ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

KHAM DOEUN TOCH

Étude de l'équivalence des définitions de la distance spatiale en relativité générale

Annales de l'I. H. P., section A, tome 4, nº 2 (1966), p. 107-117

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1966__4_2_107_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. IV, n° 2, 1966, p. 107-117.

Section A :
Physique théorique.

Étude de l'équivalence des définitions de la distance spatiale en relativité générale

par

TOCH Kham Doeun
(Institut Henri Poincaré).

SOMMAIRE. — En utilisant quelques propriétés de la congruence de géodésiques isotropes dans une variété riemannienne, on étudie l'équivalence de 4 types de définitions de la distance spatiale proposées par différents auteurs en Relativité générale.

SUMMARY. — Study of the equivalence of four different definitions of spatial distance in general Relativity by using characteristic properties of nullgeodesic congruences.

I. — INTRODUCTION

En Relativité générale, seule la distance spatiale entre deux points d'univers infiniment voisins a été définie d'une manière unique. Celle de deux points à distance finie a été examinée à plusieurs reprises et de différentes manières tant du point de vue astronomique que cosmologique. Les mesures effectives d'une telle distance spatiale sont des mesures photométriques de magnitude : ce qui explique le rôle des géodésiques isotropes dans les définitions proposées. En utilisant quelques propriétés des congruences de géodésiques isotropes dans une variété riemannienne, nous allons étudier l'équivalence de 4 types de définitions de la distance spatiale proposées par différents auteurs en Relativité générale.

II. — RAPPEL : CONGRUENCES DE GÉODÉSIQUES ISOTROPES DANS UNE VARIÉTÉ RIEMANNIENNE. DÉFINITIONS DE LA DISTANCE SPATIALE EN RELATIVITÉ GÉNÉRALE

Considérons un espace-temps riemannien V_4 doué d'une métrique du type hyperbolique normal :

(2-1) $$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \qquad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3.$$

Soient L et L′ deux lignes d'univers respectivement tangentes aux vitesses unitaires u^α et $u^{\alpha'}$ en A et B.

Soit $G(u, v)$ le 2-espace formé par les géodésiques isotropes $\Gamma(u)$ qui appliquent L sur L′ et soient :

a) u un paramètre spécial sur chacune des $\Gamma(u)$ tel que $u = u_1$ sur L et $u = u_2$ sur L′, ce qui est toujours possible puisque ce paramètre n'est déterminé qu'à une transformation linéaire près (Nous prendrons $u_1 > u_2$).

b) v un second paramètre constant le long de chaque $\Gamma(u)$.

On sait que sur chaque $\Gamma(u)$, on a, en posant :

$$l^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial u} \qquad \eta^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial v} dv$$

(2-2) $$\frac{\nabla l^\mu}{du} = \frac{dl^\mu}{du} + \left\{ {\mu \atop \mu\rho} \right\} l^\nu l^\rho = 0 \qquad l^\mu l_\mu = 0$$

(2-3) $$\frac{\nabla^2 \eta^\mu}{du^2} + R^\mu_{\nu\rho\sigma} l^{\mu\rho}_\eta l^\sigma = 0$$

(équation de la déviation géodésique).

(2-4) $$\eta^\mu l_\mu = \text{constante indépendante de } u.$$

Pour plus de simplicité, nous supposerons que :

(2-5) $$\eta^\mu(u_2) = 0$$

ce qui entraîne que :

(2-6) $$\eta^\mu l_\mu = 0$$

(η^μ orthogonal à l^μ tout au long de chaque $\Gamma(u)$).

On remarque que sur chaque $\Gamma(u)$, la solution de (2-3), orthogonale à l^μ, n'est déterminée qu'à la transformation suivante près :

(2-7) $$\eta^\mu = \eta_0^\mu + g(u)l^\mu$$

où $g(u)$ est une fonction linéaire quelconque de u et η_0^μ une solution quelconque de (2-3) orthogonale à l^μ et indépendante de u^α.

Donc sur chaque $\Gamma(u)$, quel que soit le vecteur unitaire u^α, il y a toujours une solution de (2-3) qui soit orthogonale à la fois à l^μ et à u^α.

Cependant, on a sur chaque $\Gamma(u)$:

(2-8) $$\eta \equiv |\eta^\mu\eta_\mu|^{1/2} = |\eta_0^\mu\eta_{0\mu}|^{1/2} \equiv \eta_0.$$

Par suite, η est indépendant de u^α.

