

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

LOUIS ROBIN

**Diffraction d'une onde électromagnétique plane
par un cylindre elliptique d'axe parallèle à l'onde.
Extension à une bande plane et à une fente à
bords parallèles dans un plan**

Annales de l'I. H. P., section A, tome 3, n° 2 (1965), p. 183-194

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1965__3_2_183_0

© Gauthier-Villars, 1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Diffraction
d'une onde électromagnétique plane
par un cylindre elliptique d'axe parallèle à l'onde.
Extension à une bande plane
et à une fente à bords parallèles dans un plan

par

Louis ROBIN

(Centre National d'Études des Télécommunications).

SOMMAIRE. — Voir le plan et l'introduction.

PLAN. — 1. Introduction. 2. Cas du cylindre elliptique de section quelconque. 3. Étude de la convergence des séries obtenues. 4. Cas de la bande plane. 5. Cas de la fente à bords parallèles dans un plan. 6. Cas où le point d'observation est très loin du cylindre (de la bande ou de la fente). 7. Autres composantes du champ électromagnétique. Bibliographie.

I. — INTRODUCTION

Le présent article se rattache à trois Notes aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (10). Le problème est résolu rigoureusement au moyen des fonctions de Mathieu et des fonctions modifiées de Mathieu. Les cas des deux polarisations sont traités, correspondant soit au vecteur électrique incident, soit au vecteur magnétique incident parallèle à l'axe du cylindre.

Le problème de la diffraction d'une onde plane par un cylindre elliptique a déjà été traité par différents auteurs [5] [6] [7] [8] [9], mais ceux-ci

s'attachent au cas où la longueur d'onde λ est grande par rapport à la distance focale $2c$ de l'ellipse de section droite, parce que les séries obtenues convergent plus rapidement dans ce cas. Comme nous le verrons au paragraphe 3, la convergence de ces séries reste bonne lorsque au contraire la longueur d'onde est petite par rapport à cette distance focale. Il faut retenir davantage de termes dans ces séries, mais cela ne doit pas constituer un inconvénient grave, avec les machines à calcul puissantes dont on dispose actuellement et les procédés de l'analyse numérique.

Ce problème du mode de convergence des séries qui expriment le champ électromagnétique dans le cas de la diffraction par un cylindre elliptique est, à notre connaissance, traité ici pour la première fois. Comme nous le verrons aussi à la fin du paragraphe 3, la convergence n'est pas uniforme par rapport au paramètre $h = \frac{\pi c}{\lambda}$, lorsque ce paramètre parcourt tout le demi-axe réel, $h \geq 0$. Il en résulte qu'on ne peut pas obtenir d'expression valable du champ électromagnétique en reportant dans ces séries les expressions asymptotiques, $h \rightarrow +\infty$, des diverses fonctions de Mathieu et modifiées de Mathieu qui y figurent. Les formules des deuxième et troisième Notes de [10], exprimant E et H, dans ce cas $h \gg 1$, sont donc inexactes. Par contre, les formules de ces deux Notes, relatives aux valeurs asymptotiques correspondantes des fonctions de Mathieu et modifiées de Mathieu gardent toute leur valeur et peuvent être utilisées pour d'autres applications.

Le problème de la diffraction par une bande à bords parallèles dans un plan est aussi, à notre connaissance, traité rigoureusement et complètement pour la première fois.

II. — CAS DU CYLINDRE ELLIPTIQUE DE SECTION QUELCONQUE

Nous prenons des coordonnées du cylindre elliptique, t et z , reliées aux coordonnées cartésiennes correspondantes, x et y , par la formule

$$(1) \quad x + iy = c (\operatorname{ch} z \cos t + i \operatorname{sh} z \sin t),$$

c désigne la demi-distance focale du système double orthogonal d'ellipses et d'hyperboles homofocales.

