ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

PIERRE POLETTI

Le problème de Rainich pour un schéma électromagnétique non linéaire

Annales de l'I. H. P., section A, tome 3, nº 1 (1965), p. 111-126
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1965__3_1_111_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. III, n° 1, 1965, p. 111-126.

Section A :
Physique théorique.

Le problème de Rainich pour un schéma électromagnétique non linéaire

par

Pierre POLETTI
(Institut Henri Poincaré)

SOMMAIRE. — On étudie dans le cadre de la théorie électromagnétique non linéaire de Born-Infeld la résolution du problème de Rainich et on explicite les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un tenseur du second ordre symétrique soit le tenseur d'énergie-impulsion du schéma électromagnétique considéré.

SUMMARY. — This study is devoted to the resolution of the Rainich problem in the case of the non linear electrodynamics of Born-Infeld and gives the necessary and sufficient conditions for a symmetric tensor of rank two to be the energy-momentum tensor of the Born-Infeld theory.

A. — INTRODUCTION

Le tenseur d'énergie-impulsion $\tau_{\mu\nu}$ d'un schéma électromagnétique est généralement défini de manière phénoménologique à partir d'un champ électromagnétique donné géométriquement.

Or, les équations d'Einstein d'un schéma électromagnétique pur :

$$S_{\mu\nu} = \chi\tau_{\mu\nu}$$

lient le tenseur géométrique d'Einstein $S_{\mu\nu}$ au tenseur $\varphi_{\mu\nu}$ par l'intermédiaire du tenseur phénoménologique $\tau_{\mu\nu}$.

Dans ces conditions, il est intéressant de réduire l'étude du champ électromagnétique à celle de $\tau_{\mu\nu}$ et par suite à celle de $S_{\mu\nu}$, ce qui conduit à rechercher les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un tenseur symétrique du second ordre soit effectivement le tenseur d'énergie-impulsion d'un schéma électromagnétique déterminé.

Ce problème est appelé « Problème de Rainich ». Il a été résolu en théorie de Maxwell [Rainich (1925), Misner et Wheeler (1957)].

Nous nous proposons d'étudier ce problème dans le cas d'une théorie non linéaire de l'électromagnétisme, mieux adaptée semble-t-il au caractère non linéaire des équations de la relativité générale.

Le schéma champ électromagnétique de Born-Infeld (1934) a été choisi pour cette étude en raison de sa simplicité.

Dans une première partie nous rappelons l'énoncé du problème, ainsi que l'obtention des théories du type Born-Infeld à partir d'une densité lagrangienne $\mathcal{L}(F, G)$.

Ensuite une étude algébrique du tenseur d'énergie-impulsion de la théorie de Born-Infeld nous conduit, grâce à l'emploi du repère canonique à une représentation simple de ce tenseur. On en déduit les relations algébriques auxquelles il satisfait.

La dernière partie est consacrée à l'étude des relations différentielles que doit vérifier le tenseur $\tau_{\mu\nu}$, afin que les champs qui en sont déduits vérifient les équations de champ de Born-Infeld.

L'ensemble des relations algébriques et différentielles permet au moins dans le cas régulier de Born-Infeld, de donner une solution complète du problème de Rainich.

Bien que cette étude puisse être faite directement dans un espace-temps courbe, il nous a semblé préférable de la faire dans un espace de Minkowski, l'interaction gravitation-électromagnétisme n'y étant pas incluse.

1. Problème de Rainich et théorie de Maxwell.

L'espace-temps de Minkowski étant rapporté à des coordonnées cartésiennes, les composantes de la métrique sont données par :

(1-1) $$g_{\mu\nu} = (-1, -1, -1, +1) \quad , \quad g = \det(g_{\mu\nu}) = -1$$

les équations du champ de Maxwell s'écrivent alors, dans le vide :

(1-2) $$\partial_\nu \overset{*}{\varphi}{}^{\mu\nu} = 0$$

(1-3) $$\partial_\nu \varphi^{\mu\nu} = 0$$

avec :

(1-4) $$\overset{*}{\varphi}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu\rho\sigma} \varphi^{\rho\sigma}$$

le tenseur d'énergie-impulsion conservatif est :

$$t_\mu^{\ \nu} = -\frac{1}{2}(\varphi_{\mu\rho}\varphi^{\nu\rho} + \overset{*}{\varphi}_{\mu\rho}\overset{*}{\varphi}{}^{\nu\rho}). \tag{1-5}$$

On montre que les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un tenseur symétrique $t_{\mu\nu}$ soit le tenseur d'énergie-impulsion de Maxwell sont :

α) Des conditions algébriques portant sur ce tenseur.

β) Des conditions différentielles qui indiquent que le rotationnel d'un vecteur formé à partir de $t_{\mu\nu}$ est nul.

Il est nécessaire de distinguer entre le traitement du cas régulier de Maxwell et du cas singulier [Witten (1962)].

