ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

JEAN-CLAUDE HOUARD

Les équations du modèle de Lee dans le secteur $V\theta \rightleftarrows N\theta\theta$

Annales de l'I. H. P., section A, tome 2, nº 2 (1965), p. 105-130

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1965__2_2_105_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. II, n° 2, 1965, p. 105-130.

Section A :
Physique théorique.

Les équations du modèle de Lee dans le secteur $V\theta \rightleftarrows N\theta\theta$ (*)

par

Jean-Claude HOUARD
Laboratoire de Physique Atomique et Moléculaire
(Collège de France, Paris).

RÉSUMÉ. — On résout une équation intégrale linéaire attachée au secteur $V\theta \rightleftarrows N\theta\theta$ du modèle de Lee. On en déduit les états propres de ce secteur ainsi que les amplitudes de diffusion pour des particules hors de leur couche de masse.

ABSTRACT. — We solve a linear integral equation which occurs in dealing with the $V\theta \rightleftarrows N\theta\theta$ sector in the Lee model. This allows us to obtain the eigenstates and the off-shell scattering amplitudes of this sector.

INTRODUCTION

Le modèle de Lee (1) constitue un exemple partiellement résoluble d'une théorie quantique des champs. Malgré des propriétés pathologiques il a aidé à la compréhension de théories plus réalistes et a, de ce fait, été utilisé par de nombreux auteurs.

Les premiers résultats concernant la résolution du secteur $V\theta \rightleftarrows N\theta\theta$ ont

(*) Ce travail a bénéficié de l'aide du Commissariat à l'Énergie Atomique.
(1) T. D. LEE, *Phys. Rev.*, t. 95, 1954, p. 1329.
G. KALLEN and W. PAULI, *Dan. Mat. Fys. Medd.*, t. 30, n° 7, 1955.

été obtenus par R. D. Amado [2], qui a pu déterminer les amplitudes physiques de la diffusion élastique Vθ et de la réaction de production V$\theta \to$ N$\theta\theta$, à l'aide de méthodes inspirées par les relations de dispersion.

Nous considérons ici les équations intégrales, écrites par Källen et Pauli [1], qui s'introduisent dans la recherche des états propres de l'hamiltonien. Ces équations se ramènent à un type bien défini qui est présenté et résolu dans la section I [3]. On donne dans la section II les expressions des états propres de l'hamiltonien. On montre ensuite que la somme des diagrammes de Feynman pour la diffusion triple N$\theta\theta \to$ N$\theta\theta$ est définie par une équation que l'on peut ramener à l'équation de la section I et l'on en déduit les diverses amplitudes.

On traite simultanément le cas du modèle de Lee proprement dit, où la constante de renormalisation Z de la particule V est différente de zéro et le cas où cette constante s'annule. Il a été montré [4] que ces deux cas correspondent respectivement à une particule V élémentaire ou composée; des propriétés liées à la limite Z $\to$ 0 sont énoncées.

I. — ÉQUATION GÉNÉRALE ET SOLUTION

1. Énoncé du problème.

La donnée essentielle est une fonction de variable complexe $\beta(z)$ supposée de la forme :

$$\beta(z) = A(z) + B(z)\int_{\mu}^{\infty} d\omega \frac{F(\omega)}{\omega - z} \tag{I.1}$$

et satisfaisant aux conditions suivantes [5] :

I. A et B sont des polynômes.

---

[2] R. D. Amado, *Phys. Rev.*, t. 122, 1961, p. 696.

[3] Une solution de cette équation, dans un cas particulier, a déjà été obtenue à partir des résultats de la référence [2] par R. P. Kenschaft and R. D. Amado, *J. Math. Phys.*, t. 5, 1964, p. 1340.

[4] J. C. Houard et B. Jouvet, *Nuovo Cimento*, t. 18, 1960, p. 466.
M. T. Vaughn, R. Aaron and R. D. Amado, *Phys. Rev.*, t. 124, 1961, p. 1258.

[5] Les conditions I à V ne sont sans doute pas les plus générales que l'on puisse poser. Elles ont l'avantage de simplifier la résolution et sont suffisantes pour les applications envisagées ici. En particulier, on peut se débarrasser facilement de la condition IV dont le seul but est d'éviter l'intervention de pôles multiples.

II. $$\mu > 0, \qquad \int d\omega \frac{F(\omega)}{\omega} < \infty$$

III. $\beta(z)$ ne possède pas de zéro.

Les fonctions $\beta(z)$ et $1/\beta(z)$ sont évidemment holomorphes dans le complémentaire de la coupure $[\mu, \infty[$ et le saut de $\beta(z)$ sur la coupure est donné par la formule :

$$\beta^+(\omega) - \beta^-(\omega) = 2\pi i B(\omega)F(\omega), \qquad \omega > \mu. \tag{I.2}$$

L'équation à résoudre s'écrit :

$$T(\omega) = \frac{1}{P(M-\omega)\beta(M-\omega)} \left[R(\omega) - \frac{1}{2\pi i}\int_\mu^\infty d\omega' \frac{P(\omega')}{\omega' + \omega - M}[\beta^+(\omega') - \beta^-(\omega')]T(\omega')\right] \tag{I.3}$$

où $T(\omega)$ est la fonction inconnue, définie pour $\omega > \mu$ et où l'on fait les hypothèses :

IV. P est un polynôme dont les zéros $\{ a_i \}$ sont simples et situés en dehors des demi-droites $]M - \infty, M - \mu]$ et $[\mu, \infty[$.

R est une fraction rationnelle dont les pôles $\{ b_k \}$ possèdent les mêmes propriétés que les zéros de P. On suppose, en outre, que les zéros des polynômes $P(z)$ et $P(M - z)$ et les pôles de $R(z)$ et $R(M - z)$ sont tous distincts.

V. $$| R(z) | \xrightarrow[|z|\to\infty]{} 0, \qquad | P(z)\beta(z) | > m > 0 \quad \text{pour} \quad | z | > m' > 0.$$

VI. On suppose pour l'instant que l'une des deux conditions suivantes est réalisée :

$$\mathfrak{Im}\, M \neq 0 \qquad \text{ou} \qquad M < 2\mu.$$

2. Solution.

La résolution de l'équation (3), dans laquelle l'intégrale du second membre est supposée convergente, est équivalente à la recherche d'une fonction analytique $T(z)$ vérifiant l'équation :

$$T(z) = \frac{1}{P(M-z)\beta(M-z)} \left[R(z) - \frac{1}{2\pi i}\int_\mu^\infty d\omega \frac{P(\omega)}{\omega + z - M}[\beta^+(\omega) - \beta^-(\omega)]T(\omega)\right]. \tag{I.4}$$

On voit tout d'abord que $T(z)$ doit être méromorphe dans le complémentaire de la coupure $]M - \infty, M - \mu]$ et admettre comme pôles simples les points $\{ M - a_i \}$ et $\{ b_k \}$.

Les hypothèses V et l'équation (4) entraînent la propriété asymptotique :

$$P(M - z)\beta(M - z)T(z) \xrightarrow[|z| \to \infty]{} 0$$

et donc aussi :

$$T(z) \xrightarrow[|z| \to \infty]{} 0. \tag{I.5}$$

Ces relations n'entraînent pas nécessairement que $P(z)\beta(z)T(z)$ tende asymptotiquement vers zéro, mais il résulte de la forme de la fonction $\beta(z)$ que l'on a au moins :

$$\frac{1}{z} P(z)\beta(z)T(z) \xrightarrow[|z| \to \infty]{} 0. \tag{I.6}$$

On posera :

$$\Delta(\omega) = \frac{1}{2\pi i}\left[T^+(\omega + i\Im m M) - T^-(\omega + i\Im m M)\right], \qquad \omega + i\Im m M \in]M - \infty, M - \mu]. \tag{I.7}$$

En intégrant par rapport à u la fonction $\frac{1}{2\pi i}\frac{T(u)}{u - z}$ le long du contour de la figure 1, on obtient alors immédiatement, d'après (5), (7) et (4) (6),

$$T(z) = \sum_k \frac{R_k}{P(M - b_k)\beta(M - b_k)[z - b_k]} + \sum_i \frac{r_i}{z + a_i - M} + \int_{-\infty}^{Re(M-\mu)} d\omega \frac{\Delta(\omega)}{\omega + i\Im m M - z} \tag{I.8}$$

où R_k désigne le résidu de $R(z)$ au point b_k et r_i la quantité :

$$r_i = \frac{-1}{P'(a_i)\beta(a_i)}\left[R(M - a_i) - \frac{1}{2\pi i}\int_\mu^\infty d\omega \frac{P(\omega)}{\omega - a_i}[\beta^+(\omega) - \beta^-(\omega)]T(\omega)\right]. \tag{I.9}$$

Si l'on intègre maintenant la fonction $\frac{1}{2\pi i}\frac{P(u)\beta(u)T(u)}{u(u + z - M)}$ sur le contour de

---

(6) On exclut le cas où des singularités seraient présentes sur la coupure. En particulier l'intégrale sur le petit cercle de la figure 1 tend vers zéro.

la figure 2, on trouve, après utilisation de la condition IV et des formules (6) et (8) :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mu}^{\infty} d\omega \frac{P(\omega)}{\omega}\frac{\beta^{+}(\omega)-\beta^{-}(\omega)}{\omega+z-M}T(\omega)$$
$$+\int_{-\infty}^{\mathrm{Re}(M-\mu)} d\omega \frac{P(\omega+i\Im m M)}{\omega+i\Im m M}\frac{\beta(\omega+i\Im m M)}{\omega+z-\mathrm{Re}M}\Delta(\omega)$$
$$=\frac{P(M-z)\beta(M-z)T(M-z)}{M-z}+\frac{P(0)\beta(0)T(0)}{z-M}$$
$$+\sum_i r_i\frac{P(M-a_i)\beta(M-a_i)}{(M-a_i)(z-a_i)}+\sum_k\frac{P(b_k)\beta(b_k)}{P(M-b_k)\beta(M-b_k)}\frac{R_k}{b_k(b_k+z-M)}.$$

