-4) $$U^\beta = H w^\beta - \frac{r\eta}{a^2} V^\beta$$

D'après (9-1), on a :

$$U^\beta = \frac{\eta}{a} t^\beta + \left(H - \frac{\eta^2}{a^2}\right) w^\beta$$

c'est-à-dire :

(9-5) $$U^\beta = \frac{\eta}{a} t^\beta - \frac{|h|^2}{r^2} w^\beta$$

Évaluons le carré du vecteur U^β. On a d'après (9-2) :

$$\alpha^2 U^\beta U_\beta = H^2 K + c^4 \frac{b^2}{a^2} H - 2c^4 \frac{b^2}{a^2} H = H^2 K - c^4 \frac{b^2}{a^2} H$$

c'est-à-dire d'après l'expression de L :

$$\alpha^2 U^\beta U_\beta = - HL$$

Il en résulte :

(9-6) $$U^\beta U_\beta = - H k^2$$

c) U^β reste colinéaire à lui-même au cours du choc. D'après (7-9) :

$$U'^\beta = \frac{\alpha}{\alpha'} U^\beta = \frac{k'}{k} U^\beta$$

On en déduit :

$$[U^\beta] = \left(\frac{k'}{k} - 1\right) U^\beta$$

Par suite :

(9-7) $$[U^\beta][U_\beta] = \left(\frac{k'}{k} - 1\right)^2 U^\beta U_\beta = - H(k' - k)^2$$

Si $|[U]|^2$ désigne la valeur absolue du premier membre de (9-7), il vient :

$$(k'-k)^2 = \frac{|[U]|^2}{|H|} \tag{9-8}$$

10. — Relation d'Hugoniot relativiste.

A partir du vecteur U^β, il est possible de mettre la relation (7-5) sous une forme qui généralise au mieux, dans le cadre relativiste, la classique relation d'Hugoniot de la magnétohydrodynamique.

a) Nous pouvons écrire (7-5) sous la forme :

$$c^4[f^2] + c^4a^2\left[\frac{f^2}{r^2}\right] + 2\mu c^2\left[\frac{f}{r}k^2\right] - \mu^2 H[k^2] = 0 \tag{10-1}$$

Examinons d'abord le terme :

$$c^4a^2\left[\frac{f^2}{r^2}\right] = c^2\left(\frac{f'}{r'}+\frac{f}{r}\right)a^2\left(c^2\frac{f'}{r'}-c^2\frac{f}{r}\right) = c^2\left(\frac{f'}{r'}+\frac{f}{r}\right)a^2[\alpha]$$

De (7-4) il résulte :

$$a^2[\alpha] = -[p] - \frac{1}{2}\mu[|h|^2]$$

Or d'après l'expression (6-11) de k^2 :

$$k^2 = |h|^2 - a^2H$$

on a $[k^2] = [|h|^2]$ et il vient :

$$c^4a^2\left[\frac{f^2}{r^2}\right] = -c^2\left(\frac{f}{r}+\frac{f'}{r'}\right)[p] - \frac{1}{2}\mu c^2\left(\frac{f}{r}+\frac{f'}{r'}\right)[k^2]$$

La relation (10-1) s'écrit ainsi :

(10-2)
$$c^4[f^2] - c^2\left(\frac{f}{r}+\frac{f'}{r'}\right)[p] - \frac{1}{2}\mu c^2\left(\frac{f}{r}+\frac{f'}{r'}\right)[k^2] + 2\mu c^2\left[\frac{f}{r}k^2\right] - \mu^2H[k^2] = 0$$

Examinons maintenant le terme :

$$\left[\frac{f}{r}k^2\right] = \frac{f'}{r'}k'^2 - \frac{f}{r}k^2$$

Ce terme peut s'écrire soit :

$$\left[\frac{f}{r}k^2\right] = \frac{f'}{r'}(k'^2 - k^2) + \left(\frac{f'}{r'} - \frac{f}{r}\right)k^2$$

soit

$$\left[\frac{f}{r}k^2\right] = \left(\frac{f'}{r'} - \frac{f}{r}\right)k'^2 + \frac{f}{r}(k'^2 - k^2)$$

Par addition membre à membre il vient :

$$2\left[\frac{f}{r}k^2\right] = \left[\frac{f}{r}\right](k^2 + k'^2) + \left(\frac{f}{r} + \frac{f'}{r'}\right)[k^2]$$

En reportant dans (10-2), on obtient après simplification :

$$c^4[f^2] - c^2\left(\frac{f}{r} + \frac{f'}{r'}\right)[p] + \frac{1}{2}\mu\left(c^2\frac{f}{r} + c^2\frac{f'}{r'} - 2\mu\mathrm{H}\right)[k^2] + \mu c^2\left[\frac{f}{r}\right](k^2 + k'^2) = 0$$

ce qui peut s'écrire :

$$(10\text{-}3) \qquad c^4[f^2] - c^2\left(\frac{f}{r} + \frac{f'}{r'}\right)[p] + \frac{1}{2}\mu(\alpha + \alpha')[k^2] + \mu[\alpha](k^2 + k'^2) = 0$$

b) Proposons-nous de transformer la somme des deux derniers termes. On a d'abord :

$$(\alpha + \alpha')[k^2] = (\alpha + \alpha')(k'^2 - k^2) = k'^2\alpha' - k^2\alpha + k'^2\alpha - k^2\alpha'$$