Par la suite, nous désignerons par P et Q les 3-espaces orthogonaux respectivement à l^μ et u^α en A et par Σ leur intersection. Le mince faisceau de $\Gamma(u)$ coupe Σ suivant une section bidimensionnelle dont nous désignerons l'aire par S.

Cela étant posé, nous allons étudier l'équivalence des définitions suivantes de la distance spatiale $\Delta(A, B)$, observée en A :

Définition I (Whittaker, 1932 [*1*])

(2-9) $$\Delta_{\mathrm{I}}(A, B) = k(u_1 - u_2)$$

où par hypothèse, la constante k est telle que, quand A et B deviennent infiniment voisins l'un de l'autre, $\Delta_{\mathrm{I}}(A, B) = |d\sigma|$ $d\sigma$ étant l'élément linéaire d'espace du 3-espace P.

Définition II (H. S. Ruse [*2*])

(2-10) $$\Delta_{\mathrm{II}}(A, B) = \left|\frac{\partial\Omega(A, B)}{\partial\tau_A}\right|$$

où $\Omega(A, B)$ est la « fonction d'univers » le long de la géodésique $\Gamma_0(u)$ joignant A et B :

$$\Omega = \frac{1}{2}\int_B^A ds^2$$

τ_A = le temps propre sur L en A.

Définition III

(2-11) $$\Delta_{\mathrm{III}}(A, B) = K\sqrt{S}$$

la constante K étant définie avec la même hypothèse que celle utilisée pour k.

Cette définition s'inspire de celle de Whittaker (1931 [*3*]) et diffère de cette dernière par le fait que l'aire S considérée par Whittaker est celle engendrée par l'intersection du mince faisceau de $\Gamma(u)$ avec le 3-espace P et non avec $\Sigma = P \cap Q$.

Définition IV (Goldberg et Newmann [*4*])

$$\Delta_{IV}(A, B) = C\eta \tag{2-12}$$

C étant encore choisie avec la même hypothèse que celle utilisée pour k.

III. — ÉQUIVALENCE DES DÉFINITIONS I ET II

Les définitions I et II sont équivalentes dans tout espace-temps (Ruse [*2*]).
En effet, la solution de (2-2) pour $\mu = 0$ peut s'écrire sous la forme :

$$l^0 = \frac{\partial x^0}{\partial u} = Y(x^\mu) \qquad \text{ou} \qquad du = \frac{\partial x^0}{Y(x^\mu)} \tag{3-1}$$

Y étant une certaine fonction connue de x^μ. Par suite :

$$\Delta_I(A, B) = k(u_1 - u_2) = k\int_B^A \frac{\partial x^0}{Y} \tag{3-2}$$

l'intégrale étant prise sur $\Gamma_0(u)$.

Or, par hypothèse sur k, on a :

$$k\,du = |\,d\sigma\,| = |\,u^\mu l_\mu\,|_{u=u_1} du \qquad \text{ou} \qquad k = |\,u^\mu l_\mu\,|_{u=u_1}. \tag{3-3}$$

Par suite, (3-2) s'écrit :

$$\Delta_I(A, B) = |\,u^\mu l_\mu\,|_{u=u_1}\int_B^A \frac{\partial x^0}{Y} = \left|\,u_\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial x^0}\right|_{u=u_1} |\,Y_1\,| \int_B^A \frac{\partial x^0}{Y} \tag{3-4}$$

Y_1 étant la valeur de Y en A.

Écrivant maintenant l'expression invariante (3-4) dans les coordonnées normales géodésiques :

$$y^\mu = a^\mu u \qquad a^\mu = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial u}\right)_{u=u_1}$$

on obtient :

$$\Delta_I(A, B) = |\,u_\mu y_1^\mu\,| \qquad \text{avec} \qquad y_1^\mu = a^\mu u_1. \tag{3-5}$$

Or, on sait d'autre part que [5] :

$$\frac{\partial\Omega(\mathrm{A},\mathrm{B})}{\partial v_1^\mu} = y_{\mu_1} \qquad y_{\mu_1} = (g_{\mu\nu})_{u=u_1} y_1^\mu. \tag{3-6}$$

Comparant (3-5) et (3-6), on obtient :

$$\Delta^1(\mathrm{A},\mathrm{B}) = \left| u^\mu \frac{\partial\Omega}{\partial x_1^\mu} \right| = \left| \frac{\partial x_1^\mu}{\partial \tau_\mathrm{A}} \frac{\partial\Omega}{\partial x_1^\mu} \right| = \left| \frac{\partial\Omega}{\partial \tau_\mathrm{A}} \right| \qquad \text{c. q. f. d.} \tag{3-7}$$

IV. — ÉQUIVALENCE DES DÉFINITIONS III ET IV

Goldberg et Newmann [4] ont déjà vérifié l'équivalence des définitions III et IV dans les espaces-temps isotropes et homogènes au sens habituel. Nous allons essayer de l'établir dans le cas général.