2. Les Théories du « type Born-Infeld ». La théorie de Born-Infeld.

Elles sont obtenues par l'application d'un principe variationnel à une densité lagrangienne $\mathfrak{L}(F, G) = \sqrt{-g}L(F, G)$ formée à l'aide des deux invariants de Maxwell [Kichenassamy et Kremer (1960)]. Les équations du champ sont :

$$\partial_\nu(\sqrt{-g}\overset{*}{\varphi}{}^{\mu\nu}) = 0 \tag{2-1}$$

$$\partial_\nu(\sqrt{-g}\psi^{\mu\nu}) = \partial_\nu\left(2\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\varphi_{\mu\nu}}\right) = 0. \tag{2-2}$$

Le courant est défini phénoménologiquement par :

$$\mathfrak{J}^\mu = \sqrt{-g}j^\mu = \partial_\nu(\sqrt{-g}\varphi^{\mu\nu}). \tag{2-3}$$

La théorie de Born-Infeld se déduit de ce formalisme lorsque L prend la forme particulière :

$$L = (1 + F - G^2)^{1/2} \tag{2-4}$$

d'où :

$$\psi^{\mu\nu} = \frac{\varphi^{\mu\nu} - G\overset{*}{\varphi}{}^{\mu\nu}}{L}. \tag{2-5}$$

On prend comme tenseur d'énergie-impulsion de la théorie de Born-Infeld, le tenseur canonique symétrisé et conservatif :

$$\tau_\mu^{\ \nu} = (L - 1)\delta_\mu^{\ \nu} - \psi^{\nu\rho}\varphi_{\mu\rho} \tag{2-6}$$

qui, en tenant compte de :

$$\varphi_{\mu\rho}\overset{*}{\varphi}{}^{\nu\rho} = G\delta_\mu^{\ \nu} \tag{2-7}$$

peut se mettre sous les formes suivantes :

$$\tau_\mu^{\ \nu} = [(L-1) + G^2L^{-1}]\delta_\mu^{\ \nu} - L^{-1}\varphi_{\mu\rho}\varphi^{\nu\rho} \tag{2-8}$$

$$\tau_\mu^{\ \nu} = \frac{1}{L}[(1 - L + F)\delta_\mu^{\ \nu} - \varphi_{\mu\rho}\varphi^{\nu\rho}]. \tag{2-9}$$

B. — ÉTUDE ALGÉBRIQUE DU TENSEUR DE BORN-INFELD. CONDITIONS ALGÉBRIQUES DU PROBLÈME DE RAINICH

3. Réduction du tenseur d'énergie-impulsion par des systèmes de référence adaptés [Kichenassamy (1959)].

Dans notre système de coordonnées $\varphi_{\mu\nu}$ s'écrit :

$$\varphi_{\mu\nu} = \begin{vmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & E_1 \\ & 0 & B_1 & E_2 \\ (-) & & 0 & E_3 \\ & & & 0 \end{vmatrix} \tag{3-1}$$

On sait que l'emploi d'un repère principal permet de mettre le tenseur d'énergie-impulsion sous une forme simple. Cela nous conduit à rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres de $\tau_\mu^{\ \nu}$ relativement au tenseur métrique.

Les valeurs propres de $\tau_\mu^{\ \nu}$ sont :

$$s_1 = s_0 = \frac{1}{L}\left[1 - L + \frac{F + \sqrt{F^2 + 4G^2}}{2}\right] > 0 \tag{3-2}$$

$$s_2 = s_3 = \frac{1}{L}\left[1 - L + \frac{F - \sqrt{F^2 + 4G^2}}{2}\right] < 0 \tag{3-3}$$

avec :

$$F^2 + 4G^2 = [B_1^2 + E_1^2 - B_2^2 - E_2^2]^2. \tag{3-4}$$

$s_1 > 0$ sera la valeur propre correspondant au vecteur propre, orienté dans le temps, du repère principal.

Par analogie avec la théorie de Maxwell on appelle cas singulier de Born-Infeld la situation physique dans laquelle $F = 0$ et $G = 0$ ce qui correspond à $s_1 = s_2 = 0$.

De même le cas régulier sera défini par le fait que l'un au moins des invariants F et G est différent de zéro, ce qui implique $s_1 \neq s_2$.

Remarques :

α) Il existe entre les valeurs propres s_1 et s_2 une relation importante qui permet de simplifier les calculs ultérieurs :

(3-5) $$s_1 + s_2 = - s_1 s_2 = \lambda > 0 \qquad \text{(cas régulier).}$$

β) Kichenassamy et Kremer (1960) ont montré que tous les schémas électromagnétiques déduits d'un principe variationnel à l'aide d'un lagrangien L(F, G) admettent comme cas singulier celui correspondant au schéma de Maxwell, sous la seule condition que $\dfrac{\partial L}{\partial F} \neq 0$. Il en résulte que les théorèmes concernant le cas singulier de Maxwell se transposent immédiatement dans le cas singulier de Born-Infeld.

