

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

O. COSTA DE BEAUREGARD

Hélicité et impulsion transversale d'un fermion relativiste extrême dans un accélérateur circulaire

Annales de l'I. H. P., section A, tome 2, n° 2 (1965), p. 131-150

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1965__2_2_131_0

© Gauthier-Villars, 1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Hélicité et impulsion transversale d'un fermion relativiste extrême dans un accélérateur circulaire

par

O. COSTA DE BEAUREGARD ⁽¹⁾
(Institut Henri Poincaré, Paris).

SOMMAIRE. — On résout explicitement les équations de l'électron relativiste extrême de Dirac-Weyl dans deux cas de symétrie cylindrique (avec un champ magnétique directeur parallèle à l'axe z) : 1° onde ψ indépendante de z et non nulle seulement entre deux valeurs du rayon polaire r ; 2° onde ψ à distribution gaussienne suivant z . On montre dans le premier cas que, malgré la nullité de la composante k_z de l'impulsion, la composante j_z du courant de Dirac n'est en général pas nulle, sa valeur étant liée à celle de $\text{rot } \sigma$ (σ , densité de spin); et, dans le second cas, que même si la distribution gaussienne en k_z est centrée sur la valeur $k_z = 0$, le point moyen Z de celle en z se déplace en général (à vitesse c) sur des hélices d'axe z .

Ce sont là deux expressions différentes de notre *effet inertial de spin* [1] [2]; nous montrons la relation entre les précédents résultats et ceux de notre théorie générale abstraite.

Enfin, nous discutons très brièvement les principales difficultés à prévoir dans une recherche expérimentale de l'effet.

SUMMARY. — The Dirac-Weyl equations of the extreme relativistic electron are explicitly solved in two cases of cylindrical symmetry (with a magnetic directing field parallel to the axis, z): 1° ψ wave z independent, zero outside two values of the polar radius r ; 2° ψ wave with a Gaussian distribution

⁽¹⁾ Exposé prononcé au séminaire dirigé par M. Lichnerowicz au Collège de France le 30 mai 1964.

along z . It is shown in the first case that, although the k_z component of the momentum is zero, the j_z component of the Dirac current is generally non-zero, its value depending on that of $\text{curl } \sigma$ (σ , spin density); and, in the second case, that, even if the k_z Gaussian distribution is centered on the value $k_z = 0$, the mean value Z of the z Gaussian distribution generally runs (with the c velocity) along helices of axis z .

These are two different descriptions of the *translational inertial spin effect* previously defined [1] [2]; the relation between the preceding results and the conclusions of the general theory is explained.

Finally, the principal foreseen difficulties in an experimental search of the effect are briefly discussed.

I. — INTRODUCTION

Nous allons, au § II ci-dessous, résoudre explicitement les équations de l'électron de Dirac dans les conditions suivantes :

A. Potentiel extérieur indépendant du temps, à symétrie cylindrique, purement tangentiel (A_θ , seule composante non nulle), engendrant donc un champ magnétique vertical, $H_z(r)$ dépendant seulement du rayon vecteur; r , θ , z désigneront les coordonnées cylindriques adaptées au problème, t le temps.

B. Solution $\psi(r, \theta, t)$ ne dépendant pas de z ; la composante suivant z de l'impulsion du fermion sera donc identiquement nulle.

C. Dépendance temporelle du ψ de la forme $\exp(-iWt)$, $W = \text{const.}$; on aura donc affaire à un cas pur de l'énergie (il n'y aura notamment pas lieu d'effectuer une transformation de Cini-Touschek pour séparer les états d'énergie et de spin); pour alléger l'écriture, on prend des unités telles que $\hbar = h/2\pi = 1$ et $c = 1$.

D. Cas relativiste extrême, entraînant la colinéarité des vecteurs densités de courant \mathbf{j} et de spin σ ainsi que leur caractère isotrope.

E. Contrôle de la distribution radiale de l'onde ψ de telle sorte que, ψ s'annulant identiquement à l'extérieur d'un intervalle $0 < a \leq r \leq b < +\infty$, $\text{rot } \sigma$ prenne des valeurs non nulles dans l'intervalle $a \leq r \leq b$.

Dans ces conditions, nous montrerons que :

F. La composante j_z de la densité de courant de Dirac n'est pas nulle là où $\text{rot } \sigma \neq 0$.

G. Que ce fait, rapproché de la nullité de la composante k_z de l'impulsion des fermions (postulat B), correspond précisément à l'*effet inertial de spin* dont nous avons précédemment donné la théorie générale abstraite [1] [2].

Dans le § III l'on étudiera une autre classe de solutions exactes de l'équation de Dirac. Les hypothèses (A), (C), (D) seront conservées, mais la condition (B) (qui impliquait une particularisation de la distribution verticale du ψ destinée à simplifier l'étude de sa distribution radiale) sera remplacée par (B') : adoption d'une loi de distribution radiale du ψ destinée à faciliter la construction d'une solution limitée verticalement et représentée par une intégrale de Fourier en $\int \exp(ikz)dk$.

Avec ce type de solutions, la condition (E) se trouve remplacée par (E') : ψ non nul et $\text{rot } \sigma$ non nul (sauf éventuellement en un point) sur tout l'intervalle $0 \leq r \leq +\infty$.

L'on montre alors :

(F') Que $j_z/j_\theta = \text{tg } \alpha = \text{const.}$ pour chaque composante spectrale, avec la possibilité d'avoir le même α pour toutes les composantes spectrales.

(G') Que, si la précédente distribution de Fourier est symétrique et centrée sur la valeur $k = 0$, le paquet d'ondes ne s'en déplace pas moins, dans l'espace r, θ, z , suivant des hélices de pente α ; ceci constitue évidemment une autre présentation (et une autre preuve) de notre *effet inertial de spin*.

Au § IV, on établit explicitement l'équivalence entre les précédents résultats et la théorie générale de l'effet inertial de spin qui avait été antérieurement donnée [1] [2].

Dans l'ultime § V, on discute brièvement les principales difficultés qu'il faut s'attendre à rencontrer dans une étude expérimentale de l'effet.