Le cylindre elliptique diffractant correspond à $z = z_0$ et les deux demi-axes de sa section droite sont :

$$(2) \quad a = c \operatorname{ch} z_0, \quad b = c \operatorname{sh} z_0.$$

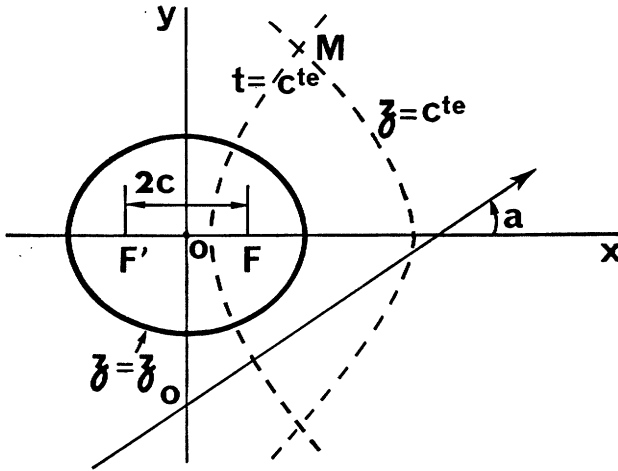


FIG. 1. — Coordonnées du cylindre elliptique, cylindre diffractant, onde plane incidente.

L'axe du cylindre est perpendiculaire au plan (x, y) et l'onde incidente est parallèle à cet axe. Elle dépend du temps τ , au moyen du facteur $e^{i\omega\tau}$, et l'axe Ox fait l'angle α avec la direction de propagation de cette onde. Nous supposons que le champ électrique correspondant \vec{E} est parallèle aux génératrices du cylindre (*polarisation horizontale*).

L'équation de Helmholtz se sépare en une équation de Mathieu vérifiée par les fonctions angulaires (dépendant de t) :

$$(3) \quad \frac{d^2u}{dt^2} + (\lambda - 2h^2 \cos 2t)u = 0$$

et une équation de Mathieu modifiée, vérifiée par les fonctions radiales (dépendant de z) :

$$(4) \quad \frac{d^2u}{dz^2} - (\lambda - 2h^2 \operatorname{ch} 2z)u = 0.$$

Nous avons pour l'onde incidente [I, p. 185] :

$$(5) \quad E = E_0 e^{-ik(x \cos \alpha + y \sin \alpha)} = 2E_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n ce_n(\alpha; h^2) \times ce_n(t; h^2) Mc_n^{(1)}(z; h) + 2E_0 \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n se_n(\alpha; h^2) se_n(t; h^2) \times Ms_n^{(1)}(z; h),$$

où E_0 est une constante et où ce_n et se_n sont les fonctions de Mathieu, classiques, normées par

$$\int_0^{2\pi} ce_n^2(t; h^2) dt = \int_0^{2\pi} se_n^2(t; h^2) dt = \pi;$$

$Mc_n^{(1)}$ et $Ms_n^{(1)}$ sont les fonctions de Mathieu modifiées, d'exposants caractéristiques respectifs n et $-n$ et définies par leurs expressions asymptotiques pour $z \rightarrow \infty$:

$$Mc_n^{(1)}(z; h) \simeq Ms_n^{(1)}(z; h) \simeq J_n(2h \operatorname{ch} z),$$

les J_n sont les fonctions de Bessel classiques et

$$(6) \quad h = \frac{kc}{2}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \lambda : \text{longueur d'onde.}$$

A l'onde incidente (5) s'ajoute une onde diffractée, de façon que le champ électrique total, qui est parallèle à l'axe du cylindre $z = z_0$, soit nul sur ce cylindre supposé *parfaitement conducteur*.

Ce champ électrique total a pour expression :

$$(7) \quad E = 2E_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n ce_n(\alpha; h^2) ce_n(t; h^2) \left[Mc_n^{(1)}(z; h) - \frac{Mc_n^{(1)}(z_0; h)}{Mc_n^{(4)}(z_0; h)} Mc_n^{(4)}(z; h) \right] \\ + 2E_0 \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n se_n(\alpha; h^2) \times se_n(t; h^2) Ms_n^{(1)}(z; h) - \frac{Ms_n^{(1)}(z_0; h)}{Ms_n^{(4)}(z_0; h)} Ms_n^{(4)}(z; h) \right].$$

Les fonctions $Mc_n^{(4)}$ et $Ms_n^{(4)}$, solutions de l'équation modifiée (4), sont choisies de façon que l'onde diffractée satisfasse à la condition de rayonnement de Sommerfeld. Il en est bien ainsi, puisque, pour $z \rightarrow \infty$,

$$Mc_n^{(4)}(z; h) \simeq Ms_n^{(4)}(z; h) \simeq H_n^{(2)}(2h \operatorname{ch} z),$$

où $H_n^{(2)}$ est la fonction de Hankel classique.

Dans le cas de la *polarisation verticale*, c'est le champ magnétique qui est parallèle aux génératrices du cylindre diffractant. Le champ électrique est normal à celui-ci et sur le cylindre $z = z_0$, nous devons avoir $E_t = 0$.