L'étude des valeurs propres nous indique qu'il existe dans le cas régulier deux plans de vecteurs propres dont l'un est orienté dans le temps (plan propre correspondant à s_1) et l'autre orienté dans l'espace (plan propre correspondant à s_2).

Ces deux plans sont totalement orthogonaux et se coupent en un seul point. Le plan propre correspondant à s_1 coupe le cône élémentaire suivant deux génératrices supports de deux vecteurs propres isotropes de $\tau_\mu{}^\nu$.

Dans le cas singulier, il existe un 3-plan de vecteurs propres tangent au cône élémentaire suivant un seul vecteur propre de $\tau_\mu{}^\nu$. Si on choisit un repère principal formé des vecteurs $\vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. $\vec{e}_0$ étant orienté dans le temps, $\vec{e}_i (i = 1, 2, 3)$ orientés dans l'espace, on montre que dans le cas régulier les deux vecteurs propres isotropes peuvent être définis par :

(3-6) $$\vec{\xi} = \vec{e}_0 + \vec{e}_1$$
$$\vec{\eta} = \vec{e}_0 - \vec{e}_1$$

avec :

(3-7) $$\begin{cases} \xi^\alpha \xi_\alpha = 0 \\ \eta^\alpha \eta_\alpha = 0 \\ \xi^\alpha \eta_\alpha = 2. \end{cases}$$

Dans le cas singulier, le vecteur propre isotrope peut être choisi comme suit :

(3-8) $$\vec{t} = \vec{e}_0 + \vec{e}_3.$$

On peut alors définir la notion de repère canonique pour $\tau_\mu{}^\nu$ dans le cas régulier [cf. Synge, 1956]. C'est un repère déduit du repère principal en substituant aux deux vecteurs de base $\vec{e}_0$ et $\vec{e}_1$ les deux vecteurs isotropes réels $\vec{\xi}$ et $\vec{\eta}$.

Dans un tel repère, les vecteurs d'espace $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{e}_1$ sont colinéaires et les différentes grandeurs de la théorie de Born-Infeld prennent des expressions très simples. En particulier :

(3-9) $$s_1 = \sqrt{\frac{1 + B_1^2}{1 - E_1^2}} - 1$$ (3-10) $$s_2 = \sqrt{\frac{1 - E_1^2}{1 + B_1^2}} - 1$$

(3-11) $$L = [(1 - E_1^2)(1 + B_1^2)]^{1/2}$$

(3-12) $$\varphi_{\mu\nu} = \begin{vmatrix} & & & E_1 \\ & & B_1 & \\ & -B_1 & & \\ -E_1 & & & \end{vmatrix}$$

(3-13) $$\psi_{\mu\nu} = \begin{vmatrix} & & & E_1(1+s_1) \\ & & B_1(1+s_2) & \\ & -B_1(1+s_2) & & \\ -E_1(1+s_1) & & & \end{vmatrix}$$

4. Expression de $\varphi_{\mu\nu}$, $\psi_{\mu\nu}$ et $\tau_\mu{}^\nu$ en fonction des vecteurs propres isotropes de $\tau_\mu{}^\nu$ (cf. Synge, 1956).

Si on ne considère que les valeurs propres réelles des tenseurs $\varphi_{\mu\nu}$ et $\psi_{\mu\nu}$ on sait que les vecteurs propres isotropes de $\tau_\mu{}^\nu$ sont aussi vecteurs propres isotropes de $\varphi_{\mu\nu}$ et $\psi_{\mu\nu}$.

Il existe une relation entre les valeurs propres de $\tau_\mu{}^\nu$ et $\varphi_\mu{}^\nu$. En effet, si on note :

(4-1) $$\mathcal{T} = (\tau_\mu{}^\nu), \qquad \mathfrak{I} = (\delta_\mu{}^\nu), \qquad \mathcal{F} = (\psi_{\mu\rho}),$$

les matrices associées à $\tau_\mu{}^\nu$, $\delta_\mu{}^\nu$, $\varphi_\mu{}^\nu$, il vient :

(4-2) $$\mathcal{T} = \frac{1}{L}[(1 - L + F)\mathfrak{I} + \mathcal{F}^2]$$

ce qui entraîne entre les valeurs propres s et ρ de $\tau_\mu{}^\nu$ et $\varphi_\mu{}^\nu$:

(4-3) $$s = \frac{1}{L}[(1 - L + F) + \rho^2].$$

La réalité de ρ impose :

(4-4) $$s > \frac{1}{L}(1 + F - L)$$

soit $s = s_1$, ce qui correspond bien aux vecteurs propres isotropes de $\tau_\mu{}^\nu$.

