ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

JEAN-MARC LÉVY-LEBLOND

Une nouvelle limite non-relativiste du groupe de Poincaré

Annales de l'I. H. P., section A, tome 3, nº 1 (1965), p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1965__3_1_1_0>

© Gauthier-Villars, 1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section A :
Vol. III, n° 1, 1965, p. 1-12. *Physique théorique.*

Une nouvelle limite non-relativiste du groupe de Poincaré

par

Jean-Marc LÉVY-LEBLOND
(Laboratoire de Physique Théorique, Orsay).

ABSTRACT. — It is shown that, for the Galilean approximation to the Poincaré group to be valid, not only do we have to consider pure Lorentz transformation with low velocities, but also great time-like intervals. Under the same conditions, the transformation properties of great space-like intervals are described by a group which is a new non-relativistic limit of the Poincaré group. This group is distinct from the Galilei group but is also obtained from the Poincaré group by a contraction. We here study the structure of this group and its Lie algebra ; we construct their irreducible unitary representations. In a world whose invariance group would be this new group, there would be practically no causality. We thus suggest the name « Carroll group » for this degenerate cousin of the Poincaré group. The purpose of this paper is mainly pedagogical, in that we emphasize the meaning and importance of a hitherto implicit condition for the validity of the Galilean approximation.

RÉSUMÉ. — On montre que l'approximation galiléenne au groupe de Poincaré n'est valable que si l'on considère des transformations de Lorentz à faible vélocité mais aussi des intervalles grands de genre temps. Dans les mêmes conditions, les propriétés de transformation d'intervalles grands de genre espace sont décrites par un groupe qui est une nouvelle limite non-relativiste du groupe de Poincaré. Ce groupe, distinct du groupe de Galilée, est obtenu comme lui à partir du groupe de Poincaré par contraction. On étudie ici la structure du groupe et celle de son algèbre de Lie et on établit la forme de leurs représentations unitaires irréductibles. Dans un univers qui aurait ce groupe pour groupe d'invariance, la causalité serait pratique-

ment absente. On propose donc de baptiser ce groupe « groupe de Carroll ». Les buts de cet article sont essentiellement pédagogiques, en ce sens que nous montrons l'importance et le rôle d'une condition de validité de l'approximation galiléenne qui était restée implicite jusqu'ici.

INTRODUCTION

Il est bien connu que le groupe de Poincaré (groupe de Lorentz inhomogène) possède une limite, dite « non-relativiste », qui n'est autre que le groupe de Galilée. La structure du groupe de Poincaré et ses représentations unitaires irréductibles, si importantes pour la physique des particules, sont bien connues depuis le travail historique de Wigner [*1*]. On connaît bien aussi le groupe de Galilée, groupe d'invariance de la Mécanique Quantique non-relativiste, et ses représentations unitaires irréductibles [*2*] [*3*]. Il convient d'ailleurs de rappeler que les représentations d'intérêt physique du groupe de Galilée sont des représentations projectives (i. e. à un facteur près) non-triviales [*4*]. La connexion entre groupe de Poincaré et groupe de Galilée a été clarifiée par la notion de « contraction » des groupes, due à Inönu et Wigner [*5*]. Nous voudrions cependant montrer ici qu'il existe une *autre* limite non-relativiste du groupe de Poincaré que le groupe de Galilée.

Pour ce faire, il nous faut tout d'abord étudier les conditions de validité de l'approximation galiléenne. Considérons pour simplifier un espace de Minkovski à deux dimensions, une d'espace et une de temps. Soit un intervalle $(\Delta x,\ \Delta t)$ entre deux événements. Lors d'une transformation de Lorentz pure définie par une vitesse u, cet intervalle se transforme en $(\Delta x',\ \Delta t')$ où :

$$\left\{\begin{aligned} \Delta x' &= \frac{\Delta x + u\Delta t}{\sqrt{1-u^2}} \\ \Delta t' &= \frac{\Delta t + u\Delta x}{\sqrt{1-u^2}} \end{aligned}\right. \tag{1}$$

(la vitesse de la lumière est prise comme unité).

