ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

JEAN LAVOINE

Sur des théorèmes abéliens et taubériens de la transformation de Laplace

Annales de l'I. H. P., section A, tome 4, n° 1 (1966), p. 49-65
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1966__4_1_49_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. IV, n° 1, 1966, p. 49-65.

Section A :
Physique théorique.

Sur des théorèmes abéliens et taubériens de la transformation de Laplace

par

Jean LAVOINE

Dans *Laplace transform* (p. 191), Widder donne les énoncés suivants, dus, dit-il [1], à Karamata :

THÉORÈME. — Si $\alpha(t)$ est une fonction non décroissante et telle que l'intégrale

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-xt} d\alpha(t)$$

converge pour $x > 0$, et si pour un nombre $\gamma \geq 0$

$$f(x) \sim A/x^\gamma \qquad \begin{matrix} x \to 0^+ \\ x \to \infty, \end{matrix}$$

alors respectivement

$$\alpha(t) \sim At^\gamma/\Gamma(\gamma + 1) \qquad \begin{matrix} t \to \infty \\ t \to 0^+. \end{matrix}$$

COROLLAIRE. — Si $a(t)$ est une fonction non négative telle que

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-xt} a(t) dt$$

converge pour $x > 0$ et si pour un $\gamma > 0$

$$F(x) \sim A/x^\gamma \qquad \begin{matrix} x \to 0^+ \\ x \to \infty, \end{matrix}$$

alors respectivement

$$a(t) \sim At^{\gamma-1}/\Gamma(\gamma) \qquad \begin{matrix} t \to \infty \\ t \to 0^+. \end{matrix}$$

[1] Widder renvoie à un article de Karamata dans lequel Karamata attribue ces théorèmes à Hardy et Littlewood et cite leur Note on the theory of series. XI. On Tauberian theorems. *Proc. of the Lond. math. Soc.* (2), 1929, p. 30.

Critique. — Le double théorème de Karamata et son corollaire ont le défaut d'imposer de connaître à l'*avance* le caractère non décroissant ou non négatif de l'original $\alpha(t)$ de $f(x)$, ou $a(t)$ de $F(x)$ (ce qui est immédiat lorsque $\alpha(t)$ est une fonction de répartition de probabilité).

Autre défaut : Que se passe-t-il si $F(x) \sim Ax^\gamma$, $x \to 0+$, $\gamma > 0$? Le corollaire n'est d'aucune utilité pour le comportement des originaux de fonctions aussi simples que $\dfrac{1}{x^2+1}$, $\dfrac{x}{x^2+1}$ (on sait que ce sont simplement $\sin t$ et $\cos t$!).

Nous allons donner sur le comportement à l'infini et au voisinage de zéro des transformées et anti-transformées de Laplace des théorèmes plus généraux, qui font intervenir les distributions et les parties finies d'intégrales. Le théorème taubérien sera ramené au théorème abélien.

Notation. — z étant une variable complexe, T_t une distribution de la variable réelle t telle que $e^{-\xi_0 t}T_t$ soit tempérée au sens de Schwartz, on désigne par

$$\mathbf{L}_z T_t \text{ (transformée de Laplace)}$$

la fonction analytique de z coïncidant avec $< T_t, e^{-zt} >$ si $\mathrm{Re}z > \xi_0$. Inversement, $G(z)$ étant une fonction donnée, on désigne par

$$\mathbf{L}_t^{-1}G(z) \qquad \text{(anti-transformée)}$$

la distribution de la variable t telle que

$$\mathbf{L}_z\mathbf{L}_t^{-1}G(z) = G(z).$$

Définitions. — 1) Une fonction $g(z)$ est du type I si elle s'écrit, au voisinage de $z = 0$:

$$(1) \qquad g(z) = h(z) + \sum_{k=0}^{K}(b_k + a_k \log z)z^{-k} + \sum_{j=0}^{J}(\beta_j + \alpha_j \log z)z^{-\nu_j}.$$

K et J finis, $\nu > -1$, $h(z)$ fonction telle que $| z^\gamma g(z) |$ soit borné dans ce voisinage pour $\gamma > 1$.

2) Une fonction $f(t)$ de la variable réelle t est du type I *bis* si

$$\begin{aligned} f(t) &= 0 \qquad \text{pour} \quad t < 0 \\ f(t) &= g(t) \qquad \text{pour} \quad t > 0 \end{aligned}$$

$g(z)$ étant du type I et telle que pour un certain ξ_0 réel $e^{-\xi_0 t}h(t)$ est intégrable pour $t > 0$.

Il s'ensuit (voir Lavoine « Calcul symbolique ») qu'on peut associer à $f(t)$ une pseudo-fonction $\mathrm{P}f f(t)$ et que

$$\langle \mathrm{P}f f(t), e^{-zt} \rangle = \mathrm{P}f \int_0^\infty f(t) e^{-zt} dt$$

existe pour $\mathrm{R}e\, z > \xi_0$ et définit $\mathrm{L}_z \mathrm{P}f f(t)$.

3) T_t étant une distribution (au sens de Laurent Schwartz), $\mathrm{T} \sim \mathrm{A}t^\alpha$ pour $t \to \infty$; signifie : il existe une fonction $\theta(t) \sim \mathrm{A}t^\alpha$ et un nombre t_0 tels que $\mathrm{T} = \theta(t)$ sur $[t_1, \infty[$, $t_1 > t_0$.

