Annales de l'I. H. P., section A

Guy Pichon

Étude relativiste de fluides visqueux et chargés

Annales de l'I. H. P., section A, tome 2, nº 1 (1965), p. 21-85
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1965__2_1_21_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. II, n° 1, 1965, p. 21-85.

Section A :
Physique théorique.

Étude relativiste de fluides visqueux et chargés

par

Guy PICHON
(Institut Henri Poincaré)

RÉSUMÉ. — Le présent travail est consacré à l'étude des fluides en Relativité générale. Dans une première partie l'auteur détermine la forme du tenseur d'impulsion énergie compte tenu des phénomènes de viscosité, d'électromagnétisme, de conductivité thermique. Dans le second chapitre il étudie les équations des fluides visqueux thermodynamiques et plus particulièrement le problème de Cauchy et les équations d'évolution du tenseur rotationnel. Le troisième chapitre est consacré aux fluides chargés. L'auteur calcule la vitesse de propagation du son dans de tels milieux puis il définit et étudie le schéma singulier; enfin, à l'aide des tenseurs distributions il établit et étudie les équations auxquelles satisfont les discontinuités du champ électromagnétique à la traversée d'une sous-variété de l'espace-temps.

SUMMARY. — The present work deals with fluid mechanics in general theory of relativity. In the first part the author determines the form of the energy-momentum 4 tensor and introduces viscosity, electromagnetic field and thermal conduction. In the second chapter, the equations of viscous thermodynamic fluids are studied end more particularly the Cauchy's problem and the equations of rotational. The third chapter is consacred to charged fluids. The author determines the velocity of sound in such a medium then he defines and studies the singular field. At last, with aid of tensor distribution he establishes and studies the equations which are satisfied by the discontinuities of the electromagnetic field across a sub-manifold of the space-time.

INTRODUCTION

Le premier chapitre du présent travail est consacré à la description du schéma fluide le plus général. Nous nous sommes efforcé de donner un tenseur d'impulsion énergie aussi complet que possible. A côté des phénomènes prépondérants de pression mécanique et de champ électromagnétique, nous avons tenu compte des phénomènes thermodynamiques, de viscosité, d'induction, d'électrostriction et de magnétostriction. Le tenseur ainsi obtenu n'est pas symétrique et il est nécessaire pour écrire les équations d'Einstein de lui ajouter un tenseur d'interaction. Aucun critère physique ne permet actuellement de préciser la forme de ce dernier terme. Nous avons, sans préjuger de la forme du terme d'interaction, supposé qu'il conduisait aux mêmes équations du mouvement que le tenseur non symétrisé ce qui est en accord avec la théorie en Relativité restreinte.

Le fluide visqueux thermodynamique a fait l'objet des développements du second chapitre. Nous avons d'abord posé le problème de Cauchy. Trois familles de variétés caractéristiques apparaissent alors dont une est essentiellement due au phénomène de viscosité. L'écriture explicite des conditions de conservation permet de mettre en évidence deux opérateurs de différentiation, l'un le long des lignes de courant, l'autre dans les directions orthogonales. Guidés par les résultats obtenus par A. Lichnerowicz et Y. Choquet-Bruhat pour les fluides parfaits, nous avons en introduisant ces opérateurs étudié la structure des équations d'évolution du rotationnel du fluide visqueux incompressible. A condition que le tenseur de déformation soit borné et la densité suffisamment grande, le système des équations est parabolique lorsqu'on prend comme lignes de temps les lignes de courant. Le fluide visqueux quelconque ne possède en général pas cette propriété. La structure de ses équations est de type mixte, assez difficile à préciser, certains groupes d'équations étant hyperboliques, d'autres paraboliques, ce qui explique en particulier l'absence dans un tel schéma d'ondes acoustiques.

Dans le troisième chapitre, nous considérons le schéma fluide parfait électromagnétique et posons d'abord le problème de Cauchy. En plus des variétés caractéristiques tangentes au cône isotrope, des variétés engendrées par les lignes de courant et des variétés des équations de Maxwell apparaît une quatrième famille que nous interprétons en termes d'ondes acoustiques. La vitesse de propagation de ces ondes est fonction, en un point donné de l'angle que fait la direction de propagation avec le vecteur de Poynting électromagnétique.

Par des développements parallèles à ceux fait par A. Lichnerowicz en l'absence d'induction, nous définissons et étudions le champ électromagnétique singulier, rejoignant ainsi certains résultats établis par Pham Mau Quan à l'aide d'une technique différente. Les deux 2-formes G et H qui dérivent ce champ satisfont à des relations très simples que nous mettons en évidence. Sous des hypothèses simples nous établissons enfin la permanence du schéma singulier.

Une dernière partie est consacrée à l'étude des discontinuités du champ électromagnétique. Cette étude est facilitée par la notion de tenseur distribution (au sens de A. Lichnerowicz) et par celle de courant (au sens de G. de Rham) à support sur une sous-variété de la variété espace-temps. Après avoir rappelé ces notions, nous formons les équations algébriques et différentielles auxquels satisfont les courants de discontinuité. Le système obtenu présente de grandes analogies avec le système des équations du schéma singulier, analogies que nous mettons en évidence. Nous formons enfin et étudions les équations de propagation des discontinuités le long des bicaractéristiques des équations de Maxwell.

CHAPITRE PREMIER

ÉQUATIONS DES FLUIDES THERMODYNAMIQUES VISQUEUX ET CHARGÉS

1. **Les équations d'Einstein.** — Le cadre de la Relativité générale est une variété différentiable V_4 à quatre dimensions [*1*]. Sur V_4 est définie une métrique riemanienne ds^2 de type hyperbolique normal à un carré positif et trois carrés négatifs. Dans un système de coordonnées locales admissibles x^α, l'expression de cette métrique est :

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x^\lambda)dx^\alpha dx^\beta \qquad (\alpha, \beta, \ldots = 0, 1, 2, 3).$$

La classe de différentiabilité de V_4 et celle des potentiels de gravitation $g_{\alpha\beta}$ seront supposées suffisantes pour les calculs qui suivront.

Le cadre géométrique étant cette variété « espace temps » V_4, la théorie relativiste de la gravitation consiste à choisir un système tensoriel d'équations aux dérivées partielles qui doit limiter la généralité du tenseur fondamental $g_{\alpha\beta}$. Ces équations doivent généraliser les équations classiques ([1]).

Leur forme générale, donnée par Einstein s'écrit :

$$S_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}(R - 2a)g_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta} \tag{1}$$

([1]) Nous entendons par « équations classiques » les équations non relativistes.

où $R_{\alpha\beta}$ est le tenseur de Ricci, $R = g^{\lambda\mu}R_{\lambda\mu}$, a la constante cosmologique, χ une constante numérique et $T_{\alpha\beta}$ un tenseur symétrique dit tenseur d'impulsion énergie et que nous allons maintenant définir.

2. **Le tenseur d'impulsion d'énergie d'un schéma fluide.** — Le tenseur $T_{\alpha\beta}$ doit décrire au mieux la distribution énergétique du milieu considéré. Les interprétations physiques des composantes de $T_{\alpha\beta}$ en un point x de V_4 se font en considérant l'espace tangent à V_4 en x comme un un espace-temps de la relativité restreinte. Les hypothèses faites sur la métrique permettent en effet de mettre celle-ci sous la forme :

$$ds^2 = (\omega^0)^2 - (\omega^1)^2 - (\omega^2)^2 - (\omega^3)^2$$

les ω^α étant des formes de Pfaff définies en x.

Dans l'espace tangent T_x, la base duale de la base (ω^α) définit alors un repère orthonormé qui permet l'interprétation de tout tenseur en x en termes d'espace et de temps [*1*].