La première intégrale du membre de gauche se transforme facilement grâce à l'identité :

$$\frac{1}{\omega(\omega+z-M)}=\frac{1}{z-M}\left(\frac{1}{\omega}-\frac{1}{\omega+z-M}\right).$$

On en tire aussitôt, à l'aide de l'équation (4) :

$$\text{(I.10)}\quad P(M-z)\beta(M-z)[T(z)+T(M-z)]$$
$$=R(z)-R(M)+P(0)\beta(0)[T(M)+T(0)]$$
$$+(z-M)\sum_i r_i\frac{P(M-a_i)\beta(M-a_i)}{(M-a_i)(z-a_i)}$$
$$+(z-M)\sum_k\frac{P(b_k)\beta(b_k)}{P(M-b_k)\beta(M-b_k)}\frac{R_k}{b_k(b_k+z-M)}$$
$$-(z-M)\int_{-\infty}^{\mathrm{Re}(M-\mu)} d\omega\frac{P(\omega+i\Im m M)\beta(\omega+i\Im m M)}{(\omega+i\Im m M)(\omega+z-\mathrm{Re}M)}\Delta(\omega).$$

On a supposé ici que ni l'origine, ni le point M, ne coïncident avec l'une des singularités des diverses fonctions qui interviennent; s'il n'en est pas ainsi on peut évaluer l'intégrale qui précède avec un point de soustraction différent de l'origine sans que les résultats qui suivent en soient affectés.

L'équation (10) est de la forme :

$$\text{(I.11)}\qquad T(z)+T(M-z)=\frac{1}{P(M-z)\beta(M-z)}\chi(z)$$

où la fonction $\chi(z)$ est méromorphe dans le complémentaire de la coupure $[\mu, \infty[$ et possède les pôles simples $\{a_i\}$, $\{b_k\}$, $\{M-b_k\}$. Le changement de variable $z \to M-z$ effectué dans (11) conduit à l'égalité :

$$P(z)\beta(z)\chi(z)=P(M-z)\beta(M-z)\chi(M-z).$$

Le premier membre de cette équation est méromorphe dans le complémentaire de la coupure $[\mu, \infty[$ tandis que le second l'est dans le complémentaire de $]M - \infty, M - \mu]$. Ces deux coupures n'ont aucun point commun d'après VI; il en résulte que la fonction $P(z)\beta(z)\chi(z)$ est méromorphe dans tout le plan; ses pôles sont les pôles simples $\{ b_k \}$ et $\{ M - b_k \}$.

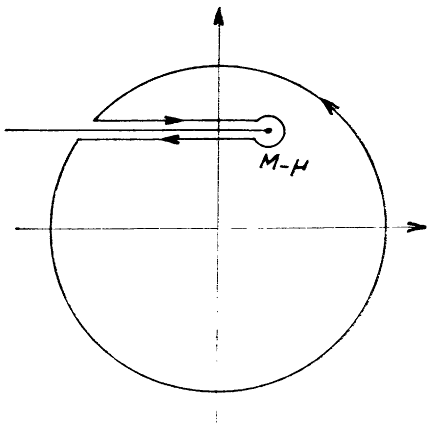


FIG. 1.

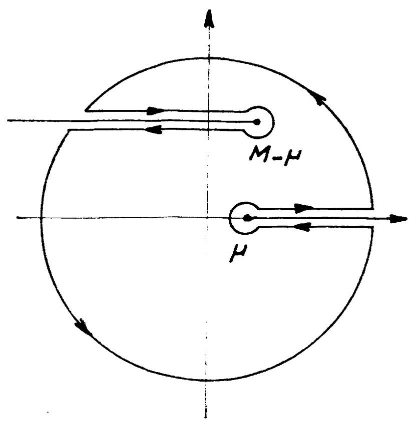


FIG. 2.

La formule (11) peut donc s'écrire :

$$\text{(I.12)} \qquad T(z) + T(M - z) = \frac{1}{\beta(z)\beta(M - z)} t(z)$$

où l'on a posé :

$$\text{(I.13)} \qquad t(z) = \frac{1}{P(z)P(M - z)} \left[\sum_k \left(\frac{\alpha_k}{z - b_k} + \frac{\beta_k}{z + b_k - M} \right) + Q(z) \right]$$

et où $Q(z)$ désigne une fonction entière. Il résulte des formules (5) et (6) que cette dernière se réduit nécessairement à un polynôme qui vérifie les relations :

$$\text{(I.14)} \qquad \left| \frac{Q(z)}{P(z)\beta(z)P(M - z)\beta(M - z)} \right| \xrightarrow[|z| \to \infty]{} 0, \qquad \left| \frac{Q(z)}{zP(z)\beta(z)} \right| \xrightarrow[|z| \to \infty]{} 0.$$

Suivant les cas c'est l'une ou l'autre de ces formules qui sera la plus restrictive.

La symétrie du premier membre de (12) entraîne les relations :

$$\text{(I.15)} \qquad \begin{gathered} \beta_k = - \alpha_k \\ Q(z) = Q(M - z). \end{gathered}$$

En calculant la partie principale au pôle b_k dans les deux membres de (12), on obtient, à l'aide de (8) et (13),

$$\alpha_k = R_k P(b_k)\beta(b_k). \tag{I.16}$$

Le même calcul pour le pôle $M - a_i$ donne la valeur de r_i :

(I.17)
$$r_i = \frac{-1}{P'(a_i)} \frac{1}{P(M-a_i)\beta(M-a_i)\beta(a_i)} \left[\sum_k \alpha_k \left(\frac{1}{M-a_i-b_k} - \frac{1}{b_k - a_i}\right) + Q(a_i)\right].$$

La formule (12) fournit enfin la fonction $\Delta(\omega)$ définie par (7); en portant la valeur $z = \omega + i\Im m M \pm i\varepsilon$ avec $\omega < Re(M - \mu)$ dans cette relation, on obtient, par soustraction des deux relations obtenues, en supposant $t(z) \neq 0$ (7) :

$$\Delta(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \frac{t(\omega + i\Im m M)}{\beta(\omega + i\Im m M)} \left[\frac{1}{\beta^-(ReM - \omega)} - \frac{1}{\beta^+(ReM - \omega)}\right]. \tag{I.18}$$

La fonction $T(z)$ cherchée est maintenant déterminée par l'expression (8) dans laquelle les diverses quantités qui figurent sont données par les formules (13) à (18).

Cependant, les raisonnements précédents n'ont qu'un caractère de nécessité et il y a lieu de vérifier que la fonction $T(z)$ ainsi définie est bien la solution de l'équation initiale (4).

On établit d'abord, par intégration de la fonction $\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{u-z}\frac{t(u)}{\beta(u)\beta(M-u)}$ le long du contour de la figure 2 que la relation (12) est vérifiée.

En posant :

$$K = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_c du \frac{P(u)\beta(u)T(u)}{u+z-M} \tag{I.19}$$

et en intégrant la fonction $\frac{1}{2\pi i}\frac{P(u)\beta(u)T(u)}{u+z-M}$ le long du contour de la figure 2, on obtient ensuite :

$$\begin{aligned} K + \frac{1}{2\pi i}\int_\mu^\infty d\omega \frac{P(\omega)}{\omega+z-M}[\beta^+(\omega) - \beta^-(\omega)]T(\omega) & \\ + \int_{-\infty}^{Re(M-\mu)} d\omega \frac{P(\omega + i\Im m M)\beta(\omega + i\Im m M)}{\omega + z - ReM}\Delta(\omega) & \\ = P(M-z)\beta(M-z)T(M-z) + (\text{termes à pôles}). & \end{aligned}$$

(7) La fonction $t(z)$ est nulle si $R(z) = Q(z) = 0$. La formule (12) et les hypothèses IV entraînent alors que $T(z)$ est identiquement nulle. La levée des hypothèses IV sera examinée plus loin sur un cas particulier (4, B, α).

La seconde intégrale du premier membre peut être évaluée en utilisant l'expression (18) de $\Delta(\omega)$ et en intégrant la fonction $\frac{1}{2\pi i}\frac{P(u)t(u)}{(u+z-M)\beta(M-u)}$ le long du contour de la figure 1; il s'introduit ainsi la quantité :

(I.20)

$$J = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{du}{u+z-M}\,\frac{Q(u)}{P(M-u)\beta(M-u)} = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{du}{u-z}\,\frac{Q(u)}{P(u)\beta(u)}$$

et l'on trouve pour l'intégrale considérée la valeur :

$$-J+\frac{P(M-z)t(M-z)}{\beta(z)} - R(z) + (\text{termes à pôles}).$$

En reportant cette expression dans l'équation qui précède et en utilisant la relation (12) on trouve finalement :

$$T(z) = \frac{1}{P(M-z)\beta(M-z)}\left[J-K+R(z)-\frac{1}{2\pi i}\int_\mu^\infty \frac{P(\omega)}{\omega+z-M}[\beta^+(\omega)-\beta^-(\omega)]T(\omega)\right].$$

La comparaison de ce résultat avec l'équation (4) montre que cette dernière n'aura de solution que si la condition nécessaire et suffisante $J-K=0$ peut être remplie. Cette condition limite le choix du polynôme $Q(z)$ qui est la seule quantité non encore complètement déterminée. La multiplicité des solutions dépend alors de l'arbitraire qui reste dans la définition de ce polynôme.