Posons alors :

(4-5) $$A_{\alpha\beta} = \xi_\alpha n_\beta - \xi_\beta \eta_\alpha.$$

On obtient, compte tenu de (3-12) et (3-13) :

(4-6) $$\varphi_{\alpha\beta} = -\frac{E_1}{2} A_{\alpha\beta} - \frac{B_1}{2} \overset{*}{A}_{\alpha\beta}$$

(4-7) $$\psi_{\alpha\beta} = -\frac{E_1(1 + s_1)}{2} A_{\alpha\beta} - \frac{B_1(1 + s_2)}{2} \overset{*}{A}_{\alpha\beta}.$$

D'autre part, en posant :

(4-8) $$\Pi_{\alpha\beta} = \xi_\alpha \eta_\beta + \xi_\beta \eta_\alpha$$

$\tau_\mu{}^\nu$ s'écrit sous une forme simple :

(4-9) $$\tau_\mu{}^\nu = s_2 \delta_\mu{}^\nu + \frac{1}{2}(s_1 - s_2)\Pi_\mu{}^\nu$$

en tenant compte des relations :

(4-10) $$A_{\mu\rho}A^{\nu\rho} = -2\Pi_\mu{}^\nu$$

(4-11) $$\overset{*}{A}_{\mu\rho}A^{\nu\rho} = A_{\mu\rho}\overset{*}{A}{}^{\nu\rho} = 0$$

(4-12) $$A_{\mu\rho}A^{\nu\rho} - \overset{*}{A}_{\mu\rho}\overset{*}{A}{}^{\nu\rho} = \frac{1}{2} A_{\alpha\beta}A^{\alpha\beta}\delta_\mu{}^\nu = -4\delta_\mu{}^\nu.$$

5. Recherche de relations algébriques pour $\tau_\mu{}^\nu$ (cas régulier de Born-Infeld).

Formons :

(5-1) $$\tau_\mu{}^\nu \tau_\nu{}^\rho = s_2^2 \delta_\mu{}^\rho + \frac{1}{2}(s_2^2 - s_1^2)\Pi_\mu{}^\rho.$$

En éliminant $\Pi_\mu{}^\rho$ par (4-9), il vient :

(5-2) $$\tau_\mu{}^\nu \tau_\nu{}^\rho - (s_1 + s_2)\tau_\mu{}^\rho = - s_1 s_2 \delta_\mu{}^\rho.$$

Soit d'après (3-5) :

(5-3) $$\tau_\mu{}^\nu \tau_\nu{}^\rho - \lambda \tau_\mu{}^\rho = \lambda \delta_\mu{}^\rho.$$

La trace de $\tau_\mu{}^\nu$ s'obtient par :

(5-4) $$\tau = \tau_\mu{}^\mu = 2(s_1 + s_2) = 2\lambda > 0.$$

On peut déduire de (5-3) et (5-4) une autre relation :

(5-5) $$\tau_{\alpha\beta}\tau^{\alpha\beta} = 2(s_1^2 + s_2^2) = 2(\lambda^2 + 2\lambda) = \frac{1}{2}(\tau^2 + 4\tau).$$

Il en résulte que le tenseur d'énergie-impulsion de la théorie de Born-Infeld vérifie la relation algébrique suivante :

(5-6) $$\tau_\mu{}^\nu \tau_\nu{}^\rho - \frac{\tau}{2}\tau_\mu{}^\rho = \frac{\tau}{2}\delta_\mu{}^\rho$$

(5-6) est équivalente à l'ensemble des relations (5-3) et (5-4).

6. Obtention des champs à partir d'un tenseur d'énergie-impulsion vérifiant la relation (5-6).

Supposons que $\tau_\mu{}^\nu$ possède des valeurs propres et des vecteurs propres définis par :

(6-1) $$\tau_\alpha{}^\beta \eta_\beta = \rho \eta_\alpha$$

l'équation aux valeurs propres est donc :

(6-2) $$\left(\rho^2 - \frac{\tau\rho}{2} - \frac{\tau}{2}\right)\eta_\mu = 0 \qquad \forall \eta_\mu.$$

Il en résulte que les valeurs propres de $\tau_\mu{}^\nu$ sont nécessairement de la forme :

(6-3) $$\rho_1 = \frac{1}{4}\left[\tau + \sqrt{\tau^2 + 8\tau}\right] > 0$$

car $\tau > 0$

$$\rho_2 = \frac{1}{4}\left[\tau - \sqrt{\tau^2 + 8\tau}\right] < 0.$$

A l'aide des relations (5-4) et (5-5) on montre que les deux autres valeurs propres ρ_0 et ρ_3 vérifient l'équation (6-2).

Il en résulte que $\tau_\mu{}^\nu$ admet une dégénérescence d'ordre deux.

Nous prendrons :

$$\rho_0 = \rho_1, \qquad \rho_3 = \rho_2.$$

Il s'ensuit que pour chaque valeur propre il existe un 2-plan de vecteurs propres, le 2-plan correspondant à ρ_1 étant orienté dans le temps et celui qui correspond à ρ_2 étant orienté dans l'espace.

Ces deux plans propres sont totalement orthogonaux. On peut donc former un repère canonique à l'aide de deux vecteurs isotropes réels intersections du 2-plan propre correspondant à ρ_1 et du cône élémentaire.