4) $h(z) = \mathrm{o}(k(z))$, $z \to z_0$, signifie :

$$| h(z)/k(z) | \to \text{une constante}$$

quand $z \to z_0$. Si cette constante est zéro, on écrit :

$$h(z) = \mathrm{o}(k(z)),\ z \to z_0.$$

I. — GÉNÉRALISATION DES THÉORÈMES ABÉLIENS

Théorème I. — « La fonction $f(t)$ étant du type I *bis* [2] :

1° Si, pour $t \to 0+$, $f(t) \sim \mathrm{A}t^\nu$, $\nu \neq -1, -2, -3, \ldots$, alors :

$$\mathrm{L}_z \mathrm{P}f f(t) \sim \mathrm{A}\Gamma(\nu+1) z^{-\nu-1}, \qquad \mathrm{R}e\, z \to \infty. \tag{2}$$

2° Si, pour $t \to 0+$, $f(t) \sim \mathrm{A}t^{-n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, alors :

$$\mathrm{L}_z \mathrm{P}f f(t) \sim \mathrm{A} \frac{(-1)^n}{(n-1)!} z^{n-1} \log z, \qquad \mathrm{R}e\, z \to \infty. \tag{2'}$$

3° Si, pour $t \to 0+$, $f(t) \sim \mathrm{A}t^\nu \log t$, $\nu \neq -1, -2, -3, \ldots$, alors :

$$\mathrm{L}_z \mathrm{P}f f(t) \sim -\mathrm{A}\Gamma(\nu+1) z^{-\nu-1} \log z, \qquad \mathrm{R}e\, z \to \infty. \tag{3}$$

4° Si, pour $t \to 0+$, $f(t) \sim \mathrm{A}t^{-n} \log t$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, alors :

$$\mathrm{L}_z \mathrm{P}f f(t) \sim \mathrm{A} \frac{(-1)^{n-1}}{2(n-1)!} z^{n-1} (\log z)^2, \qquad \mathrm{R}e\, z \to \infty. \text{ »} \tag{3'}$$

Démonstration. — Pour $\nu > -1$, les $\mathrm{P}f$ sont inutiles : 1° est alors un théorème bien connu dans l'étude de la transformation de Laplace, dont

---

[2] Le 1° de ce théorème peut aussi s'énoncer ainsi : si, quand $t \to 0^+$,

$$t^{-\nu}(f(t) - \mathrm{A}t^\nu) \to 0,\ \nu \neq -1, -2, -3, \ldots,$$

alors

$$z^{\nu+1}[\mathrm{L}_z \mathrm{P}f f(t) - \mathrm{A}\Gamma(\nu+1) z^{-\nu-1}] \to 0,$$

quand $\mathrm{R}e\, z \to \infty$. Cet énoncé a l'avantage d'être encore exact quand $\mathrm{A} = 0$, c'est-à-dire quand $f(t) = \mathrm{o}(t^\nu)$, $t \to 0+$. On pourra mettre sous cette forme tous les autres résultats où se présente le signe $\sim$.

nous ne donnerons pas la démonstration, ni celle du 3° qui lui est analogue.

Dans les autres cas (2) (2') (3) et (3') sont obtenus en considérant le développement (1), les formules suivantes (voir notre « Calcul symbolique », p. 65 et 69) où $Y(t) = 0$ si $t < 0$, et 1 si $t > 0$ et

$$\psi(\nu) = \frac{d}{d\nu}\log\Gamma(\nu), \qquad \psi'(\nu) = \frac{d}{d\nu}\psi(\nu) :$$

$$\text{(4)} \qquad L_z Pf\, Y(t)t^{\nu} = \Gamma(\nu+1)z^{-\nu-1}, \qquad \nu \neq -1, -2, -3, \ldots$$

$$\text{(4')} \qquad L_z Pf\, Y(t)t^{-n} = \frac{(-1)^n}{(n-1)!} z^{n-1}[\log z - \psi(n)], \qquad n = 1, 2, 3] \ldots$$

$$\text{(5)} \qquad L_z Pf\, Y(t)t^{\nu}\log t = -\Gamma(\nu+1)z^{-\nu-1}[\log z - \psi(\nu+1)]$$

$$\text{(5')} \qquad L_z Pf\, Y(t)t^{-n}\log t = \frac{(-1)^{n-1}}{2(n-1)!}\left[z^{n-1}(\log z - \psi(n))^2 + \frac{\pi^2}{3} - \psi'(n)\right],$$

et en tenant compte que si

$$h(t) = O(t^{\gamma}), \qquad \gamma > -1, \qquad \text{quand} \qquad t \to 0^+,$$
$$L_z h(t) = O(z^{-\gamma-1}), \qquad \text{quand} \qquad \mathrm{Re}\, z \to \infty.$$

THÉORÈME II. — « La fonction $f(t)$ étant du type I *bis* ([3]) :

1° Si, quand $t \to \infty$, $f(t) \sim At^{\nu}$, $\nu \neq -1, -2, -3, \ldots$, alors :

$$\text{(6)} \qquad L_z Pf f(t) \sim A\Gamma(\nu+1)z^{-\nu-1}, \qquad z \to 0.$$

2° Si, quand $t \to \infty$, $f(t) = At^{-n} + O(t^{-n-\beta})$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, $\beta > 0$, non entier, alors :

$$\text{(6')} \qquad L_z Pf f(t) \sim A\frac{(-1)^n}{(n-1)!} z^{n-1}\log|z|, \qquad z \to 0.$$

3° Si, quand $t \to \infty$, $f(t) \sim At^{\nu}\log t$, $\nu \neq -1, -2, -3, \ldots$, alors :

$$\text{(7)} \qquad L_z Pf f(t) \sim A\Gamma(\nu+1)z^{-\nu-1}\log|z|, \qquad z \to 0.$$

4° Si, quand $t \to \infty$, $f(t) = At^{-n}\log t + O(t^{-n-\beta})$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, $\beta > 0$, non entier, alors :

$$\text{(7')} \qquad L_z Pf f(t) \sim A\frac{(-1)^{n-1}}{2(n-1)!} z^{n-1}\log^2|z|, \qquad z \to 0. \text{ »}$$

Démonstration. — Pour $\nu > -1$, les Pf sont inutiles; 1° est alors un autre théorème abélien bien connu dans l'étude de la transformation de Laplace, dont nous ne donnerons pas la démonstration, ni celle du 3° qui lui est analogue.

([3]) Par $z \to 0$, nous entendons en outre : dans un domaine ou $L_z Pf f(t)$ est holomorphe. On peut d'ailleurs affirmer qu'il y a holomorphie pour $\mathrm{Re}\, z > 0$.