Compte tenu de (9-6), on peut écrire :

$$(\alpha + \alpha')[k^2] = kk'\alpha - kk'\alpha' + k'^2\alpha - k^2\alpha' = -kk'(\alpha' - \alpha) - (k^2\alpha' - k'^2\alpha)$$

Or :

$$k^2\alpha' - k'^2\alpha = k^2(\alpha' - \alpha) - (k'^2 - k^2)\alpha = -(k'^2 - k^2)\alpha' + k'^2(\alpha' - \alpha)$$

ce qui donne par addition des deux derniers membres :

$$k^2\alpha' - k'^2\alpha = \frac{1}{2}\{[\alpha](k^2 + k'^2) - (\alpha + \alpha')[k^2]\}$$

On obtient ainsi :

$$(\alpha + \alpha')[k^2] = -kk'(\alpha' - \alpha) - \frac{1}{2}[\alpha](k^2 + k'^2) + \frac{1}{2}(\alpha + \alpha')[k^2]$$

c'est-à-dire :

$$\frac{1}{2}(\alpha + \alpha')[k^2] = -\frac{1}{2}[\alpha](k^2 + k'^2) - [\alpha]kk'$$

Il en résulte :

$$\frac{1}{2}(\alpha+\alpha')[k^2]+[\alpha](k^2+k'^2)=\frac{1}{2}[\alpha](k^2+k'^2-2kk')=\frac{1}{2}[\alpha](k'-k)^2$$

La relation (10-3) s'écrit donc :

$$c^4[f^2]-c^2\left(\frac{f}{r}+\frac{f'}{r}\right)[p]+\frac{1}{2}\mu c^2\left[\frac{f}{r}\right](k'-k)^2=0$$

soit d'après (9-8) :

$$c^2[f^2]-\left(\frac{f}{r}+\frac{f'}{r'}\right)[p]+\left[\frac{f}{r}\right]\cdot\frac{1}{2}\mu\frac{|[\mathrm{U}]|^2}{|\mathrm{H}|}=0 \tag{10-4}$$

La relation (10-4) peut être considérée, comme nous allons le voir, comme la *relation relativiste d'Hugoniot.*

11. — Approximation classique de la magnétohydrodynamique relativiste.

Nous nous proposons maintenant de déduire les équations de choc de la magnétohydrodynamique classique par approximation à partir de celles correspondant au cadre relativiste. Alors que la théorie classique laisse apparaître la possibilité de chocs dits créateurs ou destructeurs (instables), le théorème du paragraphe 7 montre la *non-existence de tels chocs dans le cadre relativiste.* Nous pourrons analyser l'origine de ce désaccord.

a) Nous nous limitons aux chocs non tangentiels ($a \neq 0$). Nous posons dans la suite :

$$u^\alpha n_\alpha=\frac{v}{c} \qquad\qquad j=rv$$

de telle sorte que :

$$a=\frac{j}{c}$$

Cherchons les parties principales, relativement à c^{-2}, des équations de choc (7-1), ..., (7-4). On a d'abord

$$[j]=[rv]=0 \tag{11-1}$$

L'invariance de $b=f\eta$ donne l'équation :

$$\left(1+\frac{i'}{c^2}\right)\eta'=\left(1+\frac{i}{c^2}\right)\eta$$

On en déduit qu'à des termes en c^{-4} près :

$$\eta' = \left(1 + \frac{i - i'}{c^2}\right)\eta \tag{11-2}$$

On retrouve qu'à l'approximation classique :

$$[\eta] = 0 \tag{11-3}$$

Modulo celle de H, l'invariance de l s'écrit :

$$\left[\frac{f}{r} + \frac{1}{j^2}(p + \frac{1}{2}\mu\,|\,h\,|^2)\right] = 0;$$

Par produit par $j^2 = r^2v^2$, on en déduit qu'à l'approximation classique on a :

$$\left[rv^2 + p + \frac{1}{2}\mu\,|\,h\,|^2\right] = 0. \tag{11-4}$$

Compte tenu de (11-2), l'invariance de

$$\mathrm{H} = \frac{c^2\eta^2}{j^2} - \frac{|\,h\,|^2}{r^2}$$

donne alors à des termes d'ordre supérieur près :

$$\frac{c^2}{j^2}\left(1 + 2\frac{i - i'}{c^2}\right)\eta^2 - \frac{|\,h'\,|^2}{r'^2} = \frac{c^2\eta^2}{j^2} - \frac{|\,h\,|^2}{r^2}.$$

Il en résulte

$$\left[2i\frac{\eta^2}{j^2} + \frac{|\,h\,|^2}{r^2}\right] = 0$$

soit, d'après les relations précédentes :

$$\left[i + \frac{1}{2}\frac{|\,h\,|^2}{\eta^2}v^2\right] = 0 \tag{11-5}$$

La relation (11-5) peut encore s'écrire :

$$\left[i + \frac{1}{2}\frac{|\,t\,|^2 + \eta^2}{\eta^2}v^2\right] = 0$$

soit

$$\left[i + \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}\frac{|\,t\,|^2}{\eta^2}v^2\right] = 0. \tag{11-6}$$

Considérons enfin l'invariance de L. Tout d'abord :

$$c^{-2}\alpha = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{i}{c^2}\right) - \mu\left(\frac{\eta^2}{j^2} - \frac{|h|^2}{c^2 r^2}\right)$$

est équivalent à :

$$\frac{1}{r} - \mu\frac{\eta^2}{j^2} \tag{11-7}$$

à l'approximation classique. La nullité de (11-7) exprime que l'hypersurface Σ est onde d'Alfven classique avant le choc. D'autre part

$$k^2 = |t|^2 + \frac{j^2}{c^2}\frac{|h|^2}{r^2}$$

est équivalent à $|t|^2$ à l'approximation classique. Alors que k^2 n'est nul que pour un champ magnétique nul, il n'en est évidemment plus de même pour $|t|^2$. A l'approximation classique, l'invariance de L se traduit donc par :

$$\left[|t|^2\left(\frac{1}{r} - \frac{\eta^2}{j^2}\right)^2\right] = 0 \tag{11-8}$$

c'est la dégénérescence de k^2 en $|t|^2$ qui explique la possibilité en théorie classique des chocs créateurs ou destructeurs interdits par la théorie relativiste.