Depuis la rédaction de cette étude, une expérience montée par Charles Goillot a mis en évidence incontestable « l'effet inertial de spin » sur le nuage électronique intérieur à un corps ferromagnétique (*Comptes rendus*, t. 259, 1964, p. 1511). Cette délicate expérience de physique du solide était cependant moins difficile à réaliser, mais aussi d'un schème moins épuré que l'expérience de mécanique quantique des fluides ici exposée. Avant que

l'interprétation précise de l'expérience de Charles Goillot puisse être proposée, il sera nécessaire : 1° de déterminer expérimentalement le signe de l'effet trouvé; 2° de rechercher si l'effet existe également ou non dans le cas d'un corps d'épreuve en ferrite (non conductrice).

II. — ONDE ψ INDÉPENDANTE DE Z ET FAISCEAU LIMITÉ RADIALEMENT [3]

Notant (comme on l'a dit) r, θ, z ($r \geq 0$) un système de coordonnées cylindriques et t le temps, on va intégrer les équations de Dirac avec un potentiel extérieur :

$$(1) \quad A_1 = -a(r) \sin \theta, \quad A_2 = a(r) \cos \theta, \quad A_3 = 0, \quad A_4 = 0,$$

engendrant un champ dont la seule composante non nulle est :

$$(2) \quad H_3 \equiv H_z = \frac{1}{r} a(r) + a'(r);$$

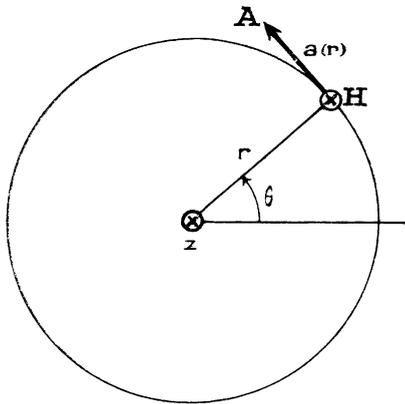


FIG. 1.

c'est le champ directeur type des accélérateurs circulaires; il faut noter que, quelle que soit la fonction $a(r)$, le potentiel A satisfait à la condition de Lorentz.

Dans le cas relativiste extrême, les quatre équations de Dirac s'écrivent :

$$(3) \quad (\sigma \cdot \mathcal{F} \mp \mathcal{W})\psi = 0,$$

où les trois composantes de σ sont les matrices carrées de rang 2 de Pauli telles que :

$$(4) \quad \sigma_\alpha \sigma_\beta = -\sigma_\beta \sigma_\alpha = i\sigma_\gamma, \quad \sigma_\alpha^2 = 1; \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3;$$

ψ désigne un spineur à deux composantes; enfin, comme on le sait, le double signe exprime conjointement la possibilité de changer le sens du trièdre spatial et l'association particules-antiparticules.

\mathcal{P} et \mathcal{W} désignent les opérateurs d'impulsion et d'énergie, comprenant ici un terme potentiel en \mathbf{A} et V . Pour alléger l'écriture, nous incorporons la charge de la particule dans le potentiel, en sorte que :

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} -i\mathcal{P}_x \equiv \frac{\partial}{\partial x} + iA_x = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \sin \theta \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + ia(r) \right], \\ -i\mathcal{P}_y \equiv \frac{\partial}{\partial y} + iA_y = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \cos \theta \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + ia(r) \right]. \end{array} \right.$$

Cherchons, compte tenu de (5), une solution des équations (3) de la forme :

$$(6) \quad \psi(r, \theta, t) = e^{i(C\theta - Wt)} \Lambda^{-1}(\theta) \varphi(r)$$

où $\varphi(r)$ désigne un spineur à deux composantes, C et W deux constantes, et $\Lambda(\theta)$ une matrice carrée de rang 2 qui sera précisée dans un instant; W est manifestement une valeur propre de l'énergie; C est seulement la valeur moyenne du moment angulaire orbital, du fait de la dépendance en θ de Λ .

Pour assurer à la solution ψ la symétrie cylindrique que nous postulons pour elle (cf. § I), nous identifions Λ à la matrice qui transforme le ψ lors d'une rotation θ des axes x, y , soit :

$$(7) \quad \Lambda^{\pm 1}(\theta) = \cos \frac{\theta}{2} \pm i\sigma_3 \sin \frac{\theta}{2};$$

on sait (et l'on vérifie aisément) que la matrice Λ d'expression (7) est telle que :

$$(8) \quad \sigma_1 = \Lambda(\sigma_1 \cos \theta + \sigma_2 \sin \theta) \Lambda^{-1}, \quad \sigma_2 = \Lambda(\sigma_2 \cos \theta - \sigma_1 \sin \theta) \Lambda^{-1}.$$

Enfin, l'on calcule aisément :

$$(9) \quad \Lambda \frac{\partial}{\partial \theta} \Lambda^{-1} = -\frac{i}{2} \sigma_3.$$

Compte tenu de (5), (6), (8), les équations (3) de Dirac se récrivent :

$$\Lambda \left\{ (\sigma_1 \cos \theta + \sigma_2 \sin \theta) \frac{\partial}{\partial r} + i(\sigma_2 \cos \theta - \sigma_1 \sin \theta) \left[\frac{C}{r} + a(r) \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{r} (\sigma_2 \cos \theta - \sigma_1 \sin \theta) \Lambda^{-1} \Lambda \frac{\partial}{\partial \theta} \mp iW \right\} \Lambda^{-1} \varphi(r) = 0$$

d'où, compte tenu de (9) et (4) et après réductions :

$$(10) \quad \left\{ \sigma_1 \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{2r} \right) + i\sigma_2 \left[a(r) + \frac{C}{r} \right] \mp iW \right\} \varphi(r) = 0;$$

les équations adjointes sont :

$$(11) \quad \varphi^\dagger \left\{ \sigma_1 \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{2r} \right) - i\sigma_2 \left[a(r) + \frac{C}{r} \right] \pm iW \right\} = 0,$$

où φ^\dagger désigne la matrice-ligne adjointe du φ .