Supposons ensuite $\nu < -1$, non entier. Soit N la partie entière de $-\nu$. Si, quand $t \to \infty, f(t) \sim At^{\nu}$, on a $t^{N}f(t) \sim At^{N+\nu}$, d'où, d'après ce qu'on vient de rappeler, $L_z Pf\, t^{N}f(t) \sim A\Gamma(N+\nu+1)z^{-N-\nu-1}$, quand $z \to 0$; $-1 < -N-\nu-1 < 0$. Posons $K_0(z) = L_z Pf\, t^{N}f(t)$. D'après les règles de la transformation de Laplace,

$$K_0(z) = (-1)^{N} \frac{d^{N}}{dz^{N}} L_z Pf f(t).$$

Donc

$$L_z Pf f(t) = (-1)^{N} K_N(z) + \sum_{j=0}^{N-1} a_j z^{j}, \tag{8}$$

les a_j étant des constantes,

$$K_{n+1}(z) = \int_{Oz} K_n(z)dz$$

sur le rayon Oz, z étant dans un domaine connexe ayant O comme point frontière et dans lequel $K_0(z)$ est holomorphe. Or, pour $n \geq 0$, $z \to 0$,

$$g_n(z) = K_n(z) - (-1)^{n} A\Gamma(\nu+1+N-1)z^{-\nu-1-N+n} = o(|z|^{-\nu-1-\nu+n}). \tag{9}$$

Montrons-le par récurrence, en remarquant que c'est vrai pour $n = 0$. En intégrant sur le rayon Oz, il vient

$$g_{n+1}(z) = \int_{Oz} g_n(z)dz$$

$$|g_{n+1}(z)| < \left|\int_{Oz} dz\right| \sup_{Oz} |g_n(z)| = |z| \sup_{Oz} |g_n(z)| = o(|z|^{-\nu-N+n})$$

car d'après (9), $|z|^{-\nu-N+n} \times |z| \sup |g_n(z)| \to 0$ quand $z \to 0$. De (8) et (9), on déduit (6).

Procédé analogue pour (7).

Démontrons maintenant (6'). $f(t) - At^{-n} = O(t^{-n-\beta})$, donc, d'après 1°, $L_z Pf f(t) - At^{-n} = O(z^{n+\beta-1})$, $z \to 0$, et d'après (4') :

$$L_z Pf f(t) = A\frac{(-1)^{n}}{(n-1)\,!} z^{n-1}[\log z - \psi(n)] + O(z^{n+\beta-1}),$$

d'où (6').

Pour (7'), procédé analogue, au moyen de 3° et de (5').

II. — GÉNÉRALISATION DES THÉORÈMES TAUBÉRIENS

Théorème III. — « Soit G(z) une fonction de la variable complexe z douée des qualités suivantes :

a) G(z) admet $z = \zeta$ comme point *singulier* et est holomorphe dans un domaine contenant le secteur défini par $|\arg(z - \zeta)| \leq \alpha$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

b) Quand $|z| \to \infty$, $|G(z)| = 0(e^{c|\mathrm{Re}\, z|})$, c réel.

c) Il existe des nombres M entier ≥ 0, $\eta > 1$ et $\xi_0 > \mathrm{Re}\, \zeta$, tels que pour $z = \xi_0 + iy$

$$|z^{-M}G(z)| = O(|y|^{-\eta}, \qquad |y| \to \infty.$$

d) G($z + \zeta$) est du type I.

e) Quand $z \to \zeta$, $G(z) \sim A(z - \zeta)^{\nu}$, $\nu \neq 0, 1, 2, 3, \ldots$

Alors

$$\mathrm{L}_z^{-1}G(z) \sim \frac{A}{\Gamma(-\nu)} e^{\zeta t} t^{-\nu-1}, \qquad t \to \infty. \text{ »} \tag{10}$$

Démonstration. — Grâce à *a*) et *b*) il existe une distribution g_t à support limité à gauche telle que $\mathrm{L}_t^{-1}G(z) = g_t$.

On pose :

$$v(z) = z^{-M}G(z + \zeta),$$

$$\mathrm{L}_z^{-1}v(z) = \Omega(t),$$

donc

$$g_t = e^{\zeta t} \frac{d^M}{dt^M} \Omega(t), \tag{11}$$

au sens des distributions.

Grâce à *c*) et *b*), $\Omega(t)$ est une fonction donnée par l'intégrale de Mellin-Fourier :

$$\Omega(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_D v(z) e^{tz} dz$$

intégrale prise sur la droite $\mathrm{Re}\, z = \xi_0 - \mathrm{Re}\, \zeta = \xi$.

Pour $t > c$, considérons le contour ci-contre où D_1 est la droite $z = re^{i\alpha}$ et D_2 la droite $z = re^{-i\alpha}$, r variant de 0 à l'infini, et appliquons l'extension du théorème de Cauchy indiquée dans notre *Note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, t. 254, p. 603 (ou dans J. Lavoine, *Transformation de Fourier des pseudo-fonctions*, p. 43), on a, en posant

$$\eta = e^{i\alpha}, \qquad \bar{\eta} = e^{-i\alpha}, \qquad \eta' = e^{i(\alpha-\pi)}, \qquad \bar{\eta}' = e^{-i(\alpha-\pi)},$$

$$\Omega(t) = \frac{1}{2i\pi}\left\{ \eta \mathrm{P}f\int_0^\infty v(\eta r)e^{t\eta r}dr - \bar{\eta}\mathrm{P}f\int_0^\infty v(\bar{\eta}r)e^{t\bar{\eta}r}dr \right\} + \mathrm{R}(t),$$

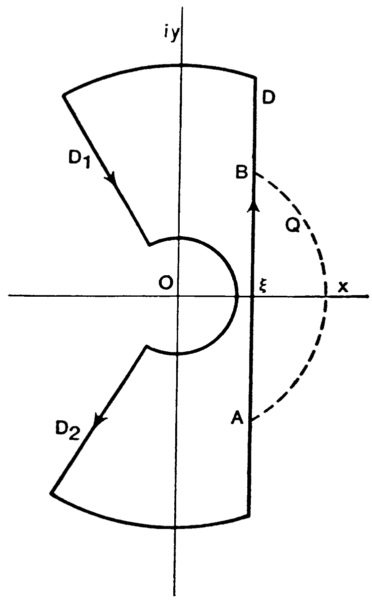

FIG. 1.

où

$$\mathrm{R}(t) = \frac{\alpha}{\pi}\sum_{k=1}^{\mathrm{K}} \frac{b_k}{(k+\mathrm{M}-1)\,!}\, t^{k+\mathrm{M}-1},$$

en utilisant pour $\mathrm{G}(z+\zeta)$ la notation (1).