L'approximation galiléenne est obtenue, pour $u \ll 1$, en posant :

$$\left\{\begin{aligned} \Delta x' &= \Delta x + u\Delta t \\ \Delta t' &= \Delta t, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Mais on voit aisément qu'il ne suffit pas d'avoir $u \ll 1$ pour assurer sa validité. Il *faut* encore :

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \ll 1 \tag{3}$$

puisque $u\Delta x$ doit être négligeable devant Δt, sans que $u\Delta t$ le soit devant Δx. On vérifie aisément que cette approximation est cohérente en ce sens que :

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \ll 1 \qquad \text{et} \qquad u \ll 1 \text{ impliquent } \frac{\Delta x'}{\Delta t'} \ll 1.$$

La condition galiléenne (3) exige donc qu'on ne s'intéresse qu'aux propriétés de transformation à faible vélocité d'*intervalles grands de genre temps*. Cette condition absolument essentielle est toujours implicite (tout au moins l'auteur ne l'a-t-il jamais vue explicitée !) mais il est clair qu'elle est effectivement satisfaite dans toutes les applications courantes de la relativité galiléenne, où les intervalles de temps se mesurent en secondes et ceux d'espace en mètres. Il nous paraît néanmoins pédagogiquement important de mettre systématiquement ce fait en lumière.

Par ailleurs, on est immédiatement tenté par l'idée d'examiner la situation en quelque sorte opposée. Considérons ainsi les propriétés de transformation à faible vélocité d'*intervalles grands de genre espace* :

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \gg 1. \tag{4}$$

On voit facilement que les formules de Lorentz peuvent alors être approchées de façon cohérente par :

$$\begin{cases} \Delta x' = \Delta x \\ \Delta t' = \Delta t + u\Delta x. \end{cases} \tag{5}$$

Nous pouvons illustrer la situation de la façon suivante : soit l'espace de Minkovski M avec son cône de lumière (fig. 1). Si nous choisissons de nouvelles unités de temps τ et de longueur λ telles que $\tau/\lambda \gg 1$ (par exemple $\tau = 1$ sec et $\lambda = 1$ m), le cône de lumière va nous sembler très « aplati » sur le plan $t = 0$ (fig. 1 *a*).

A la limite (singulière) où le cône se confond avec le plan, on obtient la limite galiléenne (2) des équations de Lorentz. A l'inverse, choisissons des unités telles que $\tau/\lambda \ll 1$ (par exemple $\tau = 1$ sec et $\lambda = 1$ année-lumière). Le cône de lumière va alors nous sembler se « refermer » sur l'axe $x = 0$

(fig. 1 *b*). A la limite (singulière aussi) où il se confond avec l'axe on obtient la limite (5) des équations de Lorentz.

Dans l'espace de Minkovski usuel, ce procédé va nous fournir une nouvelle limite non-relativiste du groupe de Poincaré, distincte du groupe de Galilée. Nous proposons de baptiser ce groupe « groupe de Carroll » en l'honneur de l'auteur d' « Alice au Pays des Merveilles » pour des raisons que nous expliciterons plus loin.

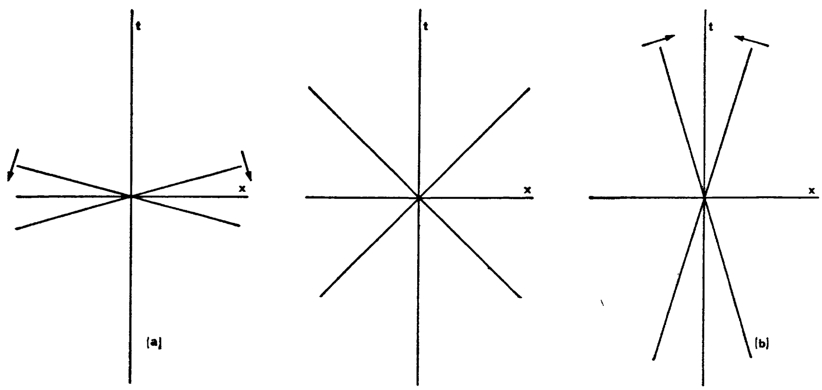

FIG. 1.