Nous avons retrouvé en (11-1), (11-3), (11-4), (11-6), (11-8) *les équations fondamentales de la magnétohydrodynamique classique, écrites dans un repère lié au choc.*

b) Cherchons à former de même l'approximation classique de la relation relativiste d'Hugoniot (10-4). De (9-5) il résulte :

$$U^\beta = \frac{c\eta}{j}t^\beta - \frac{|h|^2}{r^2}w^\beta$$

A l'approximation classique, on a donc :

$$[U^\beta] = \frac{c\eta}{j}[t^\beta] \tag{11-9}$$

et par suite :

$$\frac{|[U]|^2}{|H|} = \frac{\frac{c^2\eta^2}{j^2}}{\frac{c^2\eta^2}{j^2}}|[t]|^2 = |[t]|^2 \tag{11-10}$$

Nous posons dans la suite

$$V = \frac{1}{r}$$

de telle sorte que $i = \varepsilon + pV$. La relation (10-4) s'écrit, à des termes en c^{-2} près,

$$[i] - [p]\frac{V + V'}{2} + [V] \cdot \frac{1}{4}\mu \,|\, [t] \,|^2 = 0 \tag{11-11}$$

Un calcul élémentaire montre immédiatement que :

$$[pV] - [p]\frac{V + V'}{2} = \frac{p + p'}{2}[V]$$

et la relation (11-11) s'écrit :

$$[\varepsilon] + \frac{p + p'}{2}[V] + [V] \cdot \frac{1}{4}\mu \,|\, [t] \,|^2 = 0 \tag{11-12}$$

c'est-à-dire coïncide avec la relation d'Hugoniot de la magnétohydro-dynamique classique.

12. — Thermodynamique des chocs.

a) Prenons p et S comme variables thermodynamiques de base. D'après (1-10) :

$$c^2 f'_p = V > 0 \qquad\qquad c^2 f'_s = \Theta > 0 \tag{12-1}$$

Nous posons dans la suite pour simplifier les notations :

$$\tau = \frac{f}{r} = fV$$

et considérons τ comme fonction de p et de S. D'après (12-1) :

$$\frac{\partial}{\partial p}(c^2 f^2) = 2\tau \tag{12-2}$$

Si V est exprimé en fonction de p et de S, on a :

$$c^2 d\tau = c^2 f dV + c^2 V df = c^2 f(V'_p dp + V'_s dS) + (V^2 dp + V\Theta dS)$$

Il en résulte :

$$\tau'_p = fV'_p + \frac{V^2}{c^2} \qquad\qquad \tau'_s = fV'_s + \frac{V\Theta}{c^2}$$

On en déduit :

$$\tau''_{p^2} = f V''_{p^2} + 3 \frac{VV'_p}{c^2}$$

Nous sommes ainsi conduits à adopter *sur* $\tau(p, S)$ *les hypothèses de compressibilité*

(12-3) $\qquad \tau'_p < 0 \qquad \tau'_S > 0 \qquad \tau''_{p^2} > 0$

qui se réduisent à l'approximation classique aux hypothèses de compressibilité usuelles concernant $V(p, S)$.

Nous montrerons (paragraphe 15) que l'inégalité $\tau'_p < 0$ est reliée à la limitation par c de la vitesse sonique d'un fluide relativiste et que les deux autres inégalités sont vérifiées par un gaz polytropique relativiste.

b) Au cours d'un choc, on a nécessairement en chaque point de Σ :

(12-4) $\qquad S' \geqslant S$

Nous nous proposons d'établir le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Sous les hypothèses de compressibilité* (12-3), *on a au cours d'un choc*

(12-5) $\qquad p' \geqslant p \qquad f' \geqslant f \qquad \tau' \leqslant \tau$

En particulier, toute onde de choc est une onde de compression et $V' \leqslant V$.

Supposons en effet qu'au cours du choc envisagé, on ait $p' < p$ au point $x \in \Sigma$. De (12-2) on déduit :

$$c^2 \{ f^2(p, S) - f^2(p', S) \} = 2 \int_{p'}^{p} \tau(p, S) dp$$

et, d'après la condition de convexité $\tau''_{p^2} > 0$, il en résulterait :

$$c^2 \{ f^2(p, S) - f^2(p', S) \} < (p - p') \{ \tau(p, S) + \tau(p', S) \}$$

ou, *a fortiori*, puisque $f'_S > 0$, $\tau'_S > 0$

$$c^2 \{ f^2(p, S) - f^2(p', S') \} < (p - p') \{ \tau(p, S) + \tau(p', S') \}$$

On aurait ainsi :

$$c^2[f^2] - (\tau + \tau')[p] > 0$$

et on déduirait de la relation d'Hugoniot (10-4) :

$$[\tau] = \tau(p', S') - \tau(p, S) < 0$$

ce qui est contradictoire d'après (12-3) avec $p' < p$, $S' \geqslant S$.