Faisons apparaître la transformation de Laplace :

$$\Omega(t) = \frac{1}{2i\pi}\left\{ \eta \mathrm{P}f\int_0^\infty v(\eta r)e^{-\eta' tr}dr - \bar{\eta}\mathrm{P}f\int_0^\infty v(\bar{\eta}r)e^{-\bar{\eta}' tr}dr \right\} + \mathrm{R}(t)$$

et la dérivée (au sens ordinaire) d'ordre n :

$$\Omega^{(n)}(t) = \frac{(-1)^n}{2i\pi}\left\{\eta \operatorname{Pf}\int_0^\infty (\eta' r)^n v(\eta r) e^{-\eta' tr} dr \right.$$

$$\left. - \bar{\eta} \operatorname{Pf}\int_0^\infty (\bar{\eta}' r)^n v(\bar{\eta} r) e^{-\bar{\eta}' tr} dr \right\} + \mathrm{R}^{(n)}(t)$$

$$= \frac{(-1)^n}{2i\pi}\{\eta \mathrm{L}_{\eta' t} \operatorname{Pf}(\eta' r)^n v(\eta r) - \bar{\eta} \mathrm{L}_{\bar{\eta}' t} \operatorname{Pf}(\bar{\eta}' r)^n v(\bar{\eta} r)\} + \mathrm{R}^{(n)}(t).$$

$\eta' t$ et $\bar{\eta}' t$ jouent le rôle de z dans la transformation de Laplace.

Pour $t > c$, $\Omega(t)$ et les $\Omega^{(n)}(t)$ sont continues, donc

$$\frac{d^{\mathrm{M}}}{dt^{\mathrm{M}}}\Omega(t) = \theta(t) + \mathrm{R}^{(\mathrm{M})}(t)$$

$$\theta(t) = \frac{1}{2i\pi}[\eta \mathrm{L}_{\eta' t} \operatorname{Pf} \mathrm{G}(\zeta + \eta r) - \bar{\eta} \mathrm{L}_{\bar{\eta}' t} \operatorname{Pf} \mathrm{G}(\zeta + \bar{\eta} r)].$$

Premier cas : $\nu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \pm \ldots$

D'après *e*), quand $r \to 0$, $\mathrm{G}(\zeta + \eta r) \sim \mathrm{A}\eta^\nu r^\nu$. D'après le 1° du théorème I, on a, quand $t \to \infty$,

$$\theta(t) \sim \mathrm{A}\frac{\Gamma(\nu+1)}{2i\pi}[(\eta/\eta')^{\nu+1} - (\bar{\eta}/\bar{\eta}')^{\nu+1}] t^{-\nu-1}$$

ou

$$\theta(t) \sim \frac{\mathrm{A}}{\Gamma(-\nu)} t^{-\nu-1}.$$

Or,

$$\mathrm{R}^{(\mathrm{M})}(t) \sim \frac{\alpha}{\pi}\frac{1}{(\mathrm{K}-1)!} b_{\mathrm{K}} t^{\mathrm{K}-1} = o(t^{-\nu-1}), \qquad t \to \infty,$$

car, dans le cas présent, ou bien $b_{\mathrm{K}} = 0$, ou bien $\mathrm{K} < -\nu$, suivant que ν est positif ou négatif. Donc

$$\frac{d^{\mathrm{M}}}{dt^{\mathrm{M}}}\Omega(t) \sim \frac{\mathrm{A}}{\Gamma(-\nu)} t^{-\nu-1}$$

d'où (10) par (11).

Deuxième cas : $\nu = -\mathrm{K}$, K entier positif.

Alors dans la représentation de $\mathrm{G}(z + \zeta)$ suivant (1) $b_{\mathrm{K}} = \mathrm{A}$ et $a_{\mathrm{K}} = 0$. Quand $r \to 0$, $\mathrm{G}(\zeta + \eta r) \sim \mathrm{A}\eta^{-\mathrm{K}} r^{-\mathrm{K}}$; d'après le 2° du théorème I, on a, quand $t \to \infty$,

$$\theta(t) \sim -\frac{\mathrm{A}}{2i\pi}\frac{t^{\mathrm{K}-1}}{(\mathrm{K}-1)!}(\log \eta' t - \log \overline{\eta' t}) = \frac{\pi - \alpha}{\pi}\frac{\mathrm{A}}{(\mathrm{K}-1)!} t^{\mathrm{K}-1}$$

Or,

$$R^{(M)}(t) \sim \frac{\alpha}{\pi} \frac{A}{(K-1)!} t^{K-1}$$

Donc

$$\frac{d^M}{dt^M} \Omega(t) \sim \frac{A}{(K-1)!} t^{K-1}$$

d'où (10) par (11).

Un énoncé voisin de ce théorème, avec une démonstration ne faisant pas intervenir la transformation de Laplace *directe*, est donné dans G. Doetsch, *Handbuch der Laplace Transformation* (t. I, chap. XV, p. 498; et aussi t. II, chap. VII, § 4).

Remarque. — On peut étendre le théorème III au cas où ζ est un point régulier; alors dans *e*) $\nu = n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ et (10) devient

$$L_t^{-1}G(z) = o(e^{\zeta t} t^{-n-1}),\ t \to \infty.$$

Mais ce résultat est pauvre en comparaison de celui obtenu en considérant un point singulier. Prenons, par exemple, $G(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$; le dernier résultat donne, pour $\zeta = 1$, $L_t^{-1}G(z) = o(e^t t^{-2})$, tandis que le théorème III, avec $\zeta = -1$, $L_t^{-1}G(z) \sim -2e^{-t}$, $t \to \infty$, — d'une plus grande exactitude puisque $L_t^{-1}G(z) = \delta(t) - 2Y(t)e^{-t}$, $\delta(t)$ fonctionnelle de Dirac.