Les composantes des vecteurs densités de courant \mathbf{j} et de spin $\boldsymbol{\sigma}$ (de Dirac) sont manifestement :

$$(12) \quad \pm j_r = 2\sigma_r = \varphi^\dagger \sigma_1 \varphi, \quad \pm j_\theta = 2\sigma_\theta = \varphi^\dagger \sigma_2 \varphi, \quad \pm j_z = 2\sigma_z = \varphi^\dagger \sigma_3 \varphi,$$

le double signe étant en correspondance avec celui de (3), (10) et (11); la densité de probabilité de présence est :

$$(13) \quad \rho = \varphi^\dagger \varphi.$$

Lemme [4] : $j_r = 0$. Multipliant en effet (10) à gauche par φ^\dagger , (11) à droite par φ , et ajoutant, il vient :

$$(14) \quad (rj_r)' = 0, \quad rj_r = \text{const.},$$

ce qui exprime que $\text{div } \mathbf{j} = 0$ pour tout $r \neq 0$. Mais l'axe $r = 0$ ne peut être source ou puits de particules : donc $rj_r = 0$ et par conséquent :

$$(15) \quad j_r = 0, \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Cherchons maintenant la solution la plus générale des (10) et (11). Pour cela il faut évidemment éliminer le potentiel $a(r)$ entre les deux équations correspondant à un même signe. On obtiendra ainsi une relation différentielle en les composantes φ_1 et φ_2 du φ qui, jointe à une relation arbitraire entre φ_1 et φ_2 , déterminera la solution choisie. Ensuite on calculera sans peine le $a(r)$ correspondant à cette solution.

Voici une manière élégante d'accomplir ce programme, indépendamment de la représentation des matrices de Pauli. Multipliant (10) à gauche par $\varphi^\dagger \sigma_3$, (11) à droite par $\sigma_3 \varphi$ et retranchant, il vient :

$$(16) \quad W r j_z = \pm \frac{1}{2} (r j_\theta)'_r = (r \sigma_\theta)'_r.$$

Cette formule, qui lie la valeur de la composante j_z du courant de Dirac à la loi de distribution radiale de l'onde ψ , est une expression directe de notre effet inertial de spin, ainsi que nous le montrerons en détail au § IV.

Notons aussi l'expression de la déflexion du faisceau :

$$(17) \quad \text{tg } \alpha = \frac{j_z}{j_\theta} = \pm \frac{1}{2W} [\text{Log } (r j_\theta)]'_r.$$

Quant à la relation arbitraire que nous pouvons poser entre les composantes φ_1 et φ_2 du φ , il est tout indiqué de la prendre sous forme d'une valeur $F(r)$ attribuée *a priori* à la composante tangentielle du courant de Dirac :

$$(18) \quad j_\theta(r) = F(r).$$

Une solution physiquement très satisfaisante s'obtiendra en imposant la condition $F(r) = 0$ en dehors d'un intervalle $0 < a < b < +\infty$. Entre a et b , l'on pourra postuler que $F(r) = \text{const.} = J$ à l'intérieur d'un intervalle $c, d, a < c < d < b, c$ étant voisin de a et d de b (cf. fig. 2 a); entre a et c d'une part, d et b de l'autre, on s'imposera une loi de montée et descente rapide telle que celle figurée; une telle distribution radiale de j_θ est tout à fait conforme à ce qu'on cherche à obtenir dans les accélérateurs circulaires.

Le j_z correspondant au $j_\theta(r)$ se calcule par la formule (16); il est particulièrement suggestif de figurer la variation en fonction de r de (fig. 2 b)

$$\pm 2\pi W r j_z ;$$

le facteur 2π est introduit en vue de la suite. On voit que les deux états d'hélicité positive (signe $+$) et négative (signe $-$) sont déviés en sens opposés et aussi que les particules ($W > 0$) et les antiparticules ($W < 0$) sont déviées en sens opposés. Notons la valeur de la déflexion $\text{tg } \alpha$ des faisceaux dans la région $c < r < d$ où $j_\theta = \text{const.} = J$:

$$(19) \quad (\text{tg } \alpha)_{j_\theta=J} = \pm \frac{1}{2W r}.$$

Quant au calcul du potentiel $a(r)$ correspondant à la précédente solution, on peut le présenter de plusieurs manières. En voici une. Multipliant (10) à gauche par $\varphi^\dagger \sigma_1$, (11) à droite par $\sigma_1 \varphi$ et ajoutant, l'on trouve :

$$(20) \quad a(r) + \frac{C}{r} = \pm \frac{(r \varphi)'_r}{2r j_z} = W \frac{(r \varphi)'_r}{(r j_\theta)'_r};$$

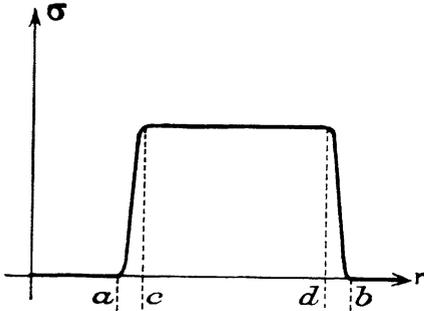


Fig. 2 a

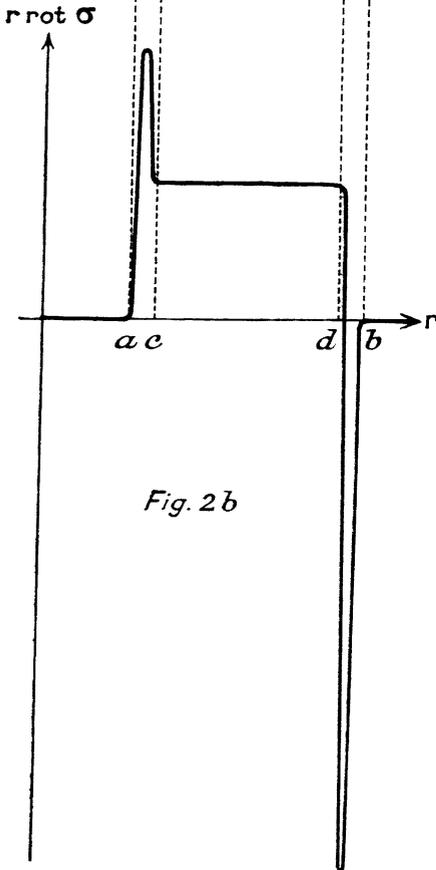


Fig. 2 b

il n'y a aucune restriction à ce calcul, car, ainsi qu'on l'a dit au début de ce paragraphe, la condition de Lorentz est satisfaite quelle que soit la fonction $a(r)$. Le terme C/r est un terme de jauge qui ne contribue pas à la création du champ H_z ; le terme significatif du potentiel $a(r)$ est donc le second membre.

