A. PAPAPETROU

Champs gravitationnels stationnaires à symétrie axiale

Annales de l'I. H. P., section A, tome 4, nº 2 (1966), p. 83-105
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1966__4_2_83_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. IV, nº 2, 1966, p. 83-105.

Section A :
Physique théorique.

Champs gravitationnels stationnaires à symétrie axiale

par

A. PAPAPETROU
(Institut Henri Poincaré, Paris).

RÉSUMÉ. — Le champ gravitationnel stationnaire à symétrie axiale satisfaisant aux équations du champ $R_{\mu\nu} = 0$ a été étudié en détail par une méthode basée sur les propriétés des vecteurs de Killing. Les résultats principaux sont : 1° L'existence de 4 scalaires associés aux deux vecteurs de Killing. 2° L'existence d'une forme canonique de la métrique caractérisée par la relation $g_{ia} = 0$; $i = 1, 2$, $a = 3, 4$. 3° Quelques formes intéressantes des équations du champ. 4° Quelques solutions nouvelles de ces équations.

SUMMARY. — The stationary, axially symmetric gravitational field, which satisfies the field equations $R_{\mu\nu} = 0$, has been discussed in detail by a method based on the properties of the Killing vectors. The main results are: 1° Existence of 4 scalars associated with the two Killing vectors. 2° Existence of a canonic form of the metric characterised by the condition $g_{ia} = 0$; $i = 1, 2$, $a = 3, 4$. 3° Some interesting forms of the field equations. 4° Some new solutions of the field equations.

L'objet de ce travail est le champ gravitationnel stationnaire à symétrie axiale. Seuls les champs extérieurs, satisfaisant aux équations d'Einstein

$$R_{\mu\nu} = 0, \tag{1}$$

seront considérés.

Il n'est pas nécessaire d'insister sur la grande importance, au point de vue physique, des champs gravitationnels de ce type. C'est à cause de cette importance que le problème mathématique correspondant a été traité par plusieurs auteurs depuis longtemps. Les résultats de ces travaux sont plutôt maigres et ne font qu'illustrer la difficulté du problème Les seuls champs stationnaires à symétrie axiale satisfaisant à la condition à l'infini

(2) $$g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu} \quad \text{pour} \quad r \rightarrow \infty$$

que nous connaissons à cette date sont les solutions très spéciales de Kerr [*1*] et de Papapetrou [*2*].

Le présent travail contient une discussion détaillée de certaines questions relatives à ce problème. La méthode employée est caractérisée par l'utilisation systématique des propriétés des vecteurs de Killing. Les résultats principaux sont le théorème démontré dans le § IV sur l'existence d'une forme canonique de la métrique ainsi que quelques formes des équations du champ déduites dans le § VII.

I. — QUELQUES FORMULES VALABLES POUR UN VECTEUR DE KILLING

Soit a_μ un champ vectoriel satisfaisant à l'équation de Killing

(1,1) $$a_{\mu\,;\,\nu} + a_{\nu\,;\,\mu} = 0.$$

On en déduit [*3*]

(1,2) $$a_{\lambda\,;\,\mu\,;\,\nu} = \mathrm{R}_{\lambda\mu\nu\rho}a^{\rho}.$$

L'identité $\mathrm{R}_{[\lambda\mu\nu]\rho} = 0$ entraîne la relation

(1,3) $$a_{[\lambda\,;\,\mu\,;\,\nu]} = 0.$$

On peut écrire (1,2) sous la forme

$$a^{\lambda\,;\,\mu\,;\,\nu} = \mathrm{R}^{\lambda\mu\nu\rho}a_{\rho}.$$

En multipliant par $g_{\mu\nu}$, on obtient

(1,4) $$a^{\lambda\,;\,\mu}{}_{;\,\mu} = \mathrm{R}^{\lambda\rho}a_{\rho} = \mathrm{R}^{\lambda}_{\rho}a^{\rho}.$$

On trouve aussi, en multipliant par $\sqrt{-g}$:

(1,5) $$\underline{a}^{\lambda\,;\,\mu}{}_{;\,\mu} = \underline{a}^{\lambda\,;\,\mu}{}_{,\mu} = \underline{\mathrm{R}}^{\lambda}_{\rho}a^{\rho}\,;$$

(1,5 *a*) $$\underline{a}^{\lambda} \equiv a^{\lambda}\sqrt{-g}, \qquad \underline{\mathrm{R}}^{\lambda}_{\rho} \equiv \mathrm{R}^{\lambda}_{\rho}\sqrt{-g}.$$

Les relations (1,3) et (1,5) ont la forme des équations de Maxwell. En effet, on déduit de (1,1)

$$(1,6)\qquad 2a_{\mu\,;\,\nu} = a_{\mu\,;\,\nu} - a_{\nu\,;\,\mu} = a_{\mu,\nu} - a_{\nu,\mu}, \qquad a^{\mu}{}_{;\,\mu} = 0 = \underline{a}^{\mu}{}_{,\mu}.$$

Par conséquent le vecteur a_μ peut être considéré comme le potentiel, satisfaisant à la condition de Lorentz, d'un champ électromagnétique dont les sources sont données par

$$(1,7)\qquad j^{\mu} = \mathrm{R}^{\mu}_{\nu} a^{\nu}.$$

En répétant un calcul bien connu de la théorie de Maxwell, on obtient l'identité

$$(1,8)\qquad \left(a_{\mu\,;\,\rho} a^{\nu\,;\,\rho} - \frac{1}{4}\,\delta^{\nu}_{\mu} a_{\rho\,;\,\sigma} a^{\rho\,;\,\sigma}\right)_{;\,\nu} = -\, a_{\mu\,;\,\rho} \mathrm{R}^{\rho}_{\nu} a^{\nu}.$$

Une autre relation utile peut être obtenue de la manière suivante. On part des relations élémentaires

$$(a_\mu a^\mu)_{;\,\nu} = 2a_{\mu\,;\,\nu} a^{\mu}, \qquad (a_\mu a^\mu)_{;\,\nu\,;\,\rho} = 2a_{\mu\,;\,\nu\,;\,\rho} a^{\mu} + 2a_{\mu\,;\,\nu} a^{\mu}{}_{;\,\rho}.$$

En multipliant par $g^{\nu\rho}$ et en tenant compte de (1,2), on trouve

$$(1,9)\qquad (a_\mu a^\mu)^{;\,\rho}{}_{;\,\rho} = 2\mathrm{R}_{\mu\nu} a^{\mu} a^{\nu} + 2a_{\mu\,;\,\nu} a^{\mu\,;\,\nu}.$$

Les relations (1,5) et (1,9) montrent que les équations

$$(1,10)\qquad \mathrm{R}_{\mu\nu} a^{\mu} a^{\nu} = 0, \qquad \underline{\mathrm{R}}^{\mu}_{\nu} a^{\nu} = 0,$$

qui font partie des équations du champ (1), ont des formes assez simples. En particulier le premier membre de (1,5) a la forme d'une simple divergence.

Notons enfin qu'en pratique, quand on cherche à résoudre les équations du champ (1), on utilise des systèmes de coordonnées *adaptées* au vecteur de Killing a_μ. Il s'agit de coordonnées telles que les lignes paramétriques de la coordonnée x^4 coïncident avec les trajectoires du vecteur a_μ. On a alors :

$$(1,11)\qquad a^{\mu} = \delta^{\mu}_{4}, \qquad a_\mu = g_{\mu 4}\,; \qquad g_{\mu\nu,4} = 0.$$

Les équations du champ (1,10) prennent dans ce cas une forme particulièrement simple. Nous trouverons une autre forme encore plus commode dans le § II.