On sait que par rapport à un tel repère $\varphi_{\mu\nu}$ s'écrit (cf. § 4) :

$$\varphi_{\mu\nu} = \alpha A_{\mu\nu} + \beta \overset{*}{A}_{\mu\nu} \tag{6-4}$$

α et β sont les deux coefficients à déterminer.

Considérons les deux invariants de Maxwell, F et G. Ils s'écrivent compte tenu de (6-4) :

$$F = \frac{1}{2}\varphi_{\alpha\beta}\varphi^{\alpha\beta} = 4(\beta^2 - \alpha^2) \tag{6-5}$$

$$G = \frac{1}{4}\varphi_{\alpha\beta}\overset{*}{\varphi}{}^{\alpha\beta} = 4\alpha\beta \tag{6-6}$$

α^2 et β^2 peuvent s'exprimer en fonction de F et G par :

$$\begin{aligned} \beta^2 &= \frac{F}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{F^2 + 4G^2} \\ \alpha^2 &= -\frac{F}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{F^2 + 4G^2}. \end{aligned} \tag{6-7}$$

En comparant :

$$\tau_\mu{}^\nu = \frac{1}{4}(\tau - \sqrt{\tau^2 + 8\tau})\delta_\mu{}^\nu + \frac{1}{4}\sqrt{\tau^2 + 8\tau}\,\Pi_\mu{}^\nu. \tag{6-8}$$

et :

$$\tau_\mu{}^\nu = \frac{1}{L}\left(1 - L + \frac{F - \sqrt{F^2 + 4G^2}}{2}\right)\delta_\mu{}^\nu + \frac{1}{2L}\sqrt{F^2 + 4G^2}\,\Pi_\mu{}^\nu$$

on a :

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2L}\sqrt{F^2 + 4G^2} = \frac{1}{4}\sqrt{\tau^2 + 8\tau} \\ &\frac{1 - L + F/2}{L} = \frac{\tau}{4} \end{aligned}\right. \tag{6-9}$$

ou :

$$\frac{\sqrt{F^2+4G^2}}{\frac{1}{2}\sqrt{\tau^2+8\tau}} = \frac{1+\frac{F}{2}}{1+\frac{\tau}{4}} \tag{6-10}$$

ou encore :

$$2\frac{(b+c)}{b}\alpha^2 + 2\frac{(c-b)}{b}\beta^2 = 1 \tag{6-11}$$

avec :

$$b = \frac{1}{2}\sqrt{\tau^2+8\tau}, \qquad c = 2+\frac{\tau}{2}, \qquad c-b>0.$$

En prenant les racines carrées positives, il vient :

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(\tau^2+8\tau)^{1/4}}{\left(4+\tau+\frac{1}{2}(\tau^2+8\tau)^{1/2}\right)^{1/2}} \cos\chi = K_1(\tau)\cos\chi \tag{6-12}$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(\tau^2+8\tau)^{1/4}}{\left(4+\tau-\frac{1}{2}(\tau^2+8\tau)^{1/2}\right)^{1/2}} \sin\chi = K_2(\tau)\sin\chi \tag{6-13}$$

le paramètre réel χ est une fonction arbitraire de l'espace-temps. Il en résulte que la seule considération des relations algébriques n'est pas suffisante pour déterminer de manière unique le champ $\varphi_{\mu\nu}$ à partir de $\tau_{\mu\nu}$.

7. Champs extrémaux. Transformation duale.

Les valeurs de χ : 0 et $\frac{\pi}{2}$ déterminent les champs extrémaux au sens de Misner et Wheeler (1957).

(7-1) $\quad {}_1\varphi_{\mu\nu} = K_1(\tau)A_{\mu\nu} \qquad$ (7-2) $\quad {}_2\varphi_{\mu\nu} = K_2(\tau)A_{\mu\nu}$.

Le champ $\varphi_{\mu\nu}$ le plus général se déduit des « champs extrémaux » par une transformation duale :

$$\begin{aligned} \varphi_{\mu\nu} &= {}_1\varphi_{\mu\nu}\cos\chi + {}_2\overset{*}{\varphi}_{\mu\nu}\sin\chi \\ \overset{*}{\varphi}_{\mu\nu} &= -{}_2\varphi_{\mu\nu}\sin\chi + {}_1\overset{*}{\varphi}_{\mu\nu}\cos\chi. \end{aligned} \tag{7-3}$$

Cette transformation duale est la stricte généralisation de la rotation duale de Misner et Wheeler.