3. Cas limite.

Les hypothèses I à V restant inchangées supposons maintenant que la constante M soit réelle et supérieure à 2μ et considérons l'équation suivante qui, dans l'hypothèse VI, se réduit à (3) :

(I.21)
$$T(\omega) = \frac{1}{P(M-\omega)\beta^+(M-\omega)}\left[R(\omega)-\frac{1}{2\pi i}\int_\mu^\infty d\omega'\,\frac{P(\omega')}{\omega'+\omega-M-i\eta}[\beta^+(\omega')-\beta^-(\omega')]T(\omega')\right].$$

La fonction inconnue $T(\omega)$ est égale à la limite $\widehat{T}^-(\omega)$ de la fonction analytique $\widehat{T}(z)$ solution de l'équation :

$$\text{(I.22)}\quad \widehat{T}(z) = \frac{1}{P(M-z)\beta(M-z)} \left[R(z) - \frac{1}{2\pi i}\int_\mu^\infty d\omega \frac{P(\omega)}{\omega+z-M}[\beta^+(\omega)-\beta^-(\omega)]\widehat{T}^-(\omega)\right].$$

On est ainsi ramené à une équation de forme analogue à (4) mais pour laquelle les deux coupures considérées plus haut ont une partie commune. Néanmoins on obtiendra, sans souci de rigueur, une solution de cette dernière équation en considérant $\widehat{T}(z)$ comme la limite, quand η tend vers zéro, de la fonction $T_\eta(z)$ solution de (4) où M est remplacé par $M + i\eta$. Si, en effet, $T_\eta(z) \to \widehat{T}(z)$ pour z extérieur à l'intervalle $]-\infty, M-\mu]$ on aura bien $T_\eta(\omega) \to \widehat{T}^-(\omega)$ en passant formellement à la limite dans les deux membres de (4).

On a explicitement :

$$\text{(I.23)}\quad \widehat{T}(z) = \sum_k \frac{R_k}{P(M-b_k)\beta(M-b_k)[z-b_k]} + \sum_i \frac{r_i}{z+a_i-M} + \int_{-\infty}^{M-\mu} d\omega \frac{\Delta(\omega)}{\omega - z}$$

les formules (13) à (17) étant toujours valables et (18) étant remplacée par :

$$\text{(I.24)}\qquad \Delta(\omega) = \frac{1}{2\pi i}\frac{t(\omega)}{\beta^+(\omega)}\left[\frac{1}{\beta^-(M-\omega)} - \frac{1}{\beta^+(M-\omega)}\right].$$

4. Cas particulier.

Nous donnons ici les formules complètes dans le cas particulier défini par :

$$P(z) = z - a \qquad R(z) = \frac{R}{z-b}.$$

Les formules seront écrites dans le cas de l'équation (21); elles sont valables plus généralement quand la constante M est réelle.

A) CAS $R \neq 0$. — Si R est différent de zéro, la fonction $t(z)$ n'est jamais nulle et les résultats précédents s'appliquent directement.

a) *Expression de la solution.* — La solution de l'équation (21) est donnée explicitement par les formules suivantes :

$$(\mathrm{I}.25)\quad \begin{cases} \mathrm{T}(\omega) = \widehat{\mathrm{T}}^{-}(\omega) \\ \widehat{\mathrm{T}}(z) = \dfrac{\mathrm{R}}{(\mathrm{M}-a-b)\beta(\mathrm{M}-b)[z-b]} + \dfrac{r}{z+a-\mathrm{M}} + \displaystyle\int_{-\infty}^{\mathrm{M}-\mu} d\omega\, \dfrac{\Delta(\omega)}{\omega - z} \\ r = -\dfrac{(b-a)\beta(b)}{(\mathrm{M}-2a)\beta(a)\beta(\mathrm{M}-a)}\left[\dfrac{\mathrm{R}}{\mathrm{M}-a-b} - \dfrac{\mathrm{R}}{b-a} + q(a)\right] \\ \Delta(\omega) = \dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{t(\omega)}{\beta^{+}(\omega)}\left[\dfrac{1}{\beta^{-}(\mathrm{M}-\omega)} - \dfrac{1}{\beta^{+}(\mathrm{M}-\omega)}\right] \\ t(z) = -\dfrac{(b-a)\beta(b)}{(z-a)(z+a-\mathrm{M})}\left[\dfrac{\mathrm{R}}{z-b} - \dfrac{\mathrm{R}}{z+b-\mathrm{M}} + q(z)\right] \end{cases}$$

le polynôme $q(z)$ étant assujetti aux conditions :

$$q(z) = q(\mathrm{M}-z)$$

$$\left|\frac{q(z)}{z^2\beta(z)\beta(\mathrm{M}-z)}\right| \xrightarrow[|z|\to\infty]{} 0, \qquad \left|\frac{q(z)}{z^2\beta(z)}\right| \xrightarrow[|z|\to\infty]{} 0.$$

b) *Conditions d'existence.* — Les formules qui précèdent ne représentent la solution de l'équation (21) que si la condition nécessaire et suffisante d'existence $\mathrm{J} - \mathrm{K} = 0$ est remplie.

Pour exprimer commodément cette condition nous supposerons ici que la fonction $\mathrm{F}(\omega)$ figurant dans la définition de $\beta(z)$ est telle que l'intégrale du second membre de (1) se comporte asymptotiquement comme $1/z$ uniformément sur l'argument de z. Cette propriété est réalisée sous des conditions assez larges ([8]) qui imposent notamment que l'intégrale de $\mathrm{F}(\omega)$ soit convergente; elle est vraie en particulier pour des fonctions de coupure qui se comportent à l'infini comme des puissances de ω. La même hypothèse sera faite sur le comportement asymptotique de l'intégrale qui définit la fonction $\widehat{\mathrm{T}}(z)$.

Si m et n sont les degrés respectifs des polynômes $\mathrm{A}(z)$ et $\mathrm{B}(z)$, on a donc, à un facteur constant près :

$$\beta(z) \underset{|z|\to\infty}{\sim} z^{\nu}, \qquad \nu = \begin{cases} \sup(m, n-1) & \text{si} \quad \mathrm{A}(z) \neq 0 \\ n-1 & \text{si} \quad \mathrm{A}(z) = 0. \end{cases}$$

Par suite :

$$\mathrm{P}(z)\beta(z)\widehat{\mathrm{T}}(z) \sim z^{\nu}\left[\frac{\mathrm{R}}{(\mathrm{M}-a-b)\beta(\mathrm{M}-b)} + r - \int_{-\infty}^{\mathrm{M}-\mu} d\omega\, \Delta(\omega)\right].$$

([8]) J. Hamilton and W. S. Woolcock, *Rev. of Mod. Phys.*, t. 35, 1963, p. 737.

Il n'est facile de conclure que dans les deux cas suivants :

$$(\alpha)\quad \nu = -1 \quad \text{ou} \quad A(z) \equiv 0, \quad B(z) \equiv \text{constante} \neq 0,$$

$$(\beta)\quad \nu = 0 \quad \text{ou} \quad \begin{cases} (\beta_1) & A(z) \equiv 0, & d^0B(z) = 1 \\ (\beta_2) & A(z) \equiv \text{constante} \neq 0, & d^0B(z) \leqslant 1. \end{cases}$$

Dans le premier cas la première condition de limite imposée au polynôme $q(z)$ montre que celui-ci est nécessairement nul; dans le deuxième cas l'une des deux conditions de limite associée à la condition de symétrie indique que $q(z)$ doit être constant. On vérifie alors que l'intégrale J définie par (20) est nulle dans les deux cas.

La condition d'existence d'une solution est maintenant réduite à $K = 0$; elle est automatiquement remplie dans le cas (α); elle fournit dans le cas (β) la condition nécessaire et suffisante :

$$\text{(I.26)} \qquad \lim_{|z|\to\infty} z\widehat{T}(z) = \frac{R}{(M-a-b)\beta(M-b)} + r - \int_{-\infty}^{M-\mu} d\omega\,\Delta(\omega) = 0.$$

Cette condition disparaît dans le cas particulier (β_2) où l'on a :

$$A(z) \equiv A, \qquad B(z) \equiv Bz + C$$

et la relation :

$$A - B\int_{\mu}^{\infty} d\omega F(\omega) = 0$$

puisque alors le terme constant de la partie asymptotique de $\beta(z)$ s'annule. On peut d'ailleurs dans ce cas mettre $\beta(z)$ sous la forme :

$$\beta(z) = \int_{\mu}^{\infty} d\omega \frac{F(\omega)[B\omega + C]}{\omega - z}$$

ce qui ramène au cas (α).

c) *Détermination du polynôme $q(z)$.* — Les conditions imposées au polynôme $q(z)$ ont montré que, dans chacun des deux cas (α) et (β), il se réduit nécessairement à une constante q.

(α) $\nu = -1$. — On a $q = 0$. La condition d'existence étant remplie, l'équation (21) possède une solution unique donnée par les formules (25) avec $q(z) \equiv 0$.

(β) $\nu = 0$. — La valeur de q est déterminée par la condition d'existence (26). Celle-ci peut s'écrire sous la forme :

$$\text{(I.27)} \qquad qD(a, b, M) - RN(a, b, M) = 0$$

avec :

$$
\text{(I.28)}\left\{\begin{aligned}
&\mathrm{N}(a,b,\mathrm{M})=\frac{1}{(\mathrm{M}-a-b)\beta(\mathrm{M}-b)}-\frac{(b-a)\beta(b)}{(\mathrm{M}-2a)\beta(a)\beta(\mathrm{M}-a)}\\
&\left[\frac{1}{\mathrm{M}-a-b}-\frac{1}{b-a}\right]+\frac{(b-a)\beta(b)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\mathrm{M}-\mu}\frac{d\omega}{\beta^{+}(\omega)}\\
&\left[\frac{1}{\beta^{-}(\mathrm{M}-\omega)}-\frac{1}{\beta^{+}(\mathrm{M}-\omega)}\right]\frac{1}{(\omega-a)(\omega+a-\mathrm{M})}\left[\frac{1}{\omega-b}-\frac{1}{\omega+b-\mathrm{M}}\right]\\
&\mathrm{D}(a,b,\mathrm{M})=\frac{(b-a)\beta(b)}{(\mathrm{M}-2a)\beta(a)\beta(\mathrm{M}-a)}-\frac{(b-a)\beta(b)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\mathrm{M}-\mu}\frac{d\omega}{\beta^{+}(\omega)}\\
&\qquad\left[\frac{1}{\beta^{-}(\mathrm{M}-\omega)}-\frac{1}{\beta^{+}(\mathrm{M}-\omega)}\right]\frac{1}{(\omega-a)(\omega+a-\mathrm{M})}.
\end{aligned}\right.
$$

En supposant $\mathrm{D}(a, b, \mathrm{M}) \neq 0$, on en déduit :

$$
\text{(I.29)}\qquad q=\mathrm{R}\frac{\mathrm{N}(a,b,\mathrm{M})}{\mathrm{D}(a,b,\mathrm{M})}.
$$

L'équation (21) possède encore une solution unique.