A cet effet, nous allons comparer l'expression de $\sqrt{\mathrm{S}}$ avec celle de η.

Considérons d'abord en A un repère orthonormé constitué par les vecteurs de base $\lambda^\mu_{(\alpha)}$ $\alpha = 0, 1, 2, 3$ tels que :

a) $\lambda^\mu_{(0)} = u^\mu$

b) $\lambda^\mu_{(2)}$ et $\lambda^\mu_{(3)}$ orthogonaux tous les deux à l^μ.

Tout point de S est l'intersection avec Σ d'une géodésique $\Gamma(u)$ très voisine de $\Gamma_0(u)$. Soit ξ_α les coordonnées de ce point relatives au repère $\lambda^\mu_{(\alpha)}$.

On a :

$$\xi_\alpha = \eta^\mu \lambda_{(\alpha)\mu} \tag{4-1}$$

S étant orthogonal à la fois à l^μ et à u^μ, on a :

$$\xi_0 = 0 \qquad \xi_1 = 0 \qquad \text{donc} \qquad d\mathrm{S} = d\xi_2 \wedge d\xi_3 \tag{4-2}$$

S est donc dans l'hyperplan engendré par $\lambda^\mu_{(2)}$ et $\lambda^\mu_{(3)}$.

D'autre part, on a en fonction de ξ_2 et de ξ_3 :

$$\eta = (\xi_2^2 + \xi_3^2)^{1/2}. \tag{4-3}$$

Introduisant une variable Θ indépendante de η telle que :

$$\left\{ \begin{aligned} \xi_2 &= \eta \cos\Theta \\ \xi_3 &= \eta \sin\Theta \end{aligned} \right. \tag{4-4}$$

on peut écrire (4-2) en fonction de η :

$$dS = \eta d\eta d\Theta \qquad \text{ou} \qquad S = \frac{1}{2}\eta^2(\Theta_2 - \Theta_1) \tag{4-5}$$

Θ_1, Θ_2 étant 2 valeurs de Θ limitant l'aire S qu'il est inutile de préciser ici.

(4-5) montre d'abord que S est indépendante de u^α.

En effet, imaginons que A décrive une autre ligne d'univers $\bar{L} \neq L$. Et soient $\bar{u}^\alpha$, $\bar{S}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\xi}_\alpha$, $\bar{\Theta}$ respectivement u^α, S, η, ξ_α, Θ correspondants à $\bar{L}$.

Le même raisonnement que celui utilisé pour S montre que :

$$\bar{\eta} = (\bar{\xi}_2^2 = \bar{\xi}_3^2)^{1/2} \qquad \bar{S} = \frac{1}{2}\bar{\eta}(\bar{\Theta}_2 - \bar{\Theta}_1). \tag{4-6}$$

Or, on a vu que η est indépendant de u^α :

$$\bar{\eta} = (\bar{\xi}_2^2 + \bar{\xi}_3^2)^{1/2} = \eta = (\xi_2^2 + \xi_3^2)^{1/2}. \tag{4-7}$$

Par suite :

$$\bar{\Theta} = \Theta + \Theta_0, \tag{4-8}$$

Θ_0 étant une valeur fixe quelconque de Θ.

Alors la deuxième relation de (4-6) s'écrit :

$$\bar{S} = \frac{1}{2}\eta(\Theta_2 - \Theta_1) = S \qquad \text{c. q. f. d.} \tag{4-9}$$

Cette dernière propriété des géodésiques isotropes dans une variété riemannienne sera utilisé dans le paragraphe qui va suivre.

(4-5) montre aussi que S est proportionnelle à η^2 c'est-à-dire $\sqrt{S}$ proportionnelle à η.

Par suite, Δ_{III} est proportionnelle à Δ_{IV} :

$$\Delta_{III}(A, B) = \mu\Delta_{IV}(A, B); \tag{4-10}$$

μ = const. de proportionnalité.

Or, en admettant que, quand A et B deviennent infiniment voisins l'un de l'autre, Δ_{III} et Δ_{IV} sont égaux tous les deux à la même quantité $|d\sigma|$, on aura nécessairement $\mu = 1$: ce qui établit l'équivalence des définitions III et IV.