On peut exprimer α et β en fonction des valeurs propres de $\tau_\mu{}^\nu$. D'après (6-3) et en posant $\rho_1 = s_1$, $\rho_2 = s_2$, il vient :

(7-4) $$\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{s_1 - s_2}{1 + s_1}} \cos \chi$$

(7-5) $$\beta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{s_1 - s_2}{1 + s_2}} \sin \chi.$$

Ces expressions permettent alors d'après (6-5) et (6-6) :

(7-6) $$L = 1 + s_1 \sin^2 \chi + s_2 \cos^2 \chi$$

et l'expression de $\psi_{\mu\nu}$:

(7-7) $$\psi_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{s_1 - s_2}{1 + s_2}} A_{\mu\nu} \cos \chi + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{s_1 - s_2}{1 + s_1}} \overset{*}{A}_{\mu\nu} \sin \chi$$

$$\overset{*}{\psi}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{s_1 - s_2}{1 + s_1}} A_{\mu\nu} \sin \chi + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{s_1 - s_2}{1 + s_2}} \overset{*}{A}_{\mu\nu} \cos \chi$$

ou en fonction des champs maximaux :

(7-8) $$\psi_{\mu\nu} = {}_2\varphi_{\mu\nu} \cos \chi + {}_1\overset{*}{\varphi}_{\mu\nu} \sin \chi$$

$$\overset{*}{\psi}_{\mu\nu} = - {}_1\varphi_{\mu\nu} \sin \chi + {}_2\overset{*}{\varphi}_{\mu\nu} \cos \chi.$$

Remarque 1. — $\varphi_{\mu\nu}$ et $\overset{*}{\psi}_{\mu\nu}$ d'une part et $\psi_{\mu\nu}$ et $\overset{*}{\varphi}_{\mu\nu}$ d'autre part sont chacun reliés par une rotation duale :

(7-9) $$\left\{\begin{aligned} \varphi_{\mu\nu} &= {}_1\varphi_{\mu\nu} \cos \chi + {}_2\overset{*}{\varphi}_{\mu\nu} \sin \chi \\ \overset{*}{\psi}_{\mu\nu} &= - {}_1\varphi_{\mu\nu} \sin \chi + {}_2\overset{*}{\varphi}_{\mu\nu} \cos \chi \end{aligned}\right.$$

(7-10) $$\left\{\begin{aligned} \psi_{\mu\nu} &= {}_2\varphi_{\mu\nu} \cos \chi + {}_1\overset{*}{\varphi}_{\mu\nu} \sin \chi \\ \overset{*}{\varphi}_{\mu\nu} &= - {}_2\varphi_{\mu\nu} \sin \chi + {}_1\overset{*}{\varphi}_{\mu\nu} \cos \chi, \end{aligned}\right.$$

Remarque 2. — Pour le courant on obtient en utilisant les équations de champ de Born-Infeld :

(7-11) $$j^\mu = - \partial_\nu b^{\mu\nu}$$

avec :

(7-12) $$b_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sqrt{s_1^2 - s_2^2}\,(A_{\mu\nu} \cos \chi - \overset{*}{A}_{\mu\nu} \sin \chi).$$

8. Une nouvelle forme de la relation algébrique. Tenseur pseudo-maxwellien.

La relation $\tau_{\mu\rho}\tau^{\nu\rho} - \frac{\tau}{2}\tau_{\mu}{}^{\nu} = \frac{\tau}{2}\delta_{\mu}{}^{\nu}$ (cf. 5-6) peut s'écrire :

$$T_{\mu}{}^{\rho}T_{\rho}{}^{\nu} = \frac{(s_1 - s_2)^2}{4}\delta_{\mu}{}^{\nu} \tag{8-1}$$

en posant :

$$T_{\mu}{}^{\nu} = \tau_{\mu}{}^{\nu} - \frac{\tau}{4}\delta_{\mu}{}^{\nu}. \tag{8-2}$$

Nous appellerons $T_{\mu}{}^{\nu}$ le tenseur pseudo-maxwellien de la théorie de Born-Infeld. En effet, sa structure est analogue à celle du tenseur de Maxwell dans le vide mais il n'est pas conservatif. On a :

$$T_{\mu}{}^{\nu} = \frac{s_1 - s_2}{2}[-\delta_{\mu}{}^{\nu} + \Pi_{\mu}{}^{\nu}]. \tag{8-3}$$

On peut exprimer $T_{\mu}{}^{\nu}$ en fonction d'une combinaison invariante des champs. Si nous considérons les tenseurs complexes :

$$\Omega_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu} + i\overset{*}{\varphi}_{\mu\nu} \tag{8-4}$$

$$\Phi_{\mu\nu} = \varphi_{\mu\nu} + i\overset{*}{\psi}_{\mu\nu} \tag{8-5}$$

on a d'après (7-9) et (7-10) :

$$\Omega_{\mu\nu} = \Omega'_{\mu\nu}e^{-i\chi} \tag{8-6}$$

$$\Phi_{\mu\nu} = \Phi'_{\mu\nu}e^{-i\chi} \tag{8-7}$$

avec :

$$\Omega'_{\mu\nu} = {}_2\varphi_{\mu\nu} + i\,{}_1\overset{*}{\varphi}_{\mu\nu} \tag{8-8}$$

$$\Phi'_{\mu\nu} = {}_1\varphi_{\mu\nu} + i\,{}_2\overset{*}{\varphi}_{\mu\nu} \tag{8-9}$$

si on forme l'invariant par rapport à χ :

$$\Omega_{\mu\rho}\overline{\Phi}^{\nu\rho} = \Omega'_{\mu\rho}\overline{\Phi}'^{\nu\rho} \tag{8-10}$$

on obtient :

$$T_{\mu}{}^{\nu} = -\frac{1}{2}\Omega_{\mu\rho}\overline{\Phi}^{\nu\rho} \tag{8-11}$$

ce qui montre l'invariance de $T_{\mu}{}^{\nu}$ et par conséquent de $\tau_{\mu}{}^{\nu}$ par une transformation duale.