Nous étudierons d'abord la structure du groupe et celle de son algèbre de Lie, puis nous établirons la forme de ses représentations unitaires irréductibles. En conclusion, nous ferons quelques remarques sur l'interprétation physique de nos résultats et justifierons le nom de baptême du groupe.

LE GROUPE DE CARROLL ET SON ALGÈBRE DE LIE

Soient $(x_0, \vec{x})$ les coordonnées d'un événement dans l'espace de Minkovski. Soit une transformation quelconque du groupe de Poincaré que nous décomposons (dans l'ordre) en une rotation d'espace R, une transformation de Lorentz pure de vitesse $\vec{\beta}$ et une translation $(a_0, \vec{a})$. Par cette transformation l'événement voit ses coordonnées modifiées en $(x'_0, \vec{x}')$ où :

$$\left\{ \begin{aligned} x'_0 &= \gamma(x_0 + \vec{\beta}\cdot\mathrm{R}\vec{x}) + a_0 \\ \vec{x}' &= \mathrm{R}\vec{x} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\vec{\beta}\cdot\mathrm{R}\vec{x})\vec{\beta} + \gamma\vec{\beta}x_0 + \vec{a} \end{aligned} \right. \tag{6}$$

avec $\gamma = (1 - \vec{\beta}^2)^{-\frac{1}{2}}$.

Nous avons à dessein adopté cette lourde écriture non covariante puisqu'il s'agit de définir des limites non-relativistes.

Posons tout d'abord :

$$t = \frac{1}{c} x_0 \qquad \vec{v} = c\vec{\beta} \qquad b = \frac{1}{c} a_0$$

et envisageons la limite $c \to \infty$ ($t, \vec{v}, b$ fixés). On obtient :

$$\left\{ \begin{aligned} t' &= t + b \\ \vec{x}' &= R\vec{x} + \vec{v}t + \vec{a}, \end{aligned} \right. \tag{7}$$

c'est-à-dire une transformation galiléenne générale. Rappelons que la loi de groupe s'écrit :

$$(b', \vec{a}', \vec{v}', R')(b, \vec{a}, \vec{v}, R) = (b' + b, \vec{a}' + \vec{v}'b + R'\vec{a}, \vec{v}' + R'\vec{v}, R'R). \tag{8}$$

A l'opposé, posons maintenant :

$$t = Cx_0 \qquad \vec{v} = C\vec{\beta} \qquad b = Ca_0$$

et envisageons la limite $C \to \infty$ ($t, \vec{v}, b$ fixés). Il vient :

$$\begin{aligned} t' &= t + \vec{v}.R\vec{x} + b \\ \vec{x}' &= R\vec{x} + \vec{a}. \end{aligned} \tag{9}$$

On obtient ainsi l'élément générique d'un nouveau groupe de transformations à 10 paramètres, sous-groupe du groupe linéaire général GL (4, R), le groupe de Carroll. Comme les groupes de Poincaré et de Galilée, ce groupe est engendré par les rotations spatiales (R), l'analogue des transformations de Lorentz et de Galilée pures, ou transformations de Carroll pures ($\vec{v}$), et les translations d'espace ($\vec{a}$) et de temps (b). La loi de groupe s'écrit :

$$(b', \vec{a}', \vec{v}', R')(b, \vec{a}, \vec{v}, R) = (b' + b + \vec{v}'.R'\vec{a}, \vec{a}' + R'\vec{a}, \vec{v}' + R'\vec{v}, R'R) \tag{10}$$

l'identité est (0, 0, 0, 1) et l'élément générique a pour inverse :

$$(b, \vec{a}, \vec{v}, R)^{-1} = (-b + \vec{a}.\vec{v}, -R^{-1}\vec{a}, -R^{-1}\vec{v}, R^{-1}). \tag{11}$$

On remarque que les translations d'espace-temps forment un sous-groupe abélien invariant maximal. Le groupe apparaît ainsi comme produit semi-direct d'un groupe isomorphe au groupe des déplacements de l'espace euclidien à trois dimensions par un groupe abélien de translations à quatre dimensions.