L'équation de Maxwell,

$$(7 \text{ bis}) \quad i\epsilon\omega \vec{E} = \operatorname{rot} \vec{H} \quad \text{entraîne} \quad \left. \frac{\partial H}{\partial z} \right|_{z=z_0} = 0.$$

La formule (7) est alors remplacée par

$$\begin{aligned}
 (8) \quad H = & 2H_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n ce_n(\alpha; h^2) ce_n(t; h^2) \left[Mc_n^{(1)}(z; h) - \frac{Mc_n^{(1)'}(z_0; h)}{Mc_n^{(4)'}(z_0; h)} \right] Mc_n^{(4)}(z; h) \\
 & + 2H_0 \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n se_n(\alpha; h^2) se_n(t; h^2) \\
 & \times \left[Ms_n^{(1)}(z; h) - \frac{Ms_n^{(1)'}(z_0; h)}{Ms_n^{(4)'}(z_0; h)} Ms_n^{(4)}(z; h) \right],
 \end{aligned}$$

H_0 est une constante et le signe prime indique la dérivation par rapport à z , prise pour $z = z_0$.

III. — ÉTUDE DE LA CONVERGENCE DES SÉRIES OBTENUES

Nous savons que les développements des fonctions, qui figurent dans (7) et (8), exprimés suivant les puissances de h , sont en même temps asymptotiques en $\frac{1}{n}$ [I, p. 89, théorème 10].

Pour ce_n et se_n , nous avons [1, p. 125] :

$$(9) \quad \begin{cases} ce_n(z; h^2) = \cos nz + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right), \\ se_n(z; h^2) = \sin nz + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right). \end{cases}$$

Pour $Mc_n^{(1)}$ et $Ms_n^{(1)}$ nous appliquons les quatre formules (46), p. 205 de [I]. La première s'écrit :

$$(10) \quad Mc_{2n}^{(1)}(z; h) = \frac{(-1)^n A_0^{2n}(h^2)}{ce_{2n}(0; h^2) ce_{2n}\left(\frac{\pi}{2}; h^2\right)} Ce_{2n}(z; h^2)$$

où :

$$Ce_{2n}(z; h^2) = ce_{2n}(iz; h^2) \quad \text{et où} \quad A_0^{2n}(h^2)$$

est le terme constant du développement de $ce_{2n}(z, h^2)$ en série de cosinus.

Nous avons [I, p. 122 et 125] :

$$(11) \quad A_0^{2n}(h^2) \simeq \frac{\left(\frac{h}{2}\right)^{2n}}{n(2n-1)!}$$

Et les expressions asymptotiques des autres quantités qui figurent dans (10) résultent de (9) qui s'applique aussi si z est complexe. Nous obtenons ainsi :

$$(12) \quad \text{Mc}_{2n}^{(1)}(z; h) \simeq \frac{h^{2n} \operatorname{ch} 2nz}{2^{2n-1}(2n)!}.$$

Les calculs sont analogues pour $\text{Mc}_{2n+1}^{(1)}$, $\text{Ms}_{2n+1}^{(1)}$ et $\text{Ms}_{2n+2}^{(1)}$. Il vient finalement pour $z > 0$:

$$(13) \quad \text{Mc}_n^{(1)}(z; h) \simeq \text{Ms}_n^{(1)}(z; h) \simeq \frac{h^n e^{nz}}{2^n n!}.$$

Ces formules peuvent être dérivées par rapport à z :

$$(14) \quad \text{Mc}_n^{(1)'}(z; h) \simeq \text{Ms}_n^{(1)'}(z; h) \simeq \frac{h^n e^{nz}}{2^n (n-1)!}.$$

Restent les fonctions $\text{Mc}_n^{(4)}$, $\text{Ms}_n^{(4)}$ et leurs dérivées par rapport à z . A cet effet, nous appliquons les quatre formules (41), p. 201 de [1], valables et dérivables quel que soit z . Écrivons la première :

$$(15) \quad \text{A}_0^{2n}(h^2) \text{Mc}_{2n}^{(4)}(z; h) = (-1)^n \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \text{A}_{2p}^{2n}(h^2) \text{J}_p(he^{-z}) \text{H}_p^{(2)}(he^z).$$