C. — ÉTUDE DIFFÉRENTIELLE DU PROBLÈME DE RAINICH

9. Expression de la phase χ en fonction des champs.

On peut se demander à quelles conditions nécessaires portant sur la phase χ doivent satisfaire les champs $\varphi_{\mu\nu}$ et $\psi_{\mu\nu}$ déterminés au paragraphe précédent pour qu'ils vérifient les équations de champs de Born-Infeld (cf. 2-1 et 2-2).

Elles s'écrivent en notation complexe :

$$\partial_\rho \Omega^{\mu\rho} = \partial_\rho(\Omega'^{\mu\rho} e^{-i\chi}) = 0 \tag{9-1}$$

ce qui entraîne :

$$\Omega'^{\mu\nu}_{\ \ ,\nu} - i\chi_{,\nu}\Omega'^{\mu\nu} = 0 \tag{9-2}$$

en multipliant (9-2) par $\overline{\Phi}'_{\mu\rho}$ on a d'après (8-11) :

$$\overline{\Phi}'_{\mu\rho}\Omega'^{\mu\nu}_{\ \ ,\nu} + 2i\chi_{,\nu}T_\rho{}^\nu = 0 \tag{9-3}$$

et en multipliant (9-3) par $T_\beta{}^\rho$ on obtient d'après (8-1) :

$$\chi_{,\beta} = -i\,\frac{\Omega'_{\beta\alpha}\overline{\Phi}'^{\rho\alpha}\overline{\Phi}'_{\mu\rho}\Omega'^{\mu\nu}_{\ \ ,\nu}}{(s_1 - s_2)^2}. \tag{9-4}$$

Cette expression se simplifie en remarquant que :

$$\overline{\Phi}'^{\rho\alpha}\overline{\Phi}'_{\mu\rho} = \Phi'^{\rho\alpha}\Phi'_{\mu\rho} \tag{9-5}$$

$$\Omega'_{\beta\alpha}\Phi'^{\rho\alpha} = -(s_1 - s_2)\delta_\beta{}^\rho \tag{9-6}$$

soit :

$$\chi_{,\beta} = \frac{i\Phi'_{\mu\beta}\Omega'^{\mu\nu}_{\ \ ,\nu}}{(s_1 - s_2)}. \tag{9-7}$$

En développant (9-7) en fonction des champs extrémaux et en tenant compte que $\chi_{,\beta}$ est réel, il vient :

$$\chi_{,\beta} = -\frac{1}{4}[\overset{*}{A}_{\mu\beta}A^{\mu\nu}_{\ \ ,\nu} + A_{\mu\beta}\overset{*}{A}{}^{\mu\nu}_{\ \ ,\nu}] - \frac{1}{4}[s_1\overset{*}{A}_{\mu\beta}A^{\mu\nu}_{\ \ ,\nu} + s_2A_{\mu\beta}\overset{*}{A}{}^{\mu\nu}_{\ \ ,\nu}] \tag{9-8}$$

si nous considérons le vecteur :

$$\alpha_\beta = \frac{1}{4}\eta_{\beta\nu\lambda\mu}\Pi^{\lambda\gamma,\mu}\Pi_\gamma{}^\nu = \frac{\eta_{\beta\nu\lambda\mu}\tau^{\lambda\gamma,\mu}\tau_\gamma{}^\nu}{(s_1 - s_2)^2}. \tag{9-9}$$

Il vient :

$$\alpha_\beta = \frac{1}{4}[\overset{*}{A}_{\mu\beta}A^{\mu\nu}_{,\nu} + A_{\mu\beta}\overset{*}{A}^{\mu\nu}_{,\nu}]. \tag{9-10}$$

D'autre part en formant :

$$\tau_\beta{}^\rho\alpha_\rho = \frac{1}{4}[\tau_\beta{}^\rho A_{\mu\rho}\overset{*}{A}^{\mu\nu}_{,\nu} + \tau_\beta{}^\rho\overset{*}{A}_{\mu\rho}A^{\mu\nu}_{,\nu}] \tag{9-11}$$

on obtient, $A_{\mu\rho}$ et $\overset{*}{A}_{\mu\rho}$ étant plans propres de $\tau_\beta{}^\rho$ pour les valeurs propres s_1 et s_2.