Conclusion de ce paragraphe. Bien que la composante k_z de l'impulsion des fermions d'épreuve soit identiquement nulle (du fait que ψ ne dépend pas de z), la composante j_z du courant de Dirac n'est en général pas nulle. Les lignes de courant de Dirac sont des hélices \mathcal{H} ayant une pente $\text{tg } \alpha(r)$ donnée par (17), dont le signe dépend de celui de l'hélicité des fermions. C'est en cela que consiste notre *effet inertial de spin* : une non-colinéarité de la vitesse et de l'impulsion dont l'angle change de sens avec l'hélicité.

Le flux de puissance traversant un anneau circulaire $r, r + dr$ dans tout plan $z = \text{const.}$ est, d'après (16) :

$$(21) \quad d\omega = 2\pi W j_z r dr = 2\pi d(r\sigma_\theta);$$

il est mesuré, sur la figure 2 b, comme l'aire comprise entre deux verticales d'abscisses r et $r + dr$, la courbe et l'axe des r . Au total il est nul, puisque σ_θ s'annule en

dehors du faisceau; on peut dire que la somme des aires des deux « cornes » de la figure 2 b compense celle de la partie centrale (comprise entre a et b).

La valeur de $d\omega$ est directement proportionnelle à celle de $\text{rot } \sigma$, puisque (21) se réécrit, ds désignant l'aire de l'anneau précédemment considéré,

$$(22) \quad d\omega = d\oint \sigma \cdot \delta l = \text{rot } \sigma \cdot ds;$$

l'on peut donc dire que l'effet du $\text{rot } \sigma$ très élevé existant aux bords du faisceau détruit au total celui du $\text{rot } \sigma$ existant au sein du faisceau.

Si donc (et contrairement à ce que nous avons d'abord pensé [2]) il est exclu de mettre en évidence l'effet inertial de spin dans des expériences impliquant une intégration sur tout le faisceau, il reste possible de le faire dans des expériences du type « mécanique du fluide de probabilité », c'est-à-dire des expériences d'analyse fine des lignes du courant de Dirac, impliquant l'interprétation de son flux comme probabilité d'impact des fermions d'épreuve.

Remettant au § V la discussion des conséquences (fâcheuses) de l'imperfection du vide de l'enceinte et raisonnant ici comme si ce vide était parfait, l'on peut imaginer qu'on barre finalement le faisceau de fermions, après N tours de circuit, par une plaque photographique. L'image qui s'imprime a pour origine un processus d'ionisation et c'est bien la densité de courant de Dirac qui est la grandeur significative pour son calcul. L'allure de l'image, pour des particules d'hélicité positive, se déduit aisément de la figure 2 *b*; pour des particules d'hélicité négative, l'image se déduit de la précédente par symétrie relativement à l'axe r .

III. — UN EXEMPLE TYPE DE FAISCEAU LIMITÉ VERTICALEMENT : SUPERPOSITION EN INTÉGRALE DE FOURIER DE FONCTIONS PROPRES DE L'HÉLICITÉ [5]

Conservant les formules (1) à (5) incluses, nous généralisons la forme (6) de la solution cherchée suivant :

$$(23) \quad \psi(r, \theta, z, t) = e^{i(C\theta + kz - Wt)} \Lambda^{-1}(\theta) \varphi(r);$$

k désigne manifestement la composante suivant l'axe z de l'impulsion des fermions et ψ est fonction propre de l'état pur correspondant. Conservant

les formules (7) à (9) incluses ainsi que (12) et (13), nous devons généraliser (10) et (11) suivant :

$$(24) \quad \left\{ \sigma_1 \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{2r} \right) + i\sigma_2 \left[a(r) + \frac{C}{r} \right] + i\sigma_3 k \mp iW \right\} \varphi(r) = 0,$$

$$(25) \quad \varphi^\dagger \left\{ \sigma_1 \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{2r} \right) - i\sigma_2 \left[a(r) + \frac{C}{r} \right] - i\sigma_3 k \pm iW \right\} = 0;$$

la généralisation de l'importante formule (16), que nous interpréterons au § IV, est :

$$(26) \quad r(Wj_z \mp k\rho) = (r\sigma_\theta)'$$

Dans le précédent § II, nous avons étudié le problème de la distribution radiale de l'onde ψ dans le cas d'une distribution verticale particulièrement simple ($\partial\psi/\partial z = 0$). Ici nous allons au contraire choisir une distribution radiale du ψ particulièrement simple de manière à pouvoir construire explicitement, par superposition en intégrale de Fourier, des distributions verticales arbitraires du ψ .

Pour simplifier les calculs nous adopterons une représentation particulière des matrices σ de Pauli :

$$(27) \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a numéroté 1 la matrice à éléments imaginaires parce que l'équation (24) admettra ainsi des solutions φ réelles; on a numéroté 2 la matrice diagonale pour simplifier la discussion des états d'hélicité. Avec la représentation (27) les expressions (12) et (13) des densités de courant \mathbf{j} et de spin $\boldsymbol{\sigma}$, et de présence ρ , s'écrivent (le double signe étant le même que précédemment) :

$$(28) \quad \pm j_r = 2\sigma_r = 0, \quad \pm j_\theta = 2\sigma_\theta = \varphi_1^2 - \varphi_2^2, \quad \pm j_z = 2\sigma_z = 2\varphi_1\varphi_2,$$

$$(29) \quad \rho = \varphi_1^2 + \varphi_2^2;$$

φ_1 et φ_2 désignent bien entendu les deux composantes du φ .