Théorème IV. — « Soit $G(z)$ une fonction douée des qualités *a*), *b*), *c*) et *d*) du théorème III.

1° Si, quand $z \to \zeta$, $G(z) = A(z-\zeta)^\nu \log (z-\zeta) + (0|z-\zeta|^\nu)$, $\nu \neq 0, 1, 2, 3, \ldots$, alors :

$$(12) \qquad L_t^{-1}G(z) \sim \frac{A}{\Gamma(-\nu)} e^{\zeta t} t^{-\nu-1} \log t, \qquad t \to \infty.$$

2° Si, quand $z \to \zeta$, $G(z) = A(z-\zeta)^n \log (z-\zeta) + 0(|z-\zeta|^n)$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, alors :

$$(13) \qquad L_t^{-1}G(z) \sim -A(-1)^n n!\, e^{\zeta t} t^{-n-1}, \qquad t \to \infty. \text{»}$$

Démonstration. — Rappelons que d'après (5) et (4′) et les règles de la transformation de Laplace :

$$(14)\qquad L_z \mathrm{Pf}\, Y(t) \frac{e^{\zeta t}}{\Gamma(-\nu)} t^{-\nu-1} \log t = (z-\zeta)^{\nu}[\log (z-\zeta) - \psi(-\nu)]$$
$$\nu \neq 0, 1, 2, \dots$$

$$(14')\qquad L\mathrm{Pf}\, Y(t)(-1)^{n+1} n!\, e^{\zeta t} t^{-n-1} = (z-\zeta)^{n}[\log (z-\zeta) - \psi(n+1)]$$
$$n = 0, 1, 2, \dots$$

1° Dans ce cas on peut écrire :

$$G(z) - A(z-\zeta)^{\nu}[\log (z-\zeta) - \psi(-\nu)] = O(|z-\zeta|^{\nu}),\ z \to \zeta.$$

En prenant les anti-transformées, on a, au moyen de (14) et du théorème III :

$$L_z^{-1} G(z) - \frac{A}{\Gamma(-\nu)} e^{\zeta t} t^{-\nu-1} \log t = O(e^{\zeta t} t^{-\nu-1}), \qquad t \to \infty$$

d'où (12).

2° On peut écrire :

$$G(z) - A(z-\zeta)^{n}[\log (z-\zeta) - \psi(n+1)] = O(|z-\zeta|^{n}),\ z \to \zeta.$$

En prenant les anti-transformées, on a, au moyen de (14′) et de la remarque faite après le théorème III :

$$L_z^{-1} G(z) - A(-1)^{n+1} n!\, e^{\zeta t} t^{-n-1} = o(e^{\zeta t} t^{-n-1}), \qquad t \to \infty$$

d'où (13).

THÉORÈME V. — « Soit $G(z)$ une fonction de la variable complexe z douée des qualités suivantes :

a) $G(z)$ a $P \geq 1$ points singuliers ζ_p et est holomorphe dans le plan échancré par les coupures $(-\infty, \zeta_p)$.

b) Quand $|z| \to \infty$, $|G(z)| = O(e^{c|\mathrm{Re}\, z|})$, c réel.

c) Il existe des nombres M entier ≥ 0, $\eta > 1$ et $\xi > \sup \mathrm{Re}\, \zeta_p$ tels que pour $z = \xi + iy$

$$|z^{-M} G(z)| = O(|y|^{-\eta}), \quad |y| \to \infty.$$

d) $G(z + \zeta_p)$ est du type I.

e) Quand $z \to \zeta_p$, $G(z) \sim A_p(z-\zeta_p)^{\nu_p}$, $\nu_p \neq 0, 1, 2, 3, \dots$

Alors

$$(15)\qquad L_t^{-1} G(z) \sim \Big(\sum_{p'} A_{p'} e^{\zeta_{p'} t}\Big) \frac{t^{-\nu'-1}}{\Gamma(-\nu')}, \qquad t \to \infty,$$

les p' comprenant tous p'_0 tels que $\nu_{p'_0} = \nu' = \inf \nu_{p''_0}$, et les p'_0 tous les p tels que $\mathrm{R}e\, \zeta_p = \sup \mathrm{R}e\, \zeta_p$. »

Démonstration. — On suppose $\xi > 0$; on peut se ramener à ce cas moyennant une translation sur le z de $\mathrm{G}(z)$ et en multipliant le résultat final par une exponentielle convenable.

Grâce à *a*) et *b*) il existe une distribution à support limité à gauche g_t telle que $g_t = \mathbf{L}_t^{-1}\mathrm{G}(z)$. On a

(16) $$g_t = \frac{d^{\mathrm{M}}}{dt^{\mathrm{M}}}\,\Omega(t)$$

si on pose

$$z^{-\mathrm{M}}\mathrm{G}(z) = v(z)$$

$$\mathbf{L}_t^{-1}v(z) = \Omega(t).$$

Grâce à *c*) on peut appliquer à $v(z)$ la formule d'inversion de Mellin-Fourier :

(17) $$\Omega(t) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathrm{D}} v(z)e^{tz}dz,$$

sur la droite $\mathrm{D} : z = \xi + iy, \ -\infty < y < +\infty$.

Si l'origine n'est pas parmi les $\mathrm{P}\zeta_p$ donnés, on le désignera par ζ_0 et dans la suite on fera varier p de 0 à P. Si l'origine est parmi les ζ_p donnés, on fera varier p seulement de 1 à P.