Le tenseur d'un schéma fluide se construit à partir d'un vecteur unitaire de composantes u_α orienté dans le temps c'est-à-dire vérifiant

$$g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta = 1.$$

Nous désignerons par (R) tout repère orthonormé de T_x dont $\vec{u}$ est le vecteur orienté dans le temps, les trois autres vecteurs $\vec{e}_{(1)}\vec{e}_{(2)}\vec{e}_{(3)}$ étant orientés dans l'espace :

$$g_{\alpha\beta}e^\alpha_{(i)}e^\beta_{(i)} = -1 \quad (i, j, \ldots = 1, 2, 3).$$

Le vecteur $\vec{u}$ représente le vecteur vitesse d'univers d'un élément fluide. La longueur de l'arc de trajectoire du vecteur $\vec{u}$ définit le temps propre associé à cet élément. En un point x de V_4, le sous-espace vectoriel de T_x orthogonal à $\vec{u}$ sera dit espace associé à $\vec{u}$, ou plus simplement espace. La décomposition d'un tenseur quelconque en ses composantes suivant $\vec{u}$ et suivant l'espace sera facilitée par l'introduction du « projecteur d'espace » $\gamma_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - u_\alpha u_\beta$ déjà étudié par A. Lichnerowicz [*1*] puis C. Cattanéo [*2*].

L'idée directrice qui permet la construction de $T_{\alpha\beta}$ est la suivante : $T_{\alpha\beta}$ sera une fonction des u_α de leurs dérivées et des caractéristiques physiques du milieu considéré. Le tenseur $S_{\alpha\beta}$ étant conservatif [*3*], il résulte des équations d'Einstein :

$$\nabla_\alpha T^\alpha_{\cdot\beta} = 0 \tag{2}$$

où ∇ est l'opérateur de dérivation covariante.

Les équations (2) se décomposent en :

(2-1) $$u^{\beta}\nabla_{\alpha}T^{\alpha}_{\cdot\beta} = 0.$$

(2-2) $$\gamma^{\rho}_{\beta}\nabla_{\alpha}T^{\alpha}_{\cdot\rho} = 0.$$

L'équation (2-1) doit généraliser l'équation classique de conservation de l'énergie, les équations (2-2) doivent généraliser les équations classiques du mouvement de l'élément fluide.

Dans le schéma fluide le plus général, le tenseur $T_{\alpha\beta}$ est la somme de quatre tenseurs :

a) un tenseur $\overset{(m)}{\tau}_{\alpha\beta}$ qui rendra compte de l'énergie pondérable et des phénomènes purement mécaniques (pression, viscosité),

b) un tenseur $\overset{(e)}{\tau}_{\alpha\beta}$ qui rendra compte des phénomènes électromagnétiques,

c) un tenseur $Q_{\alpha\beta}$ qui rendra compte des échanges de chaleur,

d) un tenseur $\overset{(i)}{\tau}_{\alpha\beta}$ dit tenseur d'interaction qui symétrise $T_{\alpha\beta}$.

Dans ce chapitre et les suivants, sauf mention contraire, la vitesse de la lumière sera prise pour unité.

3. **Le tenseur $\overset{(m)}{\tau}_{\alpha\beta}$.** — Le tenseur $\overset{(m)}{\tau}_{\alpha\beta}$, dans lequel interviennent les effets de viscosité, a été introduit par A. Lichnerowicz [*1*]. Nous le reprenons sous une forme un peu différente qui s'écrit :

(3) $$\overset{(m)}{\tau}_{\alpha\beta} = \rho(1 + e)u_{\alpha}u_{\beta} + (\lambda\nabla_{\sigma}u^{\sigma} - p)\gamma_{\alpha\beta} + 2\nu\varepsilon_{\alpha\beta} \text{ (1)}$$

où ρ s'interprète comme étant la densité de l'élément fluide considéré, e son énergie interne, p sa pression, λ et ν sont deux constantes que l'on rencontre en théorie classique (ν est ordinairement appelée μ [*5*]). On a enfin :

$$2\varepsilon_{\alpha\beta} = \gamma^{\rho}_{\alpha}\gamma^{\mu}_{\beta}(\nabla_{\rho}u_{\mu} + \nabla_{\mu}u_{\rho})$$

$\nabla_{\rho}u_{\mu} + \nabla_{\mu}u_{\rho} = K_{\rho\mu}$ est appelé tenseur de déformation du milieu considéré. $2\varepsilon_{\alpha\beta}$ apparaît donc comme la composante d'espace de ce tenseur. L'énergie interne e est reliée à la température θ à la pression p et à la densité ρ par l'équation thermodynamique :

(4) $$de = \theta dS + \frac{p}{\rho^2}d\rho$$

où S désigne l'entropie spécifique de l'élément fluide considéré.

---

(1) La distinction dans le coefficient de $u_{\alpha}u_{\beta}$, entre l'énergie pondérable ρ et l'énergie interne e est due à Taub et permet d'introduire l'équation thermodynamique (4) [*4*].

4. **Le tenseur** $\overset{(e)}{\tau}_{\alpha\beta}$. — En l'absence d'électrostriction et de magnétostriction le tenseur $\overset{(e)}{\tau}_{\alpha\beta}$ fut introduit par Minkowski [*6*] puis repris dernièrement par Pham Mau Quan [*7*]. Il s'écrit :

$$\tau_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} G^{\lambda\mu} H_{\lambda\mu} - G^{\rho}_{.\alpha} H_{\rho\beta} \tag{5}$$

où $G_{\alpha\beta}$ et $H_{\alpha\beta}$ sont deux tenseurs antisymétriques à partir desquels on construit les champs électriques et magnétiques. Pour cela on considère la forme élément de volume définie par le tenseur $\eta_{\alpha\beta\gamma\delta} = \sqrt{|g|}\, e_{\alpha\beta\gamma\delta}$ où $e_{\alpha\beta\gamma\delta}$ est l'indicateur de permutation et g le déterminant de la matrice $(g_{\alpha\beta})$.

Au tenseur $G_{\alpha\beta}$ est alors associé le tenseur adjoint de composantes $\overset{*}{G}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\,!} \eta_{\alpha\beta\rho\mu} G^{\rho\mu}$ et de même à $H_{\alpha\beta}$ est associé le tenseur $\overset{*}{H}_{\alpha\beta}$.

Les champs électriques $\vec{E}$, magnétiques $\vec{H}$, induction électrique $\vec{D}$ et induction magnétique $\vec{B}$ sont alors représentés par les vecteurs de composantes :

$$E_\alpha = u^\beta H_{\beta\alpha} \qquad H_\alpha = u^\beta \overset{*}{G}_{\beta\alpha} \qquad D_\alpha = u^\beta G_{\beta\alpha} \qquad B_\alpha = u^\beta \overset{*}{H}_{\beta\alpha}. \tag{6}$$

Les vecteurs $\vec{E}$, $\vec{H}$, $\vec{D}$, $\vec{B}$ sont évidemment des vecteurs d'espace. Comme lois de l'induction nous prenons celles de la théorie de Maxwell des milieux isotropes : $\vec{D}$ est parallèle à $\vec{E}$ et $\vec{B}$ à $\vec{H}$ ce que nous traduisons par :

$$D_\alpha = \varepsilon E_\alpha \qquad B_\alpha = \mu H_\alpha$$

où ε et μ sont deux fonctions supposées connues de la densité ρ et la température θ. On peut, en première approximation considérer ε et μ comme des constantes ainsi que l'ont fait Minkowski et Pham Mau Quan. En fait l'expérience montre que ε et μ ne dépendent que de ρ [*8*].

D'autre part les variations de ε et de μ se traduisent par la présence au sein du fluide d'une pression supplémentaire que l'on peut mesurer effectivement et qui a pour expression en théorie classique [*8*] :

$$\frac{\rho}{2}\left(\frac{d\varepsilon}{d\rho}\vec{E}^2 + \frac{d\mu}{d\rho}\vec{H}^2\right).$$

Si nous voulons rendre compte de ces phénomènes en Relativité générale, il faudra non seulement considérer ε et μ comme des fonctions de ρ, mais ajouter au tenseur $\tau_{\alpha\beta}$ un tenseur qui tiendra compte de cette pression supplémentaire laquelle se comporte [8] comme la pression p. Nous prendrons donc comme tenseur $\overset{(e)}{\tau}_{\alpha\beta}$:

$$\overset{(e)}{\tau}_{\alpha\beta} = \tau_{\alpha\beta} - \gamma_{\alpha\beta}\frac{\rho}{2}\left(E^{\sigma}E_{\sigma}\frac{d\varepsilon}{d\rho} + H^{\sigma}H_{\sigma}\frac{d\mu}{d\rho}\right).$$

Les composantes de $\overset{(e)}{\tau}_{\alpha\beta}$ sur l'espace associé coïncident avec celles qu'introduit Boa Teh Chu [9] pour étudier le champ électromagnétique dans les fluides classiques.