B) Cas $\mathrm{R} = 0$. — L'équation proposée est homogène et sa solution est définie à une constante multiplicative près.

(α) $\nu = -1$. — Puisque $q = 0$, la fonction $t(z)$ est nulle. Il résulte alors de (25) que $\widehat{\mathrm{T}}(z)$ est méromorphe dans tout le plan et de la forme $\dfrac{\lambda}{z+a-\mathrm{M}}$. La formule (12) montre enfin que cette solution ne sera acceptable que si $\mathrm{M} = 2a$, la constante λ restant arbitraire. Le résultat se vérifie d'ailleurs directement sur les formules :

$$
\text{(I.1')}\qquad \beta(z)=\mathrm{B}\int_{\mu}^{\infty}d\omega\,\frac{\mathrm{F}(\omega)}{\omega-z}
$$

$$
\text{(I.22')}\qquad \widehat{\mathrm{T}}(z)=\frac{\mathrm{B}}{(z+a-\mathrm{M})\beta(\mathrm{M}-z)}\int_{\mu}^{\infty}d\omega\,\frac{\omega-a}{\omega+z-\mathrm{M}}\,\mathrm{F}(\omega)\widehat{\mathrm{T}}(\omega).
$$

(β) $\nu = 0$. — La fonction $t(z)$ se réduit au terme contenant q. La condition (27), toujours valable, montre alors que l'équation proposée n'admet une solution non nulle que si l'on a $\mathrm{D}(a, b, \mathrm{M}) = 0$, tandis que la constante q est arbitraire. La constante b peut évidemment être éliminée de la condition précédente qui s'écrit plus simplement :

$$
\text{(I.30)}\qquad d(a,\mathrm{M})=\frac{1}{(\mathrm{M}-2a)\beta(a)\beta(\mathrm{M}-a)}-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\mathrm{M}-\mu}\frac{d\omega}{\beta^{+}(\omega)}
\left[\frac{1}{\beta^{-}(\mathrm{M}-\omega)}-\frac{1}{\beta^{+}(\mathrm{M}-\omega)}\right]\frac{1}{(\omega-a)(\omega+a-\mathrm{M})}=0.
$$

C) Résumé. — En supposant que le comportement asymptotique de $\beta(z)$ soit donné par :

$$\beta(z) \underset{|z|\to\infty}{\sim} z^{\nu}$$

on a dans les deux cas $\nu = -1$, $\nu = 0$ les résultats suivants :

(α) $\nu = -1$. — $R \neq 0$. L'équation (21) possède une solution unique donnée par les formules (25) dans lesquelles $q(z) \equiv 0$.

$R = 0$. L'équation (21) ne possède de solution que si $M = 2a$. Les solutions sont de la forme $\dfrac{\lambda}{z-a}$ où λ est arbitraire.

(β) $\nu = 0$. — $R \neq 0$. L'équation (21) possède une solution unique donnée par les formules (25) dans lesquelles $q(z) \equiv q = R\dfrac{N(a, b, M)}{D(a, b, M)}$ où l'on suppose $D(a, b, M) \neq 0$, les quantités N et D étant données par les formules (28).

$R = 0$. L'équation (21) ne possède de solution que si $d(a, M) = 0$ où $d(a, M)$ est défini par (30). Les solutions sont données par les formules (25) dans lesquelles $q(z) \equiv q$ est arbitraire.

Remarque. — L'équation précédente ne possède de solution dans le cas homogène que pour une valeur déterminée de M. On comprend ainsi pourquoi, si M est quelconque, l'équation inhomogène ne possède jamais qu'une seule solution. D'une façon plus détaillée on peut voir que, pour M variable et toutes choses égales d'ailleurs, les équations homogène et inhomogène n'ont jamais simultanément de solution [9].

II. — LE MODÈLE DE LEE DANS LE SECTEUR $V\theta \rightleftarrows N\theta\theta$

1. Notations.

On envisagera toujours en parallèle les cas $Z \neq 0$ et $Z = 0$ où Z désigne la constante de renormalisation de la particule V; ces deux cas correspondent respectivement à une particule V élémentaire ou composée [4]. Les cons-

[9] Physiquement les valeurs de M qui rendent soluble l'équation homogène représentent les masses des états liés tandis que l'équation inhomogène correspond à un problème de diffusion où M est l'énergie; on sait bien que l'amplitude devient infinie (pôle) pour une énergie égale à la masse d'un état lié.

tantes de renormalisation Z et $\delta\nu = Z\delta m_V$ ont pour expression, en fonction de la constante de couplage observable g,

$$\text{(II.1)} \qquad \begin{cases} Z = 1 - \dfrac{g^2}{4\pi^2}\displaystyle\int_\mu^\infty d\omega \dfrac{f^2(\omega)\sqrt{\omega^2-\mu^2}}{(\omega + m_N - m_V)^2} \\ \delta\nu = -\dfrac{g^2}{4\pi^2}\displaystyle\int_\mu^\infty d\omega \dfrac{f^2(\omega)\sqrt{\omega^2-\mu^2}}{\omega + m_N - m_V}. \end{cases}$$

Les paramètres m_V, m_N, μ ($m_V < m_N + \mu$) et la fonction de coupure $f(\omega)$ restant fixes, on pose :

$$\text{(II.2)} \qquad \begin{cases} g_l = \lim\limits_{Z\to 0} g \qquad \delta\nu_l = \lim\limits_{Z\to 0} \delta\nu \\ \lambda = \dfrac{g_l^2}{\delta\nu_l}. \end{cases}$$

Les deux hamiltoniens sont alors donnés par (1) (4) :

a) $Z \neq 0$:

$$\text{(II.3)} \quad H = Zm_V\int d\vec{p}\, b_V^+(\vec{p})b_V(\vec{p}) + m_N\int d\vec{q}\, b_N^+(\vec{q})b_N(\vec{q}) + \int d\vec{k}\,\omega_k a^+(\vec{k})a(\vec{k})$$
$$- \frac{g}{4\pi^{3/2}}\int d\vec{p}d\vec{q}d\vec{k}\,\delta(\vec{p}-\vec{q}-\vec{k})\frac{f(\omega_k)}{\sqrt{\omega_k}}[b_V^+(\vec{p})b_N(\vec{q})a(\vec{k}) + b_N^+(\vec{q})b_V(\vec{p})a^+(\vec{k})]$$
$$- \delta\nu\int d\vec{p}\, b_V^+(\vec{p})b_V(\vec{p}).$$

b) $Z = 0$:

$$\text{(II.3')} \quad H' = m_N\int d\vec{q}\, b_N^+(\vec{q})b_N(\vec{q}) + \int d\vec{k}\,\omega_k a^+(\vec{k})a(\vec{k})$$
$$+ \frac{\lambda}{2(2\pi)^3}\int d\vec{q}_1 d\vec{q}_2 d\vec{k}_1 d\vec{k}_2\,\delta(\vec{q}_1 + \vec{k}_1 - \vec{q}_2 - \vec{k}_2)$$
$$\frac{f(\omega_{k_1})f(\omega_{k_2})}{\sqrt{\omega_{k_1}\omega_{k_2}}}\, b_N^+(\vec{q}_1)b_N(\vec{q}_2)a^+(\vec{k}_1)a(\vec{k}_2).$$

Les relations de commutation sont les suivantes :

$$\text{(II.4)} \qquad \begin{cases} \{b_N(\vec{q}),\, b_N^+(\vec{q}')\} = \delta(\vec{q} - \vec{q}') \qquad [a(\vec{k}),\, a^+(\vec{k}')] = \delta(\vec{k} - \vec{k}') \\ \{b_V(\vec{p}),\, b_V^+(\vec{p}')\} = \dfrac{1}{Z}\,\delta(\vec{p} - \vec{p}'). \end{cases}$$

Pour $Z = 0$ seules subsistent les deux premières relations. On utilisera les deux fonctions :

$$(\text{II}.5) \quad \Phi(z) = 1 + \frac{g^2}{4\pi^2}(z + m_N - m_V)\int_\mu^\infty d\omega \frac{f^2(\omega)\sqrt{\omega^2 - \mu^2}}{(\omega + m_N - m_V)^2(\omega - z)}$$

$$= Z + \frac{g^2}{4\pi^2}\int_\mu^\infty d\omega \frac{f^2(\omega)\sqrt{\omega^2 - \mu^2}}{(\omega + m_N - m_V)(\omega - z}$$

$$(\text{II}.6) \quad \varphi(z) = 1 + \frac{\lambda}{4\pi^2}\int_\mu^\infty d\omega \frac{f^2(\omega)\sqrt{\omega^2 - \mu^2}}{\omega - z}$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi^2}(z + m_N - m_V)\int_\mu^\infty d\omega \frac{f^2(\omega)\sqrt{\omega^2 - \mu^2}}{(\omega + m_N - m_V)(\omega - z)}.$$