En posant $z - \zeta_p = \mathrm{Z}_p$, on a, d'après *d*), au voisinage de ζ_p :

$$v(z) = h_p(z) + \sum_{k=0}^{\mathrm{K}_p}(b_{pk} + a_{pk}\log \mathrm{Z}_p)\mathrm{Z}_p^{-k} + \sum_{j=0}^{\mathrm{J}_p}(\beta_{pj} + \alpha_{pj}\log \mathrm{Z}_p)\mathrm{Z}_p^{-\nu_{pj}}$$

$\nu_{pj} > 1$ non entier, $h_p(z) = 0(|\,\mathrm{Z}_p\,|^{\gamma})$, $\gamma > -1$.

On pose

$$\mathrm{R}_p(t) = \sum_{k=1}^{\mathrm{K}_p}\frac{1}{(k-1)\,!}\,b_{pk}t^{k-1}.$$

La considération du contour ci-contre et l'extension du théorème de Cauchy à laquelle nous avons déjà fait allusion, appliquées à (17), donnent, pour $t > c$:

$$\Omega(t) = \frac{-1}{2i\pi}\sum_p\left[\mathrm{P}f\int_0^{\infty} v(\zeta_p + e^{i\pi}r)e^{t(\zeta_p - r)}dr - \mathrm{P}f\int_0^{\infty} v(\zeta_p + e^{-i\pi}r)e^{t(\zeta_p - r)}dr\right]$$
$$+ \sum_p e^{\zeta_p t}\mathrm{R}_p(t),$$

ou

$$\Omega(t) = \sum_p e^{\zeta_p t}[\theta_p^{(0)}(t) + R_p(t)]$$

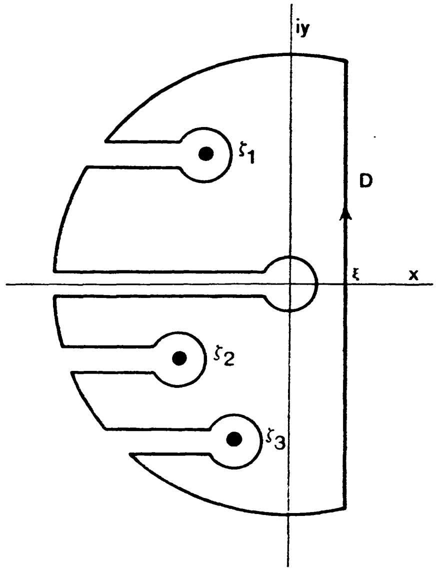

FIG. 2.

au moyen de la transformation de Laplace directe :

$$\theta_p^{(m)}(t) = \mathrm{L}_t \mathrm{P}f \frac{(-r)^m}{2i\pi} [v(\zeta_p + e^{-i\pi}r) - v(\zeta_p + e^{i\pi}r)]$$

$\theta_p^{(0)}(t)$ et ses dérivées (au sens ordinaire) $\theta_p^{(m)}(t)$ sont continues pour $t > c$; donc *sur cet intervalle*, d'après (15) :

(18) $$g_t = \Omega^{(\mathrm{M})}(t) = \mathrm{U}(t) + \mathrm{V}(t)$$

où

$$\mathrm{U}(t) = \sum_p e^{\zeta_p t}\left[\theta_p^{(0)}(t) + \sum_{m=1}^{\mathrm{M}} c_m \theta_p^{(m)}(t)\right]$$

c_m, coefficients indépendants de t,

$$\mathrm{V}(t) = \sum_p \frac{d^{\mathrm{M}}}{dt^{\mathrm{M}}} e^{\zeta_p t} \mathrm{R}_p(t).$$

D'après *e*) :

$$\frac{(-r)^m}{2i\pi}[v(\zeta_p + e^{-i\pi}r) - v(\zeta_p + e^{i\pi}r)] \sim A_p \frac{(-1)^m}{\pi\zeta_p^M} \sin(\nu_p + 1)\pi r^{\nu_p - m}$$

si $\nu \neq -1, -2, -3, \ldots$, quand $r \to 0$. D'après le théorème I :

$$\theta_p^{(m)}(t) \sim A_p \frac{(-1)^m}{\pi\zeta_p^M} \Gamma(\nu_p - m + 1) \sin(\nu_p + 1)\pi t^{-\nu_p + m - 1}, \qquad t \to \infty.$$

Si $\nu_p = -n_p$, n_p entier > 0, d'après *d*) et *e*) on a :

$$\frac{(-r)^m}{2i\pi}[v(\zeta_p + e^{-i\pi}r) - v(\zeta_p + e^{i\pi}r)] = 0(r^{-n_p + \beta - m}), \qquad r \to 0.$$

$\beta > 0$ non entier. D'après le théorème I

$$\theta_p^{(m)}(t) = 0(t^{n_p - \beta + m - 1}), \qquad t \to \infty.$$

Il s'ensuit que si ν' n'est pas un entier < 0,

$$\text{(19)} \qquad U(t) \sim \left(\sum_{p'} A_{p'} e^{\zeta_{p'} t}\right) \frac{t^{-\nu' - 1}}{\Gamma(-\nu')}, \qquad t \to \infty,$$

tandis que si ν' est un entier < 0,

$$\text{(19')} \qquad U(t) = 0(t^{-\nu' - \beta - 1}).$$

D'autre part, quand $t \to \infty$,

$$V(t) \sim R^{(M)}(t) + \sum_{p_0} \zeta_{p_0}^M e^{\zeta_{p_0} t} R_{p_0}(t)$$

les p_0 comprenant tous les p tels que $\zeta_p \neq 0$.

Si l'origine n'est pas parmi les ζ_p, $1 \leq p \leq P$, donnés,

$$R^{(M)}(t) = R_0^{(M)}(t) = 0,$$

car $R_0(t)$ est un polynôme de degré $M - 1$. Si l'un des ζ_p donnés est à l'origine, soit $\zeta_Q = 0$, alors

$$R^{(M)}(t) \sim \frac{1}{(K_Q - M - 1)!} b_{K_Q Q} t^{K_Q - M - 1}, \qquad t \to \infty.$$

En posant $\chi = \sup K_{p''_0}$, p''_0 comprenant tous les p_0 tels que

$$Re\, \zeta_{p_0} = \sup Re\, \zeta_{p_0}$$

$$\sum_{p_0} \zeta_{p_0}^{M} e^{\zeta_{p_0} t} R_{p_0}(t) \sim \frac{t^{\chi-1}}{(\chi-1)\,!} \sum_{p''_0} \zeta_{p''_0}^{M} b_{\chi_{p''_0}} e^{\zeta_{p''_0} t}$$

Les p''_0 sont contenus dans les p'_0.