Pour $h \rightarrow 0$, nous avons :

$$\text{J}_p(he^{-z}) \simeq \frac{\left(\frac{he^{-z}}{2}\right)^p}{p!}, \quad p \geq 0, \quad \text{H}_p^{(2)}(he^z) \simeq \frac{i}{\pi} (p-1)! \left(\frac{2}{he^z}\right)^p, \quad p > 0$$

et pour $p = 0$,

$$\text{H}_0^{(2)}(he^z) \simeq -i \frac{2}{\pi} \text{Cz} \log \frac{h}{2},$$

où C est la constante d'Euler;

$$(16) \quad \begin{cases} \text{A}_{2n}^{2n}(h^2) \simeq 1, & \text{A}_{2p}^{2n}(h^2) = \mathcal{O}(h^{2|n-p|}), \\ \text{A}_0^{2n}(h^2) \simeq \left(\frac{h}{2}\right)^{2n} \frac{1}{n(2n-1)!}. \end{cases}$$

n tendant vers l'infini, le terme correspondant à $p = 0$ dans la série (15) n'intervient évidemment pas, d'après (16), pour déterminer le terme principal de cette série. D'autre part, pour $p > 0$, le produit $\text{J}_p(he^{-z}) \times \text{H}_p^{(2)}(he^z)$ est asymptotiquement indépendant de h . Le terme principal, pour $h \rightarrow 0$ (ou

$n \rightarrow \infty$), de la série (15) est donc, d'après (16), celui qui correspond à $p = n$ et nous obtenons :

$$(17) \quad \text{Mc}_{2n}^{(4)}(z; h) \simeq \frac{i2^{2n}(2n-1)!}{\pi h^{2n} e^{2nz}}.$$

Les calculs sont analogues pour $\text{Mc}_{2n+1}^{(4)}$, $\text{Ms}_{2n+1}^{(4)}$ et $\text{Ms}_{2n+2}^{(4)}$. Il vient finalement :

$$(18) \quad \text{Mc}_n^{(4)}(z; h) \simeq \text{Ms}_n^{(4)}(z; h) \simeq \frac{i2^n(n-1)!}{\pi h^n e^{nz}},$$

$$(19) \quad \text{Mc}_n^{(4)'}(z_0; h) \simeq \text{Ms}_n^{(4)'}(z_0; h) \simeq \frac{-i2^n n!}{\pi h^n e^{nz_0}}.$$

Il nous suffit maintenant de rassembler les formules (9), (13) et (18) pour avoir les expressions asymptotiques, $n \rightarrow \infty$, des termes généraux des deux séries qui figurant dans (7). Pour la première, nous obtenons :

$$(20) \quad (-i)^n \cos n\alpha \cos nt \frac{h^n}{2^{2n} n!} [e^{nz} - e^{-n(z-2z_0)}].$$

Et pour la seconde,

$$(21) \quad (-i)^n \sin n\alpha \sin nt \frac{h^n}{2^{2n} n!} [e^{nz} - e^{-n(z-2z_0)}].$$

La convergence des deux séries de la formule (7) est donc très bonne, *même pour h grand*, à cause de $n!$ au dénominateur, et des calculs numériques sont toujours possibles.

Pour les deux séries de la formule (8), (13) est à compléter par (14) et (18) par (19), nous trouvons pour les deux termes généraux :

$$(-i)^n \cos n\alpha \cos nt \frac{h^n}{2^{2n} n!} [e^{nz} + e^{-n(z-2z_0)}],$$

$$(-i)^n \sin n\alpha \sin nt \frac{h^n}{2^{2n} n!} [e^{nz} + e^{-n(z-2z_0)}].$$

Les mêmes conclusions s'appliquent que pour les deux séries de la formule (7).

Les formules (20) et (21), ainsi que celles relatives au cas de la polarisation verticale, méritent d'ailleurs un examen plus attentif. Le premier terme de chaque crochet est relatif à l'onde incidente plane, le second à l'onde secondaire ou diffractée. Si nous faisons varier z de z_0 à $+\infty$, les deux séries relatives à l'onde plane ne sont pas uniformément convergentes par rapport à z . Et en effet, comme nous le verrons au début du paragraphe 6, en reportant dans la formule (5) les expressions asymptotiques, $z \rightarrow +\infty$,

des fonctions modifiées de Mathieu qui y figurent, on obtient deux séries divergentes. Au contraire, dans les mêmes conditions, les séries relatives à l'onde secondaire sont uniformément convergentes par rapport à z . Il en résulte, comme nous le verrons aussi au paragraphe 6, qu'il n'y a pas de difficulté à reporter dans ces séries les expressions asymptotiques, $z \rightarrow +\infty$, des fonctions modifiées de Mathieu qui y figurent.