II. — LE VECTEUR ASSOCIÉ A_λ ET LE SCALAIRE A

Au vecteur de Killing a_λ nous allons faire correspondre le vecteur A_λ défini par les relations

$$(2,1) \qquad A_\lambda = -\varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho}a^\mu \underline{a}^{\nu;\rho}, \qquad \underline{A}^\lambda = \varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}a_\mu a_{\nu;\rho}.$$

En utilisant la formule pour le produit $\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}\varepsilon_{\lambda'\mu'\nu'\rho'}$ on déduit de (2,1) la valeur de la quantité A $A_{\lambda'}$. Avec l'abréviation

$$(2,2) \qquad a_\mu a^\mu \equiv (aa)$$

le résultat s'écrit :

$$(2,3) \left\{ \begin{aligned} A^\lambda A_{\lambda'} = {} & \delta^\lambda_{\lambda'} \{ (aa)_{,\rho}(aa)^{,\rho} - 2(aa)a_{\rho;\sigma}a^{\rho;\sigma} \} + 2a^\lambda a_{\lambda'} a_{\rho;\sigma}a^{\rho;\sigma} \\ & - 2a^\lambda a_{\lambda';\rho}(aa)^{,\rho} - 2a^{\lambda;\rho}a_{\lambda'}(aa)_{,\rho} + 4(aa)a^{\lambda;\rho}a_{\lambda';\rho} - (aa)^{,\lambda}(aa)_{,\lambda'}. \end{aligned} \right.$$

La contraction $\lambda = \lambda'$ donne

$$(2,4) \qquad A^\lambda A_\lambda = (aa)^{,\rho}(aa)_{,\rho} - 2(aa)a^{\rho;\sigma}a_{\rho;\sigma}.$$

A l'aide de cette formule on peut écrire (1,9) sous la forme

$$(2,5) \qquad (aa)(aa)^{,\rho}{}_{;\rho} - (aa)_{,\rho}(aa)^{,\rho} + A_\rho A^\rho = 2(aa)a^\rho a^\sigma R_{\rho\sigma}.$$

En multipliant la première (2,1) par $\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}$ on trouve

$$(2,6) \qquad A_\lambda \varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho} = -2(a^\mu \underline{a}^{\nu;\rho} + a^\nu \underline{a}^{\rho;\mu} + a^\rho \underline{a}^{\mu;\nu}).$$

Formons la dérivée covariante par rapport à x^ρ. Nous obtenons

$$(2,7) \qquad A_{\lambda;\rho}\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho} = -2(a^\mu \underline{a}^{\nu;\rho}{}_{;\rho} - a^\nu \underline{a}^{\mu;\rho}{}_{;\rho}),$$

les autres termes s'annulant à cause de (1,1) et (1,2). En tenant compte de (1,5) on écrit (2,7) sous la forme

$$(2,8) \qquad A_{\lambda;\rho}\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho} = 2a^\rho(\underline{R}^\mu_\rho a^\nu - \underline{R}^\nu_\rho a^\mu).$$

Pour la divergence du vecteur A^λ on trouve de la deuxième des équations (2,1) :

$$(2,9) \qquad \underline{A}^\lambda{}_{;\lambda} = \underline{A}^\lambda{}_{,\lambda} = (\varepsilon \underline{a}\,\underline{a}),$$

$$(2,10) \qquad (\varepsilon \underline{a}\,\underline{a}) \equiv \varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho}\underline{a}^{\lambda;\mu}\underline{a}^{\nu;\rho} = 8(\underline{a}^{1;2}\underline{a}^{3;4} + \underline{a}^{2;3}\underline{a}^{1;4} + \underline{a}^{3;1}\underline{a}^{2;4}).$$

On peut écrire la relation (2,9) sous une autre forme à l'aide de l'identité

$$(2,11) \qquad (f^{\lambda\nu}\varphi^{\rho\sigma}+\varphi^{\lambda\nu}f^{\rho\sigma})\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2}\,\delta^{\lambda}_{\mu}f^{\alpha\nu}\varphi^{\rho\sigma}\varepsilon_{\alpha\nu\rho\sigma}$$

valable pour deux tenseurs antisymétriques $f^{\lambda\nu}$ et $\varphi^{\rho\sigma}$ quelconques. En multipliant (2,11) par $a_\lambda a^\mu$ et en posant $f^{\lambda\nu} = \varphi^{\lambda\nu} = \underline{a}^{\lambda;\nu}$, on obtient

$$a_\lambda a^\mu \underline{a}^{\lambda;\,\nu}\underline{a}^{\rho;\,\sigma}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{4}(aa)\,(\varepsilon\,\underline{a}\,\underline{a}).$$

C'est-à-dire, quand on tient compte de la définition (2,1) :

$$(2,12\,a) \qquad \frac{1}{4}(aa)\,(\varepsilon\,\underline{a}\,\underline{a}) = \frac{1}{2}(aa)^{,\nu}\underline{A}_\nu = \frac{1}{2}(aa)_{,\nu}\underline{A}^\nu.$$

La relation (2,9) prend alors la forme

$$(2,12) \qquad (aa)\underline{A}^{\lambda}{}_{;\,\lambda} = 2(aa)_{,\lambda}\underline{A}^{\lambda}.$$

Notons encore la formule suivante :

$$(2,13) \qquad A_{\lambda;\,\sigma} = \frac{1}{2(aa)}g_{\lambda\sigma}(aa)_{,\rho}A^{\rho} - \varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho}a^{\mu}\underline{R}^{\nu\rho}{}_{\sigma\tau}a^{\tau}.$$

Les relations (2,8) et (2,12) pourraient être déduites de (2,13).

La relation (2,8) permet d'obtenir un résultat intéressant. Supposons que nous utilisons un système de coordonnées adapté au vecteur a_μ et que les équations du champ

$$(2,14) \qquad \underline{R}^{\mu}_{\rho}a^{\rho} = \underline{R}^{\mu}_{4} = 0, \qquad \mu \neq 4,$$

sont satisfaites. La relation (2,8) montre qu'alors A_μ est un gradient :

$$(2,15) \qquad A_\mu = A_{,\mu}.$$

Inversement, (2,15) entraîne (2,8). On voit qu'au vecteur de Killing a_μ on peut aussi associer, dans un champ extérieur, un scalaire A.

La condition

$$(2,16) \qquad A_\mu = 0$$

a une signification géométrique simple : c'est la condition pour que le vecteur a_μ soit orthogonal à une famille d'hypersurfaces $f(x^\mu) = \text{const.}$ Dans le cas où le vecteur a_μ n'est pas isotrope, $(aa) \neq 0$, la condition (2,16) signifie que le champ est statique. C'est par conséquent le champ avec $(aa) \neq 0$ et $A_\mu \neq 0$ qui nous intéresse dans le présent travail. Mais nous allons signaler brièvement une conséquence intéressante des équations (1,9) et (2,3) dans le cas d'un vecteur a_μ isotrope. En effet, avec $(aa) = 0$ ces relations deviennent

$$R_{\mu\nu}a^{\mu}a^{\nu} + a_{\mu;\nu}a^{\mu;\nu} = 0, \qquad A^{\lambda}A_{\lambda'} = 2a^{\lambda}a_{\lambda'}a_{\mu;\nu}a^{\mu;\nu}.$$

Il s'ensuit que l'équation du champ

$$R_{\mu\nu}a^{\mu}a^{\nu} = R_{44} = 0$$

a pour conséquence $A_\lambda = 0$: le vecteur isotrope a_λ est dans ce cas nécessairement orthogonal à une famille d'hypersurfaces. La relation (2,8) nous montre encore que dans ce cas les équations du champ $\underline{R}^{\mu}_{4} = 0$, $\mu \neq 4$ sont automatiquement satisfaites quand $R_{44} = 0$.

III. — DEUX VECTEURS DE KILLING

Un champ stationnaire à symétrie axiale possède deux vecteurs de Killing. Nous les appellerons a_μ et b_μ. Nous supposons que a_μ est du genre temps et que ses trajectoires sont des lignes ouvertes allant à l'infini. Par contre b_μ est du genre espace et ses trajectoires sont des lignes fermées entourant l'axe de symétrie. La relation

$$a^{\rho}b_{\rho;\mu} - b^{\rho}a_{\rho;\mu} = 0 \tag{3,1}$$

exprime le fait que le groupe d'isométries correspondant est abelien. Il existe alors des systèmes de coordonnées adaptés aux vecteurs a_μ et b_μ simultanément. Nous utiliserons systématiquement ces systèmes de coordonnées que nous choisissons de manière que

$$a^{\mu} = \delta^{\mu}_{4}, \quad b^{\mu} = \delta^{\mu}_{3}\,; \qquad g_{\mu\nu,4} = 0 = g_{\mu\nu,3}. \tag{3,2}$$

x^4 est alors la coordonnée du temps et x^3 la coordonnée angulaire autour de l'axe de symétrie.