Ces fonctions sont liées au propagateur renormalisé de la particule V qui est, suivant le cas, donné par :

$$(\text{II}.7) \quad S'(p) = \frac{i}{(2\pi)^4}\frac{1}{(p_0 - m_V + i\varepsilon)\Phi^+(p_0 - m_N)}, \qquad (Z \neq 0)$$

$$(\text{II}.8) \quad S'_l(p) = \lim_{Z\to 0} S'(p) = \frac{i}{(2\pi)^4}\frac{1}{\delta\nu_l}\frac{1}{\varphi^+(p_0 - m_N)}, \qquad (Z = 0).$$

2. Diagonalisation de l'hamiltonien.

Les états propres du secteur envisagé sont de la forme :

a) $Z \neq 0$:

$$(\text{II}.9) \quad |Z_{\vec{P}}\rangle = \int d\vec{p}d\vec{k}\delta(\vec{P} - \vec{p} - \vec{k})\chi_1(\vec{k})b_V^+(\vec{p})a^+(\vec{k})\,|\,0\rangle$$

$$+ \int d\vec{q}d\vec{k}d\vec{k}'\delta(\vec{P} - \vec{q} - \vec{k} - \vec{k}')\chi_2(\vec{k}, \vec{k}')b_N^+(\vec{q})a^+(\vec{k})a^+(\vec{k}')\,|\,0\rangle.$$

b) $Z = 0$:

$$(\text{II}.9') \quad |Z'_{\vec{P}}\rangle = \int d\vec{q}d\vec{k}d\vec{k}'\delta(\vec{P} - \vec{q} - \vec{k} - \vec{k}')\chi'(\vec{k}, \vec{k}')b_N^+(\vec{q})a^+(\vec{k})a^+(\vec{k}')\,|\,0\rangle$$

où les fonctions χ_2 et χ'_2 sont symétriques dans l'échange de leurs arguments.

L'équation aux valeurs propres $H\,|\,Z\rangle = E\,|\,Z\rangle$ donne les systèmes d'équations suivants :

a) $Z \neq 0$:

$$(\text{II}.10) \begin{cases} (\omega_k + m_V - \delta m_V - E)\chi_1(\vec{k}) = 2\dfrac{g}{4\pi^{3/2}}\displaystyle\int d\vec{k}'\frac{f(\omega_{k'})}{\sqrt{\omega_{k'}}}\chi_2(\vec{k}, \vec{k}') \\ (\omega_k + \omega_{k'} + m_N - E)\chi_2(\vec{k}, \vec{k}') = \dfrac{1}{2}\dfrac{g}{4\pi^{3/2}Z}\left[\dfrac{f(\omega_k)}{\sqrt{\omega^k}}\chi_1(\vec{k}') + \dfrac{f(\omega_{k'})}{\sqrt{\omega_{k'}}}\chi_1(\vec{k})\right] \end{cases}$$

b) $Z = 0$:

$$(\text{II}.10')\left\{\begin{aligned}&\chi'_1(\vec{k})=\int d\vec{k}'\frac{f(\omega_{k'})}{\sqrt{\omega_{k'}}}\chi'_2(\vec{k},\vec{k}')\\&(\omega_k+\omega_{k'}+m_N-E)\chi'_2(\vec{k},\vec{k}')=-\frac{\lambda}{2(2\pi)^3}\left[\frac{f(\omega_k)}{\sqrt{\omega_k}}\chi'_1(\vec{k}')+\frac{f(\omega_{k'})}{\sqrt{\omega_{k'}}}\chi'_1(\vec{k})\right]\end{aligned}\right.$$

Dans le système (10′) la fonction χ'_1 est introduite afin de conserver au maximum le parallélisme des deux cas. Nous étudions maintenant les solutions des systèmes (10) et (10′) suivant les valeurs données à l'énergie.

A) $E < m_V + \mu$. ÉTATS LIÉS. — La seconde équation de chacun des systèmes (10) et (10′) donne immédiatement :

$$(\text{II}.11)\quad \chi_2(\vec{k},\vec{k}')=\frac{1}{2}\frac{g}{4\pi^{3/2}Z}\frac{1}{\omega_k+\omega_{k'}+m_N-E}\left[\frac{f(\omega_k)}{\sqrt{\omega_k}}\chi_1(\vec{k}')+\frac{f(\omega_{k'})}{\sqrt{\omega_{k'}}}\chi_1(\vec{k})\right]$$

(II.11′)

$$\chi'_2(\vec{k},\vec{k}')=-\frac{\lambda}{2(2\pi)^3}\frac{1}{\omega_k+\omega_{k'}+m_N-E}\left[\frac{f(\omega_k)}{\sqrt{\omega_k}}\chi'_1(\vec{k}')+\frac{f(\omega_{k'})}{\sqrt{\omega_{k'}}}\chi'_1(\vec{k})\right].$$

En reportant ces expressions dans la première équation du système correspondant on trouve, après utilisation des formules (1), (5) et (6) :

$$(\text{II}.12)\quad [\omega_k+m_V-E]\Phi(E-m_N-\omega_k)\chi_1(\vec{k})$$
$$=\frac{g^2}{2(2\pi)^3}\frac{f(\omega_k)}{\sqrt{\omega_k}}\int d\vec{k}'\frac{f(\omega_{k'})}{\sqrt{\omega_{k'}}[\omega_k+\omega_{k'}+m_N-E]}\chi_1(\vec{k}')$$

$$(\text{II}.12')\quad \varphi(E-m_N-\omega_k)\chi'_1(\vec{k})$$
$$=-\frac{\lambda}{2(2\pi)^3}\frac{f(\omega_k)}{\sqrt{\omega_k}}\int d\vec{k}'\frac{f(\omega_{k'})}{\sqrt{\omega_{k'}}[\omega_k+\omega_{k'}+m_N-E]}\chi'_1(\vec{k}')$$

Les fonctions qui multiplient χ_1 et χ'_1 dans le membre de gauche de (12) et (12′) ne s'annulent pas en vertu de la restriction imposée à E; il en résulte que χ_1 et χ'_1 ne dépendent que de ω_k ; en posant :

$$(\text{II}.13)\qquad \chi_1(\omega_k)=\frac{f(\omega_k)}{\sqrt{\omega_k}}\chi(\omega_k)\qquad\qquad \chi'_1(\omega_k)=\frac{f(\omega_k)}{\sqrt{\omega_k}}\chi'(\omega_k)$$

on obtient enfin les équations intégrales suivantes :

(II.14)

$$\chi(\omega)=\frac{g^2}{4\pi^2}\frac{1}{(\omega+m_V-E)\Phi(E-m_N-\omega)}\int_\mu^\infty d\omega'\frac{f^2(\omega')\sqrt{\omega'^2-\mu^2}}{\omega'+\omega+m_N-E}\chi(\omega')$$

$$\text{(II.14')}\qquad \chi'(\omega) = -\frac{\lambda}{4\pi^2}\frac{1}{\varphi(\mathrm{E}-m_{\mathrm{N}}-\omega)}\int_{\mu}^{\infty} d\omega' \frac{f^2(\omega')\sqrt{\omega'^2-\mu^2}}{\omega'+\omega+m_{\mathrm{N}}-\mathrm{E}}\chi'(\omega').$$

Ces deux équations sont du type de celle qui est étudiée dans la première partie. On a, en effet, d'après (5) et (6) :

$$\text{(II.15)}\qquad \frac{4\pi^2}{\lambda}(\varphi^+(\omega)-\varphi^-(\omega))$$
$$= \frac{4\pi^2}{g^2}(\omega+m_{\mathrm{N}}-m_{\mathrm{V}})(\Phi^+(\omega)-\Phi^-(\omega)) = 2\pi i f^2(\omega)\sqrt{\omega^2-\mu^2}.$$

On retrouve donc l'équation (I.3) en posant :

$$\text{(II.16)}\qquad \mathrm{M} = \mathrm{E}-m_{\mathrm{N}} \qquad \mathrm{P}(z) = z+m_{\mathrm{N}}-m_{\mathrm{V}} \qquad \mathrm{R}(z)=0$$

et, suivant le cas :

$$\text{(II.17)}\qquad \beta(z) = \begin{cases} \Phi(z) & (\mathrm{Z}\neq 0) \\ \dfrac{\varphi(z)}{z+m_{\mathrm{N}}-m_{\mathrm{V}}} & (\mathrm{Z}=0). \end{cases}$$

La fonction $\beta(z)$ se comporte asymptotiquement comme Z ou $1/z$. Les cas élémentaire et composé rentrent alors respectivement dans les cas (β) et (α) de (I.4). Les équations considérées étant homogènes n'ont de solution que pour certaines valeurs de E qui représentent les masses des états liés.