5. **Le tenseur** $Q_{\alpha\beta}$. — La conduction thermique dans un milieu fluide relativiste a été étudiée par Pham Mau Quan [10] par l'introduction d'un vecteur courant de chaleur $\vec{q}$ proportionnel au gradient d'espace de la température θ, c'est-à-dire qui s'écrit :

$$q_{\alpha} = -\varkappa\gamma^{\rho}_{\alpha}\partial_{\rho}\theta \qquad \left(\partial_{\rho} = \frac{\partial}{\partial x^{\rho}}\right) \tag{7}$$

où $\varkappa$ est le coefficient de conduction thermique qui dépend de la nature du milieu. La considération de ces échanges thermiques conduit à ajouter au tenseur d'impulsion énergie le tenseur

$$Q_{\alpha\beta} = -(u_{\alpha}q_{\beta} + u_{\beta}q_{\alpha}). \tag{8}$$

6. **Le tenseur d'interaction** $\overset{(i)}{\tau}_{\alpha\beta}$. — Si nous considérons le tenseur

$$\overset{(m)}{\tau}_{\alpha\beta} + \overset{(e)}{\tau}_{\alpha\beta} + Q_{\alpha\beta}$$

nous constatons que ce tenseur n'est pas un tenseur symétrique et ceci à cause du tenseur $\tau_{\alpha\beta}$.

Le tenseur $\tau_{\alpha\beta}$ peut en effet s'écrire [11] :

$$\tau_{\alpha\beta} = \left(\frac{1}{2}g_{\alpha\beta} - u_{\alpha}u_{\beta}\right)(D^{\rho}E_{\rho} + B^{\rho}H_{\rho}) - D_{\alpha}E_{\beta} - B_{\alpha}H_{\beta} + u_{\alpha}Q_{\beta} + u_{\beta}P_{\alpha} \tag{9}$$

où P_{α} est le vecteur de Poynting et Q_{α} un vecteur analogue :

$$\left\{\begin{array}{l} P_{\rho} = \gamma_{\alpha\rho}u^{\beta}\tau^{\alpha}_{\cdot\beta} = \eta_{\rho\gamma\delta\mu}u^{\gamma}H^{\delta}E^{\mu} \\ Q_{\rho} = \gamma_{\beta\rho}u^{\alpha}\tau^{\cdot\beta}_{\alpha} = \eta_{\rho\gamma\delta\mu}u^{\gamma}B^{\delta}H^{\mu}. \end{array}\right. \tag{10}$$

Dans le cas où les inductions sont parallèles aux champs, alors $\vec{Q} = \varepsilon\mu\vec{P}$ et le tenseur $\tau_{\alpha\beta}$ a une partie antisymétrique non nulle égale à

$$\frac{1}{2}(\varepsilon\mu - 1)(u_{\alpha}P_{\beta} - u_{\beta}P_{\alpha}).$$

On ne peut donc écrire les équations d'Einstein qu'en symétrisant $\tau_{\alpha\beta}$ à l'aide d'un tenseur dit d'interaction $\overset{(i)}{\tau}_{\alpha\beta}$. Abraham propose [*12*] :

$$\overset{(i)}{\tau}_{\alpha\beta} = (1 - \varepsilon\mu)u_\alpha P_\beta$$

et Pham Mau Quan [7] :

$$\overset{(i)}{\tau}_{\alpha\beta} = -(1 - \varepsilon\mu)\tau_{\alpha\rho}u^\rho u_\beta.$$

En fait il n'existe actuellement aucune expérience qui permette de choisir le tenseur $\overset{(i)}{\tau}_{\alpha\beta}$, les forces mises en cause étant trop faibles (de l'ordre de $\frac{1 - \varepsilon\mu}{c^2}$, c étant la vitesse de la lumière). D'autre part dans les équations du mouvement $\overset{(i)}{\tau}_{\alpha\beta}$ n'intervient que par sa divergence $\nabla_\alpha \overset{(i)}{\tau}{}^{\alpha}_{.\beta}$. Nous ferons donc l'hypothèse suivante :

1° en l'absence de champ électromagnétique le tenseur $\overset{(i)}{\tau}_{\alpha\beta}$ est nul,

2° en présence de champ électromagnétique on peut négliger $\nabla_\alpha \overset{(i)}{\tau}{}^{\alpha}_{.\beta}$.

7. **Les conditions de conservation.** — Les équations de conservation sont des conséquences des équations d'Einstein et s'écrivent :

$$\nabla_\alpha T^{\alpha}_{.\beta} = 0.$$

Le calcul complet de $\nabla_\alpha \overset{(m)}{\tau}{}^{\alpha}_{.\beta}$ sera effectué au chapitre II, cependant on voit immédiatement que :

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha \overset{(m)}{\tau}{}^{\alpha}_{.\beta} = {} & u_\beta \nabla_\alpha(wu^\alpha) + wu^\alpha \nabla_\alpha u_\beta - \nabla_\beta p \\ & + \lambda\left(\gamma^{\alpha}_{\beta} \nabla_\alpha \nabla_\sigma u^\sigma + (\nabla_\sigma u^\sigma)\nabla_\alpha \gamma^{\alpha}_{.\beta}\right) + 2\nu \nabla_\alpha \varepsilon^{\alpha}_{\beta} \end{aligned} \tag{11}$$

où l'on a posé $w = \rho\left(1 + e + \frac{p}{\rho}\right)$.

Le calcul de $\nabla_\alpha \tau^{\alpha}_{.\beta}$ a été souvent effectué et son expression transformée en utilisant les équations de Maxwell [7]. Ces équations qui s'écrivent :

$$\nabla_\alpha G^{\alpha}_{.\beta} = J_\beta \qquad \nabla_\alpha \overset{*}{H}{}^{\alpha}_{.\beta} = 0 \tag{12}$$

où J_β est le vecteur courant électrique, sur lequel nous reviendrons, généralisent les équations de Maxwell classiques et conduisent à la relation :

$$\nabla_\alpha \tau^{\alpha}_{.\beta} = J^\lambda H_{\lambda\beta} + (1 - \varepsilon\mu)P^\alpha \nabla_\beta u_\alpha \tag{13}$$

lorsqu'on suppose ε et μ constants.

Dans cette dernière hypothèse on peut alors à partir de l'équation de continuité donner l'expression de la variation de l'entropie S le long d'une ligne de courant, c'est-à-dire une trajectoire du vecteur $\vec{u}$.

Il résulte de (11), (13) et (8) :

$$\begin{aligned} u^\beta \nabla_\alpha T^\alpha_{.\beta} = {} & (1+e)\nabla_\alpha(\rho u^\alpha) + \rho u^\alpha \nabla_\alpha e + p \nabla_\alpha u^\alpha \\ & - \lambda(\nabla_\sigma u^\sigma)\nabla_\rho u^\rho - \nu(\gamma^{\alpha\rho}\nabla_\rho u_\beta . \nabla_\alpha u^\beta + \nabla_\alpha u^\rho . \nabla_\rho u^\alpha) \\ & + J^\lambda H_{\lambda\beta} u^\beta + (1-\varepsilon\mu) u^\beta P^\alpha \nabla_\beta u^\alpha + u^\alpha q^\beta \nabla_\alpha u_\beta - \nabla_\alpha q^\alpha + u^\beta \nabla_\alpha \overset{(i)}{\tau}{}^\alpha_{.\beta} = 0 \text{ (2)}. \end{aligned}$$

Or l'équation thermodynamique (4) nous permet d'écrire :

$$\rho u^\alpha \nabla_\alpha e + p \nabla_\alpha u^\alpha = \rho\theta u^\alpha \nabla_\alpha S + \frac{p}{\rho} \nabla_\alpha(\rho u^\alpha).$$

Nous en déduisons la variation de l'entropie S le long d'une ligne tangente à $\vec{u}$ c'est-à-dire une ligne de courant :

$$\begin{aligned} \rho\theta u^\alpha \nabla_\alpha S = {} & - \nabla_\alpha(\rho u^\alpha)\left(1 + e + \frac{p}{\rho}\right) + \lambda(\nabla_\sigma u^\sigma)\nabla_\rho u^\rho \\ & + \nu(\gamma^{\alpha\rho}\nabla_\rho u_\beta . \nabla_\alpha u^\beta + \nabla_\alpha u^\rho . \nabla_\rho u^\alpha + E_\lambda J^\lambda) \\ & - (1-\varepsilon\mu) u^\beta P^\alpha \nabla_\beta u_\alpha - q^\alpha u^\beta \nabla_\beta u_\alpha + \nabla_\alpha q^\alpha + u^\beta \nabla_\alpha \overset{(i)}{\tau}{}^\alpha_{\beta .}. \end{aligned}$$

Nous dirons qu'un fluide est parfait si $\lambda = \nu = 0$.