Au vecteur a_λ correspond le vecteur A_λ défini dans le § II. De la même manière on définit un vecteur B_λ associé à b_λ :

$$B_{\lambda} = -\,\varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho}b^{\mu}\underline{b}^{\nu;\rho}, \qquad \underline{B}^{\lambda} = \varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}b_{\mu}b_{\nu;\rho}. \tag{3,3}$$

Mais il y a maintenant deux autres vecteurs associés au couple a_λ et b_λ :

$$\omega_{\lambda} = -\,\varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho}b^{\mu}\underline{a}^{\nu;\rho}, \qquad \underline{\omega}^{\lambda} = \varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}b_{\mu}a_{\nu;\rho}\,; \tag{3,4}$$

$$\Omega_{\lambda} = -\,\varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho}a^{\mu}\underline{b}^{\nu;\rho}, \qquad \underline{\Omega}^{\lambda} = \varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}a_{\mu}b_{\nu;\rho}. \tag{3,5}$$

Dans un système de coordonnées adapté d'après (3,2) on trouve immédiatement

$$(3,6)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}\mathrm{A}_\lambda = (-\underline{a}^{2;3}, -\underline{a}^{3;1}, -\underline{a}^{1;2}\,;\,0), & \frac{1}{2}\mathrm{B}_\lambda = (\underline{b}^{2;4}, -\underline{b}^{1;4}, 0\,;\,\underline{b}^{1;2}), \\ \frac{1}{2}\Omega_\lambda = (-\underline{b}^{2;3}, -\underline{b}^{3;1}, -\underline{b}^{1;2}\,;\,0), & \frac{1}{2}\omega_\lambda = (\underline{a}^{2;4}, -\underline{a}^{1;4}, 0\,;\,\underline{a}^{1;2}). \end{cases}$$

Des calculs analogues à ceux qui nous ont amené à (2,8) et (2,12) nous donnent les formules :

$$(3,7)\qquad \begin{cases} \mathrm{B}_{\lambda;\rho}\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho} = 2b^\rho(\underline{\mathrm{R}}^{\mu}_{\rho}b^\nu - \underline{\mathrm{R}}^{\nu}_{\rho}b^\mu), \\ \omega_{\lambda;\rho}\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho} = 2a^\rho(\underline{\mathrm{R}}^{\mu}_{\rho}b^\nu - \underline{\mathrm{R}}^{\nu}_{\rho}b^\mu), \\ \Omega_{\lambda;\rho}\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho} = 2b^\rho(\underline{\mathrm{R}}^{\mu}_{\rho}a^\nu - \underline{\mathrm{R}}^{\nu}_{\rho}a^\mu). \end{cases}$$

$$(3,8)\qquad \begin{cases} \underline{\mathrm{B}}^{\lambda}{}_{;\lambda} = \underline{\mathrm{B}}^{\lambda}{}_{,\lambda} = (\varepsilon\underline{b}\,\underline{b}) \equiv \varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho}\underline{b}^{\lambda;\mu}\underline{b}^{\nu;\rho}, \\ \underline{\omega}^{\lambda}{}_{;\lambda} = \underline{\omega}^{\lambda}{}_{,\lambda} = (\varepsilon\underline{a}\,\underline{b}) \equiv \varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho}\underline{a}^{\lambda;\mu}\underline{b}^{\nu;\rho} = \underline{\Omega}^{\lambda}{}_{;\lambda} = \underline{\Omega}^{\lambda}{}_{,\lambda}. \end{cases}$$

On trouve aussi deux autres relations analogues à (1,9) :

$$(3,9)\qquad \begin{cases} (bb)^{,\nu}{}_{;\nu} = 2\mathrm{R}_{\mu\nu}b^\mu b^\nu + 2b_{\mu;\nu}b^{\mu;\nu}, & (bb) \equiv b_\mu b^\mu\,; \\ (ab)^{,\nu}{}_{;\nu} = 2\mathrm{R}_{\mu\nu}a^\mu b^\nu + 2a_{\mu;\nu}b^{\mu;\nu}, & (ab) \equiv a_\mu b^\mu. \end{cases}$$

A côté de la relation (2,12 a) il y a maintenant 11 autres relations analogues. On trouve d'abord, en multipliant (2,11) par $b_\lambda b^\mu$ ou par $a_\lambda b^\mu$ et en posant toujours $f^{\lambda\nu} = \varphi^{\lambda\nu} = \underline{a}^{\lambda;\nu}$:

$$(3,10)\qquad \begin{cases} (bb)\,(\varepsilon\underline{a}\,\underline{a}) = 2(ab)_{,\nu}\underline{\omega}^\nu, \\ (ab)\,(\varepsilon\underline{a}\,\underline{a}) = 2(ab)_{,\nu}\underline{\mathrm{A}}^\nu = 2(aa)_{,\nu}\underline{\omega}^\nu. \end{cases}$$

On déduit 2 autres relations par un calcul similaire en partant de l'expression $(\varepsilon\underline{a}\,\underline{b})$:

$$(3,10\,a)\qquad \begin{cases} (aa)\,(\varepsilon\underline{a}\,\underline{b}) = (ab)_{,\nu}\underline{\mathrm{A}}^\nu + (aa)_{,\nu}\underline{\Omega}^\nu, \\ (ab)\,(\varepsilon\underline{a}\,\underline{b}) = (bb)_{,\nu}\underline{\mathrm{A}}^\nu + (ab)_{,\nu}\underline{\Omega}^\nu. \end{cases}$$

On obtient les 6 autres relations en échangeant partout dans (2,12 a), (3,10) et (3,10 a) a_μ et b_μ, A_μ et B_μ, ω_μ et Ω_μ.

Il y a enfin 10 équations de la forme (2,4) qu'on obtient en calculant les produits scalaires de deux quelconques des vecteurs A_μ, B_μ, ω_μ et Ω_μ. On trouve d'abord, à côté de (2,4) :

$$(3,11)\qquad \begin{cases} 2(ab)a_{\mu;\nu}a^{\mu;\nu} = (aa)_{,\mu}(ab)^{,\mu} - \mathrm{A}_\mu\omega^\mu, \\ 2(bb)a_{\mu;\nu}a^{\mu;\nu} = (ab)_{,\mu}(ab)^{,\mu} - \omega_\mu\omega^\mu, \\ 2(aa)a_{\mu;\nu}b^{\mu;\nu} = (aa)_{,\mu}(ab)^{,\mu} - \mathrm{A}_\mu\Omega^\mu. \end{cases}$$

On obtient 4 autres équations en échangeant dans (2,4) et (3,11) les vecteurs a_μ et b_μ, A_μ et B_μ, ω_μ et Ω_μ. Les deux dernières équations sont

$$(3,11\,a)\qquad 2(ab)a_{\mu;\nu}b^{\mu;\nu} = (ab)_{,\mu}(ab)^{,\mu} - A_\mu B^\mu = (aa)^{,\mu}(bb)_{,\mu} - \omega_\mu\Omega^\mu.$$

On peut déduire des équations précédentes quelques relations d'orthogonalité utiles. On obtient d'abord en combinant (2,12 *a*) et la deuxième de (3,10)

$$A^\nu \{ (ab)(aa)_{,\nu} - (aa)(ab)_{,\nu} \} = 0.$$

Dans le cas $(aa) \neq 0$ on peut écrire

$$(3,12)\qquad A^\nu \left\{ \frac{(ab)}{(aa)} \right\}_{,\nu} = 0.$$

En échangeant dans cette relation a_ν et A^ν avec b_ν et B^ν on trouve la seconde relation,

$$(3,12\,a)\qquad B^\nu \left\{ \frac{(ab)}{(bb)} \right\}_{,\nu} = 0.$$

D'autre part, on déduit des deux dernières équations (3,10)

$$A^\nu(ab)_{,\nu} = \omega^\nu(aa)_{,\nu}.$$

La première de (3,10 *a*) devient alors

$$(3,13)\qquad (aa)(\varepsilon\underline{a}\underline{b}) = (\underline{\omega}^\nu + \underline{\Omega}^\nu)(aa)_{,\nu}.$$

En échangeant dans cette relation les vecteurs a_μ, A_μ et ω_μ avec b_μ, B_μ et Ω_μ on trouve

$$(3,13\,a)\qquad (bb)(\varepsilon\underline{a}\underline{b}) = (\underline{\omega}^\nu + \underline{\Omega}^\nu)(bb)_{,\nu}.$$

De (3,13) et (3,13 *a*) on déduit, quand $(aa) \neq 0$,

$$(3,14)\qquad (\omega^\nu + \Omega^\nu) \left\{ \frac{(bb)}{(aa)} \right\}_{,\nu} = 0.$$

En combinant la première et la troisième de (3,10) nous trouvons

$$(3,15)\qquad \omega^\nu \{ (bb)(aa)_{,\nu} - (ab)(ab)_{,\nu} \} = 0.$$

L'échange de a_μ et ω_μ avec b_μ et Ω_μ nous donne

$$(3,16)\qquad \Omega^\nu \{ (aa)(bb)_{,\nu} - (ab)(ab)_{,\nu} \} = 0.$$

En combinant (3,15), (3,15 *a*) et (3,12 *a*) nous trouvons

$$(3,17)\qquad (\omega^\nu - \Omega^\nu)\delta_{,\nu} = 0, \qquad \delta \equiv (ab)^2 - (aa)(bb).$$