Avec la représentation (27) des σ les équations (24) s'écrivent :

$$(30) \quad \begin{cases} \left[a(r) + \frac{C}{r} \mp W \right] \varphi_1 - \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{2r} - k \right) \varphi_2 = 0, \\ \left[a(r) + \frac{C}{r} \pm W \right] \varphi_2 - \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{2r} + k \right) \varphi_1 = 0. \end{cases}$$

Nous particulariserons la classe des solutions cherchées en imposant la condition :

$$(31) \quad \frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \text{const.},$$

et nous montrerons que ces solutions sont fonctions propres de l'état d'hélicité [5]. Posons, avec essentiellement :

$$(32) \quad \alpha = \text{const.},$$

$$(33) \quad \begin{cases} \varphi_1^+ = u \cos(\alpha/2), & \varphi_2^+ = u \sin(\alpha/2); \\ \varphi_1^- = u \sin(\alpha/2), & \varphi_2^- = u \cos(\alpha/2); \end{cases}$$

$[\varphi^+$ étant associé au signe supérieur et φ^- au signe inférieur dans (24)]; les expressions (28) et (29) des densités \mathbf{j} , σ et ρ deviennent :

$$(34) \quad \pm j_r = 2\sigma_r = 0, \quad j_\theta = \pm 2\sigma_\theta = u^2 \cos \alpha, \quad \pm j_z = 2\sigma_z = u^2 \sin \alpha;$$

$$(35) \quad \rho = u^2.$$

De (32) et (34) on conclut :

$$(36) \quad \frac{j_z}{j_\theta} = \pm \text{tg } \alpha = \text{const.};$$

les lignes de courant (et de spin) sont donc des hélices de pentes égales, les états d'hélicité positive et négative étant respectivement déviés vers le haut et vers le bas (dans le cas des particules : $W > 0$).

Portant (33) dans (30) (φ^+ étant associée au signe supérieur et φ^- au signe inférieur) l'on trouve, pour chaque signe, deux expressions de $u'(r)/u(r)$; en les égalant l'on trouve :

$$\left(a + \frac{C}{r}\right) \left(\text{tg } \frac{\alpha}{2} - \text{cotg } \frac{\alpha}{2}\right) + W \left(\text{tg } \frac{\alpha}{2} + \text{cotg } \frac{\alpha}{2}\right) = \pm 2k$$

d'où, après réductions, l'importante relation :

$$(37) \quad \left[a(r) + \frac{C}{r}\right] \cos \alpha \pm k \sin \alpha = W.$$

Elle fournit incidemment l'expression du potentiel extérieur $a(r)$ en fonction des quatre constantes α , W , k , C , caractérisant la solution considérée; comme précédemment (§ II), C/r est un terme de jauge. Notons que les pentes rk/C de l'impulsion-énergie et $\text{tg } \alpha$ de la vitesse sont indépendantes, ce qui correspond à l'existence de l'*effet inertial de spin*.

L'expression de l'amplitude $u(r)$ peut être donnée sous plusieurs formes. Multipliant (30₁) par φ_2 , (30₂) par φ_1 et ajoutant, l'on trouve :

$$\frac{u'}{u} + \frac{1}{2r} = \left(a + \frac{C}{r}\right) \sin \alpha \mp k \cos \alpha ;$$

posant [6] :

$$(38) \quad m = \pm \left(a + \frac{C}{r}\right) \sin \alpha - k \cos \alpha$$

et intégrant, l'on obtient l'expression de la dépendance radiale du ψ :

$$(39) \quad u(r) = \frac{B}{\sqrt{r}} e^{\pm mr},$$

où B (qu'on peut prendre > 0) et m désignent deux constantes.

Mettant à part le cas frontière :

$$(40) \quad m = 0, \quad k = \pm W \sin \alpha, \quad a + \frac{C}{r} = W \cos \alpha,$$

nous avons à considérer deux types de solutions : celles dont l'exposant est négatif, qui décroissent de $+\infty$ à 0 lorsque r croît de 0 à $+\infty$ et celles d'exposant positif, qui varient de $+\infty$ à $+\infty$ en passant par un minimum (fig. 3 a et b).

Les solutions du premier type sont de carré sommable, en ce sens que, d'après (34) et (35) :

$$(41) \quad 2\pi \int_0^{+\infty} j_z r dr = \pm \varepsilon \frac{\pi B^2}{m} \sin \alpha, \quad 2\pi \int_0^{+\infty} \rho r dr = \varepsilon \frac{\pi B^2}{m} ;$$

$\varepsilon = \pm 1$ suivant que $m > 0$ ou $m < 0$. L'une ou l'autre de ces formules représente une condition de normalisation de la constante B ; à cette fin, la formule (41₁) est physiquement la mieux adaptée à notre problème.

Les solutions du second type ne sont pas de carré sommable, ceci du fait du comportement de u pour $r \rightarrow +\infty$. Elles sont, cependant, physiquement significatives car, dans la région du minimum, elles redonnent la formule de déflexion trouvée au § II pour le cas où $j_\theta = \text{const}$. En effet, écrivant, d'après (39), que $du/dr = 0$, on trouve :

$$(42) \quad r_m = \frac{\varepsilon}{2m}$$

puis, compte tenu de (38) et (37) pour $k = 0$,

$$(43) \quad (\text{tg } \alpha)_{k=0, \min u} = \frac{\varepsilon}{2Wr_m} ;$$

c'est la même expression que (19), pourvu qu'on associe (dans ces « solutions du second type »), les cas $m > 0$ et $m < 0$ aux états d'hélicité positive et négative des *particules*.

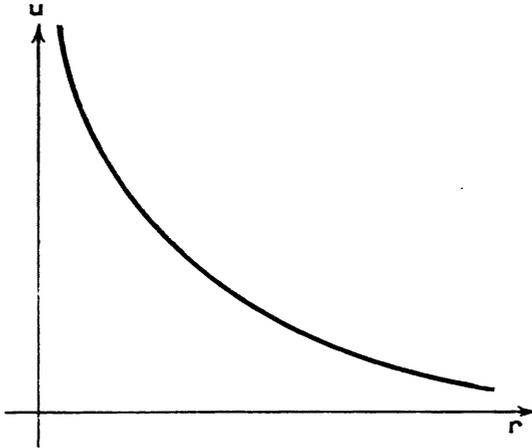


FIG. 3 a.