Cas Z = *0*. — L'équation (14') n'a de solution que pour $\mathrm{E} = 2m_{\mathrm{V}} - m_{\mathrm{N}}$. On a alors à un facteur près :

$$\text{(II.18)}\qquad \chi'(\omega) = \frac{1}{\omega+m_{\mathrm{N}}-m_{\mathrm{V}}}.$$

Cas Z $\neq$ *0*. — L'équation (I.30) fournit l'équation aux valeurs propres :

$$\text{(II.19)}\qquad d(\mathrm{E}) = \frac{1}{\Phi(\mathrm{E}-m_{\Lambda})} - \frac{\mathrm{E}+m_{\mathrm{N}}-2m_{\mathrm{V}}}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\mathrm{E}-m_{\mathrm{N}}-\mu}\frac{d\omega}{\Phi(\omega)}$$
$$\left[\frac{1}{\Phi^-(\mathrm{E}-m_{\mathrm{N}}-\omega)} - \frac{1}{\Phi^+(\mathrm{E}-m_{\mathrm{N}}-\omega)}\right]\frac{1}{(\omega+m_{\mathrm{N}}-m_{\mathrm{V}})(\omega+m_{\mathrm{V}}-\mathrm{E})} = 0.$$

Si cette dernière possède une solution la fonction $\chi(\omega)$ correspondante est donnée par (I.25); on a, à un facteur près :

(II.20)
$$\chi(\omega) = \frac{1}{\omega+m_{\mathrm{V}}-\mathrm{E}} + \frac{(\mathrm{E}+m_{\mathrm{N}}-2m_{\mathrm{V}})\Phi(\mathrm{E}-m_{\mathrm{V}})}{2\pi i}\times\int_{-\infty}^{\mathrm{E}-m_{\mathrm{N}}-\mu}\frac{d\omega'}{\omega'-\omega}\frac{1}{\Phi(\omega')}$$
$$\left[\frac{1}{\Phi^-(\mathrm{E}-m_{\mathrm{N}}-\omega')} - \frac{1}{\Phi^+(\mathrm{E}-m_{\mathrm{N}}-\omega')}\right]\frac{1}{(\omega'+m_{\mathrm{N}}-m_{\mathrm{V}})(\omega'+m_{\mathrm{V}}-\mathrm{E})}.$$

Nous n'entrerons pas ici dans un examen détaillé de l'équation (19) ([10]); son étude est facilitée par l'introduction de la fonction spectrale $\rho(a)$ du propagateur $S'(p)$:

$$\text{(II.21)} \quad \rho(a) = \delta(a - m_V) - \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{a - m_V}\left[\frac{1}{\Phi^+(a - m_N)} - \frac{1}{\Phi^-(a - m_N)}\right].$$

A l'aide de cette fonction l'équation aux valeurs propres (19) prend la forme condensée suivante :

$$\text{(II.22)} \qquad \int da\,da' \frac{\rho(a)\rho(a')}{E + m_N - a - a'} = 0.$$

Une forme analogue existe pour la fonction (20).

Au sujet de la limite $Z \to 0$ la formule (22) permet d'établir le résultat suivant : dès que Z prend une valeur assez petite, l'équation aux valeurs propres possède une solution unique qui tend vers $2m_V - m_N$ quand $Z \to 0$; l'état lié du modèle de Lee tend alors vers l'état lié de l'hamiltonien H' à deux particules.

B) États de diffusion Vθ. — Nous supposons maintenant l'énergie supérieure à $m_V + \mu$ et cherchons les états de diffusion $| V_{\vec{p}_1}\theta_{\vec{k}_1}\rangle^{\pm}$; on pose, pour les états (9) et (9'), $E = m_V + \omega_{k_1}$, $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{k}_1$. On se place d'abord dans le cas où l'énergie est inférieure au deuxième seuil $m_N + 2\mu$; dans ce domaine d'énergie seuls existent les états de diffusion Vθ et les équations (11) et (11') sont encore valables, de même que les équations (12) et (12'). Nous examinons d'abord le cas de l'équation (12) qui correspond au cas le plus simple puisque la particule V est élémentaire.

Cas $Z \neq 0$. — Le polynôme qui figure dans le membre de gauche de l'équation (12) s'annule pour $\omega_k = \omega_{k_1}$; on obtient les solutions avec onde diffusée sortante ou entrante respectivement en posant :

$$\chi_1^{\pm}(\vec{k}) = Z\delta(\vec{k} - \vec{k}_1) + \frac{g^2}{2(2\pi)^3}\frac{f(\omega_k)}{\sqrt{\omega_k}}\frac{1}{(\omega_k - \omega_{k_1} \mp i\varepsilon)\Phi(E - m_N - \omega_k)}$$
$$\int d\vec{k}' \frac{f(\omega_{k'})}{\sqrt{\omega_{k'}}[\omega_k + \omega_{k'} + m_N - E]}\chi_1^{\pm}(\vec{k}').$$

Le facteur Z doit figurer devant la fonction $\delta(\vec{k} - \vec{k}_1)$ pour que l'état de diffusion obtenu contienne comme onde incidente l'état « non perturbé »

([10]) Pour plus de détails voir : J. C. Houard, Thèse *à paraître*.

$a^+(\vec{k}_1) \mid V_{\vec{p}_1} \rangle$ (11) où l'on utilise l'état physique de la particule V(1) (4). En posant :

(II.23) $$\chi_1^{\pm}(\vec{k}) = Z\delta(\vec{k} - \vec{k}_1) + \frac{g^2}{2(2\pi)^3} \frac{f(\omega_k)}{\sqrt{\omega_k}} \frac{f(\omega_{k_1})}{\sqrt{\omega_{k_1}}} \chi^{\pm}(\omega_k)$$

on obtient l'équation :

(II.24) $$\chi^{\pm}(\omega) = \frac{1}{(\omega - \omega_{k_1} \mp i\varepsilon)\Phi(E - m_N - \omega)} \left[\frac{Z}{\omega + m_N - m_V} + \frac{g^2}{4\pi^2} \int_\mu^\infty d\omega' \frac{f^2(\omega')\sqrt{\omega'^2 - \mu^2}}{\omega' + \omega + m_N - E} \chi^{\pm}(\omega')\right].$$

On retrouve l'équation (I.3) dans le cas inhomogène; sa solution est la suivante :

(II.25)
$$\begin{aligned}\chi^{\pm}(\omega) = &\frac{-Z}{(\omega_{k_1} + m_N - m_V)\Phi^{\pm}(\omega_{k_1})} \left[\frac{1}{\omega + m_N - m_V} + \frac{1}{\omega - \omega_{k_1} \mp i\varepsilon}\right] \\ &+ \frac{2Z}{(\omega_{k_1} + m_N - m_V)\Phi^{\pm}(\omega_{k_1})D^{\pm}(E)} \\ &\left\{\frac{1}{(\omega_{k_1} + m_N - m_V)\Phi^{\pm}(\omega_{k_1})(\omega - \omega_{k_1} \mp i\varepsilon)}\right. \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{E - m_N - \mu} \frac{d\omega'}{\omega' - \omega} \frac{1}{\Phi(\omega')} \left[\frac{1}{\Phi^-(E - m_N - \omega')} - \frac{1}{\Phi^+(E - m_N - \omega')}\right] \\ &\left.\frac{1}{(\omega' + m_N - m_V \pm i\varepsilon)(\omega' - \omega_{k_1})}\right\}\end{aligned}$$

où l'on a posé :

(II.26) $$D(z) = \int da da' \frac{\rho(a)\rho(a')}{z + m_N - a - a'}.$$

Pour une valeur de l'énergie supérieure au seuil de production $m_N + 2\mu$ les équations doivent être reprises à partir du système (10) avant la division par le facteur $(\omega_k + \omega_{k'} + m_N - E)$. L'équation (24) est alors remplacée par une équation du type (I.21) où $E \pm i\varepsilon$ remplace E. La solution est de forme analogue à (25) où la fonction $\frac{1}{(\omega' - \omega)\Phi(\omega')}$ qui figure sous l'intégrale est remplacée par $\frac{1}{(\omega' - \omega \pm i\varepsilon)\Phi^{\pm}(\omega')}$.

(11) Une onde incidente de ce type a déjà été utilisée dans le modèle statique de l'interaction pion-nucléon par G. C. Wick, *Rev. of Mod. Phys.*, t. 27, 1955, p. 339; une justification générale, englobant le cas des particules composées, a été donnée par H. Ekstein, *Nuovo Cimento*, t. 4, 1956, p. 1017.

Cas $Z = 0$. — Nous procédons formellement comme dans le cas élémentaire et nous laissons de côté la question de justifier théoriquement les états de diffusion trouvés : une telle justification peut s'effectuer suivant les méthodes de la référence [11]. L'onde ineidente est encore de la forme $a^+(\vec{k}_1) \mid V'_{\vec{p}_1} \rangle$ où $\mid V'_{\vec{p}_1} \rangle$ désigne l'état physique de la particule V composée [4] :

(II.27)
$$\mid V'_{\vec{p}_1} \rangle = C \int d\vec{q} d\vec{k} \delta(\vec{p}_1 - \vec{q} - \vec{k}) \frac{f(\omega_k)}{\sqrt{\omega_k}[\omega_k + m_N - m_V]} b_N^+(\vec{q}) a^+(\vec{k}) \mid 0 \rangle$$

avec :

$$C = \left[4\pi \int_\mu^\infty d\omega \frac{f^2(\omega)\sqrt{\omega^2 - \mu^2}}{(\omega + m_N - m_V)^2} \right]^{-1/2} \quad \text{(II.28)}$$

A l'aide de (6) nous séparons, dans la fonction $\varphi(E - m_N - \omega_k)$, qui figure au premier membre de (12'), le facteur $(\omega_{k_1} - \omega_k)$, en posant :

$$\widehat{\sigma}(z) = \int_\mu^\infty d\omega \frac{f^2(\omega)\sqrt{\omega^2 - \mu^2}}{(\omega + m_N - m_V)(\omega - z)}. \quad \text{(II.29)}$$

L'équation (12') donne :

$$\chi_1'^{\pm}(\vec{k}) = -\frac{(2\pi)^3 C}{\lambda} \delta(\vec{k} - \vec{k}_1) + \frac{1}{4\pi} \frac{f(\omega_k)}{\sqrt{\omega_k}} \frac{1}{(\omega_k - \omega_{k_1} \mp i\varepsilon)\widehat{\sigma}(E - m_N - \omega_k)} \int d\vec{k}' \frac{f(\omega_{k'})}{\sqrt{\omega_{k'}}[\omega_k + \omega_{k'} + m_N - E]} \chi_1'^{\pm}(\vec{k}'). \quad \text{(II.30)}$$

On pose :

$$\chi_1'^{\pm}(\vec{k}) = -\frac{(2\pi)^3 C}{\lambda} \left[\delta(\vec{k} - \vec{k}_1) + \frac{1}{4\pi} \frac{f(\omega_k)}{\sqrt{\omega_k}} \frac{f(\omega_{k_1})}{\sqrt{\omega_{k_1}}} \chi'^{\pm}(\omega_k) \right] \quad \text{(II.31)}$$

et l'on obtient l'équation :

$$\chi'^{\pm}(\omega) = \frac{1}{(\omega - \omega_{k_1} \mp i\varepsilon)\widehat{\sigma}(E - m_N - \omega)} \left[\frac{1}{\omega + m_N - m_V} + \int_\mu^\infty d\omega' \frac{f^2(\omega')\sqrt{\omega'^2 - \mu^2}}{\omega' + \omega + m_N - E} \chi'^{\pm}(\omega') \right]. \quad \text{(II.32)}$$

La solution est la suivante :

$$\chi'^{\pm}(\omega) = -\frac{\lambda}{4\pi^2} \frac{1}{\varphi^{\pm}(\omega_{k_1})} \left[\frac{1}{\omega + m_N - m_V} + \frac{1}{\omega - \omega_{k_1} \mp i\varepsilon} \right]. \quad \text{(II.33)}$$

Comme pour l'état lié, l'état de diffusion du cas composé se déduit de l'état de diffusion du cas élémentaire en prenant la limite $Z \to 0$.