De la loi de groupe on déduit aisément l'algèbre de Lie du groupe de Carroll. Appelons J_i, K_i, P_i ($i = 1, 2, 3$) les générateurs infinitésimaux des rotations, mouvements uniformes et translations d'espace respectivement et

P_0 le générateur des translations de temps. Il est instructif de comparer les algèbres de Lie du groupe de Carroll et des groupes de Poincaré et Galilée. On a respectivement :

$$
\begin{array}{lll}
[J_i, \; J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k & [J_i, \; J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k & [J_i, \; J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k \\
[J_i, \; K_j] = i\varepsilon_{ijk}K_k & [J_i, \; K_j] = i\varepsilon_{ijk}K_k & [J_i, \; K_j] = i\varepsilon_{ijk}K_k \\
[K_i, K_j] = 0 & [K_i, K_j] = -\, i\varepsilon_{ijk}J_k & [K_i, K_j] = 0 \\
[J_i, \; P_j] = i\varepsilon_{ijk}P_k & [J_i, \; P_j] = i\varepsilon_{ijk}P_k & [J_i, \; P_j] = i\varepsilon_{ijk}P_k \\
[K_i, \; P_j] = i\delta_{ij}P_0 & [K_i, \; P_j] = i\delta_{ij}P_0 & [K_i, \; P_j] = 0 \\
[J_i, \; P_0] = 0 & [J_i, \; P_0] = 0 & [J_i, \; P_0] = 0 \\
[K_i, P_0] = 0 & [K_i, P_0] = iP_i & [K_i, P_0] = iP_i \\
[P_i, \; P_j] = 0 & [P_i, \; P_j] = 0 & [P_i, \; P_j] = 0 \\
[P_i, \; P_0] = 0 & [P_i, \; P_0] = 0 & [P_i, \; P_0] = 0 \\
\boxed{\text{Carroll}} & \boxed{\text{Poincaré}} & \boxed{\text{Galilée}}
\end{array}
$$

On voit clairement sur ces expressions que substituant :

$$K_i \to \varepsilon K_i \qquad\qquad P_i \to \varepsilon P_i$$

dans l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré et prenant la limite (singulière) $\varepsilon \to 0$, on obtient l'algèbre de Lie du groupe de Galilée. Au contraire la substitution :

$$K_i \to \eta K_i \qquad\qquad P_0 \to \eta P_0$$

et la limite $\eta \to 0$, permettant d'obtenir l'algèbre de Lie de notre nouveau groupe. Ainsi la contraction [5] du groupe de Poincaré par rapport au sous-groupe des rotations spatiales et des translations temporelles fournit le groupe de Galilée. Par contre, en contractant le groupe de Poincaré par rapport au sous-groupe des rotations et translations d'espace (groupe euclidien à trois dimensions), on obtient le groupe de Carroll.

L'algèbre de Lie du groupe de Carroll admet pour invariants :

$$I_1 = P_0$$

$$I_2 = (P_0\vec{J} + \vec{P} \wedge \vec{K})^2.$$

LES REPRÉSENTATIONS DU GROUPE

En vue des applications à la Physique Quantique, il est essentiel de connaître les représentations unitaires irréductibles des groupes de Poincaré et de Galilée. On est ainsi tout naturellement conduit à chercher à construire les représentations unitaires irréductibles du groupe de Carroll. En réalité nous voudrions même connaître ses représentations projectives, c'est-à-dire à un facteur près, puisque la Mécanique Quantique décrit l'état d'un système par un rayon plutôt que par un vecteur dans un certain espace de Hilbert. Alors que le groupe de Poincaré ne possède pas de représentations projectives non triviales [*1*] [*4*] [*6*], le groupe de Galilée en possède et ce sont justement les seules qui possèdent une interprétation physique évidente, permettant d'exhiber l'invariance galiléenne de l'équation de Schrödinger [*2*] [*3*] [*4*]. Quelle est la situation pour le groupe de Carroll ?