Nous avons donc $p' \geqslant p$ et, en vertu de (12-1), $f(p', S') \geqslant f(p, S)$ c'est-à-dire, en notation abrégée $f' \geqslant f$. Il est aisé d'en déduire que $\tau' \leqslant \tau$. On a en effet :

$$c^2 \{ f^2(p', S') - f^2(p, S') \} = 2 \int_p^{p'} \tau(p, S') dp$$

Il en résulte :

$$c^2 \{ f^2(p', S') - f^2(p, S') \} \geqslant 2[p]\tau(p', S')$$

ou, *a fortiori*, puisque $f'_S > 0$

$$c^2 \{ f^2(p', S') - f^2(p, S) \} \geqslant 2[p]\, \tau(p', S')$$

On obtient ainsi :

$$c^2[f^2] - 2\tau'[p] \geqslant 0$$

De la relation d'Hugoniot (10-4), il résulte alors :

$$[\tau] \left\{ - [p] - \frac{1}{2} \mu \frac{|[U]|^2}{|H|} \right\} \geqslant 0$$

c'est-à-dire $[\tau] \leqslant 0$ ce qui démontre le théorème.

On a donc toujours $\alpha' \leqslant \alpha$. Pour $\alpha' = \alpha \neq 0$, il n'y a pas choc d'après le théorème du paragraphe 7. Pour $\alpha' = \alpha = 0$, il y a choc d'Alfven. Ainsi pour un choc non nul qui n'est pas choc d'Alfven, il vient :

$$\alpha' < \alpha \tag{12-6}$$

c) Nous nous proposons enfin d'établir le résultat suivant :

THÉORÈME. — *Pour un choc partout différent de zéro et qui n'est, nulle part, choc d'Alfven, on a sous les hypothèses de compressibilité* (12-3)

$$S < S' \tag{12-7}$$

En effet supposons qu'au point x de Σ, on ait :

$$S = S' \tag{12-8}$$

De (12-2) on déduit :

$$c^2 \{ f(p', S) - f^2(p, S) \} = 2 \int_p^{p'} \tau(p, S) dp$$

Il en résulte d'après la condition de convexité :

$$c^2 \{ f^2(p', S) - f^2(p, S) \} \leqslant [p] \{ \tau(p, S) + \tau(p', S) \}$$

soit sous l'hypothèse faite,

$$c^2[f^2] - (\tau + \tau')[p] \leqslant 0$$

La relation d'Hugoniot nous donne alors :

$$[\tau]\frac{|[U]|^2}{|H|} \geqslant 0.$$

Si $[\tau]$ est $\neq 0$, il est négatif et l'on doit avoir :

$$\frac{|[U]|^2}{|H|} = \frac{1}{|H|}\left(\frac{\alpha}{\alpha'} - 1\right)^2 |H|k^2 = \left(\frac{\alpha}{\alpha'} - 1\right)^2 k^2 = 0$$

Ainsi nécessairement (12-8) implique $[\alpha] = 0$ et le choc est en x soit nul, soit choc d'Alfven contrairement aux hypothèses.

13. — Onde de choc et ondes d'Alfven.

a) Considérons, à la traversée de Σ, un choc non tangentiel qui ne soit pas choc *d'Alfven.* En $x \in \Sigma$ introduisons une perturbation infinitésimale de l'état antérieur au choc. Il en résulte une perturbation infinitésimale de l'état postérieur au choc reliée à la précédente par les relations obtenues en différentiant les équations fondamentales de choc. Il vient ainsi :

$$[\delta r u^\alpha + r\delta u^\alpha]n_\alpha = 0 \tag{13-1}$$

$$\left[\delta\eta u^\beta + \eta\delta u^\beta - \delta\left(\frac{a}{r}\right)h^\beta - \frac{a}{r}\delta h^\beta\right] = 0 \tag{13-2}$$

$$\left[\delta\left(\beta^2\frac{a}{r}\right)u^\beta + \beta^2\frac{a}{r}\delta u^\beta - \frac{1}{\mu}\delta q\cdot n^\beta - \delta\eta\cdot h^\beta - \eta\delta h^\beta\right] = 0 \tag{13-3}$$

Adoptons en x un repère orthonormé $\{ e_{(\alpha)} \}$ tel que $e_{(1)} = n$ et que $e_{(3)}$ soit orthogonal au 2-plan Π_x du paragraphe 9. Dans ce repère, il vient :

$$u^3 = 0 \qquad\qquad h^3 = 0.$$

Considérons en particulier les équations obtenues en donnant dans (13-2) et (13-3) à β la valeur 3. On voit ainsi que le système (13-1), (13-2), (13-3) se partage en deux systèmes dont le premier contient exclusivement les perturbations δu^3 et δh^3, soit :

$$\left[\eta\delta u^3 - \frac{a}{r}\delta h^3\right] = 0 \tag{13-4}$$

$$\left[\beta^2\frac{a}{r}\delta u^3 - \eta\delta h^3\right] = 0 \tag{13-5}$$

et le second exclusivement les autres perturbations. Nous n'envisageons dans la suite que le cas où δu^3 *et* δh^3 *sont seuls différents de zéro*; les variables thermodynamiques n'ayant pas été perturbées, il en résulte que, dans les états respectivement antérieur ou postérieur au choc Σ, de telles perturbations ne peuvent correspondre qu'à des chocs d'Alfven infinitésimaux, c'est-à-dire à des ondes d'Alfven. Nous allons étudier ces ondes de manière plus précise.