Par des calculs analogues on trouve

$$(3,18)\qquad \begin{cases} A^\nu \{ (bb)/(ab) \}_{,\nu} - B^\nu \{ (aa)/(ab) \}_{,\nu} = 0, \\ A^\nu \{ (bb)/(aa) \}_{,\nu} + (\omega^\nu + \Omega^\nu) \{ (ab)/(aa) \}_{,\nu} = 0, \\ B^\nu \{ (aa)/(bb) \}_{,\nu} + (\omega^\nu + \Omega^\nu) \{ (ab)/(bb) \}_{,\nu} = 0. \end{cases}$$

En combinant (3,18) avec (3,12), (3,12 *a*) et (3,14) on obtient de nouvelles relations d'orthogonalité :

$$(3,19)\qquad (A^\nu \pm B^\nu) \left\{ \frac{(aa) \mp (bb)}{(ab)} \right\}_{,\nu} = 0, \quad \text{etc.}$$

Une dernière relation d'orthogonalité est obtenue par combinaison des équations (2,4), (3,11) et (3,11 *a*) :

$$(3,20)\qquad (\omega^\nu - \Omega^\nu) \{ (ab)(\omega_\nu + \Omega_\nu) - (aa)B_\nu - (bb)A_\nu \} = 0.$$

Notons encore la relation importante

$$(3,21)\qquad (\underline{\omega}^\nu - \underline{\Omega}^\nu)_{;\,\nu} = (\underline{\omega}^\nu - \underline{\Omega}^\nu)_{,\nu} = 0$$

qui est une conséquence immédiate des deux dernières équations (3,8).

Il est à souligner que toutes les formules de ce chapitre sont indépendantes des équations du champ (1). Quand ces équations sont satisfaites il y a d'abord une simplification de (1,9) et (3,9). D'autre part, les relations (3,7) montrent que les vecteurs B_μ, ω_μ et Ω_μ sont aussi des gradients, comme A_μ. Il y a par conséquent 3 nouveaux scalaires B, ω et Ω tels que

$$(3,22)\qquad B_\mu = B_{,\mu}, \qquad \omega_\mu = \omega_{,\mu}, \qquad \Omega_\mu = \Omega_{,\mu}.$$

Nous reviendrons sur ce point dans le prochain chapitre.

IV. — UN THÉORÈME VALABLE POUR LES CHAMPS NON DÉGÉNÉRÉS

Nous allons utiliser dans la suite des systèmes de coordonnées adaptés avec le choix indiqué dans (3,2). Les transformations permises contiennent alors 4 fonctions arbitraires de 2 variables :

$$(4,1)\qquad \begin{cases} x^i = f^i(x'^k), & i, k, \ldots = 1, 2, \\ x^a = x'^a + f^a(x'^k), & a, b, \ldots = 3, 4. \end{cases}$$

On vérifie immédiatement que ces transformations laissent les composantes g_{ab} invariantes. Le déterminant

$$\delta = (g_{34})^2 - g_{33}g_{44} \tag{4,2}$$

sera donc aussi invariant.

Nous dirons que le champ est non dégénéré si $\delta \neq 0$. Ce cas est important au point de vue physique parce qu'il contient tous les champs satisfaisant à la condition à l'infini. En effet, cette condition prend dans les systèmes de coordonnées considérés la forme

$$r \to \infty: \quad g_{33} \to -\rho^2, \qquad g_{44} \to 1, \qquad g_{34} \to \frac{c\rho^2}{r^3} \to 0, \tag{4,3}$$

ρ étant la distance à l'axe de symétrie (qu'on pourrait prendre comme coordonnée x^1). Par conséquent $\delta \to \rho^2 > 0$ (1).

Pour le cas non dégénéré, $\delta \neq 0$, nous allons démontrer un théorème utile au point de vue pratique. Nous y arriverons en posant la question suivante. Quelles sont les conditions pour qu'il soit possible d'annuler, par des transformations du type (4,1), les composantes g_{ia} ? La condition

$$g_{ia} = 0 \qquad (i = 1, 2, \quad a = 3, 4) \tag{4,4}$$

est pratiquement importante : quand elle n'est pas satisfaite les équations du champ (1) contiennent des expressions trop longues. C'est pour cette raison que la condition (4,4) a été utilisée comme hypothèse restrictive dans presque tous les travaux sur les champs extérieurs stationnaires à symétrie axiale.

La formule de transformation du tenseur métrique,

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma}, \tag{4,5}$$

montre que les fonctions $f^i(x'^k)$ sont sans importance quand on cherche à imposer la condition (4,4). Il est par conséquent utile de simplifier en prenant $f^i(x'^k) = x'^i$. On trouve alors de (4,5)

$$g'_{ia} = g_{ia} + g_{ab}f^b{}_{,i}. \tag{4,5 a}$$

Les 4 équations

$$g'_{ia} = 0 \tag{4,6}$$

(1) On a $\delta = 0$ pour $\rho = 0$, c'est-à-dire sur l'axe de symétrie. Mais là le système de coordonnées devient singulier dans tous les cas.

sont des équations linéaires pour les 4 dérivées $f^b{}_{,i}$. La solution est

$$(4,7)\qquad \begin{cases} f^3{}_{,1}\delta = g_{31}g_{44} - g_{14}g_{34}, & f^4{}_{,1}\delta = g_{41}g_{33} - g_{13}g_{34}, \\ f^3{}_{,2}\delta = g_{32}g_{44} - g_{24}g_{34}, & f^4{}_{,2}\delta = g_{42}g_{33} - g_{23}g_{34}. \end{cases}$$

Il sera possible d'obtenir (4,6), c'est-à-dire d'imposer la condition (4,4), si les deux conditions d'intégrabilité

$$(4,7\,a)\qquad (f^3{}_{,1})_{,2} = (f^3{}_{,2})_{,1}, \qquad (f^4{}_{,1})_{,2} = (f^4{}_{,2})_{,1}$$

sont satisfaites. En introduisant (4,7) dans (4,7 *a*) on obtient

$$(4,8)\qquad \{\, (g_{31}g_{44} - g_{14}g_{34})/\delta \,\}_{,2} = \{\, (g_{32}g_{44} - g_{24}g_{34})/\delta \,\}_{,1},$$

$$(4,8\,a)\qquad \{\, (g_{41}g_{33} - g_{13}g_{34})/\delta \,\}_{,2} = \{\, (g_{42}g_{33} - g_{23}g_{34})/\delta \,\}_{,1}.$$

Formons encore les combinaisons $g_{a3}\,(4,8) + g_{a4}\,(4,8\,a)$. La première, correspondant à $a = 3$, donne

$$(4,9)\qquad \begin{cases} \delta(g_{23,1} - g_{31,2}) + (g_{23}g_{44} - g_{24}g_{34})g_{33,1} + (g_{33}g_{24} - g_{23}g_{34})g_{34,1} \\ \qquad + (g_{34}g_{14} - g_{31}g_{44})g_{33,2} + (g_{31}g_{34} - g_{33}g_{14})g_{34,2} = 0. \end{cases}$$

En échangeant dans cette relation les indices 3 et 4 on trouve l'équation correspondant à $a = 4$.