Bargmann [*4*] a montré que la recherche des représentations projectives d'un groupe de Lie peut s'effectuer par des méthodes infinitésimales. Soit $\mathfrak{L}$ l'algèbre de Lie du groupe. Il s'agit, d'après Bargmann, de déterminer une forme bilinéaire antisymétrique X sur $\mathfrak{L}$ qui obéisse à l'équation :

$$dX(A, B, C) = 0 \qquad \forall\, A, B, C \in \mathfrak{L} \tag{14}$$

où dX est défini par :

$$dX(A, B, C) = X([A, B], C) + X([B, C], A) + X([C, A], B). \tag{15}$$

La représentation projective est triviale si et seulement si il existe une forme linéaire Λ sur $\mathfrak{L}$ telle que :

$$X(A, B) = \Lambda([A, B]). \tag{16}$$

Le groupe de Carroll contient deux sous-groupes $(0, \vec{a}, 0, R)$ et $(0, 0, \vec{v}, R)$ isomorphes au groupe euclidien à trois dimensions qui ne possède pas de représentations projectives non triviales [*4*]. On peut donc écrire :

$$X(J_i, J_j) = X(J_i, K_j) = X(J_i, P_j) = X(K_i, K_j) = X(P_i, P_j) = 0. \tag{17}$$

Par ailleurs les conditions :

$$dX(J_i, J_j, P_0) = 0, \qquad dX(J_i, K_j, P_0) = 0, \qquad dX(J_i, P_j, P_0) = 0 \tag{18}$$

entraînent immédiatement :

$$X(J_i, P_0) = X(K_i, P_0) = X(P_i, P_0) = 0. \tag{19}$$

Reste à calculer $X(K_i, P_j)$. La seule restriction possible provient de la condition :

$$dX(J_i, K_j, P_k) = 0$$

qui, une fois développée, permet d'écrire :

$$X(K_i, P_j) = \frac{1}{3}\,\delta_{ij} \sum_l X(K_l, P_l) = \alpha\delta_{ij}$$

où α est un nombre réel. Mais si l'on définit alors une forme linéaire Λ sur l'algèbre de Lie du groupe de Carroll par :

$$\Lambda(P_0) = \alpha,\ \Lambda(J_i) = \Lambda(K_i) = \Lambda(P_i) = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \tag{20}$$

on a bien :

$$X(A, B) = \Lambda([A, B]) \tag{21}$$

ce qui montre que le groupe de Carroll ne possède que des représentations projectives triviales [*6*].

Pour établir la forme de ces représentations, il suffit de suivre la méthode de Wigner pour le groupe de Poincaré [*1*] [*7*]. De façon générale, soit le groupe $\mathcal{G}$ produit semi-direct du groupe $\mathcal{K}$ par le groupe abélien $\mathcal{T}$. On écrira les éléments de $\mathcal{G}$ sous la forme :

$$g = (t, k) \qquad t \in \mathcal{T} \qquad \text{et} \qquad k \in \mathcal{K} \tag{22}$$

avec la loi de groupe :

$$(t', k')(t, k) = (t' + k'(t), k'k) \tag{23}$$

où $k'(t)$ définit un homomorphisme de $\mathcal{K}$ dans le groupe des automorphismes de $\mathcal{T}$. Soit $\widehat{\mathcal{T}}$ le dual de $\mathcal{T}$. Les représentations unitaires irréductibles de $\mathcal{T}$ sont unidimensionnelles de la forme :

$$t \rightarrow \exp i(s.t) \qquad \text{où} \qquad s \in \widehat{\mathcal{T}}. \tag{24}$$