Pour un fluide parfait non chargé et dans lequel on néglige le courant de chaleur on obtient la relation :

$$\rho\theta u^\alpha \nabla_\alpha S = - \nabla_\alpha(\rho u^\alpha)\left(1 + e + \frac{p}{\rho}\right).$$

Un mouvement sera dit adiabatique si $u^\alpha \nabla_\alpha S = 0$. D'où :

THÉORÈME I : *Pour qu'un mouvement d'un fluide parfait non chargé soit adiabatique il faut et il suffit que* $\nabla_\alpha(\rho u^\alpha) = 0$, *c'est-à-dire qu'il y ait conservation de la masse.*

Dans un tel mouvement $\nabla_\alpha(\rho S u^\alpha) = 0$, l'entropie se conserve le long d'une ligne de courant.

8. **Le système des équations du fluide relativiste.** — Dans les équations générales des fluides interviennent deux sortes de fonctions :

a) celles dont la forme ne dépend que de la nature physique du milieu et qui seront fonction en général des deux variables thermodynamiques ρ et θ. Ce sera le cas de ε, μ, $\varkappa$, λ, ν ;

---

(2) Ce calcul a été effectué par Coburn dans le cas du fluide parfait [*22*].

b) des fonctions inconnues qui dépendront des quatre variables x^λ. Du choix de ces fonctions dépendront les difficultés d'étude du système.

Les dix potentiels $g_{\alpha\beta}$, le vecteur u_α, la densité ρ, la température θ seront considérés comme des inconnues. Dans la partie électromagnétique, on a le choix entre les champs $\vec{E}$, $\vec{H}$ ou les tenseurs $H_{\alpha\beta}$ et $G_{\alpha\beta}$. La simplicité des équations de Maxwell fait que nous prendrons $H_{\alpha\beta}$ et $G_{\alpha\beta}$ comme fonctions inconnues. Seulement ces fonctions sont liées par des relations conséquences des lois de l'induction. Ces relations s'écrivent [*8*] :

$$G_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\alpha\beta}{}^{\rho\mu} H_{\rho\mu}$$

avec :

$$\varepsilon_{\alpha\beta}{}^{\rho\mu} = \frac{1}{\mu}\left(g^\rho_\alpha g^\mu_\beta - g^\rho_\beta g^\mu_\alpha\right) + \frac{1-\varepsilon\mu}{\mu}\left(g^\mu_\alpha u^\rho u_\beta - g^\mu_\beta u^\rho u_\alpha - g^\rho_\alpha u^\mu u_\beta + g^\rho_\beta u^\mu u_\alpha\right)$$

(voir chapitre III A-1).

Le vecteur courant $\vec{J}$ n'introduira qu'une fonction inconnue supplémentaire. D'une façon générale nous pouvons le décomposer sous la forme :

$$\vec{J} = \gamma\vec{u} + \sigma\vec{E} + b\vec{P} + s\vec{q}$$

où γ est la densité de charge propre, σ la conductivité électrique. Les termes en $b\vec{P}$ et $s\vec{q}$ rendent compte de l'effet Hall [*13*] et de l'effet thermoélectrique. Les quantités b et s seront supposées ne dépendre que du milieu considéré. La seule inconnue scalaire sera γ.

En résumé nous avons donc comme inconnues :

$$g_{\alpha\beta},\quad u_\alpha,\quad H_{\alpha\beta},\quad G_{\alpha\beta},\quad \gamma,\quad \rho,\quad p,\quad \theta$$

soit au total 30 inconnues et comme équations :

$$S_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta} \qquad\qquad u^\alpha u_\alpha = 1$$
$$\nabla_\alpha \overset{*}{H}{}^{\alpha\beta} = 0 \qquad\qquad \nabla_\alpha G^{\alpha\beta} = J^\beta\,,$$
$$G_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\alpha\beta}{}^{\rho\mu} H_{\rho\mu}$$

et l'équation d'état $F(p, \rho, \theta) = 0$ qui ne dépend que du milieu.

Nous utiliserons aussi constamment les conditions de conservation conséquences des équations d'Einstein :

$$\nabla_\alpha T^\alpha_{.\beta} = 0.$$

L'étude et la résolution des équations ainsi obtenues s'effectue en général dans un système de coordonnées déterminé, par exemple le système isotherme [*14*]. Le choix de ces coordonnées introduit quatre équations supplémentaires qui ne font intervenir que les potentiels $g_{\alpha\beta}$ et leurs dérivées premières et secondes et que nous n'aurons pas besoin d'expliciter.

Nous obtiendrons dans ce travail des résultats originaux pour les schémas suivants :

1° le schéma fluide visqueux thermodynamique,

2° le schéma fluide chargé avec induction.

CHAPITRE II

LE SCHÉMA FLUIDE VISQUEUX THERMODYNAMIQUE

A. — Le problème de Cauchy.

A-1. Les équations du fluide visqueux thermodynamique. — Dans un tel schéma nous négligeons les phénomènes électromagnétiques. Le tenseur d'impulsion énergie peut alors s'écrire :

$$\text{(14)} \qquad T_{\alpha\beta} = wu_\alpha u_\beta - pg_{\alpha\beta} + \lambda\gamma_{\alpha\beta}\nabla_\sigma u^\sigma + 2\nu\varepsilon_{\alpha\beta} - u_\alpha q_\beta - u_\beta q_\alpha$$

avec :

$$2\varepsilon_{\alpha\beta} = \gamma^\rho_\alpha\gamma^\mu_\beta(\nabla_\rho u_\mu + \nabla_\mu u_\rho) \qquad \text{et} \qquad q_\alpha = -\varkappa\gamma^\rho_\alpha\partial_\rho\theta.$$

Les inconnues sont alors $g_{\alpha\beta}$, u_α, ρ, p, θ, soit au total 17 inconnues pour les 12 équations

$$\begin{cases} S_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta} & (15) \\ u^\alpha u_\alpha = 1 & (16) \\ F(p, \rho, \theta) = 0 \ \text{équation qui donnera } p(\rho, \theta). & (17) \end{cases}$$

En plus des quatre conditions de coordonnées nous ajoutons une équation supplémentaire qui s'introduit naturellement quand on exprime la conservation de la chaleur. Cette équation introduite par Pham Mau Quan [*10*] s'écrit, en posant $\rho(1 + e) = r$ et en désignant par d la chaleur spécifique à volume constant et l la chaleur de dilatation ($d(\theta, \rho)$, $l(\theta, \rho)$) :

$$\text{(18)} \qquad \nabla_\alpha q^\alpha = d.ru^\alpha\nabla_\alpha\theta - \frac{l}{r}u^\alpha\nabla_\alpha r.$$

Le système que nous considérons sera constitué par (15) (16) (17) (18) et à la place de ρ nous prendrons l'inconnue r.

A-2. **Équations de conservation.** — Au cours des calculs qui suivent, nous nous efforcerons de mettre en évidence deux opérateurs différentiels associés au vecteur $\vec{u}$:

— l'opérateur $u^\alpha \nabla_\alpha$ de dérivation le long des lignes de courant,

— l'opérateur $\gamma^{\alpha\rho}\nabla_\rho$ dit de dérivation d'espace.