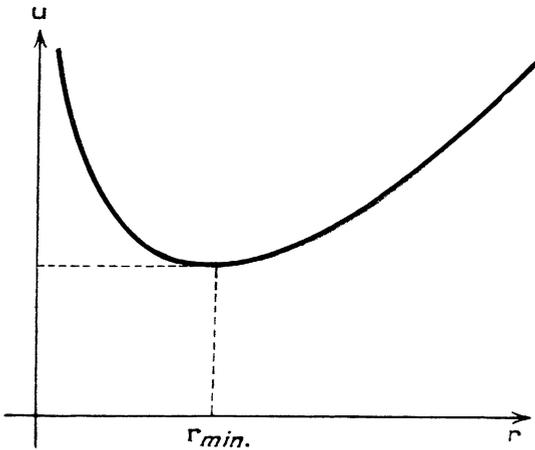


FIG. 3 b.

Nous allons maintenant superposer en intégrale de Fourier en $\int dk \exp(ikz)$ des solutions du type précédent, de manière à décrire le cas d'un faisceau limité verticalement.

Il est physiquement nécessaire que le potentiel $a(r)$ soit le même pour

toutes les composantes spectrales; de plus, pour simplifier les calculs et la discussion des résultats, nous imposerons à la pente α (indépendante de r) d'être la même pour toutes les composantes spectrales. Il reste alors possible de définir arbitrairement les variations de W et de C en fonction de k .

La condition $C = \text{constante}$ sur les composantes spectrales $= 2\pi N$, N entier, est la condition d'uniformité des solutions ψ . Physiquement, cette condition ne s'impose pas dans notre problème, étant donné : 1° que la longueur des trains d'ondes peut être considérée comme petite devant la circonférence de l'accélérateur et 2° qu'on va voir que le faisceau, limité verticalement, a un mouvement hélicoïdal, en sorte qu'on peut se limiter aux cas où il ne se superpose pas à lui-même après un tour de circuit.

La condition $W = \text{const.}$ sur les composantes spectrales correspond à un cas facile à réaliser expérimentalement.

La condition $m = \text{const.}$ sur les composantes spectrales est (on va le voir) celle qui simplifie le plus le calcul de la transformée de notre intégrale de Fourier. D'après (39), c'est la condition pour que la distribution radiale des diverses composantes spectrales soit la même (à une constante multiplicative près). Dans ce cas, il est commode de tirer des (37) et (38) les expressions :

$$(44) \quad a + \frac{C}{r} = \pm \frac{m + k \cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad W = \pm \frac{k + m \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Compte tenu des (44), où nous supposons m indépendant de k , l'expression :

$$(45) \quad \Phi = C\theta + kz - Wt$$

de la phrase devient :

$$(46) \quad \Phi = k(z - Z) + f(r, \theta, t)$$

avec par définition de Z :

$$(47) \quad \pm Z \sin \alpha + r\theta \cos \alpha = t$$

et de f ($\sin \alpha \neq 0$) :

$$(48) \quad f(r, \theta, t) = -a(r)r\theta \pm \frac{r\theta - t \cos \alpha}{\sin \alpha} m.$$

Posons encore :

$$(49) \quad \varphi_0^+ = \begin{pmatrix} \cos (\alpha/2) \\ \sin (\alpha/2) \end{pmatrix}, \quad \varphi_0^- = \begin{pmatrix} \sin (\alpha/2) \\ \cos (\alpha/2) \end{pmatrix}.$$

L'intégrale de Fourier en $\int dk$ que nous cherchons et sa transformée s'écrivent, dans le cas d'une distribution gaussienne centrée sur la valeur $k = 0$ de la composante suivant z de l'impulsion des fermions ($g = \text{const.}$) :

$$(50) \quad \psi(r, \theta, z, t) = Bg^{-1/2} \Lambda^{-1}(\theta) \varphi_0^\pm r^{-1/2} e^{\pm mr + if(r, \theta, t)} (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(z-Z) - \frac{k^2}{2g}} dk$$

$$= B \Lambda^{-1}(\theta) \varphi_0^\pm r^{-1/2} e^{\pm mr + if(r, \theta, t) - \frac{g}{2}(z-Z)^2} ;$$

la présence des deux constantes multiplicatives g et B permet d'ajuster séparément la largeur de la distribution gaussienne et la normalisation de l'onde ψ .

Si donc on pose :

$$(51) \quad Z = \pm t \sin \alpha, \quad r\theta = t \cos \alpha,$$

l'équation (47) est satisfaite [et, incidemment, le terme en m dans f disparaît des formules (48) et (50)]. L'on conclut de là que *le point moyen Z de la distribution gaussienne en z décrit à la vitesse $c = 1$ les hélices \mathcal{H} de pente $\pm \text{tg } \alpha$ (le signe étant celui de l'hélicité des particules)*; ce fait, joint à l'hypothèse soulignée avant la formule (50), exprime sous une nouvelle forme l'existence de notre *effet inertial de spin*.

Il suit de là que, quel que soit l'opérateur \mathcal{R} dont on cherche la valeur moyenne probable $R = \langle \psi | \mathcal{R} | \psi \rangle$, celle-ci se déplacera à la vitesse c le long des hélices \mathcal{H} caractéristiques de l'effet inertial de spin. Ainsi se trouve écartée toute discussion relative au « bon » opérateur de position du fermion à spin : *quel que soit l'opérateur de position choisi, sa valeur moyenne subira « l'effet inertial de spin »*.

Remarque. — Effet inertial de spin et vitesse de groupe. Si, dans (37), on varie arbitrairement C , k et W :

$$(52) \quad \frac{\cos \alpha}{r} dC \pm \sin \alpha dk - dW = 0,$$

et qu'on pose que le déphasage correspondant d'après (45) (entre deux instants-points fixes) sera nul :

$$(53) \quad d\Phi = \theta dC + z dk - t dW = 0,$$

on trouvera la vitesse de groupe en exprimant la compatibilité inconditionnelle des deux formules; il vient ainsi les formules semblables à (51) :

$$(54) \quad \frac{r\theta}{\cos \alpha} = \pm \frac{z}{\sin \alpha} = t.$$

IV. — RELATION
ENTRE LES PRÉCÉDENTS CALCULS
ET LA THÉORIE GÉNÉRALE ABSTRAITE
DE L'EFFET INERTIAL DE SPIN

Dans notre théorie générale abstraite de l'effet inertial de spin [1] [2], nous avons introduit un tenseur d'impulsion-énergie $T^{\bar{j}}$ asymétrique, dont la partie antisymétrique $T^{\bar{j}}$ est liée à la densité de spin σ^{ijk} (complètement antisymétrique) par la formule :

$$(55) \quad T^{\bar{j}} \equiv T^{\bar{j}} - T^{ji} = -\partial_k \sigma^{ijk} = \frac{1}{2} i \varepsilon^{ijkl} (\partial_l \sigma_k - \partial_k \sigma_l);$$

$i, j, k, l = 1, 2, 3, 4; x^4 = it$; on note ε^{ijkl} l'indicateur de Levi-Civita; σ_l tel que :

$$(56) \quad \sigma^{ijk} = i \varepsilon^{ijkl} \sigma_l$$

est le quadrivecteur dual de σ^{ijk} .