Le groupe « homogène » $\mathcal{K}$ agit naturellement dans $\widehat{\mathcal{T}}$ en définissant $k(s)$ par :

$$k(s).t = s.k^{-1}(t). \tag{25}$$

Ceci permet de définir les orbites de $\mathcal{K}$ dans $\widehat{\mathcal{T}}$. A chacune de ces orbites V faisons correspondre un espace de Hilbert $\mathcal{H}_V$ de fonctions sur V où le produit scalaire est défini par :

$$(\varphi, \psi) = \int_V d\mu(s)\varphi(s)\psi(s) \tag{26}$$

et où $d\mu(s)$ est une mesure invariante par $\mathcal{K}$, concentrée sur V. Soit encore K_{s_0} le stabilisateur de s_0, i. e. sous-groupe des transformations de $\mathcal{K}$ qui laissent $s_0 \in \widehat{\mathcal{T}}$ invariant. Les stabilisateurs K_{s_0} correspondant à une même orbite V sont isomorphes. Choisissons enfin arbitrairement une fonction $k_{s\leftarrow s_0}$ de V dans $\mathcal{K}$ telle que :

$$k_{s\leftarrow s_0}(s_0) = s. \tag{27}$$

Alors, les résultats de Wigner, généralisés par Mackey [8] nous indiquent que les représentations unitaires irréductibles de $\mathcal{G}$ (à une équivalence près) sont obtenues en choisissant une orbite V de $\mathcal{K}$ dans $\widehat{\mathcal{T}}$ et une représentation unitaire irréductible L du stabilisateur K_{s_0} ($s_0 \in V$) opérant dans un espace vectoriel $\mathcal{H}_L$. Ces représentations opèrent dans $\mathcal{H}_V \otimes \mathcal{H}_L$ suivant :

$$[U(t, k)\Phi]_\alpha(s) = \exp i(s \cdot t) \sum_\beta Q_{\alpha\beta}(s, k)\Phi_\beta(k^{-1}(s)) \tag{28}$$

où

$$Q_{\alpha\beta}(s, k) = L_{\alpha\beta}(k^{-1}_{s\leftarrow s_0} k k_{k^{-1}(s)\leftarrow s_0}). \tag{29}$$

Cette théorie s'applique immédiatement au groupe de Carroll. $\mathcal{K}$ sera le groupe des transformations $(0, 0, \vec{v}, R)$ et $\mathcal{T}$ le groupe des translations $(b, \vec{a}, 0, 1)$. Les représentations irréductibles de $\mathcal{T}$ sont de la forme :

$$(b, \vec{a}) \rightarrow \exp i\,(Eb - \vec{p}\cdot\vec{a}) \tag{30}$$

E et $\vec{p}$ seront évidemment interprétés physiquement comme l'énergie et l'impulsion. Le groupe « homogène » $\mathcal{K}$ agit sur eux suivant :

$$\begin{cases} E' = E \\ \vec{p}' = R\vec{p} + \vec{v}E. \end{cases} \tag{31}$$

On voit alors que dans le cas général $E \neq 0$, les orbites sont les plans $E = C^{te}$. (Si $E = 0$, ce sont des sphères $\vec{p}^2 = C^{te}$). Dans ce cas toujours, le stabilisateur d'un point quelconque du plan est isomorphe au groupe des rotations à trois dimensions. Enfin la mesure :

$$d\mu(E, \vec{p}) = \delta(E - E_0)dEd^3p \tag{32}$$

est une mesure invariante concentrée sur le plan $E = E_0$. Choisissons pour point de référence s_0 sur le plan E, le point $(E, \vec{0})$ et pour fonction $k_{s\leftarrow s_0}$ la transformation de Carroll pure $\left(\frac{\vec{p}}{E}, 1\right)$. Les représentations irréductibles du groupe de Carroll opèrent alors dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_E$ des fonctions de carré sommable sur le plan $E = C^{te}$, isomorphe à l'espace $L^2(\mathbf{R}^3)$ suivant :

$$[U(b, \vec{a}, \vec{v}, R)\Phi]_m(\vec{p}) = e^{i(Eb - \vec{p}\cdot\vec{a})} \sum_{m'} D^s_{mm'}(R)\Phi_{m'}(R^{-1}(\vec{p} - E\vec{v}))$$

où D^s est la représentation irréductible de dimension $2s + 1$ du groupe des rotations ou plutôt de son revêtement universel $SU(2, \mathbf{C})$.