Toute dérivée covariante peut s'exprimer à l'aide de ces opérateurs en écrivant :

$$\nabla_\rho = \gamma_\rho^\alpha \nabla_\alpha + u_\rho u^\alpha \nabla_\alpha.$$

L'intérêt de cette décomposition apparaît lorsque l'on se place dans un repère (R). On a :

$$u^0 = 1 \qquad u^i = 0 \qquad \gamma^{00} = \gamma^{0i} = 0.$$

Si T... est un tenseur quelconque l'expression $u^\alpha \nabla_\alpha T\dots$ ne renferme que la dérivée $\partial_0 T\dots$; les expressions $\gamma^{\alpha\rho}\nabla_\rho T$ ne renferment que mes dérivées $\partial_i T\dots$

Compte tenu de $u^\alpha \nabla_\beta u_\alpha = 0$ et $u^\alpha \gamma_{\alpha\rho} = 0$ on voit que :

$$(19) \qquad \begin{cases} \nabla_\alpha u^\alpha = \gamma_\alpha^\sigma \nabla_\sigma u^\alpha \\ \nabla_\alpha u^\rho . \nabla_\rho u^\beta = (\nabla_\alpha u^\rho)\gamma_\rho^\sigma \nabla_\sigma u_\beta \\ \nabla_\alpha u^\rho . \nabla_\rho u^\alpha = \gamma_\alpha^\sigma \gamma_\nu^\rho (\nabla_\sigma u^\nu)\nabla_\rho u^\alpha. \end{cases}$$

Les formules (19) entraînent alors :

$$(20) \qquad \begin{aligned} 2\nabla_\alpha \varepsilon^{\alpha}_{.\beta} = & -(g_\beta^\sigma \nabla_\alpha u^\alpha + 2\gamma^{\sigma\alpha}\nabla_\alpha u_\beta)u^\rho \nabla_\rho u_\sigma - u_\beta \nabla_\alpha u^\rho \nabla_\rho u^\alpha \\ & + \gamma^{\alpha\rho}\nabla_\alpha \nabla_\rho u_\beta + \gamma_\beta^\rho \nabla_\alpha \nabla_\rho u^\alpha \end{aligned}$$

expressions où apparaissent linéairement les dérivées premières de $\bar{u}$ le long des lignes de courant.

Nous pouvons encore transformer cette expression en remarquant que :

$$\gamma_\beta^\rho \nabla_\alpha \nabla_\rho u^\alpha = \gamma_\beta^\rho (\nabla_\rho \nabla_\alpha u^\alpha + R_\rho^\sigma u_\sigma)$$

or d'après les équations d'Einstein :

$$\gamma_\beta^\rho R_{\rho\sigma} u^\sigma = \chi \gamma_\beta^\rho u^\sigma (T_{\rho\sigma} - g_{\rho\sigma} T_\alpha^\alpha) = 0$$

donc :

$$\gamma_\beta^\rho \nabla_\alpha \nabla_\rho u^\alpha = \gamma_\beta^\rho \nabla_\rho \nabla_\alpha u^\alpha$$

or :

$$\gamma_\beta^\rho \nabla_\rho \nabla_\alpha u^\alpha = \gamma_\beta^\rho \nabla_\rho (\gamma_\alpha^\sigma \nabla_\sigma u^\alpha)$$

d'où :

$$\gamma_\beta^\rho \nabla_\rho \nabla_\alpha u^\alpha = \gamma_\beta^\rho \gamma_\alpha^\sigma \nabla_\rho \nabla_\sigma u^\alpha - \gamma_\beta^\rho (\nabla_\rho u_\alpha) u^\sigma \nabla_\sigma u^\alpha.$$

Remplaçant dans $\nabla_\alpha \varepsilon^{\alpha}_{.\beta}$, $\gamma^{\rho}_{\beta}\nabla_\rho \nabla_\alpha u^\alpha$ par la valeur ci-dessus on voit que les équations de conservation peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned}\nabla_\alpha T^{\alpha}_{.\beta} = & \left((w-(\lambda+\nu)\nabla_\alpha u^\alpha) g^{\sigma}_{\beta} - 2\nu\gamma^{\sigma\alpha}\nabla_\alpha u_\beta - (\lambda+\nu)\gamma^{\alpha}_{\beta}\nabla_\alpha u^\sigma\right) u^\rho \nabla_\rho u_\sigma \\ & + \left(\nu\gamma^{\alpha\sigma} g^{\sigma}_{\beta} + (\lambda+\mu)\gamma^{\alpha}_{\beta}\gamma^{\rho\sigma}\right)\nabla_\alpha \nabla_\sigma u^\rho - \gamma^{\alpha}_{\beta}\nabla_\alpha p \\ & + u_\beta((w - \lambda\nabla_\sigma u^\sigma)\nabla_\rho u^\rho + u^\alpha \nabla_\alpha r - \nu\nabla_\alpha u^\rho . \nabla_\rho u^\alpha) = 0.\end{aligned}$$

Cette équation appelle les deux remarques suivantes :

1° les dérivées premières de u_α le long des lignes de courant apparaissent linéairement,

2° les dérivées secondes de u_α sont uniquement des dérivées d'espace. En effet, dans un repère (R), $\gamma^{00} = \gamma^{i0} = 0$ donc les seuls termes en dérivée seconde qui apparaissent sont en $\partial_{ij} u_\alpha$.

Ces deux propriétés apparaissent aussi dans les équations de Navier classiques, l'opérateur $u^\alpha \nabla_\alpha$ étant remplacé par l'opérateur $\frac{\partial}{\partial t}$ ce qui nous amènera à comparer la structure des équations de Navier relativistes à la structure des équations classiques.

A-3. **Le problème de Cauchy.** — Nous allons voir que l'intégration du système (I) constitué par les équations (15), (16), (17), (18) se présente de façon très différente suivant que l'on néglige ou non le courant de chaleur q_α.

Dans l'hypothèse la plus générale, le problème de Cauchy peut se poser de la façon suivante : étant donné dans V_4 une hypersurface par exemple orientée dans l'espace (Σ), dont on peut toujours prendre l'équation sous la forme $x^0 = 0$ on suppose connues sur (Σ) les quantités suivantes dites données de Cauchy :

$$g_{\alpha\beta}, \quad u_\alpha, \quad \theta, \quad r, \quad \partial_0 u_\alpha, \quad \partial_0 \theta, \quad \partial_0 g_{\alpha\beta} \tag{22}$$

et l'on se propose de construire une solution du système I qui satisfasse sur (Σ) aux données de Cauchy (22). Dans l'hypothèse où les données sont analytiques, le théorème de Cauchy assure l'existence et l'unicité de cette solution à condition que le système soit de Cauchy, c'est-à-dire résoluble pour les dérivées d'ordre le plus élevé dans une direction transversale à (Σ).

A. Lichnerowicz a montré d'une part que le tenseur S^0_α ne renfermait aucune dérivée seconde $\partial_{00} g_{\alpha\beta}$ et que d'autre part le système des équations d'Einstein était équivalent au système :

$$S^0_\alpha = \chi T^0_\alpha \quad \text{pour} \quad x^0 = 0 \tag{15-1}$$

$$(15\text{-}2) \qquad \left\{ \begin{aligned} & R_{ij} = \left(T_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} T\right) \\ & \nabla_\alpha T^\alpha_{.\beta} = 0 \end{aligned} \right.$$

(nous négligeons la constante cosmologique).

Si l'on remarque que les valeurs sur (Σ) de $T_{\alpha\beta}$ ne dépendent que des données de Cauchy (22) le problème de l'intégration du système I se décompose en deux :

1° Problème des conditions initiales : trouver que (Σ) des données de Cauchy qui satisfassent aux équations (15-1). On sait alors que ces relations seront satisfaites dans un voisinage de (Σ) [1].

2° Problème d'évolution : intégrer le système (I′) constitué par les équations (15-2), (16), (17), (18).

Pour résoudre ce second problème on est alors amené à calculer les valeurs sur (Σ) des dérivées des fonctions inconnues. Les dérivées par rapport aux variables x^i se calculent par simple dérivation sur (Σ) et nous ramenons ensuite au calcul de $\partial_{00} g_{\alpha\beta}$, $\partial_0 r$, $\partial_{00} u_\alpha$, $\partial_{00}\theta$.

Désignant par (D.C) toute fonction des données de Cauchy on tire de (15-2) [1] :

$$R_{ij} = -\frac{1}{2} g^{00} \partial_{00} g_{ij} + (\mathrm{D.C}) = (\mathrm{D.C}),$$

ce qui permet sous l'hypothèse $g^{00} \neq 0$ de calculer les quantités $\partial_{00} g_{ij}$.

Le calcul des quatre quantités $\partial_{00} g_{0\alpha}$ peut s'effectuer au moyen des quatre conditions de coordonnées.