Au sujet de la convergence uniforme par rapport à h , le résultat est le même pour les deux ondes incidente et diffractée : il y a seulement convergence uniforme sur une partie bornée ou compacte du demi-axe réel positif. Mais si h parcourt tout le demi-axe $h \geq 0$, il n'y a plus convergence uniforme.

Nous n'avons pas le droit de reporter dans ces séries les expressions asymptotiques, $h \rightarrow +\infty$, des diverses fonctions de Mathieu et modifiées de Mathieu qui y figurent. En le faisant, nous obtenons des séries qui sont encore convergentes mais qui ne représentent plus les ondes dont il s'agit.

IV. — CAS DE LA BANDE PLANE

Soit une bande plane suivant Ox , centrée à l'origine et de largeur $2c$, elle correspond à $z_0 = 0$. (7) et (8) s'écrivent alors :

$$(22) \quad \frac{E}{2E_0} = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n c e_n(\alpha; h^2) c e_n(t; h^2) \left[M c_n^{(1)}(z; h) - \frac{M c_n^{(1)}(0; h)}{M c_n^{(4)}(0; h)} M c_n^{(4)}(z; h) \right] \\ + \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n s e_n(\alpha; h^2) s e_n(t; h^2) M s_n^{(1)}(z; h),$$

$$(23) \quad \frac{H}{2H_0} = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n c e_n(\alpha; h^2) c e_n(t; h^2) M c_n^{(1)}(z; h) \\ + \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n s e_n(\alpha; h^2) s e_n(t; h^2) \left[M s_n^{(1)}(z; h) - \frac{M s_n^{(1)'}(0; h)}{M s_n^{(4)'}(0; h)} M s_n^{(4)}(z; h) \right].$$

V. — CAS DE LA FENTE A BORDS PARALLÈLES DANS UN PLAN

Soit $2c$ la largeur de cette fente, symétrique par rapport à l'origine et pratiquée dans le plan $y = 0$. Nous lui appliquons le théorème de Babinet [11, p. 105-113] qui permet de déduire le champ électromagnétique corres-

pendant à cette fente de celui qui correspond à la bande du paragraphe précédent.

Nous supposons que l'onde incidente va de bas en haut, $0 \leq \alpha \leq \pi$
 Nous étudions d'abord le cas de la *polarisation horizontale*.

Au-dessus du plan fendu, $0 \leq t \leq \pi$, nous appliquons (5-114) de [II] et obtenons :

$$(24) \quad E = 2E_0 \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n se_n(\alpha; h^2) se_n(t; h^2) \times \frac{Ms_n^{(1)}(0; h)}{Ms_n^{(4)}(0; h)} Ms_n^{(4)}(z; h).$$

Au-dessous du plan fendu, $-\pi \leq t \leq 0$, nous appliquons (5-112) de [II]. L'onde plane réfléchie est, r désignant la distance à l'origine :

$$(25) \quad E^{réf} = -E_0 e^{-ikr \cos(t+\alpha)} \\
 = -2E_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \times ce_n(\alpha; h^2) ce_n(t; h^2) Mc_n^{(1)}(z; h) \\
 + 2E_0 \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \times se_n(\alpha; h^2) se_n(t; h^2) Ms_n^{(1)}(z; h).$$

Il vient ainsi :

$$(26) \quad E = 2E_0 \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n se_n(\alpha; h^2) se_n(t; h^2) \\
 \times \left[2Ms_n^{(1)}(z; h) - \frac{Ms_n^{(1)'}(0; h)}{Ms_n^{(4)'}(0; h)} Ms_n^{(4)}(z; h) \right].$$

Cas de la *polarisation verticale*. *Au-dessus* du plan fendu, nous appliquons (5-115) de [II] et obtenons :

$$(27) \quad H = 2H_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n ce_n(\alpha; h^2) ce_n(t; h^2) \frac{Mc_n^{(1)}(0; h)}{Mc_n^{(4)}(0; h)} \times Mc_n^{(4)}(z; h).$$