Ces deux équations sont identiques aux relations

$$(4,10)\qquad \underline{b}^{1;2} = 0 = \underline{a}^{1;2}.$$

On le démontre par un calcul direct :

$$2\sqrt{-g}\,\underline{b}^{1;2} = 2\sqrt{-g}\,\underline{g}^{2\rho}b^1{}_{;\rho} = 2\sqrt{-g}\,\underline{g}^{2\rho}\Gamma^1_{\rho3} = (\underline{g}^{1\rho}\underline{g}^{2\sigma} - \underline{g}^{1\sigma}\underline{g}^{2\rho})g_{\rho3,\sigma}.$$

A cause de (3,2) il suffit de prendre $\sigma = i = 1,2$. Le résultat final est

$$(4,11)\qquad \begin{cases} 2\sqrt{-g}\,\underline{b}^{1;2} = \{\underline{g}^{11}\underline{g}^{22} - (\underline{g}^{12})^2\}(g_{31,2} - g_{23,1}) + (\underline{g}^{12}\underline{g}^{14} - \underline{g}^{11}\underline{g}^{24})g_{34,1} \\ + (\underline{g}^{14}\underline{g}^{22} - \underline{g}^{12}\underline{g}^{24})g_{34,2} + (\underline{g}^{12}\underline{g}^{13} - \underline{g}^{11}\underline{g}^{23})g_{33,1} + (\underline{g}^{13}\underline{g}^{22} - \underline{g}^{12}\underline{g}^{23})g_{33,2}. \end{cases}$$

En tenant compte de la relation générale

$$(4,12)\qquad \underline{g}^{\lambda\rho}\underline{g}^{\mu\sigma} - \underline{g}^{\lambda\sigma}\underline{g}^{\mu\rho} = -(g_{\lambda'\rho'}g_{\mu'\sigma'} - g_{\lambda'\sigma'}g_{\mu'\rho'}), \qquad \varepsilon^{\lambda\mu\lambda'\mu'} = 1 = \varepsilon^{\rho\sigma\rho'\sigma'},$$

on vérifie immédiatement que la première des relations (4,10) est identique à (4,9). Il suffit de remarquer que l'expression qu'on trouve pour $\underline{a}^{1;2}$ est déduite de celle donnant $\underline{b}^{1;2}$ par simple échange des indices 3 et 4 pour voir que les relations (4,10) sont équivalentes aux conditions d'intégrabilité (4,8) et (4,8 *a*).

Considérons maintenant la relation (2,1). Le système de coordonnées étant adapté, on aura d'après (3,2)

$$A_{\lambda,3} = 0.$$

D'autre part, on déduit de (2,8), en supposant que les équations du champ (1) sont satisfaites :

$$A_{\lambda,3} = A_{3,\lambda} = 0.$$

Donc $A_3 = \text{const.} \equiv c$, c'est-à-dire d'après (3,6)

$$\underline{a}^{1;2} = c. \tag{4,13}$$

Nous démontrerons encore que $c = 0$. En effet, considérons une ligne paramétrique de x^3. C'est une ligne fermée entourant l'axe de symétrie. Le calcul de la circulation du vecteur A_λ sur cette ligne est très simple et donne

$$\oint A_\lambda dx^\lambda = \oint A_3 dx^3 = 2\pi c.$$

Par conséquent, si $c \neq 0$, les équations

$$A_{i,k} - A_{k,i} = 0, \qquad i, k = 1, 2, 3,$$

ne seront pas satisfaites sur l'axe de symétrie. C'est-à-dire, d'après l'équation (2,8), les équations $R_4^\mu = 0$ ne seront pas satisfaites sur l'axe de symétrie. En répétant exactement le même raisonnement pour Ω_λ on démontre à l'aide des équations (3,6) et (3,7), que

$$\underline{b}^{1;2} = \text{const} \equiv c'$$

et que dans le cas $c' \neq 0$ les équations $R_3^\mu = 0$ ne seront pas satisfaites sur l'axe de symétrie.

Il s'ensuit que pour tous les champs qui ont des sources d'extension finie, c'est-à-dire qui satisfont aux équations du champ (1) partout en dehors d'une région finie de l'espace à 3 dimensions, on aura $c = c' = 0$. Ceci étant équivalent aux relations (4,8) et (4,8 *a*), nous avons le théorème : La condition (4,4) peut être imposée à tout champ stationnaire à symétrie axiale qui satisfait aux équations du champ (1) partout en dehors d'un tube d'univers de section finie. On peut donc se limiter à l'étude des champs satisfaisant à (4,4) sans que ceci signifie une restriction physique. Nous appellerons dans la suite *forme canonique* de $g_{\mu\nu}$ la forme satisfaisant à (4,4).

Notons que la solution de Kerr, qui a été déterminée dans une forme non canonique, est en accord avec ce théorème. Il y a des transformations de coordonnées assez simples qui la ramènent à la forme canonique [2].

V. — FORMULES POUR LA FORME CANONIQUE

Nous supposerons dans la suite que le système de coordonnées utilisé est tel que le tenseur métrique prend la forme canonique. Posons

(5,1) $$\underline{g}^{11} = \alpha, \qquad \underline{g}^{22} = \beta, \qquad \underline{g}^{12} = \gamma\,;$$

(5,2) $$g_{33} = -\,l, \qquad g_{44} = f, \qquad g_{34} = -\,m.$$

On a alors d'après (4,2) et (4,12)

(5,3) $$\delta = m^2 + lf = \alpha\beta - \gamma^2.$$

La condition (4,4) entraîne la relation

$$g^{ia} = 0.$$

Il s'ensuit que les relations (4,10) sont satisfaites automatiquement et par conséquent les vecteurs A_μ, B_μ, ω_μ et Ω_μ se réduisent, d'après (3,6), aux composantes A_i, B_i, ω_i et $\Omega_i\,(i = 1, 2)$. Pour trouver ces composantes il suffit de calculer $\underline{a}^{i;a}$ et $\underline{b}^{i;a}$. On a :

(5,4) $$\left\{\begin{aligned} 2\underline{a}^{i;a} &= 2\underline{g}^{ab}\Gamma^i_{b4} = -\,\underline{g}^{ik}g^{ab}g_{4b,k},\\ 2\underline{b}^{i;a} &= 2\underline{g}^{ab}\Gamma^i_{b3} = -\,\underline{g}^{ik}g^{ab}g_{3b,k}.\end{aligned}\right.$$

La première des équations (3,6) nous donne, si nous tenons compte de (5,1) et (5,2) :

(5,5 a) $$\left\{\begin{aligned} A_1 &= \gamma(fm_{,1} - mf_{,1})/\delta + \beta(fm_{,2} - mf_{,2})/\delta,\\ A_2 &= -\,\alpha(fm_{,1} - mf_{,1})/\delta - \gamma(fm_{,2} - mf_{,2})/\delta.\end{aligned}\right.$$

Des formules analogues sont valables pour B_i, ω_i et Ω_i.

---

[2] Une telle transformation est la suivante :

$r = r', \qquad \theta = \theta'\,;$

$\varphi = \varphi' - (a/\sqrt{a^2 - m^2})\ \mathrm{arctg}\ \{\,(r' - m)/\sqrt{a^2 - m^2}\,\}\,;$

$t = t' + (2m^2/\sqrt{a^2 - m^2})\ \mathrm{arctg}\ \{\,(r' - m)/\sqrt{a^2 - m^2}\,\} + m\lg(r'^2 - 2mr' + a^2).$

Pour écrire ces équations sous une forme plus condensée, posons

$$g^{ik}(\ldots)_{,k} \equiv (\ldots)^{,i}. \tag{5,6}$$

Nous trouvons alors

$$A_1 = f^2\left(\frac{m}{f}\right)^{,2}\Big/\delta, \qquad A_2 = -f^2\left(\frac{m}{f}\right)^{,1}\Big/\delta\,; \tag{5,7}$$

$$B_1 = l^2\left(\frac{m}{l}\right)^{,2}\Big/\delta, \qquad B_2 = -l^2\left(\frac{m}{l}\right)^{,1}\Big/\delta. \tag{5,8}$$

Les équations pour ω_i et Ω_i se simplifient si on considère les combinaisons $\omega_i \pm \Omega_i$:

$$\omega_1 + \Omega_1 = f^2(l/f)^{,2}/\delta, \qquad \omega_2 + \Omega_2 = -f^2(l/f)^{,1}/\delta\,; \tag{5,9}$$

$$\omega_1 - \Omega_1 = -(\lg \delta)^{,2}, \qquad \omega_2 - \Omega_2 = (\lg \delta)^{,1}. \tag{5,10}$$

On retrouve, à l'aide de ces équations, toutes les relations d'orthogonalité du § III. Par exemple on déduit de (5,10)

$$(\omega_i - \Omega_i)(\lg \delta)^{,i} \equiv g^{ik}(\omega_i - \Omega_i)\delta_{,k}/\delta = 0,$$

ce qui n'est que la relation (3,17). D'autre part, on déduit directement de (5,7), (5,8) et (5,9)

$$lA_i - fB_i - m(\omega_i + \Omega_i) = 0, \tag{5,11}$$

ce qui montre que la relation (3,20) est satisfaite trivialement quand on utilise la forme canonique. On vérifie aussi directement les relations (3,18).