L'équation de continuité $u^\beta \nabla_\alpha T^\alpha_\beta = 0$ s'écrit, compte tenu de (21) :

$$(21\text{-}1) \quad \begin{aligned} (w - \lambda \nabla_\alpha u^\alpha) \nabla_\rho u^\rho + u^\alpha \nabla_\alpha r - \nu(\nabla_\alpha u^\rho \nabla_\rho u^\alpha + \gamma^{\alpha\sigma} \nabla_\alpha u^\beta \nabla_\sigma u_\beta) \\ - u^\rho u^\alpha \nabla_\alpha q_\rho - \nabla_\alpha q^\alpha = 0 \end{aligned}$$

or :

$$u^\rho \nabla_\alpha q_\rho = - q^\rho \nabla_\alpha u_\rho = (\mathrm{D.C})$$

donc (21-1) peut s'écrire :

$$u^\alpha \nabla_\alpha r - \nabla_\alpha q^\alpha = (\mathrm{D.C})$$

d'autre part (18) donne :

$$\frac{1}{r} u^\alpha \nabla_\alpha r + \nabla_\alpha q^\alpha = (\mathrm{D.C})$$

enfin, compte tenu de $q_\alpha = - \varkappa \gamma^\rho_\alpha \partial_\rho \theta$, ces deux dernières équations conduisent au système :

$$\left\{\begin{aligned} & u^0 \partial_0 r + \varkappa \gamma^{00} \partial_{00} \theta = (\mathrm{D.C}) \\ & \frac{1}{r} u^0 \partial_0 r - \varkappa \gamma^{00} \partial_{00} \theta = (\mathrm{D.C}) \end{aligned}\right.$$

ce qui permet le calcul de $\partial_0 r$ et $\partial_{00}\theta$ sous l'hypothèse $u^0 \neq 0$, $\gamma^{00} \neq 0$. On sait alors à l'aide de l'équation d'état calculer $\partial_0 p$.

Il ne reste donc plus qu'à calculer les quatre quantités $\partial_{00} u_\alpha$ et ceci en utilisant les équations de Navier :

(21-2) $\qquad \gamma^\rho_\beta \nabla_\alpha T^\alpha_{.\rho} = 0$ et l'équation (16).

Compte tenu de (21) on se ramène au système :

$$\left\{\begin{aligned} & (\nu \gamma^{00} \gamma^\rho_\beta + (\lambda + \nu) \gamma^0_\beta \gamma^{\rho 0}) \partial_{00} u_\rho = (\mathrm{D.C}) && (23\text{-}1) \\ & u^\alpha \partial_{00} u_\alpha = (\mathrm{D.C}). && (23\text{-}2) \end{aligned}\right.$$

Les équations (23-1) sont au nombre de quatre mais elles sont liées par la relation $u^\beta \gamma^\rho_\beta \nabla_\alpha T_{.\rho}^{\alpha} \equiv 0$.

Pour résoudre le système (23) supposons $u^0 \neq 0$ et considérons un repère dont $\vec{u}$ soit le vecteur orienté dans le temps, les trois autres vecteurs étant portés par (Σ). On a alors $u^i = 0$, $\gamma^\beta_0 = 0$ et le système se réduit à :

$$u^0 \partial_{00} u_0 = (\mathrm{D.C}) \text{ ce qui donne } \partial_{00} u_0$$

puis :

$$(\nu \gamma^{00} g^j_i + (\lambda + \nu) \gamma^0_i \gamma^{j0}) \partial_{00} u_j = (\mathrm{D.C}).$$

Pour résoudre ces trois dernières équations nous allons établir le lemme suivant :

LEMME : *Tout déterminant d'ordre n dont les éléments s'écrivent :*

$$a^k_i = \mathrm{A} \delta^i_k + b_i c^k$$

a pour expression :

$$\Delta = \mathrm{A}^{n-1}(\mathrm{A} + b_k c^k).$$

Si le vecteur $\vec{b}$ de R_n dont les composantes sont b_k est égal à 0, le lemme est évident, si $\vec{b} \neq 0$ alors le lemme se vérifie immédiatement en prenant comme vecteur de base dans R_n un vecteur unitaire porté par $\vec{b}$ et en remarquant que $b_k c^k$ est le produit scalaire de $\vec{b}$ par $\vec{c}$, $\vec{c}$ étant le vecteur de composantes c^k.

Le déterminant du système qui donne les $\partial_{00} u_j$ a donc pour expression :

$$\nu^2 (\gamma^{00})^2 (\nu \gamma^{00} + (\lambda + \nu) \gamma^0_j \gamma^{j0})$$

or :

$$\gamma^0_\alpha \gamma^{0\alpha} = \gamma^0_i \gamma^{i0} = \gamma^{00}$$

d'où l'expression du déterminant :

$$\Delta = \nu^2(\lambda + 2\nu)(\gamma^{00})^3.$$

Le système aura donc une solution unique si $\gamma^{00} \neq 0$.

Les surfaces exceptionnelles pour lesquelles on ne saura pas résoudre le problème de Cauchy sont donc celles sur lesquelles seront satisfaites l'une ou l'autre des trois relations :

$$g^{00} = 0 \qquad u^0 = 0 \qquad \gamma^{00} = 0.$$

Dans un système quelconque de coordonnées, ces relations s'écrivent en prenant pour équation de (Σ), $f(x^\lambda) = 0$:

$$g^{\alpha\beta}\partial_\alpha f \partial_\beta f = 0 \qquad u^\alpha \partial_\alpha f = 0 \qquad \gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha f \partial_\beta f = 0. \tag{24}$$

La première relation traduit que (Σ) est tangente au cône isotrope, la seconde que (Σ) est engendrée par des lignes de courant.

Étudions la troisième famille de variétés caractéristiques définie par l'équation $\gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha f \partial_\beta f = 0$ (24-3).

A. Lichnerowicz [*1*] a montré que, eu égard aux hypothèses faites sur la métrique la forme quadratique $\gamma^{\alpha\beta}X_\alpha X_\beta$ est négative. Dans un repère (R) elle s'écrit :

$$\gamma^{\alpha\beta}X_\alpha X_\beta \equiv -(X_1)^2 - (X_2)^2 - (X_3)^2.$$

En théorie classique, lorsqu'on cherche à résoudre le problème de Cauchy pour une variété plongée dans R_4 (produit de R_3 par l'axe des temps) on trouve comme variétés caractéristiques les variétés qui satisfont à l'une ou l'autre des deux équations :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = 0 \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x^3}\right)^2 = 0$$

$\vec{v}$ représentant le vecteur vitesse classique.

A-4. Le problème de Cauchy pour un mouvement isentropique. — Nous dirons qu'un mouvement est isentropique lorsque l'on peut négliger les échanges de chaleur. On a alors $q_\alpha = 0$, p peut être considéré comme uniquement fonction de r et le système (I) se réduit au système (I″) constitué des équations (15), (16) et (17′), $F(r, p) = 0$.

Le problème de Cauchy peut se poser d'une façon un peu différente de la précédente, le calcul des premières dérivées transversales inconnues s'effectue sans utiliser les conditions de conservation [*15*].

Le système des équations d'Einstein peut encore s'écrire :

$$
\begin{cases}
S^0_\alpha = \chi T^0_\alpha & (25\text{-}1) \\
R_{ij} = \chi\left(T_{ij} - \dfrac{1}{2} g_{ij} T^\alpha_\alpha\right). & (25\text{-}2)
\end{cases}
$$

Les données de Cauchy sur (Σ) sont :

$$g_{\alpha\beta} \qquad \partial_0 g_{\alpha\beta} \qquad u_\alpha$$

et les premières dérivées à calculer $\partial_{00} g_{\alpha\beta}$, $\partial_0 u_\alpha$, r, p.

Dès qu'on connaît les $T_{\alpha\beta}$ on sait calculer comme précédemment les $\partial_{00} g_{\alpha\beta}$. Le problème se ramène au calcul des valeurs sur (Σ) de p, r et $\partial_0 u_\alpha$.

Les équations (25-1) donnent :

$$u^\alpha T^0_\alpha = u^0 r = \frac{1}{\chi} u^\alpha S^0_\alpha = (\text{D.C})$$

ce qui avec l'équation (17′) permet de calculer r et p. L'équation (16) et les équations (25-1) permettent de calculer les $\partial_0 u_\alpha$ en se ramenant à un système en $\partial_0 u_i$ dont le déterminant a encore pour expression [*15*] :

$$\Delta = \nu^2(\lambda + 2\nu)(\gamma^{00})^3.$$

Les variétés caractéristiques qui apparaissent sont donc les mêmes que précédemment.