Au-dessous du plan fendu, nous appliquons (5-113). L'onde réfléchie est cette fois :

$$H^{réf} = H_0 e^{-ikr \cos(t+\alpha)}.$$

Il vient alors :

$$(28) \quad H = 2H_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n ce_n(\alpha; h^2) ce_n(t; h^2) \\
 \times \left[2Mc_n^{(1)}(z; h) - \frac{Mc_n^{(1)}(0; h)}{Mc_n^{(4)}(0; h)} Mc_n^{(4)}(z; h) \right].$$

**VI. — CAS OU LE POINT D'OBSERVATION
EST TRÈS LOIN DU CYLINDRE
(DE LA BANDE OU DE LA FENTE)**

Ce cas correspond à $z \gg 1$. La relation (1) nous donne alors :

$$(29) \quad x \simeq \frac{c}{2} e^z \cos t, \quad y \simeq \frac{c}{2} e^z \sin t, \quad \frac{c}{2} e^z \simeq r,$$

r désignant la distance de l'origine au point d'observation. Et (6) :

$$(30) \quad he^z = k \frac{c}{2} e^z \simeq kr.$$

Nous remplaçons maintenant les fonctions de z qui interviennent dans les formules exprimant les résultats, par leurs expressions asymptotiques.

Pour $z \rightarrow +\infty$, nous avons :

$$Mc_n^{(1)}(z; h) \simeq Ms_n^{(1)}(z; h) \simeq J_n(he^z) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \times \cos\left(kr - n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$Mc_n^{(4)}(z; h) \simeq Ms_n^{(4)}(z; h) \simeq H_n^{(2)}(he^z) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{-i\left(kr - n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}.$$

Les expressions asymptotiques, $n \rightarrow +\infty$, du paragraphe 3 nous montrent alors que les deux séries de la formule (5) deviennent divergentes. Nous garderons alors l'onde plane sous sa forme élémentaire, $E_0 e^{-ikr \cos(t-\alpha)}$.

Par contre, les diverses séries, qui expriment l'onde secondaire, H_s ou E_s , restent convergentes et leurs sommes tendent vers zéro comme $\frac{1}{\sqrt{r}}$.

Dans le cas du cylindre elliptique quelconque, nous obtenons ainsi, avec la polarisation horizontale :

$$(31) \quad \frac{E_s}{2E_0} \simeq - \sqrt{\frac{i2}{\pi kr}} e^{-ikr} \left[\sum_{n=0}^{\infty} ce_n(\alpha; h^2) ce_n(t; h^2) \times \frac{Mc_n^{(1)}(z_0; h)}{Mc_n^{(4)}(z_0; h)} \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} se_n(\alpha; h^2) se_n(t; h^2) \frac{Ms_n^{(1)}(z_0; h)}{Ms_n^{(4)}(z_0; h)} \right], \\ \sqrt{i} = e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Et une formule analogue correspondant à la polarisation verticale.

Dans le cas de la *bande* plane, $M_s^{(1)}(0; h) = M_c^{(1)}(0; h) = 0$. Pour la polarisation verticale, nous avons :

$$(32) \quad \frac{H_s}{2H_0} \simeq - \sqrt{\frac{i2}{\pi kr}} e^{-ikr} \sum_{n=1}^{\infty} se_n(\alpha; h^2) se_n(t; h^2) \times \frac{M_s^{(1)'}(0; h)}{M_s^{(4)'}(0; h)}.$$

Considérons maintenant la *fente* à bords parallèles. *Au-dessus* de celle-ci, (24) nous donne :

$$(33) \quad \frac{E}{2E_0} \simeq \sqrt{\frac{i2}{\pi kr}} e^{-ikr} \sum_{n=1}^{\infty} se_n(\alpha; h^2) se_n(t; h^2) \times \frac{M_s^{(1)'}(0; h)}{M_s^{(4)'}(0; h)}.$$

Ici, E représente le champ total, à grande distance. Ce champ s'annule comme $\frac{1}{\sqrt{r}}$.

(27) nous donne une formule analogue.