Pour tenir compte des équations du champ $R_{\mu a} = 0$ ou $R^{\mu}_{a} = 0$, il suffit, d'après (2,8) et (3,7), de demander que les vecteurs A_i, B_i et $\omega_i \pm \Omega_i$ soient des gradients. La condition d'intégrabilité de (5,10),

$$(\omega_1 - \Omega_1)_{,2} = (\omega_2 - \Omega_2)_{,1} = (\omega - \Omega)_{,12},$$

donne alors une première équation du champ particulièrement simple :

$$(\lg \delta)^{,i}_{,i} \equiv \{ g^{ik}(\lg \delta)_{,i} \}_{,k} = 0. \tag{5,12}$$

On obtient 3 autres équations comme conditions d'intégrabilité des relations (5,7), (5,8) et (5,9) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \{ g^{ik} f^2(m/f)_{,i}/\delta \}_{,k} = \{ g^{ik} l^2(m/l)_{,i}/\delta \}_{,k} = 0, \\ \{ g^{ik} f^2(l/f)_{,i}/\delta \}_{,k} = 0. \end{array} \right. \tag{5,13}$$

On vérifie directement que seulement deux de ces équations sont indépendantes. Le nombre total des équations est donc 3. Ceci correspond au fait que, quand $g_{\mu\nu}$ a la forme canonique, les 4 équations du champ $R_{ia} = 0$ sont satisfaites automatiquement.

On peut résoudre les équations (5,10) par rapport aux dérivées $\delta_{,i}$:

$$\delta_{,1} = (\omega - \Omega)^{,2}, \qquad \delta_{,2} = -(\omega - \Omega)^{,1}.$$

La condition d'intégrabilité $\delta_{,1,2} = \delta_{,2,1}$ donne une équation pour $\omega - \Omega$:

$$(5,14) \qquad (\omega - \Omega)^{,i}_{\ ,i} \equiv \{ \underline{g}^{ik}(\omega - \Omega)_{,i} \}_{,k} = 0.$$

La quantité $\omega - \Omega$ satisfait donc aussi à l'équation généralisée de Laplace, comme la fonction lg δ. Rappelons encore que d'après (3,17) ces deux fonctions sont orthogonales. En partant des équations (5,7), (5,8) et (5,9) on trouve par un calcul analogue des équations pour les scalaires A, B et $\omega + \Omega$:

$$(5,15) \qquad (\underline{g}^{ik}A_{,i}/f^2)_{,k} = (\underline{g}^{ik}B_{,i}/l^2)_{,k} = \{ \underline{g}^{ik}(\omega + \Omega)_{,i}/f^2 \}_{,k} = 0.$$

Ici aussi on vérifie que seulement deux de ces équations sont indépendantes.

Notons enfin que la fonction

$$(5,16) \qquad \varphi = \omega + \Omega + \frac{f}{m}B - \frac{l}{m}A,$$

dont nous aurons besoin dans le § VII, est orthogonale à B/A :

$$(5,17) \qquad \varphi_{,i}(B/A)^{,i} = 0.$$

On démontre cette propriété sans difficulté en utilisant (5,11) et (3,18).

VI. — LA DÉTERMINATION COMPLÈTE DE $g_{\mu\nu}$. LES ÉQUATIONS DU CHAMP $R_{ik} = 0$

Nous avons considéré jusqu'à présent les 6 quantités g^{ik} et g_{ab} et les 4 scalaires A, B et $\omega \pm \Omega$. Les 6 premières quantités ne sont pas indépendantes à cause de la relation (5,3). Pour ces $6 - 1 = 5$ quantités indépendantes les équations du champ $R_{\mu a} = 0$ nous ont donné 3 équations. En se souvenant que ces quantités contiennent 2 fonctions arbitraires on voit que les 3 équations obtenues sont suffisantes. Nous montrerons d'ailleurs directement que les autres équations du champ, $R_{ik} = 0$ ou $\underline{R}^i_k = 0$, ont un caractère différent. Les scalaires A, B et $\omega \pm \Omega$ ne jouent pour le moment qu'un rôle auxiliaire. On peut les calculer immédiatement, quand $\underline{g}^{ik}$ et g_{ab} sont connus, en utilisant les équations (5,7) à (5,10).

Dans sa forme canonique la métrique $g_{\mu\nu}$ contient 6 quantités indépendantes. On a donc besoin d'une quantité supplémentaire. Le choix le plus commode est la quantité $\sqrt{-g}$. En effet, des quantités $\underline{g}^{ik}$ et $\sqrt{-g}$ on déduit immédiatement les composantes g^{ik} et par inversion g_{ik} :

$$g_{im}g^{km} = \delta_i^k \qquad (i,\, k,\, m = 1,\, 2).$$

Les composantes g_{ik} et g_{ab} déterminent, à cause de (4,4), la métrique $g_{\mu\nu}$.

Considérons maintenant les équations $\underline{R}_k^i = 0$. La formule générale

$$\text{(6,1)} \qquad \underline{R}_\nu^\mu = \underline{g}^{\mu\rho}{}_{,\nu\rho} + (\underline{g}^{\rho\sigma}\Gamma_{\rho\nu}^\mu)_{,\sigma} - \underline{g}^{\mu\rho}{}_{,\rho}\Gamma_{\sigma\nu}^\sigma - \underline{g}^{\rho\sigma}\Gamma_{\rho\nu}^\lambda\Gamma_{\sigma\lambda}^\mu$$

nous donne, compte tenu de (3,2),

$$\text{(6,1 a)} \qquad \underline{R}_k^i = \underline{g}^{il}{}_{,kl} + (\underline{g}^{lm}\Gamma_{lk}^i)_{,m} - \underline{g}^{il}{}_{,l}\Gamma_{\sigma k}^\sigma - \underline{g}^{\rho\sigma}\Gamma_{\rho k}^\lambda\Gamma_{\sigma\lambda}^i.$$

Par un calcul élémentaire on trouve finalement, avec $\bar{g}_{km} \equiv g_{km}/\sqrt{-g}$:

$$\text{(6,2)} \quad \left\{ \begin{aligned} \underline{R}_k^i = {} & \frac{1}{2}\underline{g}^{il}{}_{,kl} + \frac{1}{2}(\underline{g}^{il}\underline{g}^{mn}{}_{,l}\bar{g}_{km} - \underline{g}^{il}{}_{,m}\underline{g}^{mn}\bar{g}_{kl})_{,n} - \frac{1}{2}\underline{g}^{il}{}_{,m}\underline{g}^{mn}{}_{,k}\bar{g}_{ln} \\ & - \frac{1}{4}\underline{g}^{il}(\underline{g}^{mn}{}_{,k}\bar{g}_{mn,l} + g^{ab}{}_{,k}g_{ab,l}) + \frac{1}{2}\delta_k^i\,\{\,\underline{g}^{lm}(lg\sqrt{-g})_{,l}\,\}_{,m} \\ & - \frac{1}{4}\underline{g}^{il}\,\{\,\delta_{,l}(lg\sqrt{-g})_{,k} + \delta_{,k}(lg\sqrt{-g})_{,l}\,\}\,/\delta. \end{aligned} \right.$$

Le second membre de cette équation contient les quantités $\underline{g}^{ik}$, g_{ab} (ainsi que leurs inverses $\bar{g}_{ik}$, g^{ab}) et $\sqrt{-g}$. Par conséquent les équations du champ $\underline{R}_k^i = 0$ sont des équations pour l'inconnue $\sqrt{-g}$ quand les $\underline{g}^{ik}$ et g_{ab} sont connus. Il y a 3 équations linéairement indépendantes, par exemple

$$\text{(6,3)} \qquad \underline{R}_2^1 = 0, \qquad \underline{R}_1^1 - \underline{R}_2^2 = 0, \qquad \underline{R}_1^1 + \underline{R}_2^2 = 0.$$

Les 2 premières équations ne contiennent que les dérivées premières de $\sqrt{-g}$ linéairement. On peut donc résoudre par rapport à $(\sqrt{-g})_{,1}$ et $(\sqrt{-g})_{,2}$. Par conséquent, si ces équations sont compatibles, c'est-à-dire si la condition d'intégrabilité $(\sqrt{-g})_{,1,2} = (\sqrt{-g})_{,2,1}$ est satisfaite et si on connaît déjà les quantités $\underline{g}^{ik}$ et g_{ab}, on peut déterminer la quantité $\sqrt{-g}$ par des intégrations élémentaires.