Notons enfin que si nous voulons calculer les dérivées suivantes, il suffit de dériver les équations données par rapport à x^0. Il n'apparaîtra pas d'autres caractéristiques que celles déjà rencontrées. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME II : *Les caractéristiques qui apparaissent dans la résolution du problème de Cauchy pour les fluides visqueux thermodynamiques sont :*

— *les variétés tangentes au cône isotrope,*
— *les variétés tangentes aux lignes de courant,*
— *les variétés définies par la relation* $\gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha f \partial_\beta f = 0$.

A-5. **Variétés caractéristiques et théorie des ondes.** — De même qu'en théorie classique [*16*] les variétés caractéristiques des fluides peuvent s'interpréter, en Relativité générale comme représentant des surfaces d'ondes qui se propagent à l'intérieur du milieu. Ce sont en effet des surfaces à la traversée desquelles les grandeurs physiques, potentiels de gravitation, pression, densité, vitesse ainsi que leurs dérivées sont susceptibles de subir des discontinuités ce qui se traduit par une indétermination, voire une impossibilité du problème de Cauchy.

La vitesse de propagation de ces ondes par rapport à un repère (R) est la pente spatio-temporelle dans ce repère du plan tangent à la variété caractéristique au point considéré.

Le calcul de v a été effectué par A. Lichnerowicz [*1*] et Y. Choquet-Bruhat [*11*] et donne :

$$v^2 = \frac{-u^\lambda u^\rho \partial_\lambda f \partial_\rho f}{\gamma^{\lambda\rho}\partial_\lambda f \partial_\rho f}. \tag{26}$$

On voit alors que les variétés définies par :

$$g^{\alpha\beta}\partial_\alpha f \partial_\beta f = 0$$

correspondent à des ondes de gravitation se propageant avec la vitesse 1 c'est-à-dire la vitesse de la lumière.

Les variétés définies par $u^\alpha \partial_\alpha f = 0$ correspondent à des ondes qui ont une vitesse de propagation nulle. Ces ondes seront dites stationnaires. En fait elles correspondent en général à une discontinuité de la densité ρ et se rencontrent à la surface de séparation de deux fluides non miscibles.

Enfin les variétés définies par $\gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha f \partial_\beta f = 0$ correspondent à une vitesse de propagation infinie. Or en Relativité la vitesse de propagation de tout phénomène physique doit être, en principe inférieure à la vitesse de la lumière, c'est-à-dire ici à 1. Ces dernières variétés ne correspondent donc vraisemblablement pas à une propagation réelle d'une grandeur physiquement observable (par exemple une discontinuité des dérivées des vitesses, de la pression, etc.).

Dans les fluides parfaits [*1*] les deux premières catégories apparaissent et en plus une troisième famille qui s'interprète en termes d'ondes acoustiques, lesquelles correspondent à la propagation réelle d'un phénomène physique. Cette dernière propriété est une conséquence du caractère hyperbolique du système des fluides parfaits [*17*], caractère qui n'apparaît plus dans les fluides visqueux. Cette différence fondamentale se retrouve déjà dans une théorie non relativiste.

B. — Les fluides visqueux incompressibles isentropiques.

Les analogies qui apparaissent dans le paragraphe précédent entre les équations classiques et les équations relativistes des fluides visqueux nous ont conduit à définir puis à étudier les fluides visqueux incompressibles relativistes. Dans tout ce paragraphe nous supposerons les mouvements isentropiques c'est-à-dire que nous négligerons les échanges de chaleur.

L'étude des fluides parfaits incompressibles en mouvement isentropique a conduit A. Lichnerowicz à introduire à la place du vecteur $\vec{u}$ un vecteur $\vec{C}$ dans lequel interviennent les caractères dynamiques du milieu [*1*] [*17*]. La quantité $w = r + p$ n'étant fonction que de la pression p, A. Lichnerowicz considère l'indice F défini par :

$$F = \exp \int_{p0}^{p} \frac{dp}{w} \quad \text{et pose} \quad Fu_\alpha = C_\alpha.$$

Remarquons que l'indice F est très voisin de 1. On a en effet en désignant par c la vitesse de la lumière :

$$F = 1 + \int_{p0}^{p} \frac{dp}{c^2 r} + 0\left(\frac{1}{c^4}\right)$$

un fluide est alors dit incompressible si $\nabla_\alpha C^\alpha = 0$.

A partir de ces considérations, A. Lichnerowicz et Y. Choquet-Bruhat ont obtenu de très jolis résultats dans l'étude des fluides parfaits isentropiques.

Malheureusement, pour le schéma visqueux les équations deviennent rapidement très compliquées et difficiles à interpréter. C'est pourquoi dans la première partie de ce paragraphe nous adopterons le point de vue de A. Lichnerowicz pour le modifier un peu dans la seconde partie. Dans le chapitre précédent nous avions adopté comme tenseur d'impulsion énergie :

$$(27) \qquad T_{\alpha\beta} = wu_\alpha u_\beta - pg_{\alpha\beta} + \lambda\gamma_{\alpha\beta}\nabla_\sigma u^\sigma + \nu\gamma_\alpha^\rho\gamma_\alpha^\mu(\nabla_\rho u_\mu + \nabla_\mu u_\rho).$$

Dans la partie qui traduit les effets de viscosité intervient essentiellement le tenseur de déformation :

$$K_{\rho\mu} = \nabla_\rho u_\mu + \nabla_\mu u_\rho$$

c'est-à-dire la partie symétrique du tenseur $\nabla_\rho u_\mu$. Il semblerait donc assez naturel de définir, comme en théorie classique le tenseur, rotationnel comme étant la partie antisymétrique de $\nabla_\rho u_\mu$ (au coefficient 2 près) et de poser :

$$\Omega_{\rho\mu} = \nabla_\rho u_\mu - \nabla_\mu u_\rho.$$

Or, dans l'étude des fluides parfaits A. Lichnerowicz a montré que le tenseur qui généralise au mieux le tenseur rotationnel classique est :

$$\overline{\Omega}_{\rho\mu} = \nabla_\rho C_\mu - \nabla_\mu C_\rho = \overline{\nabla}_\rho C_\mu - \overline{\nabla}_\mu C_\rho$$

où $\overline{\nabla}$ désigne l'opérateur de dérivation covariante dans la métrique :

$$\overline{ds}^2 = F^2 ds^2.$$

Il fut ainsi amené à considérer comme tenseur d'impulsion énergie du fluide visqueux [1] :

$$\overset{L}{T}_{\alpha\beta} = wu_\alpha u_\beta - pg_{\alpha\beta} + \lambda\gamma_{\alpha\beta}\nabla_\rho C^\rho + 2\nu e_{\alpha\beta}$$

avec :

$$\begin{aligned} 2e_{\alpha\beta} &= \overline{\nabla}_\alpha C_\beta + \overline{\nabla}_\beta C_\alpha - \overline{C}^\lambda(\overline{\nabla}_\lambda C_\alpha \cdot C_\beta + \overline{\nabla}_\lambda C_\beta \cdot C_\alpha) \\ &= \gamma^\rho_\alpha \gamma^\mu_\beta(\nabla_\rho C_\mu + \nabla_\mu C_\rho) + 2\gamma_{\alpha\beta}u^\rho\partial_\rho F \\ &= F\gamma^\rho_\alpha\gamma^\mu_\beta(\nabla_\rho u_\mu + \nabla_\mu u_\rho) + 2\gamma_{\alpha\beta}u^\rho\partial_\rho F. \end{aligned}$$

Nous avions d'abord considéré ce tenseur et posé le problème de Cauchy pour les équations du fluide visqueux. Nous nous sommes alors aperçu que la présence dans $e_{\alpha\beta}$ de la dérivée de l'indice F (terme en $u^\rho\partial_\rho F$) entraînait une indétermination dans le calcul de la pression p. Cependant les équations du mouvement et l'équation de continuité se mettent sous une forme remarquablement simple quand on introduit dans le tenseur de viscosité $\nabla_\alpha C_\beta$ au lieu de $\nabla_\alpha u_\beta$. C'est pourquoi dans une première partie nous adopterons un tenseur d'impulsion énergie très voisin de celui de A. Lichnerowicz et qui s'écrit :

$$\begin{aligned} \overline{T}_{\alpha\beta} &= wu_\alpha u_\beta - pg_{\alpha\beta} + \lambda\gamma_{\alpha\beta}\nabla_\rho C^\rho + \nu\gamma^\rho_\alpha\gamma^\mu_\beta(\nabla_\rho C_\mu + \nabla_\mu C_\rho) \\ &= \overset{L}{T}_{\alpha\beta} - 2\gamma_{\alpha\beta}u^\rho\partial_\rho F. \end{aligned}$$

Nous dirons que $\overline{T}_{\alpha\beta}$ décrit un milieu avec indice F. Le rotationnel sera $\overline{\Omega}_{\rho\mu}$ et l'incompressibilité traduira par $\nabla_\rho C^\rho = 0$.