b) Considérons, dans l'état antérieur à Σ, une onde d'Alfven d'espèce A au sens du paragraphe 8, *c*. Le vecteur A^α étant invariant à la traversée de cette onde, une telle onde porte en x une perturbation $(\delta \overset{3}{u}_A, \delta \overset{3}{h}_A)$ telle que :

$$\beta\delta \overset{3}{u}_A + \delta \overset{3}{h}_A = 0 \tag{13-6}$$

De même une onde d'Alfven d'espèce B porte en x une perturbation $(\delta \overset{3}{u}_B, \delta \overset{3}{h}_B)$ telle que :

$$\beta\delta \overset{3}{u}_B - \delta \overset{3}{h}_B = 0 \tag{13-7}$$

La superposition en x d'une onde d'espèce A et d'une onde d'espèce B fournit une perturbation $(\delta u^3, \delta h^3)$ arbitraire, avec :

$$\delta \overset{3}{u} = \delta \overset{3}{u}_A + \delta \overset{3}{u}_B \qquad \delta \overset{3}{h} = \delta \overset{3}{h}_A + \delta \overset{3}{h}_B$$

En effet $(\delta u^3, \delta h^3)$ étant donnée, il suffit de prendre :

$$\delta \overset{3}{h}_A = -\beta\delta \overset{3}{u}_A = \frac{1}{2}(\delta \overset{3}{h} - \beta\delta \overset{3}{u}), \qquad \delta \overset{3}{h}_B = \beta\delta \overset{3}{u}_B = \frac{1}{2}(\delta \overset{3}{h} + \beta\delta \overset{3}{u}) \tag{13-8}$$

pour réaliser la perturbation envisagée.

c) Cela posé, les vecteurs A^α et B^α vérifient en $x \in \Sigma$

$$A^\alpha n_\alpha = \beta\frac{a}{r} + \eta \qquad B^\alpha n_\alpha = \beta\frac{a}{r} - \eta$$

On en déduit :

$$(A^\alpha n_\alpha)(B^\alpha n_\alpha) = \beta^2\frac{a^2}{r^2} - \eta^2 = \frac{a^2}{\mu}\left(c^2\frac{f}{r} + \mu\frac{|h|^2}{r^2} - \mu\frac{\eta^2}{a^2}\right)$$

c'est-à-dire

$$(A^\alpha n_\alpha)(B^\alpha n_\alpha) = \frac{a^2}{\mu}\alpha \tag{13-9}$$

D'après nos conventions, nous avons $a < 0$. Supposons, pour fixer les idées, $b > 0$ et par suite $\eta > 0$. D'après l'expression de $B^\alpha n_\alpha$, le vecteur B^α

est orienté du même côté que n^α de Σ. Quant au vecteur A^α, son orientation est celle de B^α ou l'orientation opposée selon que α est positif ou négatif. Si b était supposé < 0, les rôles de A^α et B^α seraient simplement inversés.

14. — Compatibilité d'une onde de choc avec les ondes d'Alfven.

a) Supposons que pour le choc Σ envisagé, on ait

$$0 < \alpha' < \alpha \tag{14-1}$$

Les ondes d'Alfven d'espèce A et B, dans l'état antérieur au choc Σ, qui aboutissent en $x \in \Sigma$ peuvent créer en ce point une perturbation $(\delta u^3, \delta h^3)$ arbitraire. Des relations (13-4), (13-5) il résulte :

$$\eta'\delta u'^3 - \frac{a}{r'}\delta h'^3 = \eta\delta u^3 - \frac{a}{r}\delta h^3 \tag{14-2}$$

$$\beta'^2\frac{a}{r'}\delta u'^3 - \eta'\delta h'^3 = \beta^2\frac{a}{r}\delta u^3 - \eta\delta h^3 \tag{14-3}$$

α' étant $\neq 0$, ce système en $(\delta u'^3, \delta h'^3)$ admet une solution unique qui définit une perturbation de l'état postérieur au choc Σ pouvant s'éloigner de x selon les ondes d'Alfven A′ et B′ correspondant à cet état. Il y a *compatibilité de l'onde de choc avec les ondes d'Alfven.*

b) Supposons maintenant que l'on ait :

$$\alpha' < 0 < \alpha \tag{14-4}$$

α étant positif, il arrive encore que les ondes d'Alfven d'espèce A et B pour l'état antérieur au choc peuvent créer en $x \in \Sigma$ une perturbation arbitraire $(\delta u^3, \delta h^3)$. Mais seule s'éloigne de x, dans l'état postérieur au choc, une onde d'Alfven d'espèce B′ portant une perturbation vérifiant

$$\beta'\delta u'^3_B - \delta h'^3_B = 0$$

De (14-2), (14-3) il résulte :

$$\eta\delta u^3 - \frac{a}{r}\delta h^3 = -\left(\beta'\frac{a}{r'} - \eta'\right)\delta u'^3_B \tag{14-5}$$

$$\beta^2\frac{a}{r}\delta u^3 - \eta\delta h^3 = \beta'\left(\beta'\frac{a}{r'} - \eta'\right)\delta u'^3_B \tag{14-6}$$

Si (δu^3, δh^3) ne vérifie pas la relation :

$$\left(\beta^2\frac{a}{r}+\beta'\eta\right)\delta u^3-\left(\beta'\frac{a}{r}+\eta\right)\delta h^3=0 \tag{14-7}$$

on obtient après le choc une perturbation qui ne peut correspondre à une onde d'espèce B'. La relation ne saurait être une identité en (δu^3, δh^3) sous les hypothèses faites, puisqu'on devrait avoir simultanément :

$$\beta=\beta' \qquad\qquad \beta\frac{a}{r}+\eta=0$$

et α serait nul.