$$\tau_\beta{}^\rho\alpha_\rho = \frac{1}{4}[s_1 A_{\mu\beta}\overset{*}{A}^{\mu\nu}_{,\nu} + s_2\overset{*}{A}_{\mu\rho}A^{\mu\nu}_{,\nu}]. \tag{9-12}$$

Soit :

$$\chi_{,\beta} = P_\beta \tag{9-13}$$

en posant :

$$P_\beta = \tau_\beta{}^\rho\alpha_\rho - \left(1 + \frac{\tau}{2}\right)\alpha_\beta \tag{9-14}$$

par suite on a :

$$P_{\beta,\mu} - P_{\mu,\beta} = 0. \tag{9-15}$$

A partir de (9-15) on obtient la phase χ dans le cas régulier, par intégration :

$$\chi = \int P_\alpha dx^\alpha + \chi_0 \tag{9-16}$$

et $\varphi_{\mu\nu}$ est déterminé à une constante près.

10. Solution complète du problème de Rainich, dans le cas régulier.

Pour résoudre entièrement le problème de Rainich il faut montrer que les relations portant sur le tenseur d'énergie-impulsion (cf. 9-15 et 5-6) sont aussi suffisantes. En effet, si on considère un tenseur $\tau_\mu{}^\nu$ satisfaisant à (5-6) on peut alors construire deux bivecteurs $A_{\alpha\beta}$ et $\overset{*}{A}_{\alpha\beta}$ formés à l'aide des vecteurs propres isotropes de $\tau_\mu{}^\nu$.

— Construire un champ complexe extrémal $\Omega'_{\mu\nu}(A_{\alpha\beta}, \overset{*}{A}_{\alpha\beta})$.

— En déduire un tenseur complexe $\Omega_{\mu\nu}(A_{\alpha\beta}, \overset{*}{A}_{\alpha\beta}, \chi)$ avec χ donnée par (9-16).

Or :

(10-1) $$(\Omega'^{\mu\nu}_{,\nu} - i\mathrm{P}_\nu\Omega'^{\mu\nu})e^{-i\chi} = 0$$

d'après la détermination de P_ν (cf. 9-2 et 9-13), ce qui entraîne :

(10-2) $$\Omega^{\mu\nu}_{,\nu} = 0$$

les équations de champ de Born-Infeld sont donc satisfaites et par suite le tenseur $\tau_\mu{}^\nu$ est conservatif.

Donc $\tau_\mu{}^\nu$ est bien le tenseur d'énergie-impulsion de la théorie de Born-Infeld.

11. Remarques sur le cas singulier de la théorie de Born-Infeld.

$\Omega^{\mu\nu}$ étant un champ complexe satisfaisant aux équations de champ de Born-Infeld cherchons à quelles conditions $\Omega^{\mu\nu}e^{-i\varphi}$ satisfait aux mêmes équations :

(11-1) $$(\Omega^{\mu\nu}e^{-i\varphi})_{,\nu} = 0$$

entraîne :

(11-2) $$\varphi_{,\nu}\Omega'^{\mu\nu} = 0.$$

En multipliant (11-2) par $\Phi'_{\rho\mu}$ et en tenant compte de (9-6) il vient :

(11-3) $$(s_1 - s_2)\varphi_{,\rho} = 0$$

on a donc à considérer deux cas :

1° $s_1 - s_2 \neq 0$, cas régulier. Alors la seule phase φ permise est constante et traduit simplement le choix du repère.

2° $s_1 - s_2 = 0$ ce qui entraîne $s_1 = s_2 = 0$ cas singulier, la phase est alors indéterminée [cf. Witten (1962)].

12. Conclusion.

Ainsi, dans le cas régulier, on a montré que tout tenseur symétrique qui satisfait aux conditions algébriques et différentielles (5-6) et (9-15) peut être considéré comme le tenseur d'énergie-impulsion d'un schéma électromagnétique de Born-Infeld.

Cette étude permet d'aborder l'édification d'une théorie géométrique de l'électromagnétisme non linéaire et de la gravitation généralisant « la théorie du champ déjà unifié » de Misner et Wheeler (1957) pour l'électromagnétisme linéaire.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à M. Kichenassamy qui m'a fourni le sujet de ce travail et m'a constamment guidé au cours de sa réalisation.

BIBLIOGRAPHIE

BORN M. et INFELD L., *Proc. Roy. Soc.* A, t. 144, 1934, p. 425.
KICHENASSAMY S., *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 248, 1959, p. 3690.
KICHENASSAMY S. et KREMER H., *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 250, 1960, p. 1192.
MISNER C. W. et WHEELER J. A., *Ann. Phys.*, t. 2, 1957, p. 525.
RAINICH G. Y., *Trans. Am. Math. Soc.*, t. 27, 1925, p. 106.
SYNGE J. L., *Relativity : The special theory*. North Holland publishing Co., Amsterdam, 1956.
WITTEN L., *Gravitation : An introduction to current research*. John Wiley and Sons, New York, 1962.

(Manuscrit reçu le 30 mars 1965).