En théorie de l'électron de Dirac avec des unités telles que $c = 1$ et $\hbar = h/2\pi = 1$ et la charge incorporée dans le potentiel, on a (tenseur asymétrique de Tetrode) :

$$(57) \quad T^{\bar{j}} = -\frac{1}{2} \bar{\psi} [\partial^j] \gamma^j \psi + i A^i \bar{\psi} \gamma^j \psi$$

et (densité de spin de Dirac) :

$$(58) \quad \sigma^{ijk} = \frac{1}{2} \bar{\psi} \gamma^{ijk} \psi;$$

on note γ^i les matrices de von Neumann, $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^4$; $\gamma^{ijk} = \gamma^i \gamma^j \gamma^k$ si tous les indices sont différents, 0 sinon; $[\partial^i] = \overrightarrow{\partial^i} - \overleftarrow{\partial^i}$ est l'opérateur du courant de Gordon. Tetrode a montré [7] que la formule (55) est effectivement conséquence des équations de Dirac et l'interprétation de cette formule a été l'un des points de départ de notre recherche [1].

Du fait de l'antisymétrie complète du tenseur σ^{ijk} , l'on a :

$$(59) \quad \partial_j T^{\bar{j}} \equiv \partial_j (T^{\bar{j}} - T^{ji}) = -\partial_{jk} \sigma^{ijk} = 0;$$

il s'ensuit que tous les tenseurs de la famille :

$$(60) \quad \Theta^{\bar{j}} = a T^{\bar{j}} + b T^{ji}, \quad a + b = 1,$$

sont intégralement équivalents; en particulier, l'on a souvent recommandé l'usage du tenseur symétrisé :

$$(61) \quad \Theta_0^{ij} = \frac{1}{2} (T^{ij} + T^{ji}).$$

Nous nous proposons de montrer que le tenseur asymétrique (57) de Tetrode est le bon tenseur d'impulsion-énergie, en ce sens qu'il est le seul à décrire *localement* les phénomènes déduits aux § II et III précédents.

Soit du_j tel que :

$$(62) \quad i\epsilon^{ijkl} du_l = [dx^i dx^j dx^k]$$

le quadrivecteur élément de volume sur une hypersurface tridimensionnelle; d'après notre théorie générale [1] [2], nous distinguons l'*impulsion-énergie élémentaire vraie* :

$$(63) \quad dP = T^ij du_j,$$

la *pseudo-impulsion-énergie élémentaire* :

$$(64) \quad dL^i = T^ji du_j,$$

et l'*impulsion-énergie transversale* :

$$(65) \quad dT^i = T^ij du_j.$$

Bien entendu, d'après ces définitions :

$$(66) \quad dP^i = dL^i + dT^i.$$

Ceci étant, nous considérerons successivement deux cas :

Élément de volume du genre temps. — L'on ne perd alors pas de généralité en supposant que du_4 est la seule composante non nulle. Portant dans (63) et (64) l'expression (57) du tenseur de Tetrode, l'on trouve que la vraie impulsion-énergie est dirigée par l'opérateur d'impulsion-énergie $-i\partial^i + A^i$; et, si ψ ne dépend du temps que par un facteur $\exp(-iWt)$, ce qui est notre cas, une pseudo-impulsion-énergie colinéaire au courant de Dirac. Notons en vue de la suite la forme prérativiste de la formule (55) [compte tenu de (65)] :

$$(67) \quad \mathbf{T} = - \iiint \mathbf{rot} \boldsymbol{\sigma} du = \iint \boldsymbol{\sigma} \wedge d\mathbf{s}.$$

Élément de volume du genre espace. — L'on ne perd alors pas de généralité en supposant que du_4 est nulle; les trois autres composantes peuvent être écrites $du_\alpha = ds_\alpha dt$, $\alpha = 1, 2, 3$, en sorte que les formules (63), (64), (65)

représentent maintenant des flux d'impulsion-énergie par éléments de surface et de temps. Dans le cas, considéré au § II, d'un ψ indépendant de z et d'un élément de surface ds orthogonal à l'axe z , le flux de pseudo-impulsion-énergie sera nul. Mais le flux d'impulsion-énergie transversale, et par conséquent celui d'impulsion-énergie totale, ne seront en général pas nuls; par un abus de langage qui fait bref, nous appellerons dT^4 et dT^4/dt les flux d'énergie et de puissance transversales; la formule :

$$(68) \quad \varpi_{\tau} = \iint \text{rot } \sigma \cdot ds = \oint \sigma \cdot dl$$

est conséquence directe de la formule (55) de Tetrode.

Ceci étant rappelé, nous allons montrer que la formule (16) est l'expression directe de l'effet inertial de spin lié à l'asymétrie du tenseur d'impulsion-énergie $T^{\dot{i}}$.