La compatibilité des équations (6,3) se démontre à l'aide de l'identité

$$\left(\underline{R}_\mu^\nu - \frac{1}{2}\delta_\mu^\nu\underline{R}\right)_{;\nu} = 0.$$

La démonstration se simplifie quand on utilise un système de coordonnées de Weyl, caractérisé par les propriétés

$$\underline{g}^{11} = \underline{g}^{22} \equiv \alpha, \qquad \underline{g}^{12} = 0. \tag{6,4}$$

L'équation (5,12) donne dans ce cas

$$\alpha_{,11} + \alpha_{,22} = 0. \tag{6,4 a}$$

La solution la plus simple est $\alpha = x^1$. C'est avec cette forme de $\underline{g}^{ik}$ qu'on a travaillé presque exclusivement dans le passé. Dans un tel système de coordonnées on a montré [*4*] que les 2 premières équations (6,3) sont compatibles, quand les équations $\mathrm{R}_b^a = 0$ (a, b = 3,4) sont satisfaites et que la troisième (6,3) est alors une conséquence des deux premières. Les équations (6,2) ne servent donc qu'à la détermination de $\sqrt{-g}$, quand $\underline{g}^{ik}$ et g_{ab} sont connus. On voit que la partie essentielle de notre problème est la détermination de ces dernières quantités à l'aide des équations $\underline{\mathrm{R}}_b^a = 0$.

Notons encore que les autres composantes $\underline{\mathrm{R}}_\mu^\nu = 0$ sont données par des expressions particulièrement simples. En effet, on déduit de (6,1) ou de (1,5) et de l'équation analogue pour le vecteur de Killing b_μ :

$$\underline{\mathrm{R}}_b^a = \frac{1}{2}(\underline{g}^{ik} g^{ac} g_{bc,i})_{,k}\,; \qquad \underline{\mathrm{R}}_a^i = 0 = \underline{\mathrm{R}}_i^a. \tag{6,5}$$

Les équations (6,5) sont équivalentes à (5,12) et (5,13).

VII. — DEUX FORMES DES ÉQUATIONS DU CHAMP $\mathrm{R}_b^a = 0$

Posons

$$f/m = \chi(x^i), \qquad l/m = \psi(x^i). \tag{7,1}$$

Nous supposerons que

$$\Delta \equiv \chi_{,1}\psi_{,2} - \chi_{,2}\psi_{,1} \neq 0. \tag{7,2}$$

Notons que la condition (7,2) est satisfaite par les champs qui vérifient la condition à l'infini (4,3).

Considérons les équations (5,7) et (5,8). A cause de (7,2) on peut résoudre ces équations par rapport à α, β et γ. On trouve

$$\begin{cases} \alpha\Delta = \delta(\mathrm{A}_{,2}\psi_{,2} - \mathrm{B}_{,2}\chi_{,2})/m^2, \\ \beta\Delta = \delta(\mathrm{A}_{,1}\psi_{,1} - \mathrm{B}_{,1}\chi_{,1})/m^2, \\ \gamma\Delta = \delta(-\mathrm{A}_{,1}\psi_{,2} + \mathrm{B}_{,1}\chi_{,2})/m^2 = \delta(-\mathrm{A}_{,2}\psi_{,1} + \mathrm{B}_{,2}\chi_{,1})/m^2. \end{cases} \tag{7,3}$$

Les deux valeurs différentes de γ nous amènent à la condition

$$(-A\psi_{,2}+B\chi_{,2})_{,1}=(-A\psi_{,1}+B\chi_{,1})_{,2}.$$

Par conséquent il existe une fonction φ telle que

$$(7,4)\qquad -A\psi_{,2}+B\chi_{,2}=\varphi_{,2},\qquad -A\psi_{,1}+B\chi_{,1}=\varphi_{,1}.$$

Cette fonction n'est d'ailleurs que la fonction définie par (5,16). On le voit immédiatement en différentiant (5,16) et en tenant compte de (5,11). Avec (7,4) les relations (7,3) prennent la forme

$$(7,5)\qquad \left\{\begin{aligned} \alpha\Delta &= \delta(-\varphi_{,22}-A\psi_{,22}+B\chi_{,22})/m^2,\\ \beta\Delta &= \delta(-\varphi_{,11}-A\psi_{,11}+B\chi_{,11})/m^2,\\ \gamma\Delta &= \delta(\varphi_{,12}+A\psi_{,12}-B\chi_{,12})/m^2. \end{aligned}\right.$$

D'autre part, les équations (5,9) nous donnent immédiatement

$$(\omega+\Omega)_{,1}=(\psi A-\chi B+\varphi)_{,1},\qquad (\omega+\Omega)_{,2}=(\psi A-\chi B+\varphi)_{,2}.$$

Ces équations seront donc satisfaites si on prend pour $\omega+\Omega$ la valeur déduite de (5,16) :

$$(7,6)\qquad \omega+\Omega=\varphi+\psi A-\chi B.$$

Les équations (5,3) et (7,1) nous donnent

$$(7,7)\qquad \delta/m^2=1+lf/m^2=1+\chi\psi.$$

On peut aussi résoudre les équations (7,4) par rapport à A, B :

$$(7,8)\qquad A=(\varphi_{,1}\chi_{,2}-\varphi_{,2}\chi_{,1})/\Delta,\qquad B=(\varphi_{,1}\psi_{,2}-\varphi_{,2}\psi_{,1})/\Delta.$$

Toutes les quantités qui nous intéressent sont maintenant exprimées à l'aide des fonctions φ, χ et ψ. En effet, les relations (7,5) nous donnent, avec (7,8), les quantités α, β et γ. La deuxième des relations (5,3) nous donne alors δ et les quantités l, f et m sont déduites de (7,1) et (7,7). Les quantités A, B et $\omega+\Omega$ sont données par (7,8) et (7,6). En même temps les équations du champ (5,13) sont satisfaites. Il ne nous reste à calculer que la quantité $\omega-\Omega$, c'est-à-dire il nous reste à satisfaire l'équation (5,12) : Un système de fonctions φ, χ et ψ satisfaisant à cette équation déterminera une solution des équations du champ. Le fait que nous avons finalement une seule équation pour trois fonctions correspond à la covariance des équations du champ. Dans le cas que nous considérons il y a deux fonctions arbitraires.

D'après ce qui précède on a le droit d'imposer deux conditions choisies arbitrairement sur les trois fonctions φ, χ et ψ. Nous ne savons pas actuellement quel serait le choix le plus avantageux au point de vue pratique. Notons ici seulement un autre aspect du problème. On pourrait choisir arbitrairement les fonctions χ et ψ, en posant par exemple

$$\chi = x^1, \qquad \psi = x^2. \tag{7,9}$$

On trouve alors

$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha = -(1 + x^1 x^2)\varphi_{,22}, & \beta = -(1 + x^1 x^2)\varphi_{,11}, \\ \gamma = (1 + x^1 x^2)\varphi_{,12}\,; & \delta = (1 + x^1 x^2)^2(\varphi_{,11}\varphi_{,22} - \varphi_{,12}{}^2). \end{array} \right. \tag{7,10}$$

De cette manière nous sommes finalement amenés à une équation pour la fonction φ : C'est l'équation (5,12) quand on y introduit les valeurs (7,10). Chaque solution de cette équation déterminera une solution des équations du champ. Mais cette équation est assez compliquée et il ne semble pas qu'elle pourra être pratiquement utile. On aura plutôt à chercher un autre choix plus favorable des deux conditions arbitraires qui sont à notre disposition.

A priori, il semble plus avantageux de prendre deux fonctions X et Y « orthogonales »,

$$\underline{g}^{ik}\mathrm{X}_{,i}\mathrm{Y}_{,k} = 0, \tag{7,11}$$

et choisir alors le système de coordonnées de manière que

$$\mathrm{X} = x^1, \qquad \mathrm{Y} = x^2.$$

La relation (7,11) se réduit dans ce cas à $\gamma = 0$. Nous prendrons comme exemple

$$1/\chi = x^1, \qquad \mathrm{A} = x^2, \tag{7,12}$$

les fonctions $1/\chi$ et A étant orthogonales d'après (3,12). On trouve alors de (5,7), à côté de $\gamma = 0$:

$$m^2\alpha/\delta = -(x^1)^2. \tag{7,13}$$

Les relations (5,9) donnent

$$\left\{ \begin{array}{l} (\omega + \Omega)_{,1} = (m^2\beta/\delta)\chi\psi_{,2}, \\ (\omega + \Omega)_{,2} = -(m^2\alpha/\delta)\chi^2(\psi/\chi)_{,1}. \end{array} \right. \tag{7,13 a}$$

C'est-à-dire, d'après (7,12) et (7,13)

$$(\omega + \Omega)_{,2} = (\psi/\chi)_{,1}.$$

Cette relation signifie qu'il y a une fonction Φ telle que

$$\omega + \Omega = \Phi_{,1}, \qquad \psi = \chi\Phi_{,2}. \tag{7,14}$$

L'équation (5,8) donne finalement

(7,15) $B_{,1} = - x^1\Phi_{,11}, \qquad B_{,2} = - x^1\Phi_{,12} + \Phi_{,2} \rightarrow B = \Phi - x^1\Phi_{,1}.$