V. — ÉQUIVALENCE DES 4 DÉFINITIONS I, II, III ET IV

Il nous reste à voir si l'une des définitions I et II est équivalente à l'une des définitions III et IV.

Par exemple, essayons de comparer les définitions I et III.

Pour cela, considérons d'abord en A un repère orthonormé $X^{\mu}_{(\alpha)}$, $\mu = 0, 1, 2, 3$ ($X^{\mu}_{(0)}$ orienté dans le temps; $X^{\mu}_{(i)}$ $i = 1, 2, 3$ orienté dans l'espace) tel que :

a) $X^{\mu}_{(2)}$ se transporte parallèlement le long de $\Gamma_0(u)$ et est orthogonal à l^{μ}.

b) $X^{\mu}_{(3)}$ est orthogonal à l^{μ} (1).

En plus des relations issues du caractère orthonormé du repère, les $X^{\mu}_{(\alpha)}$ vérifient donc sur $\Gamma_0(u)$ les relations suivantes :

$$(5\text{-}1)\quad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\nabla X^{\mu}_{(2)}}{du} = 0 & X^{\mu}_{(2)} l_{\mu} = 0 & X^{\mu}_{(2)} \dfrac{\nabla^2 X_{(2)\mu}}{du^2} = 0 \\ X^{\mu}_{(3)} l_{\mu} = 0 & l_{\mu} \dfrac{\nabla X^{\mu}_{(3)}}{du} = 0 & X^{\mu}_{(2)} \dfrac{\nabla X_{(3)\mu}}{du} = 0 \\ X^{\mu}_{(3)} \dfrac{\nabla X_{(3)\mu}}{du} = 0 & X^{\mu}_{(2)} \dfrac{\nabla^2 X_{(3)\mu}}{du^2} = 0 & X^{\mu}_{(3)} \dfrac{\nabla^2 X_{(3)\mu}}{du^2} = 0. \end{array}\right.$$

Par rapport au repère $X^{\mu}_{(\alpha)}$, le vecteur u^{α} a une direction absolument quelconque. En particulier $X^{\mu}_{(0)}$ n'est pas nécessairement confondu avec u^{α}. Cependant comme la valeur de l'aire S est indépendante de u^{α}, on ne changera rien à cette valeur en procédant comme si $X^{\mu}_{(0)}$ est confondu avec u^{α}. Ce que nous allons faire.

Or, dans le cas où $X^{\mu}_{(0)} = u^{\mu}$, on a vu que S est dans l'hyperplan $X^{\mu}_{(2)}, X^{\mu}_{(3)}$ ($X^{\mu}_{(\alpha)}$ dans ce cas joue le rôle de $\lambda^{\mu}_{(\alpha)}$).

Et à partir de (4-1) où l'on remplace $\lambda^{\mu}_{(\alpha)}$ par $X^{\mu}_{(\alpha)}$, on tire :

$$(5\text{-}2)\qquad \eta^{\mu} = -\left(\xi_2 X^{\mu}_{(2)} + \xi_3 X^{\mu}_{(3)}\right).$$

En portant cette expression de η^{μ} dans l'équation de la déviation géodésique (2-3) et en tenant compte des relations de (5-1), on obtient :

$$(5\text{-}3)\quad X^{\mu}_{(2)} \frac{d^2\xi_2}{du^2} + \xi_3 \frac{\nabla^2 X^{\mu}_{(3)}}{du^2} + 2 \frac{d\xi_3}{du} \frac{\nabla X^{\mu}_{(3)}}{du} + X^{\mu}_{(3)} \frac{d^2\xi_3}{du^2} + R^{\mu}_{\nu\rho\sigma} l^{\nu} l^{\sigma} X^{\rho}_{(2)} \xi_2 + R^{\mu}_{\nu\rho\sigma} l^{\nu} l^{\sigma} X^{\rho}_{(3)} \xi_3 = 0.$$

(1) On pourra aussi imposer que $X^{\mu}_{(3)}$ se transporte parallèlement le long de Γ_0. On ne changera rien aux équations (5-4) et (5-5).