Au-dessous de la fente, nous déterminons l'onde secondaire. (26) et (28) nous fournissent :

$$(34) \quad \frac{E_s}{2E_0} \simeq - \sqrt{\frac{i2}{\pi kr}} e^{-ikr} \sum_{n=1}^{\infty} se_n(\alpha; h^2) se_n(t; h^2) \times \frac{M_s^{(1)'}(0; h)}{M_s^{(4)'}(0; h)},$$

$$(35) \quad \frac{H_s}{2H_0} \simeq - \sqrt{\frac{i2}{\pi kr}} e^{-ikr} \sum_{n=0}^{\infty} ce_n(\alpha; h^2) ce_n(t; h^2) \times \frac{M_c^{(1)}(0; h)}{M_c^{(4)}(0; h)}.$$

VII. — AUTRES COMPOSANTES DU CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE

Ces autres composantes nous sont données par les équations de Maxwell :

$$\text{rot } \vec{H} = i\varepsilon\omega \vec{E}, \quad \text{rot } \vec{E} = -i\mu\omega \vec{H}.$$

1. Cas de la polarisation horizontale.

Le champ électrique a une seule composante qui est parallèle à l'axe du cylindre (de la bande ou de la fente). C'est celle que nous avons calculée.

Le champ magnétique

$$\vec{H} = \frac{i}{\mu\omega} \text{rot} \vec{E},$$

possède deux composantes perpendiculaires à \vec{E} :

$$(36) \quad \text{rot}_z \vec{E} = \frac{1}{c \sqrt{\text{sh}^2 z + \sin^2 t}} \frac{\partial E}{\partial t},$$

$$(39) \quad \operatorname{rot}_t \vec{E} = \frac{-1}{c \sqrt{\operatorname{sh}^2 z + \sin^2 t}} \frac{\partial E}{\partial z}.$$

Il n'y a pas de difficulté à dériver terme à terme les différentes séries que nous avons écrites. La convergence des séries obtenues reste la même.

2. Cas de la polarisation verticale.

Il n'y a qu'à échanger les rôles du champ électrique et du champ magnétique. Une seule composante, déjà calculée, du champ magnétique, deux composantes du champ électrique.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] MEIXNER et SCHAFKE, *Mathiesche Funktionen und Sphäroidfunktionen*. Springer, 1954.
- [2] R. CAMPBELL, *Théorie générale de l'équation de Mathieu*. Masson, 1955.
- [3] A. ERDELYI *et al.*, *Higher transcendental functions*. McGraw-Hill, 1955.
- [4] R. SIPS, Représentation asymptotique des fonctions de Mathieu et des fonctions sphéroidales. II. *Trans. of Amer. Math. Soc.*, t. 90, février 1959, p. 340-368.
- [5] B. SIEGER, Die Beugung einer ebenen elektrischen Welle an einem Schirm von elliptischen Querschnitt. *Ann. Phys.*, 4^e sér., t. 27, 1908, p. 626-664.
- [6] K. AICHI, Scattering of electromagnetic waves by a small elliptic cylinder. *Proc. of Tokyo Math. Phys. Soc.*, 2^e sér., t. 4, 1907-1908, p. 266-278.
- [7] MORSE et RUBENSTEIN, The diffraction of waves by ribbons and by slits. *The Phys. Review*, t. 54, décembre 1938, p. 895-898.
- [8] C. YEH, The diffraction of waves by a penetrable ribbon. *Jour. of math. Phys.*, t. 4, janvier 1963, p. 65-71.
- [9] BURKE et TWERSKY, On scattering of waves by an elliptic cylinder a. by a semi-elliptic protuberance on a ground plane. *Jour. of optic. Soc. of America*, t. 54, juin 1964, p. 732-744.
- [10] L. ROBIN, Diffraction d'une onde électromagnétique plane par un cylindre elliptique parfaitement conducteur. Étude de la convergence des séries obtenues. *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 259, décembre 1964, p. 4517-4520.
 Diffraction d'une onde électromagnétique plane par un cylindre elliptique parfaitement conducteur. Cas où la longueur d'onde est petite par rapport à la distance focale de l'ellipse de section droite. *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 260, janvier 1965, p. 435-438.
 Diffraction d'une onde électromagnétique plane par une bande plane parfaitement conductrice et par une fente à bords parallèles pratiquée dans un plan parfaitement conducteur. Cas où la longueur d'onde est petite par rapport à la largeur de la bande ou de la fente. *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 260, janvier 1965, p. 811-814.
- [11] P. POINCELOT, *Précis d'Électromagnétisme théorique*. Dunod, 1963.
 (Manuscrit reçu le 22 juin 1965).

Directeur de la publication : P. GAUTHIER-VILLARS.

IMPRIMÉ EN FRANCE

DÉPÔT LÉGAL ÉD. N° 1304a.

IMPRIMERIE BARNÉOUD S. A. LAVAL, N° 5163. 11-1965.

65-01