Si $\sup\limits_{1 \leqslant p \leqslant P} Re\, \zeta_p \neq 0$, on a donc

$$\text{(20)} \qquad V(t) \sim \frac{t^{\chi-1}}{(\chi-1)\,!} \sum_{p''_0} \zeta_{p''_0}^{M} b_{\chi_{p''_0}} e^{\zeta_{p''_0} t}$$

Si ν' n'est pas un entier < 0, χ qui est un entier est inférieur à $-\nu'$, et (18) (19) et (20) donnent (15). Si ν' est un entier < 0, $\chi = -\nu'$, et (18) (19') et (20) donnent

$$g_t \sim \frac{t^{\chi-1}}{(\chi-1)\,!} \sum_{p'} \zeta_{p'}^{M} b_{\chi_{p'}} e^{\zeta_{p'} t} = \frac{t^{-\nu'-1}}{(-\nu'-1)\,!} \sum_{p'} A_{p'} e^{\zeta_{p'} t}$$

qui est (15).

Si $\sup\limits_{1 \leqslant p \leqslant P} Re\, \zeta_p = 0$, on a, quand $t \to \infty$,

$$\text{(20')} \qquad V(t) \sim \frac{t^{K_Q - M - 1}}{(K_Q - M - 1)\,!} b_{K_Q Q} + \frac{t^{\chi-1}}{(\chi-1)\,!} \sum_{p''_0} \zeta_{p''_0}^{M} b_{\chi_{p''_0}} e^{\zeta_{p''_0} t}.$$

Si alors ν' n'est pas un entier < 0, les entiers χ et $K_Q - M$ sont inférieurs à $-\nu'$ et $g^t \sim U(t)$, d'où (15). Si ν' est un entier < 0, ou bien $\chi = -\nu'$ et $K_Q - M < \chi$,

$$\zeta_{p''_0}^{M} b_{\chi_{p''_0}} = A_{p''_0}\,;$$

ou bien

$$\chi = K_Q - M = -\nu', \qquad b_{K_Q Q} = A_Q\,;$$

ou bien

$$K_Q - M = -\nu' \text{ et } \chi < K_Q - M.$$

Dans ces trois cas (20') (19') et (18) conduisent à (15).

Comme exemples simples, le théorème V s'applique à $1/(1 + z^2)$ et $z/(1 + z^2)$ (cf. la remarque que nous avons faite au début).

THÉORÈME VI. — « Soit $G(z)$ une fonction de la variable complexe z holomorphe dans domaine Δ contenant le secteur défini par

$$-\alpha \leq \arg(z - \xi_0) \leq \alpha, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi, \xi_0 \text{ réel.}$$

1° Si, quand $z \to \infty$ dans Δ,

$$G(z) \sim Ae^{-cz}z^{-\nu}, \ c \text{ réel}, \ \nu > 0 \text{ non entier},$$

alors :

$$\mathbf{L}_t^{-1}G(z) = 0, \qquad \text{pour} \qquad t < c, \tag{21}$$

$$\mathbf{L}_t^{-1}G(z) \sim \frac{A}{\Gamma(\nu)}(t-c)^{\nu-1}, \quad t \to c^+. \tag{21'}$$

2° Si, quand $z \to \infty$ dans Δ,

$$G(z) = Ae^{-cz}z^{-n} + 0(e^{-cz}z^{-n-\beta})$$

c réel, n entier > 0, $0 < \beta < 1$, alors :

$$\mathbf{L}_t^{-1}G(z) = 0, \qquad \text{pour} \qquad t < c, \tag{22}$$

$$\mathbf{L}_t^{-1}G(z) \sim \frac{A}{(n-1)\,!}(t-c)^{n-1}, \qquad t \to c^+. \text{ »} \tag{22'}$$

Démonstration. — 1° Posons

$$w(z) = z^{-1}e^{c(z-X)}G(z - X), \qquad X > \xi_0,$$

$$\Phi(t) = \mathbf{L}_t^{-1}w(t)$$

$$\theta(t) = e^{-Xt}\frac{d}{dt}\Phi(t) \tag{23}$$

d'où :

$$\mathbf{L}_t^{-1}G(z) = \theta(t - c) \tag{24}$$

$\Phi(t)$ est une fonction *continue* donnée par l'intégrale de Mellin-Fourier :

$$\Phi(t) = \frac{1}{2i\pi}\int_D w(z)e^{tz}dz,$$

prise sur la droite D : $z = \xi + iy$, $-\infty < y < \infty$, $\xi > 0$. On se reportera à la figure 1.

Pour $t < 0$, $\Phi(t) = 0$. On le montre en appliquant le théorème de Cauchy à $w(z)e^{tz}$ pour le contour ABQ, Q arc de cercle centré sur l'origine, et en faisant tendre vers l'infini le rayon de ce cercle.

Pour $t > 0$, on applique l'extension du théorème de Cauchy à laquelle nous avons fait allusion dans la démonstration du théorème III :

$$\Phi(t) = \frac{-1}{2i\pi}\left[\int_{D_1} w(z)e^{tz}dz + \int_{D_2} w(z)e^{tz}dz\right] + \frac{\alpha}{\pi}e^{-cX}G(-X)$$
$$= \frac{1}{2i\pi}[\eta L_{\eta' t} w(\eta r) - \bar{\eta} L_{\bar{\eta}' t} w(\bar{\eta} r)] + \frac{\alpha}{\pi}e^{-cX}G(-X)$$

où $\eta = e^{i\alpha}$, $\eta' = e^{i(\alpha-\pi)}$, r variant de 0 à ∞.