En multipliant les deux membres de (5-3) successivement par $X_{(2)\mu}$ et par $X_{(3)\mu}$, en sommant ensuite par rapport à μ et en tenant compte de (5-1), on obtient un système de deux équations différentielles qui donnera ξ_2 et ξ_3 en fonction de u :

(5-4) $$\frac{d^2\xi_r}{du^2} - \Gamma_{rs}\xi_s = 0$$

(avec sommation sur s; r, $s = 2$, 3)

(5-5) $$\Gamma_{rs} = \Gamma_{sr} = R_{\mu\nu\rho\sigma} l^\nu l^\sigma X^\mu_{(r)} X^\rho_{(s)}.$$

Connaissant ξ_2 et ξ_3 en fonction de u, on calculera $dS = d\xi_2 \wedge d\xi_3$ qui, par intégration, donnera S en fonction de u.

Nous ne nous intéresserons qu'aux espace-temps particuliers dans lesquels on aura :

(5-6) $$\Gamma_{rs} = 0 \qquad \text{quels que soient } r \text{ et } s = 2, 3.$$

Dans de tels espace-temps, le système (5-4) se réduira simplement à :

(5-7) $$\frac{d^2\xi_r}{du^2} = 0 \quad r = 2, 3 \quad \text{ou } \xi_r = \alpha_r u + \beta_r \,;\ \alpha_r,\ \beta_r = \text{const. d'intégration.}$$

Soit avec l'hypothèse : $\eta^\mu(u_2) = 0$

(5-9) $$\xi_r = \alpha_r(u_1 - u_2) \qquad r = 2, 3.$$

Par suite :

(5-10) $$dS = (u_1 - u_2)^2 d\alpha_2 \wedge d\alpha_3$$

(5-11) $$\sqrt{S} = \lambda(u_1 - u_2); \qquad \lambda = \text{const. de proportionnalité}$$

(5-12) $$\Delta_{\mathrm{I}}(A, B) = \mu\,\Delta_{\mathrm{III}}(A, B); \qquad \mu = \text{const. de proportionnalité.}$$

Or, $\mu = 1$ du fait que quand A et B deviennent infiniment voisins l'un de l'autre, Δ_{I} et Δ_{III} tendent par hypothèse vers une même quantité $|\,d\sigma\,|$: ce qui établit l'équivalence des définitions I et III dans ces espace-temps particuliers.

VI. — APPLICATIONS

Dans la suite, nous essaierons de voir si les définitions I et III sont équivalentes dans les espace-temps de Schwarzschild extérieurs, les espace-temps isotropes et homogènes au sens habituel et dans les espace-temps isotropes et homogènes au sens de la méthode des transformées. Ce qui revient à voir si les espace-temps précédents satisfont à la condition (5-6).

a) Espace-temps de Schwarzschild extérieurs

On sait que relativement aux coordonnées de Jordan (r, θ, φ, t) le ds^2 des espace-temps de Schwarzschild extérieurs s'écrit [*4*] :

$$(6\text{-}1) \quad ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)dt^2 + 2\left(\frac{2m}{r}\right)^{1/2} dtdr - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

m = rayon gravitationnel; on a fait $c = 1$.

Nous considérons B au point où $r = 0$.

On peut vérifier que sur $\Gamma_0(u)$, l^μ est tel que :

$$(6\text{-}2) \quad \left\{ \begin{array}{ll} l^0 = \dfrac{h}{1 - \left(\dfrac{2m}{r}\right)^{1/2}} & l^1 = h \\ l^2 = l^3 = 0 & h = \text{constante} = \neq 0 \end{array} \right.$$

et que $X^\mu_{(2)}$ et $X^\mu_{(3)}$ sont tels que :

$$(6\text{-}3) \quad X^\mu_{(2)} = \frac{1}{r}\,\delta^\mu_2 \qquad X^\mu_{(3)} = \frac{1}{r\sin\theta}\,\delta^\mu_3.$$

Tenant compte de (6-3) et de l'expression de $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ obtenue à partir de (6-1), on vérifiera que la condition (5-6) est vérifiée : les définitions I et III sont donc équivalentes dans les espace-temps de Schwarzschild extérieurs.

b) Espace-temps isotropes et homogènes au sens habituel

On sait que relativement aux coordonnées $(\chi, \theta, \varphi, \tau)$ définies à partir du système de coordonnées entraînées habituelles (r, θ, φ, t) par les transformations :

$$(6\text{-}4) \quad \left\{ \begin{array}{ll} r = R\sin\chi & \\ \theta = \theta;\ \varphi = \varphi & \\ \mathcal{C}dt = Rd\tau & R = \text{rayon de courbure de l'espace} \end{array} \right.$$

le ds^2 des espace-temps s'écrit :

$$(6\text{-}5) \quad ds^2 = R^2(\tau)[d\tau^2 - d\chi^2 - \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2).$$