Nous pouvons en tirer les représentations correspondantes de l'algèbre de Lie du groupe de Carroll. Il est intéressant de les comparer aux représentations irréductibles des algèbres de Lie du groupe de Poincaré (opérant dans les fonctions de carré sommable sur l'hyperboloïde $E^2 - \vec{p}^2 = m^2$) et du groupe de Galilée (opérant dans les fonctions de carré sommable sur le paraboloïde $E - \frac{\vec{p}^2}{2m} = \mathcal{V}$). On a ainsi :

Carroll	Poincaré	Galilée
$\vec{J} = -i\vec{p} \wedge \frac{\partial}{\partial \vec{p}} + \vec{S}$	$\vec{J} = -i\vec{p} \wedge \frac{\partial}{\partial \vec{p}} + \vec{S}$	$\vec{J} = -i\vec{p} \wedge \frac{\partial}{\partial \vec{p}} + \vec{S}$
$\vec{K} = iE\frac{\partial}{\partial \vec{p}}$	$\vec{K} = iE\frac{\partial}{\partial \vec{p}} - \frac{1}{E+m}\vec{p} \wedge \vec{S}$	$\vec{K} = im\frac{\partial}{\partial \vec{p}}$
$\vec{P} = \vec{p}$	$\vec{P} = \vec{p}$	$\vec{P} = \vec{p}$
$P_0 = E = C^{te}$	$P_0 = E = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}$	$P_0 = E = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \mathcal{V}.$

Dans ces formules les S_i sont les générateurs infinitésimaux de la représentation D^s de SU(2, C).

On voit clairement la ressemblance entre ces trois types de représentations, et comment on passe aisément de l'une aux autres par contraction.

Les invariants (13) de l'algèbre de Lie du groupe de Carroll deviennent :

$$I_1 = E$$
$$I_2 = E^2 s(s+1)$$

et l'on retrouve bien la caractérisation des représentations unitaires irréductibles du groupe de Carroll par l' « énergie » et le « spin ».

COMMENTAIRES ET CONCLUSION

En ce qui concerne maintenant l'interprétation physique du groupe de Carroll et de ses représentations, nous pouvons faire plusieurs remarques.

Tout d'abord, nous rappellerons que l'argument utilisé par Inönu et Wigner [*2*] pour dénier tout sens physique aux représentations vraies (non-projectives) du groupe de Galilée, repose sur l'inexistence d'états localisables appartenant à l'espace de Hilbert d'une représentation irréductible donnée. La localisabilité est ici entendue au sens de Newton et Wigner [*9*] : un état localisé est orthogonal à tous ses translatés. Or on peut voir aisément qu'une telle difficulté n'existe pas ici et que, tout au moins pour la classe de représentations considérée ici, les états :

$$\Phi_{\vec{a}}(\vec{p})=\exp i(\vec{p}.\vec{a})$$

peuvent être interprétés comme localisés au point a. Ce sont certes des états impropres, n'appartenant pas à l'espace de Hilbert, mais un tel phénomène apparaît déjà en théorie galiléenne et cette difficulté est aisément surmontée.