Ainsi aucune solution n'est possible pour l'écoulement postérieur au choc Σ. *Il y a ainsi incompatibilité de l'onde de choc Σ avec les ondes d'Alfven.*

c) Supposons enfin que l'on ait :

$$\alpha'<\alpha<0 \tag{14-8}$$

Avant le choc, seule une onde d'Alfven d'espèce B peut aboutir en x créant une perturbation $(\delta u^3_B, \delta h^3_B)$ vérifiant :

$$\beta\delta u^3_B-\delta h^3_B=0$$

Mais peuvent s'éloigner de x à la fois une onde d'Alfven d'espèce A avant le choc Σ et une onde d'Alfven d'espèce B' après le choc Σ, qui, avant le choc, correspond à une perturbation (δu^3, δh^3) vérifiant (14-7). Nous posons :

$$\delta u^3_B=\delta u^3+\bar\delta u^3_A \qquad\qquad \delta h^3_B=\delta h^3+\bar\delta h^3_A$$

avec :

$$\delta h^3=\gamma\delta u^3 \qquad\qquad \bar\delta h^3_A=-\beta\bar\delta u^3_A$$

où, d'après (14-7),

$$\gamma=\frac{\beta^2\dfrac{a}{r}+\beta'\eta}{\beta'\dfrac{a}{r}+\eta} \qquad \left(\text{pour } \beta'\frac{a}{r}+\eta\neq 0\right)$$

En résolvant les équations :

$$\beta\delta u^3+\beta\bar\delta u^3_A=\beta\delta u^3_B$$
$$\gamma\delta u^3-\beta\bar\delta u^3_A=\beta\delta u^3_B$$

on obtient :

$$\delta u^3 = \frac{2\beta}{\gamma + \beta}\,\delta u^3_B \qquad\qquad \overline{\delta u}^3_A = \frac{\gamma - \beta}{\gamma + \beta}\,\delta u^3_B$$

où

$$\gamma + \beta = \frac{\beta + \beta'}{\beta'\dfrac{a}{r} + \eta}\left(\beta\frac{a}{r} + \eta\right)$$

est certainement différent de zéro. Si $\beta'\dfrac{a}{r} + \eta = 0$, on obtient aussi, trivialement, une solution unique.

La perturbation $(\delta u^3_B, \delta h^3_B)$ étant donnée, nous avons ainsi obtenu la perturbation $(\overline{\delta u}^3_A, \overline{\delta h}^3_A)$ correspondant à l'onde d'Alfven d'espèce A s'éloignant de x avant le choc, et la perturbation $(\delta u^3, \delta h^3)$ qui donne naissance à une perturbation s'éloignant de x après le choc Σ selon une onde d'Alfven d'espèce B'. *Il y a encore compatibilité de l'onde de choc Σ avec les ondes d'Alfven.*

Nous énonçons :

THÉORÈME. — *Pour qu'un choc non tangentiel qui n'est nulle part choc d'Alfven soit compatible avec les ondes d'Alfven, il faut et il suffit que α et α' soient de même signe.*

d) On appelle *choc lent* un choc tel que :

$$\alpha' < \alpha < 0$$

et *choc rapide* un choc tel que :

$$0 < \alpha' < \alpha$$

Partons de la relation fondamentale :

$$k'^2\alpha'^2 = k^2\alpha^2$$

Pour un choc lent $\alpha'^2 > \alpha^2$, donc $k'^2 < k^2$ et par suite $|\, h' \,|^2 < |\, h \,|^2$. Pour un choc rapide, les inégalités précédentes sont inversées. On a donc :

THÉORÈME. — *Dans un choc lent, la grandeur du champ magnétique diminue; dans un choc rapide elle augmente.*

e) A la traversée de l'hypersurface Σ supposée fixe, considérons une famille de chocs dépendant continûment d'un paramètre $m \in \mathrm{I}$, telle que, pour $m = m_0$, on obtienne un choc nul non d'Alfven et que, pour tout m, le champ magnétique $|\, h \,|$ soit différent de zéro.

On sait que, au cours d'un choc,

$$k'\alpha' = k\alpha. \tag{14-9}$$

Or pour $m = m_0$, on a $\alpha' = \alpha \neq 0$; par suite $(kk')(m_0)$ est strictement positif. Le produit kk' est une fonction continue de m qui ne peut s'annuler pour aucune valeur du paramètre et qui est positive pour $m = m_0$. Ce produit est par suite toujours positif et d'après (14-9) α et α' sont toujours de même signe. Ainsi :

THÉORÈME. — *Soit, à la traversée de* Σ, *une famille* F *de chocs dépendant continûment d'un paramètre, contenant un choc nul non d'Alfven et à champ magnétique toujours différent de zéro. Tous les chocs de* F *sont tels que* α *et* α' *aient même signe et par suite, pour* α *et* α' *non simultanément nuls, sont compatibles avec les ondes d'Alfven.*

Il est à noter que la famille F peut contenir un choc d'Alfven.

15. — Les conditions de compressibilité.