On a donc, par (23) et les règles de la transformation de Laplace :

$$\theta(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \dfrac{1}{2i\pi}[L_{\eta' t}\eta e^{c\eta r}G(\eta r) - L_{\bar{\eta}' t}\bar{\eta} e^{c\bar{\eta} r}G(\bar{\eta} r)], & t > 0. \end{cases} \tag{25}$$

Or, quand $r \to \infty$, $\eta e^{c\eta r}G(\eta r) \sim A\eta^{-\nu+1}r^{-\nu}$, donc d'après le 1° du théorème II

$$L_{\eta' t}\eta e^{c\eta r}G(\eta r) \sim A\Gamma(-\nu+1)\left(\frac{\eta}{\eta'}\right)^{-\nu+1} t^{\nu-1}, \qquad t \to 0^+,$$

puis

$$\theta(t) \sim A\Gamma(-\nu+1)\frac{e^{i(-\nu+1)\pi} - e^{-i(-\nu+1)\pi}}{2i\pi} t^{\nu-1} = \frac{A}{\Gamma(\nu)} t^{\nu-1},$$

et enfin (21) et (21') par (24) et (25).

2° $\qquad G(z) - Ae^{-cz}z^{-n} = O(e^{-cz}z^{-n-\beta})$, $z \to \infty$ dans Δ.

On applique le résultat précédent :

$$L_t^{-1}G(z) - Ae^{-cz}z^{-n} = \begin{cases} 0 & t < c \\ O((t-c)^{n+\beta-1}), & t \to c^+. \end{cases}$$

Et d'en déduire (22) et (22'), car (cf. (4'))

$$L_t^{-1}e^{-cz}z^{-n} = (n-1)!\, Y(t-c)(t-c)^{n-1}.$$

La démonstration employée pour la première partie de ce théorème conduit aussi au résultat formel suivant :

« Si, quand $z \to \infty$ dans Δ, $G(z) \sim Ae^{-cz}z^{\lambda}$, $\lambda \geqslant 0$, alors

$$L_t^{-1}G(z) = \frac{A}{\Gamma(-\lambda)}(t-c)^{-\lambda-1} + o((t-c)^{-\lambda-1}), \qquad t \to c^+. \text{ »}$$

Malheureusement, cette formule n'a pas de sens, $L_t^{-1}G(z)$ étant dans ce cas une *distribution*, $o((t-c)^{-\lambda-1})$ n'ayant pas de signification pour les distributions. Par exemple : considérons $0 < \beta' < \beta < 1$, $n = 1, 2, \ldots$,
$G(z) = \Gamma(-n-\beta)z^{n+\beta-1} + \Gamma(-n-\beta')z^{n+\beta'-1} + z^{n-1} \sim \Gamma(-n-\beta)z^{n+\beta-1}$

$z \to \infty$;

$$g_t = \mathbf{L}_t^{-1}G(z) = \mathrm{Pf}\,Y(t)(t^{-n-\beta} + t^{-n-\beta'}) + \delta^{(n-1)}(t) ;$$

on ne peut dire ni $g_t \sim \mathrm{Pf}\,Y(t)^{-n-\beta}$, ni $g_t = \mathrm{Pf}\,Y(t)t^{-n-\beta} + o(t^{-n-\beta})$, quand $t \to 0$, car les produits $t^{n+\beta}g^t$ et $t^{n+\beta}\delta^{(n-1)}(t)$ ne sont pas définis. ($\delta^{(n-1)}(t)$ est la dérivée d'ordre $n - 1$ de la distribution de Dirac).

Voici donc un complément pour le théorème VI.

THÉORÈME VII. — « Soit $G(z)$ une fonction de la variable complexe z holomorphe dans un domaine contenant le secteur défini par

$$-\alpha \leq \arg(z - \xi_0) \leq \alpha, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi, \xi_0 \text{ réel.}$$

Si, quand $z \to \infty$ dans ce domaine, on a, pour un certain entier positif n,

$$\frac{d^n}{dz^n}G(z) \sim Ae^{-cz}z^{-\nu}, \ c \text{ réel}, \qquad \nu > 0,$$

alors

$$t^n\mathbf{L}_t^{-1}G(z) = 0, \qquad \text{pour} \qquad t < c,$$

$$t^n\mathbf{L}_t^{-1}G(z) \sim A\frac{(-1)^n}{\Gamma(\nu)}(t - c)^{\nu-1}, \qquad t \to c^+. \text{»}$$

Pour le démontrer, il suffit d'appliquer le théorème VI à $\frac{d^n}{dz^n}G(z)$ qui est la transformée de $(-t)^n\mathbf{L}_t^{-1}G(z)$.

Rappelons que si $t^nT = f(t)$ ou $\mathrm{Pf}f(t)$, la distribution T est alors égale à $\mathrm{Pf}f(t)/t^n +$ une combinaison linéaire arbitraire des $\delta(t)$ et $\delta^{(j)}(t), 1 \leq j \leq n-1$.

Transformation de Fourier. — Moyennant adaptation, les méthodes employées pour démontrer les théorèmes IV, V et VI peuvent servir à établir des résultats analogues pour la transformation de Fourier. En effet, si $v(z)$ est telle que $v(\xi + iy) = V(y)$, on a

$$-ie^{-\xi t}\int_D v(z)e^{tz}dz = \int_{-\infty}^{\infty} V(y)e^{ity}dy$$

transformée de Fourier de $V(y)$.

Je remercie M. le Professeur R. Fortet pour l'idée de cet article et M. le Professeur H. Delange pour ses précieux conseils (4).

(4) Parmi les travaux d'Hubert Delange pouvant intéresser le lecteur : Généralisation du théorème de Ikehara. *Ann. École Norm.*, t. 71, p. 213. Quelques théorèmes taubériens relatifs à l'intégrale de Laplace. Università e Politecnico di Torino, Seminario matematico, 14. Théorèmes taubériens relatifs à l'intégrale de Laplace. *Journal de Math.*, t. 42, 1963, p. 253-309.

(Manuscrit reçu le 19 juillet 1965).