Nous ne donnerons pas ici les expressions des états de diffusion triple $N\theta\theta$. En appliquant les méthodes précédentes on aboutit encore à une équation du type (I.21), mais où le terme non homogène contient cette fois deux pôles.

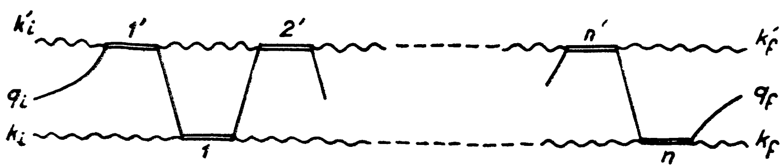
3. Diagrammes de Feynman et matrice S.

Il est incommode de chercher à déterminer la matrice S à partir des états de diffusion qui viennent d'être trouvés. Nous suivrons une méthode plus directe en calculant les diagrammes de Feynman qui correspondent à la diffusion triple $N\theta\theta \to N\theta\theta$. Nous montrons d'abord que la somme de ces diagrammes satisfait à une équation intégrale que l'on peut réduire à l'équation étudiée en première partie; les autres processus, diffusion $V\theta \to V\theta$ et production, sont ensuite déduits de la diffusion triple.

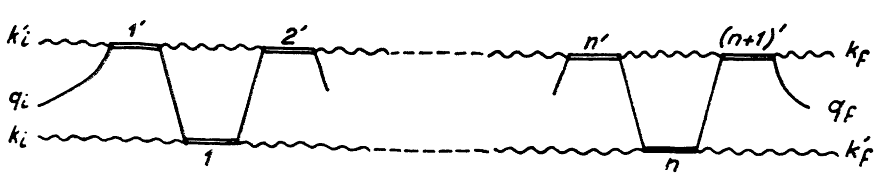
Dans le paragraphe suivant nous désignons respectivement par g et $S'(p)$ la constante de couplage $VN\theta$ et le propagateur renormalisé de la particule V, les propriétés particulières de ce propagateur, dans le cas composé ou dans le cas élémentaire, n'intervenant qu'au paragraphe B.

A) ÉQUATION INTÉGRALE POUR LA DIFFUSION $N\theta\theta \to N\theta\theta$. — Les quadri-impulsions initiale et finale de la particule N seront désignées respectivement par q_i et q_f, celles des mésons par k_i, k_i' et k_f, k_f'.

Les diagrammes sont des deux types suivants :



$$= G_n^{(1)}(q_f, k_f, k_f'), \quad n \geqslant 1$$



$$= G_n^{(2)}(q_f, k_f, k_f'), \quad n \geqslant 1$$

où le schéma ═════ représente le propagateur renormalisé de la particule V. On suppose que les facteurs cinématiques ne sont pas inclus dans $G_n^{(1)}$ et $G_n^{(2)}$; en posant :

$$\text{(II.34)} \qquad S(q_ik_ik_i', q_fk_fk_f') = \sum_{n=1}^{\infty} G_n^{(1)}(q_fk_fk_f') + \sum_{n=1}^{\infty} G_n^{(2)}(q_fk_fk_f')$$

on obtient, pour l'élément de matrice S correspondant à la somme de tous les diagrammes connexes, l'expression suivante :

$$\text{(II.35)} \qquad M(q_ik_ik_i', q_fk_fk_f') = \frac{1}{4(2\pi)^9} \frac{1}{\sqrt{\omega_{k_i}\omega_{k_i'}\omega_{k_f}\omega_{k_f'}}} \left\{ S(q_ik_ik_i', q_fk_fk_f') + \text{permutations} \right\}$$

où les permutations à effectuer concernent les échanges $k_i \leftrightarrow k_i'$ ou $k_f \leftrightarrow k_f'$.

On établit aisément des relations de récurrence entre les diagrammes $G^{(1)}$ et $G^{(2)}$ par addition à chacun d'eux d'une boucle nouvelle; il s'introduit ainsi deux nœuds et trois lignes intérieures supplémentaires ne laissant finalement subsister qu'une intégration. On obtient :

$$\text{(II.36)} \qquad \begin{Bmatrix} G_n^{(2)}(qkk') \\ G_{n+1}^{(1)}(qkk') \end{Bmatrix} = g^2 f(\omega_k) S'(q_0+k_0) \int d^4k_1 \frac{f(\omega_{k_1})}{2\omega_{k_1}(k_{1_0}-\omega_{k_1}+i\varepsilon)} \frac{1}{q_0+k_0-k_{1_0}-m_N+i\varepsilon} \begin{Bmatrix} G_n^{(1)}(q+k-k_1, k', k_1) \\ G_n^{(2)}(q+k-k_1, k', k_1) \end{Bmatrix}$$

Si l'on pose :

$$\text{(II.37)} \qquad \begin{cases} G_n^{(1)}(qkk') = f(\omega_k)f(\omega_{k'})\Gamma_{2n-1}(q+k, k') \\ G_n^{(2)}(qkk') = f(\omega_k)f(\omega_{k'})\Gamma_{2n}(q+k, k') \end{cases}$$

on a l'unique relation :

$$\text{(II.38)} \qquad \Gamma_{n+1}(k, k') = g^2 S'(k_0) \int d^4k_1 \frac{f^2(\omega_{k_1})}{2\omega_{k_1}(k_{1_0}-\omega_{k_1}+i\varepsilon)} \frac{1}{k_0-k_{1_0}-m_N+i\varepsilon} \Gamma_n(k+k'-k_1, k_1).$$

La formule (34) est remplacée par :

$$\text{(II.39)} \qquad S(q_ik_ik_i', q_fk_fk_f') = f(\omega_{k_f})f(\omega_{k_f'})\sigma(q_f+k_f, k_f')$$

avec :

$$\sigma(k, k') = \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n(k, k').$$

En sommant sur n les deux membres de la relation (38) on trouve l'équation intégrale suivante pour $\sigma(k, k')$:

$$\sigma(k, k') = \Gamma_1(k, k') + g^2 S'(k_0)\int d^4k_1 \frac{f^2(\omega_{k_1})}{2\omega_{k_1}(\underset{0}{k_1} - \omega_{k_1} + i\varepsilon)} \frac{1}{k_0 - \underset{0}{k_1} - m_N + i\varepsilon} \sigma(k + k' - k_1, k_1)$$

où le terme inhomogène a pour valeur :

$$\Gamma_1(k, k') = ig^4(2\pi)^{12} f(\omega_{k_i}) f(\omega_{k'_i}) S'(\underset{0}{q_i} + \underset{0}{k'_i}) \frac{1}{k_0 - \underset{0}{k_i} - m_N + i\varepsilon} S'(k_0)\delta^{(4)}(k + k' - q_i - k_i - k'_i).$$

En posant pour simplifier :

$$\text{(II.40)} \qquad A = S'(\underset{0}{q_i} + \underset{0}{k'_i})$$

et en définissant $\varpi(k)$ par :

$$\text{(II.41)} \qquad \sigma(k, k') = ig^4(2\pi)^{12} f(\omega_{k_i}) f(\omega_{k'_i}) \varpi(k) \delta^{(4)}(k + k' - q_i - k_i - k'_i)$$

on aboutit à l'équation :

$$\text{(II.42)} \qquad \varpi(k) = S'(k_0) \left[\frac{A}{k_0 - \underset{0}{k_i} - m_N + i\varepsilon} + g^2 \int d^4k_1 \frac{f^2(\omega_{k_1})}{2\omega_{k_1}(\underset{0}{k_1} - \omega_{k_1} + i\varepsilon)} \frac{1}{k_0 - \underset{0}{k_1} - m_N + i\varepsilon} \varpi(P_i - k_1)\right]$$

où P_i désigne l'impulsion totale entrante.

Nous procédons maintenant à une transformation de l'équation (42). On voit d'abord sur cette équation que $\varpi(k)$ ne dépend que de k_0; en désignant par E l'énergie totale incidente, celle-ci peut s'écrire :

$$\text{(II.43)} \qquad \varpi(k_0) = S'(k_0)\left[\frac{A}{k_0 - \underset{0}{k_i} - m_N + i\varepsilon} + 2\pi g^2 \int_\mu^\infty d\omega f^2(\omega)\sqrt{\omega^2 - \mu^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\varpi(x)}{(E - \omega - x + i\varepsilon)(k_0 - E - m_N + x + i\varepsilon)}\right].$$

Introduisons maintenant la fonction de variable complexe $\widehat{\varpi}(z)$ qui est définie par le second membre de (43) où z remplace k_0. La fonction $\widehat{\varpi}(z)$ est méromorphe dans le complémentaire de l'axe réel et possède les pôles simples $m_V - i\varepsilon'$ et $\underset{0}{k_i} + m_N - i\varepsilon$; elle tend vers zéro quand z tend vers l'infini, dans le cas composé comme dans le cas élémentaire.