En introduisant (7,12), (7,14) et (7,15) dans (5,16) on établit la relation entre φ et Φ :

(7,16) $$\varphi = (\Phi - x^2\Phi_{,2})/x^1.$$

En tenant compte de (7,7),

(7,17) $$\delta/m^2 = 1 + \chi\psi = 1 + \Phi_{,2}/(x^1)^2,$$

on déduit de (7,13) et (7,13 *a*)

(7,18) $$\alpha = -(x^1)^2 - \Phi_{,2}, \qquad \beta = -\alpha\Phi_{,11}/\Phi_{,22}; \qquad \gamma = 0.$$

L'équation (5,12) prend, dans le cas $\gamma = 0$, la forme plus simple

(7,19) $$\{ \alpha_{,1} + (\alpha/\beta)\beta_{,1} \}_{,1} + \{ (\beta/\alpha)\alpha_{,2} + \beta_{,2} \}_{,2} = 0.$$

En introduisant dans (7,19) les expressions (7,18) on arrive à une équation unique pour Φ. Cette équation est moins compliquée que celle qu'on aurait trouvé pour φ, mais encore trop compliquée pour qu'on puisse la discuter d'une façon générale.

Ajoutons qu'on peut aussi parvenir à un système de deux équations moins compliquées pour deux fonctions inconnues. On y parvient en éliminant la fonction Φ entre les relations (7,18). Le résultat de cette opération est l'équation

(7,20) $$\alpha_{,11} + 2 + \{ (\beta/\alpha)\alpha_{,2} \}_{,2} = 0.$$

En combinant (7,20) avec (7,19) on trouve une seconde équation similaire :

(7,20 *a*) $$\{ (\alpha/\beta)\beta_{,1} \}_{,1} - 2 + \beta_{,22} = 0.$$

Chaque solution de ces deux équations détermine une solution des équations du champ.

En résumé il y a une grande multiplicité de formes possibles des équations du champ. Il est à espérer qu'il y en a quelques-unes assez simples pour nous permettre de nous rapprocher effectivement de la solution du problème.

VIII. — QUELQUES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS DU CHAMP

Les solutions décrites dans ce chapitre ont été obtenues par un examen plutôt superficiel de quelques-unes des formes possibles des équations du champ. Une discussion systématique n'a pas encore été entreprise. De même la question de la signification physique des solutions suivantes n'a pas été discutée.

1. Nous arrivons à une solution possédant un degré de généralité remarquable en partant de la condition supplémentaire

$$A\psi - B\chi = 0. \tag{8,1}$$

La relation suivante peut être déduite immédiatement de (7,4) :

$$A\psi - B\chi = (\psi^2/\Delta) \{ \varphi_{,1}(\chi/\psi)_{,2} - \varphi_{,2}(\chi/\psi)_{,1} \}. \tag{8,2}$$

Cette relation montre que la condition (8,1) est équivalente à

$$\varphi = \varphi(\chi/\psi). \tag{8,3}$$

Un calcul direct montre maintenant que l'équation du champ (5,12), que nous avons encore à satisfaire, est vérifiée automatiquement par une fonction de la forme (8,3) quelconque. Pour simplifier les calculs il est commode de fixer le système de coordonnées par le choix (7,9). Les relations (7,10) nous donnent alors avec (8,3) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha = -(1+x^1x^2)\varphi''/(x^1)^2, & \beta = -(1+x^1x^2)x^2(x^2\varphi''+2x^1\varphi')/(x^1)^4, \\ \gamma = -(1+x^1x^2)(x^2\varphi''+x^1\varphi')/(x^1)^3\,; & \delta = -(1+x^1x^2)^2\varphi'^2/(x^1)^4. \end{array} \right. \tag{8,4}$$

On vérifie immédiatement que l'équation (5,12) est satisfaite pour chaque fonction φ. Nous avons ainsi une solution des équations du champ dépendant d'une fonction arbitraire d'une variable. Ajoutons qu'il s'agit d'une fonction arbitraire essentielle, les deux fonctions arbitraires correspondant aux transformations de coordonnées étant déjà fixées par le choix (7,9).

On remarquera que ce champ a d'après (8,4) $\delta < 0$ [3]. Par conséquent l'une des coordonnées x^i est du genre espace et l'autre du genre temps. Il ne s'agit pas d'un champ stationnaire à symétrie axiale mais d'une solution cylindrique non stationnaire. C'est une solution analogue à celle d'Einstein-Rosen, mais différente de celle-ci parce que la métrique est ici non diagonale.

Nous indiquerons une autre propriété de cette solution. On a d'après (7,6), (8,1) et (8,3)

$$\omega + \Omega = \varphi(\chi/\psi). \tag{8,5}$$

En remarquant que d'après (7,1) $\chi/\psi = f/l$ on déduit de (3,14)

$$\underline{g}^{ik}(f/l)_{,i}(f/l)_{,k} = 0. \tag{8,6}$$

Cette relation signifie que les hypersurfaces $f/l=$const. ou $\omega+\Omega=\varphi=$const. sont caractéristiques.

---

[3] Le cas $\varphi =$ const. doit être exclu car il correspond à une métrique singulière, $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

2. Dans le système de coordonnées défini par (7,9) posons

$$\varphi = \lambda(x^1) + \Lambda(x^2).$$

L'équation (5,12) peut être alors résolue facilement. On trouve deux solutions [4] :

(8,7) $\lambda = c_1/(x^1 + c_2), \qquad \Lambda = c_1/\{c_2(c_2x^2 - 1)\}; \qquad c_1, c_2 = \text{const.};$

(8,8) $\lambda = clgx^1, \qquad \Lambda = clgx^2; \qquad c = \text{const.}$

On remarquera que la solution (8,8) est un cas spécial de la solution générale (8,3).

3. Les équations (7,20), (7,20 *a*) ont la solution presque évidente

(8,9) $$\alpha = -(x^1)^2 + c_1x^1 + c_2, \qquad \beta = (x^2)^2 + c_1x^2 + c_2.$$

De (7,7) et (7,13) on déduit

$$\psi = \{(\delta/m^2) - 1\}/\chi = -c_1 - c_2/x^1.$$

Par conséquent le déterminant Δ est nul, ce qui montre que cette solution ne peut pas représenter un champ stationnaire satisfaisant à la condition à l'infini (4,3).

On obtient une autre solution en discutant plus généralement les conditions supplémentaires

$$\alpha_{,11} + 2 = 0 = \beta_{,22} - 2.$$

On trouve finalement

(8,10) $$\begin{cases} \alpha = -(x^1 + c_1)^2 - c(x^1 + c_1)/(x^2 + c_2), & \gamma = 0, \\ \beta = (x^2 + c_2)^2 + c(x^2 + c_2)/(x^1 + c_1); & m^2 = -\beta(x^1)^2. \end{cases}$$

Cette solution a le déterminant δ négatif :

(8,11) $$\delta = -\{c + (x^1 + c_1)(x^2 + c_2)\}^2.$$

D'après la dernière des équations (8,10) on doit demander $\beta < 0$ et par conséquent $c \neq 0$. En considérant une transformation de la forme $x^2 + c_2 = \tilde{x}^2$ on voit que l'on peut prendre $c_2 = 0$. Mais la constante c_1 n'est pas éliminable car la quantité m contient séparément les expressions $x^1 + c_1$ et x^1. Quand $c_1 = 0$ la solution (8,10) est un cas particulier de (8,3).

---

[4] L'expression complète de λ contient encore des termes de la forme $c_3x^1 + c_4$ et celle de Λ des termes $c_3'x^2 + c_4'$. Mais ces termes sont sans importance pour la métrique et par conséquent on peut les supprimer.

RÉFÉRENCES

[*1*] R. P. KERR, *Phys. Rev. Letters*, t. 11, 1963, p. 237.
[*2*] A. PAPAPETROU, *Ann. der Physik*, t. 12, 1953, p. 309. On trouvera dans cet article des références aux travaux antérieurs.
[*3*] Voir par exemple L. P. EISENHART, *Riemannian geometry*, Princeton, 1949, p. 237.
[*4*] Voir par exemple W. J. v. STOCKUM, *Proc. Roy. Soc.*, Edinburgh, t. 57, 1937, p. 135.

(Manuscrit reçu le 6 décembre 1965).