En réalité, les aspects paradoxaux de l'invariance « carrollienne » proviennent de la condition fondamentale (4) de validité de cette approximation de l'invariance relativiste. Les lois de transformation carrollienne (9) ne peuvent en effet par hypothèse s'appliquer qu'à des intervalles grands de genre espace. Mais deux événements séparés par un tel intervalle sont évidemment totalement disconnectés causalement (les deux événements en question peuvent par exemple avoir lieu l'un sur terre en cet instant précis et l'autre sur Sirius dans une seconde, dans notre système de référence). On peut ainsi prévoir qu'à la limite non-relativiste correspondante la notion de causalité va perdre presque tout contenu. En effet, comme on le voit sur les formules (9), par un changement de système de référence approprié, on peut modifier à plaisir l'intervalle temporel entre deux événements et en particulier changer son signe, excepté dans le cas où l'intervalle spatial entre les deux événements est nul. Autrement dit, l'ombre causale d'un événement donné se réduit au lieu même où se passe cet événement, pour des temps quelconques. Ceci est d'ailleurs parfaitement visible sur la figure 1 où l'on voit à la limite carrollienne les cônes « futur absolu » et « passé absolu » se contracter sur l'axe des temps, la région de l' « ailleurs absolu » envahissant tout l'espace-temps. Remarquons enfin qu'en théorie galiléenne l'intervalle de temps entre deux événements est un invariant; inversement c'est ici la longueur de l'intervalle spatial qui est invariante.

Le comportement d'un éventuel Univers qui serait régi par le groupe d'invariance ici n'est pas sans rappeler celui du « Pays des Merveilles » [*10*]. L'absence de causalité est particulièrement claire dans les aventures d'Alice ainsi que la valeur arbitraire des intervalles de temps (cf. en particulier le chapitre 7, « Un thé de fous »). C'est pourquoi il ne nous a pas paru déplacé d'associer le nom de L. Carroll à cette nouvelle limite non-relativiste du groupe de Poincaré [*11*].

L'utilisation pratique du groupe de Carroll paraît assez problématique pour l'instant. Tout au moins son introduction a-t-elle le mérite pédagogique d'éclaircir une condition jusqu'ici implicite de validité de l'approximation galiléenne. Ajoutons enfin que la Physique Théorique, ces derniers temps, s'est montrée particulièrement accueillante à des groupes de toutes sortes et d'intérêt physique pour le moins douteux dans de nombreux cas; c'est pourquoi nous n'avons pas trop de scrupules à mettre au jour ce cousin dégénéré du groupe de Poincaré.

Je veux remercier ici F. Lurçat et L. Michel pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.

RÉFÉRENCES ET NOTES

[*1*] E. P. Wigner, *Ann. Math.*, t. 40, 1939, p. 149.
[*2*] E. Inönu et E. P. Wigner, *Nuov. Cim.*, t. 9, 1952, p. 705.
M. Hamermesh, *Ann. Phys.*, t. 9, 1960, p. 518.
[*3*] J. M. Lévy-Leblond, *J. Math. Phys.*, t. 4, 1963, p. 776.
[*4*] V. Bargmann, *Ann. Math.*, t. 59, 1954, p. 1.
[*5*] E. Inönu et E. P. Wigner, *Proc. N. A. S., U. S. A.*, t. 39, 1953, p. 510.
E. J. Saletan, *J. Math. Phys.*, t. 2, 1961, p. 1.
[*6*] Nous devrions ici être plus précis : ce sont les groupes de revêtement universel du groupe de Poincaré et de Carroll qui ne possèdent pas de représentations projectives non-triviales [*4*]. Cependant, on obtient ces revêtements universels simplement en remplaçant le groupe des rotations SO(3, **R**) par son revêtement universel SU(2, **C**). Ceci ne fait qu'introduire une ambiguïté de signe qui se manifeste par l'apparition de spins semi-entiers dans les représentations des groupes de Poincaré et de Carroll.
[*7*] Cf. l'exposition par A. S. Wightman dans *Relations de dispersion et particules élémentaires*, p. 181 et seq., cours de l'École d'Été des Houches, 1960, Hermann, Paris, 1960.
[*8*] G. W. Mackey, *Ann. Math.*, t. 55, 1952, p. 101.
[*9*] T. D. Newton et E. P. Wigner, *Rev. Mod. Phys.*, t. 21, 1949, p. 400.
[*10*] L. Carroll, *Alice au Pays des Merveilles.*
[*11*] Ajoutons que la physique moderne doit bien ce modeste hommage à L. Carroll. Après tout, il a été le premier, dans *De l'autre côté du miroir*, à décrire un monde où la parité n'est pas conservée.

(Manuscrit reçu le 25 mars 1965).