Première méthode : du_j du genre temps. — Multiplions les membres extrêmes de (16) par $2\pi r dr dz$; l'expression obtenue au dernier membre n'est autre que $-\iint \sigma \wedge ds$, c'est-à-dire, d'après (67), l'impulsion transversale attachée à l'élément de volume $2\pi r dr dz$ changée de signe. Par raison de symétrie et puisque $\partial_z \psi = 0$ et $A_z = 0$, la vraie impulsion attachée au même volume est nulle; donc, d'après (66), $\mathbf{L} = -\mathbf{T}$. Mais nous avons dit que, dans notre cas, la pseudo-impulsion \mathbf{L} est dirigée par le courant de Dirac; or, l'expression $2\pi W r j_z dr dz$ obtenue au premier membre n'est autre que l'intégrale de l'impulsion classiquement attachée au courant de Dirac. Finalement l'on trouve donc :

$$(69) \quad \mathbf{L} = - \iint \sigma \wedge ds, \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Seconde méthode : du_j du genre espace. — Multiplions les membres extrêmes de (16) par $2\pi \delta r$; l'expression trouvée au dernier membre n'est autre que $\delta \oint \sigma \cdot dl$, c'est-à-dire, d'après (68), le « flux de puissance transversale » ϖ_{τ} . Mais, puisque $\partial \psi / \partial z = 0$ et $A_z = 0$ le flux de « pseudo-puissance » est, comme on l'a expliqué, nul; donc, d'après (66), $dP^4/dt = dT^4/dt$. Or, l'expression $2\pi W r j_z \delta r$ obtenue au premier membre n'est autre que le flux de puissance transportée par le courant de Dirac à travers l'anneau $r, r + \delta r$ de tout plan $z = \text{const}$. Finalement, l'on trouve donc :

$$(70) \quad \varpi = \varpi_{\tau} = \oint \sigma \cdot dl, \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Si, dans les circonstances résumées par les figures 2 et commentées à propos de la formule (16), on intègre entre un rayon $r_1 < a$ et un rayon $r_2 > b$ extérieurs au faisceau, l'on trouve $\mathbf{T} = 0$ avec la première méthode et $\varpi_{\mathbf{T}} = 0$ avec la seconde. Globalement parlant, l'effet inertial de spin ne se manifesterait donc pas; cela suit du reste directement de l'équivalence intégrale des différents tenseurs (60). Par contre, et comme nous l'avons expliqué à la fin du § II, l'effet devrait se manifester localement lors d'une analyse fine des lignes de courant, impliquant l'interprétation du flux du courant de Dirac comme probabilité d'impact des particules.

Les considérations précédentes montrent que, parmi les tenseurs (60), le $T^{\hat{i}\hat{j}}$ de Tetrad (61) est le seul à décrire *localement* l'effet inertial de spin démontré par des calculs directs aux § II et III.

Remarque. — Si le ψ et ses dérivées premières ne s'annulent pas à la frontière d'intégration, les différents tenseurs (60) cessent d'être intégralement équivalents. C'est ce qui arrive en tout cas sur l'axe $r = 0$ avec les solutions considérées au § III, même lorsqu'elles sont de carré sommable du fait que ψ tend exponentiellement vers 0 pour $r \rightarrow +\infty$. Or, dans ce cas, et sous l'hypothèse $\partial\psi/\partial z = 0$ où $P^3 = k = 0$, l'usage de la formule (63) impliquant le tenseur de Tetrad est le seul à donner la bonne valeur intégrale $P^3 = 0$. L'usage de la formule (64) donnerait la valeur erronée :

$$L^3 = W2\pi \int_0^\infty r j_z dz,$$

et l'emploi du tenseur symétrisé (61) la valeur erronée $\frac{1}{2} L^3$. Dans ce cas, l'on peut donc dire que le tenseur de Tetrad est le seul à être *intégralement* le bon.

V. — CONCLUSIONS

Bien que les calculs explicites des § II et III nous semblent établir très clairement la réalité de l'effet inertial de spin prédit par notre théorie générale [1] [2], il resterait, pour être complet :

— à étudier le cas d'un faisceau qui soit limité à la fois radialement et verticalement;

— à étudier ce qui se passe au cours du processus d'accélération des particules jusqu'à la vitesse voisine de c ;

— à discuter les effets du rayonnement d'accélération.

Nous ne voyons pas *a priori* qu'aucune de ces études soit de nature à contredire les conclusions précédemment exposées.

En ce qui concerne la mise en évidence expérimentale de l'effet dans les accélérateurs circulaires, il y a de grandes difficultés à surmonter :

- instabilité radiale du faisceau;
- instabilité verticale du faisceau;
- imperfection du vide dans l'enceinte, entraînant des collisions entre les fermions d'épreuve et les molécules du gaz; de notre point de vue, celles-ci équivalent à des transitions de localisation prématurées, impliquant une destruction de l'effet par réduction prématurée du paquet d'ondes ;
- mutuelle répulsion des particules (charge d'espace) ;
- transitions induites entre les deux états d'hélicité par le moment magnétique anormal de l'électron (F. Strocchi [8]) ;
- valeur extrêmement faible de la pente α du fait que W est très grand [formule (19)] ; à cet égard le problème analogue avec le photon se présente bien plus favorablement [9].

RAPPELS

- [1] *Comptes rendus*, t. 214, 1942, p. 904; *J. Math. pures et appl.*, t. 22, 1943, p. 118-136.
- [2] *Cahier de Phys.*, t. 13, 1959, p. 200 et t. 16, 1962, p. 153; *Phys. Rev.*, t. 129, 1963, p. 466.
- [3] Ce paragraphe généralise le contenu d'une note aux *Comptes rendus*, t. 257, 1963, p. 3327.
- [4] Ce résultat sera retrouvé au § III par une autre méthode (cf. équ. (28)).
- [5] Ce paragraphe développe le contenu d'une note aux *Comptes rendus*, t. 258, 1964, p. 1745; la formule (50) ci-dessous (où m est pris indépendant de k) corrige la formule erronée (42) de cette note, où devrait apparaître un produit de composition (puisqu'on avait supposé m fonction de k).
Voir aussi *Comptes rendus*, t. 256, 1963, p. 4608 et *Phys. Rev.*, t. 134, 1964, p. B 471, où étaient présentées d'autres méthodes de calcul de ce même cas.
- [6] C'est intentionnellement que la définition est posée de manière à faire apparaître un double signe dans (39); sans cela, les *particules* n'auraient qu'un état d'hélicité (les *antiparticules* ayant l'autre).
- [7] *Zeits. f. Physik*, t. 49, 1928, p. 858.
- [8] *Nuovo Cimento* (sous presse).
- [9] *Cahiers de Physique* (sous presse) ; *Comptes rendus*, t. 258, 1964, p. 5167.

(Manuscrit reçu le 20 novembre 1964).