Nous avons établi le théorème fondamental de la thermodynamique des chocs, sous les conditions de compressibilité (12-3). Nous nous proposons d'analyser ces conditions.

a) On sait (voir par exemple [7]) que, pour un fluide relativiste d'équation d'état $r = r(f, S)$, la vitesse sonique v_0 est donnée par la relation :

$$\frac{v_0^2}{c^2} = \frac{r}{fr'_f} \tag{15-1}$$

Nous posons dans la suite :

$$\varphi = \frac{fr'_f}{r} \tag{15-2}$$

De $\tau = f/r$ on déduit par différentiation :

$$d\tau = \frac{1}{r}\,df - \frac{f}{r^2}(r'_f df + r'_S dS) = V(1-\varphi)df - V^2 f r'_S dS$$

D'après l'expression de $c^2 df$, il vient :

$$d\tau = \frac{V}{c^2}(1-\varphi)(V dp + \Theta dS) - V^2 f r'_S dS$$

Il en résulte que la fonction $\tau = \tau(p, S)$ est telle que :

$$\tau'_p = \frac{V^2}{c^2}(1 - \varphi) \tag{15-3}$$

Pour que τ'_p soit < 0, il faut et il suffit que $\varphi > 1$. Ainsi l'inégalité $\tau'_p < 0$ est équivalente à $v_0 < c$.

b) Supposons maintenant que notre fluide relativiste soit un *gaz polytropique* vérifiant :

$$pV = \frac{p}{r} = (c_p - c_v)\Theta$$

où c_p, c_v $(c_p > c_v)$ sont des constantes positives définissant les chaleurs spécifiques. On a donc :

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} > 1 \tag{15-4}$$

L'énergie interne du fluide est donnée par :

$$\varepsilon = c_v\Theta = \frac{c_v}{c_p - c_v}pV = \frac{1}{\gamma - 1}pV$$

et son enthalpie spécifique par la relation :

$$i = c_p\Theta = \varepsilon + pV = \frac{\gamma}{\gamma - 1}pV$$

Il en résulte que l'indice du fluide s'exprime par :

$$f = 1 + \frac{\gamma}{c^2(\gamma - 1)}pV; \tag{15-5}$$

quant à l'entropie spécifique, elle est donnée par :

$$S = c_p \log (p^{\frac{1}{\gamma}}V)$$

de telle sorte que :

$$V = p^{-\frac{1}{\gamma}} \exp (S/c_p) \tag{15-6}$$

La variable $\tau = fV$ peut donc s'exprimer par :

$$\tau = V\left(1 + \frac{\gamma}{c^2(\gamma - 1)}pV\right) \tag{15-7}$$

où V est donnée par (15-6) en fonction de p et de S, que nous prenons pour variables thermodynamiques de base. Il est alors aisé, pour $\tau(p, \mathrm{S})$, d'évaluer τ'_s. Il vient ainsi :

$$\tau''_s = \mathrm{V}'_s\left(1 + \frac{2\gamma}{c^2(\gamma-1)}p\mathrm{V}\right)$$

avec :

$$\mathrm{V}'_s = \frac{1}{c_p}p^{-\frac{1}{\gamma}}\exp(\mathrm{S}/c_p) = \frac{\mathrm{V}}{c_p}$$

Nous obtenons ainsi :

$$\tau'_s = \frac{\mathrm{V}}{c_p}\left(1 + \frac{2\gamma}{c^2(\gamma-1)}p\mathrm{V}\right) \tag{15-8}$$

et τ'_s est manifestement > 0, conformément à (12-3).

c) Évaluons maintenant τ'_p et τ''_{p^2}. Il vient :

$$\tau'_p = \mathrm{V}'_p\left(1 + \frac{2\gamma}{c^2(\gamma-1)}p\mathrm{V}\right) + \frac{\gamma}{c^2(\gamma-1)}\mathrm{V}^2$$

Or d'après (15-6)

$$\mathrm{V}'_p = -\frac{1}{\gamma}p^{-\frac{1}{\gamma}-1}\exp(\mathrm{S}/c_p) = -\frac{1}{\gamma}p^{-1}\mathrm{V}$$

Nous obtenons ainsi :

$$\tau'_p = -\mathrm{V}\left(\frac{1}{\gamma}p^{-1} - \frac{\gamma-2}{c^2(\gamma-1)}\mathrm{V}\right) \tag{15-9}$$

Si l'inégalité $\tau'_p < 0$ est supposée satisfaite, on a :

$$\frac{\gamma-2}{c^2(\gamma-1)}\mathrm{V} < \frac{1}{\gamma}p^{-1} \tag{15-10}$$

A partir de (15-9), évaluons τ''_{p^2}. Il vient d'abord :

$$\tau''_{p^2} = -\mathrm{V}'_p\left(\frac{1}{\gamma}p^{-1} - \frac{2(\gamma-2)}{c^2(\gamma-1)}\mathrm{V}\right) + \mathrm{V}\frac{1}{\gamma}p^{-2}$$

soit d'après l'expression de V'_p :

$$\tau''_{p^2} = \frac{1}{\gamma}p^{-1}\mathrm{V}\left(\frac{1}{\gamma}p^{-1} + p^{-1} - \frac{2(\gamma-2)}{c^2(\gamma-1)}\mathrm{V}\right) \tag{15-11}$$

γ étant supérieur à 1, on a d'après l'inégalité (15-10)

$$\frac{\gamma-2}{c^2(\gamma-1)}V < \frac{1}{\gamma}p^{-1} < p^{-1}$$

et par suite

$$\frac{2(\gamma-2)}{c^2(\gamma-1)}V < \frac{1}{\gamma}p^{-1} + p^{-1}$$

De la formule (15-11) résulte ainsi l'inégalité $\tau''_{p^2} > 0$. Nous pouvons énoncer :

THÉORÈME. — 1° *Tout fluide relativiste dont la vitesse sonique* v_0 *vérifie* $v_0 < c$ *satisfait l'inégalité de compressibilité :*

$$\tau'_p < 0$$

2° *Si ce fluide est un gaz polytropique, les inégalités :*

$$\tau'_s > 0 \qquad\qquad \tau''_{p^2} > 0$$

sont satisfaites.