L'équation (43) se réduit maintenant à la condition $\widehat{\varpi}^+(k_0) = \varpi(k_0)$; cette dernière permet d'effectuer l'intégration en x au second membre de (43) en fermant le contour d'intégration par un demi-cercle situé dans le demi-plan supérieur; on obtient :

$$\int dx \frac{\widehat{\varpi}^{+}(x)}{(\mathrm{E}-\omega-x+i\varepsilon)(z+x-\mathrm{E}-m_{\mathrm{N}})}=\frac{2\pi i}{z-m_{\mathrm{N}}-\omega+i\varepsilon}$$
$$[-\widehat{\varpi}^{+}(\mathrm{E}-\omega)+\theta(-\mathfrak{Im}z)\widehat{\varpi}(\mathrm{E}+m_{\mathrm{N}}-z)]$$

où la présence du dernier terme dépend du signe de $\mathfrak{Im}z$. En reportant cette expression dans (43) on voit alors que, pour $\mathfrak{Im}z > 0$, la fonction $\widehat{\varpi}(z)$ coïncide avec la fonction $\tilde{\varpi}(z)$ qui est définie par l'équation :

(II.44)
$$\tilde{\varpi}(z)=\mathrm{S}'(z)\left[\frac{\mathrm{A}}{z-k_{i}-m_{\mathrm{N}}+i\varepsilon}-4\pi^{2}ig^{2}\int_{\mu}^{\infty}d\omega\frac{f^{2}(\omega)\sqrt{\omega^{2}-\mu^{2}}}{z-m_{\mathrm{N}}-\omega}\tilde{\varpi}^{+}(\mathrm{E}-\omega)\right].$$
 0

On retrouve encore l'équation (I.21) pour la fonction $\tilde{\varpi}(\mathrm{E}-z)$; la fonction $\varpi(k_0)$ cherchée s'obtient à partir de sa solution par la formule :

(II.45) $$\varpi(k_0)=\tilde{\varpi}^{+}(k_0).$$

On en déduit maintenant les amplitudes de diffusion.

B) Amplitude de diffusion. — Suivant la valeur de Z, la fonction $\beta(z)$ de la première partie est reliée au propagateur par la formule :

$$\frac{1}{\mathrm{P}(z)\beta(z)}=\begin{cases}\mathrm{S}'(z+m_{\mathrm{N}}) & (Z\neq 0)\\ \mathrm{S}'_{l}(z+m_{\mathrm{N}}) & (Z=0)\end{cases}$$

avec :

$$\mathrm{P}(z)=z+m_{\mathrm{N}}-m_{\mathrm{V}}+i\varepsilon.$$

Les cas élémentaire et composé correspondent encore aux cas (β) et (α) de (I.4); dans le cas élémentaire s'introduit la fonction $\mathrm{D}^{+}(\mathrm{E})$ définie par (26) et qui correspond, à des facteurs près, à la fonction $\mathrm{D}(a, b, \mathrm{M})$ de (I.28).

Les expressions que l'on obtient pour $\tilde{\varpi}(z)$ peuvent être écrites uniquement à l'aide du propagateur; on peut montrer que l'on a, pour $\mathfrak{Im}z > 0$,

(II.46) $$\tilde{\varpi}(z)=-\frac{1}{2\pi i}$$
$$\int\frac{da}{a-z}\mathrm{S}'(a)\mathrm{S}'(\mathrm{E}+m_{\mathrm{N}}-a)\left[\frac{1}{a+\underset{0}{k}-\mathrm{E}-i\varepsilon}-\frac{1}{a-m_{\mathrm{N}}-\underset{0}{k}+i\varepsilon}\right]$$
$$-\frac{(2\pi)^{6}}{\mathrm{D}^{+}(\mathrm{E})}\int da\mathrm{S}'(a)\mathrm{S}'(\mathrm{E}+m_{\mathrm{N}}-a)\left[\frac{1}{a+\underset{0}{k}-\mathrm{E}-i\varepsilon}-\frac{1}{a-m_{\mathrm{N}}-\underset{0}{k}+i\varepsilon}\right]$$
$$\times\int\frac{da}{a-z}\mathrm{S}'(a)\mathrm{S}'(\mathrm{E}+m_{\mathrm{N}}-a)$$

où, dans le cas composé, le terme contenant $D^+(E)$ disparaît tandis que S' est remplacé par S'_l.

L'amplitude de la diffusion triple est maintenant donnée par les formules (35), (39) et (41); dans le domaine physique elle se réduit à :

$$(\text{II}.47) \quad M(q_i k_i k'_i, q_f k_f k'_f)$$
$$= 4\pi^4 g^4 \frac{f(\omega_{k_i}) f(\omega_{k'_i}) f(\omega_{k_f}) f(\omega_{k'_f})}{\sqrt{\omega_{k_i}\omega_{k'_i}\omega_{k_f}\omega_{k'_f}}} \delta(\vec{q}_i + \vec{k}_i + \vec{k}'_i - \vec{q}_f - \vec{k}_f - \vec{k}'_f)$$
$$\times \Big\{ S'(m_N + \omega_{k_i}) S'(m_N + \omega_{k'_i})$$
$$\left[\delta(\omega_{k_i} - \omega_{k_f})\delta(\omega_{k'_i} - \omega_{k'_f}) + \delta(\omega_{k_i} - \omega_{k'_f})\delta(\omega_{k'_i} - \omega_{k_f})\right]$$
$$+ \frac{2i(2\pi)^7}{D^+(E)} S'(m_N + \omega_{k_i}) S'(m_N + \omega_{k'_i}) S'(m_N + \omega_{k_f}) S'(m_N + \omega_{k'_f})$$
$$\delta(\omega_{k_i} + \omega_{k'_i} - \omega_{k_f} - \omega_{k'_f}) \Big\}$$

Les deux premiers termes de (47) correspondent à une diffusion élastique de chacun des deux mésons; ce sont les seuls termes qui subsistent dans le cas où la particule V est composée, mais il s'agit ici d'une propriété particulière au modèle.

Les amplitudes correspondant à la réaction de production $V\theta \to N\theta\theta$ et à la diffusion élastique $V\theta \to V\theta$ se déduisent aisément de l'élément de matrice de la diffusion triple. On obtient pour les éléments de matrice S, dans le domaine physique, les formules suivantes, où E désigne toujours l'énergie totale entrante et P_i et P_f les quadri-impulsions totales initiale et finale.

Production $V\theta \to N\theta\theta$:

$$(\text{II}.48) \quad M(p_i k_i, q_f k_f k'_f) = g^3 (2\pi)^8 \sqrt{\pi} \frac{f(\omega_{k_i}) f(\omega_{k_f}) f(\omega_{k'_f})}{\sqrt{\omega_{k_i}\omega_{k_f}\omega_{k'_f}}} \delta^{(4)}(P_i - P_f)$$
$$\times \frac{1}{D^+(E)} S'(m_N + \omega_{k_i}) S'(m_N + \omega_{k_f}) S'(m_N + \omega_{k'_f}).$$

Diffusion $V\theta \to V\theta$:

$$(\text{II}.49) \quad M(p_i k_i, p_f k_f) = -2\pi^2 g^2 \frac{f(\omega_{k_i}) f(\omega_{k_f})}{\sqrt{\omega_{k_i}\omega_{k_f}}} \delta^{(4)}(P_i - P_f)$$
$$\times \left\{ S'(m_N + \omega_{k_i}) + \frac{2i(2\pi)^4}{D^+(E)} S'(m_N + \omega_{k_i}) S'(m_N + \omega_{k_f}) \right\}$$

Ces deux résultats sont identiques à ceux obtenus par R. D. Amado [2]. On constate, en particulier, l'absence de production dans le modèle où la particule V est composée; cette propriété peut être admise comme conséquence du fait que le fermion N se comporte comme une source fixe et qu'il n'y a pas d'interaction directe $\theta - \theta$.

CONCLUSION

Outre les résultats précédemment connus la méthode exposée ici permet essentiellement d'obtenir la solution de l'équation de Källen-Pauli dans le cas homogène ainsi que les amplitudes de diffusion hors de couche. Ces amplitudes peuvent être utilisées dans l'étude de modèles plus compliqués que le modèle de Lee, par exemple celui où une particule supplémentaire W est couplée aux particules $V\theta$ et $N\theta\theta$. Un tel modèle contient en particulier une fonction de vertex $WV\theta$ non triviale. Le propagateur habillé de la particule W possède encore une structure simple quoique son calcul nécessite la manipulation d'expressions compliquées. Néanmoins son étude peut présenter quelque intérêt dans le cas où le modèle de Lee contient un état lié $V\theta$: à cet état correspond un pôle dans les diagrammes en échelle de la diffusion $V\theta \rightarrow V\theta$ et le propagateur de la particule W peut posséder alors deux pôles. Il est aussi possible d'examiner sur cet exemple des propriétés déjà signalées par d'autres auteurs ([12]) et qui doivent intervenir quand la masse physique de la particule W coïncide avec la masse de l'état lié $V\theta$; la question se pose alors de savoir si le nouveau modèle est équivalent au modèle de Lee.

Par ailleurs, l'état lié $V\theta$ du modèle de Lee fournit un exemple d'une particule composée produite par une interaction résultant d'un échange de particule, plutôt que par une interaction de contact.

(Manuscrit reçu le 17 juillet 1964).

([12]) M. A. Braun, *Soviet Physics J. E. T. P.*, t. 18, 1964, p. 647.
Soviet Physics J. E. T. P., t. 19, 1964, p. 460.