Sur $\Gamma_0(u)$, on a :

$$(6\text{-}6)\qquad \begin{aligned} l^0 &= -l^1 = \frac{\lambda}{R^2} \qquad \lambda = \text{const.} \neq 0 \\ l^2 &= l^3 = 0 \end{aligned}$$

$$X^\mu_{(2)} = \frac{1}{R \sin \chi}\,\delta^\mu_2 \qquad X^\mu_{(3)} = \frac{1}{R \sin \chi \sin \theta}\,\delta^\mu_3.$$

Par suite :

$$(6\text{-}7)\qquad \Gamma_{rs} = \left(1 + \frac{2\dot{R}^2}{R^2} - \frac{\ddot{R}}{R}\right)\frac{\lambda^2}{R^4}\,\delta_{rs}\,; \qquad \dot{R} = \frac{dR}{d\tau}\,; \qquad \ddot{R} = \frac{d^2R}{d\tau^2}.$$

On peut alors vérifier à partir de l'expression de R du modèle de de Sitter (cas statique) ou du modèle d'Einstein-Freedmann (cas non statique) que :

$$(6\text{-}8)\qquad \Gamma_{rs} \neq 0$$

c'est-à-dire que les solutions de (5-4) ne sont pas proportionnelles à $(u_1 - u_2)$. Les définitions I et III ne sont donc pas équivalentes dans les espace-temps isotropes et homogènes au sens habituel.

c) Espace-temps isotropes et homogènes au sens de la méthode des transformées

On sait que relativement aux coordonnées adaptées de la méthode des transformées (x^μ), le ds^2 des espace-temps isotropes et homogènes s'écrit [*6*] :

$$(6\text{-}9)\qquad ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 - \frac{(x^1dx^1 + x^2dx^2 + x^3dx^3 - x^0dx^0)^2}{a^2 - \rho^2}$$

$$a = \text{const.}$$

$$\rho^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^0)^2.$$

On en déduit que :

$$(6\text{-}10)\qquad R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{a^2}(g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}).$$

Par suite, quel que soit le repère $X^\mu_{(\alpha)}$ considéré, on a :

$$(6\text{-}11)\qquad \Gamma_{rs} = \frac{1}{a^2}\left[(l^\sigma X_{(r)\sigma})\underbrace{(l^\rho X_{(s)\rho})}_{0} - (X^\rho_{(r)}X_{(s)\rho})\underbrace{(l^\sigma l_\sigma)}_{0}\right] = 0.$$

Les définitions I et III sont donc équivalentes dans de tels espace-temps.

Il en sera de même pour les espace-temps isotropes et homogènes au sens géométrique de Riemann dont :

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = K(g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}) \; ; \qquad K = \text{const.} \tag{6-12}$$

VII. — CONCLUSIONS

Il ressort de l'étude précédente que dans tout espace-temps de la Relativité générale :

a) les définitions I et II sont équivalentes entre elles;

b) il en est de même pour les définitions III et IV.

Toutes les 4 définitions I, II, III et IV semblent être équivalentes entre elles dans les espace-temps particuliers satisfaisant à la condition (5-6). Il en est ainsi pour les espace-temps de Schwarzschild extérieurs et les espaces-temps isotropes et homogènes au sens de la méthode des transformées (ou au sens géométrique de Riemann). Cependant, il n'en est pas ainsi pour les espace-temps isotropes et homogènes au sens habituel. Cela est dû, semble-t-il, essentiellement à la définition de l'isotropie et de l'homogénéité adoptée habituellement.

L'auteur adresse ses remerciements à M. Kichenassamy dans le groupe d'études de qui cet article a été préparé.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] WHITTAKER, *Proc. Roy. Soc.*, Edinburgh, t. A53, 1932-1933, p. 31.
[*2*] H. S. RUSE, *Proc. Roy. Soc.*, Edinburgh, t. A53, 1932-1933, p. 79.
[*3*] WHITTAKER, *Proc. Roy. Soc.*, London, t. A113, 1931, p. 93.
[*4*] GOLDBERG et NEWMANN, *Phys. Rev.*, t. 114, 1959, p. 1391.
[*5*] H. S. RUSE, *Proc. Lond. Math. Soc.*, t. 32, 1931, p. 90.
[*6*] S. KICHENASSAMY, *Thèse Sc. Math.*, Paris, 1958.

(Manuscrit reçu le 10 décembre 1965).