On notera que pour un gaz polytropique :

$$f = 1 + \frac{c_p}{c^2}\Theta$$

D'après le théorème du paragraphe 12, f augmente au cours d'un choc *et il en est par suite de même pour la température* Θ.

16. — Vecteur densité superficielle de courant.

En magnétohydrodynamique, le vecteur courant électrique est donné par :

(16-1) $$\nabla_\alpha G^{\alpha\beta}$$

où G est le tenseur induction électrique-champ magnétique qui se réduit ici à :

(16-2) $$G = -*(u \wedge h)$$

où l'on a employé les notations classiques du calcul extérieur.

Du raisonnement classique concernant les ondes de choc et de (16-1), il résulte qu'à une onde de choc Σ correspond un vecteur densité électrique porté par Σ et défini par :

$$K^\beta = [G^{\alpha\beta}]n_\alpha$$

De (16-2) on déduit :

$$K^{\alpha} = \eta^{\alpha\beta\lambda\mu} n_{\beta} [u_{\lambda} h_{\mu}] \tag{16-3}$$

où η est le tenseur élément de volume de V_4. Si h est nul en $x \in \Sigma$, il en est de même de h' et K est nul en ce point. C'est pourquoi nous écartons le cas $h = 0$ dans la suite.

Soit w la composante tangente à Σ de ru, t celle de h. La relation (16-3) peut s'écrire sous la forme :

$$K^{\alpha} = \eta^{\alpha\beta\lambda\mu} n_{\beta} \left[\frac{w_{\lambda}}{r} t_{\mu}\right] \tag{16-4}$$

b) Évaluons le vecteur densité superficielle de courant K^{α} *dans le cas d'un choc non tangentiel qui n'est pas choc d'Alfven* ($a\alpha \neq 0$, $h \neq 0$ en $x \in \Sigma$). A cet effet, calculons le produit extérieur des deux vecteurs invariants au cours du choc :

$$V = \frac{\eta}{r} w - \frac{a}{r} t \qquad\qquad X = a\alpha w + \mu \frac{r\eta}{a} V$$

Il vient :

$$V \wedge X = a\alpha V \wedge w$$

soit d'après l'expression de V :

$$V \wedge X = a^2 \alpha \frac{w}{r} \wedge t$$

On obtient ainsi :

$$\left[\frac{w}{r} \wedge t\right] = \frac{1}{a^2} (V \wedge X) \left(\frac{1}{\alpha'} - \frac{1}{\alpha}\right)$$

De (16-4), il résulte :

$$K^{\alpha} = \frac{1}{a^2} (\eta^{\alpha\beta\lambda\mu} n_{\beta} V_{\lambda} X_{\mu}) \left(\frac{1}{\alpha'} - \frac{1}{\alpha}\right) \tag{16-5}$$

Au point x de Σ, le vecteur K est porté par la direction tangente à Σ et orthogonale au 2-plan invariant Π_x. Pour un choc non nul en x ($\alpha' \neq \alpha$), K n'est jamais nul sous les hypothèses faites.

c) Considérons maintenant un *choc d'Alfven* et introduisons en $x \in \Sigma$ les deux vecteurs invariants mis en évidence :

$$A = \beta u + h \qquad\qquad B = \beta u - h$$

Leur produit extérieur s'écrit :

$$A \wedge B = -2\beta u \wedge h$$

β étant invariant au cours du choc, il en est donc de même pour $u \wedge h$

$$[u \wedge h] = 0$$

et de (16-3) il résulte :

$$K^{\alpha} = 0 \tag{16-6}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. ANDERSON, Mass. Inst. of Technology Press. *Magnetohydrodynamic shock waves*. Cambridge, 1963.

[2] H. CABANNES, *Magnétodynamique des fluides*, Paris, 1965.

[3] Y. CHOQUET-BRUHAT, *Astron. Acta*, t. 6, 1960, p. 354-365.

[4] P. GERMAIN, Contribution à la théorie des ondes de choc en magnétodynamique des fluides. *O. N. E. R. A.*, publication n° 97, Paris, 1959.

[5] F. HOFFMANN et E. TELLER, Magnetohydrodynamic shocks. *Phys. Rev.*, t. 80, 1950, p. 692-703.

[6] A. LICHNEROWICZ, *Comptes rendus Acad. Sc. Paris*, t. 260, 1965, p. 4449. 4418

[7] A. LICHNEROWICZ, Étude mathématique des fluides thermodynamiques relativistes. *Comm. math. Phys.*, t. 1, 1966, p. 328-373.

[8] PARIZET, *Thèse Paris*, 1965.

[9] PHAM-MAU-QUAN, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, nouv. sér., t. 2, 1965, p. 151-165.

[10] R. POLOVIN, Shock waves in magnetohydrodynamics. *Sov. Phys. Usp.*, t. 2, 1961, p. 677-688.

[11] A. H. TAUB, *Phys. Rev.*, t. 74, 1948, p. 328-334.

[12] A. M. PRATELLI, *Ann. di Matematica pura ed appl.*, t. 69, 1965, p. 41-88.

(Manuscrit reçu le 15 avril 1966).