Dans une seconde partie nous reviendrons au tenseur introduit initialement :

$$T_{\alpha\beta} = wu_\alpha u_\beta - pg_{\alpha\beta} + \lambda\gamma_{\alpha\beta}\nabla_\rho u^\rho + \nu\gamma^\rho_\alpha\gamma^\mu_\beta(\nabla_\rho u_\mu + \nabla_\mu u_\rho).$$

Nous dirons que $T_{\alpha\beta}$ décrit un milieu non indicié. Le rotationnel sera $\Omega_{\rho\mu}$ et l'incompressibilité se traduira par $\nabla_\rho u^\rho = 0$. Ce dernier tenseur un peu simplifié permet une étude plus poussée de la structure du système des équations.

B-1. — Le fluide visqueux incompressible avec indice F.

B-1-1. Le problème de Cauchy pour un fluide visqueux incompressible. — En prenant comme définition de l'incompressibilité $\nabla_\alpha C^\alpha = 0$ nous voyons que le tenseur $\overline{T}_{\alpha\beta}$ se réduit à :

$$\overline{T}_{\alpha\beta} = wu_\alpha u_\beta - pg_{\alpha\beta} + \nu\gamma^\rho_\alpha\gamma^\mu_\beta(\nabla_\rho C_\mu + \nabla_\mu C_\rho). \tag{29}$$

Remarquons d'abord que :

$$2\bar{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \gamma_\alpha^\rho \gamma_\beta^\mu (\nabla_\rho C_\mu + \nabla_\mu C_\rho) = F\varepsilon_{\alpha\beta}.$$

Il en résulte que le tenseur $\overline{T}_{\alpha\beta}$ ne renferme pas de dérivée de l'indice F. Les mouvements étant isentropiques, le problème de Cauchy se pose et se résout de la même façon qu'au paragraphe A-4 de ce chapitre.

On a en effet :

$$u^\alpha \overline{T}_\alpha^0 = u^0(w - p) = \frac{1}{\chi} S^0 = (D.C)$$

ce qui permet à l'aide de l'équation d'état de calculer r et p donc l'indice F.

Les quantités $\partial_0 u_\alpha$ sont alors données par :

$$\begin{cases} \varepsilon_\alpha^0 = (D.C) \\ u^\alpha \partial_0 u_\alpha = (D.C) \end{cases}$$

c'est-à-dire par le même système qu'au paragraphe A-4. Les variétés caractéristiques sont donc les mêmes que précédemment.

B-1-2. **Les équations de conservation.** — L'expression (29) permet d'écrire :

$$\nabla_\alpha \overline{T}_{.\beta}^\alpha = u_\beta \nabla_\alpha (wu^\alpha) + wu^\alpha \nabla_\alpha u_\beta - \partial_\beta p + 2\nu \nabla_\alpha \bar{\varepsilon}_{.\beta}^\alpha = 0$$

d'où l'équation de continuité :

$$\nabla_\alpha (wu^\alpha) - u^\beta \partial_\beta p + 2\nu u^\beta \nabla_\alpha \bar{\varepsilon}_{.\beta}^\alpha = 0.$$

Or de la définition de C_α il résulte :

$$\nabla_\alpha u_\rho = \frac{1}{F} \nabla_\alpha C_\rho - u_\rho \frac{\partial_\alpha p}{w} \tag{30}$$

d'où la nouvelle forme de l'équation de continuité, en tenant compte de $\nabla_\rho C^\rho = 0$:

$$u^\alpha \partial_\alpha (w - 2p) + 2\nu u^\beta \nabla_\alpha \bar{\varepsilon}_{.\beta}^\alpha = 0. \tag{31-1}$$

En faisant $\nu = 0$ on retrouve l'équation de continuité du fluide parfait incompressible isentropique établie par A. Lichnerowicz.

Les équations du mouvement s'écrivent :

$$wu^\alpha \nabla_\alpha u_\beta - \gamma_\beta^\rho \partial_\rho p + 2\nu \gamma_\beta^\rho \nabla_\alpha \bar{\varepsilon}_{.\rho}^\alpha = 0,$$

c'est-à-dire compte tenu de (30) :

$$\frac{w}{F} u^\alpha \nabla_\alpha C_\beta - \partial_\beta p + 2\nu \gamma_\beta^\rho \nabla_\alpha \bar{\varepsilon}_{.\rho}^\alpha = 0. \tag{31-2}$$

On peut encore transformer l'équation (31-1) en introduisant $\overline{\Omega}_{\alpha\beta}$. On a en effet :

$$\frac{w}{F} u^\alpha \nabla_\alpha C_\beta - \partial_\beta p = \frac{w}{F} u^\alpha \overline{\Omega}_{\alpha\beta} + w \frac{\partial_\beta F}{F} - \partial_\beta p = \frac{w}{F} u^\alpha \overline{\Omega}_{\alpha\beta}.$$

L'équation de continuité et les équations de Navier-Stokes peuvent donc s'écrire :

$$\boxed{\begin{aligned} &u^\alpha \partial_\alpha (w - 2p) + 2\nu u^\beta \nabla_\alpha \bar{\varepsilon}^{\alpha}_{.\beta} = 0 && (31\text{-}1)\\ &\frac{w}{F^2} C^\alpha \overline{\Omega}_{\alpha\beta} + 2\nu \gamma^\rho_\beta \nabla_\alpha \bar{\varepsilon}^{\alpha}_{.\rho} = 0 && (31\text{-}2) \end{aligned}}$$

En introduisant l'énergie interne par unité de masse e, nous avons $w = \rho(1 + e) + p$. D'autre part il résulte de $u^\beta \bar{\varepsilon}^{\alpha}_{.\beta} = 0$ que :

$$F u^\beta \nabla_\alpha \bar{\varepsilon}^{\alpha}_{.\beta} = - \bar{\varepsilon}^{\alpha}_{.\beta} \nabla_\alpha C^\beta$$

et l'équation (31-1) s'écrit :

$$C^\alpha \partial_\alpha (\rho(1 + e) - p) = \nu \gamma^\mu_\alpha \gamma^\rho_\beta \overline{K}_{\mu\rho} \overline{K}^{\alpha\beta} \tag{32}$$

ce qui généralise l'équation classique qui donne la perte d'énergie d'un élément fluide due à la viscosité [*5*].

B-1-3. **Diffusion du rotationnel.** — Nous avons vu que le système des équations du fluide visqueux relativiste présentait de grandes analogies avec le système classique, l'opérateur classique $\frac{\partial}{\partial t}$ étant remplacé par l'opérateur $u^\alpha \nabla_\alpha$. Nous allons voir que ces analogies se poursuivent quand on étudie l'évolution du rotationnel $\overline{\Omega}_{\alpha\beta}$.

Pour faire apparaître $\overline{\Omega}_{\alpha\beta}$ nous allons appliquer l'opérateur de différentiation aux deux membres de l'équation (31-2).

Nous avons d'abord :

$$\begin{aligned} &\nabla_\lambda \left(\frac{w}{F^2} C^\alpha \overline{\Omega}_{\alpha\beta} \right) - \nabla_\beta \left(\frac{w}{F^2} C^\alpha \overline{\Omega}_{\alpha\lambda} \right) \\ &= \frac{w}{F^2} (\overline{\Omega}_{\alpha\beta} \nabla_\lambda C^\alpha + C^\alpha \nabla_\lambda \overline{\Omega}_{\alpha\beta} - \overline{\Omega}_{\alpha\lambda} \nabla_\beta C^\alpha - C^\alpha \nabla_\beta \overline{\Omega}_{\alpha\lambda}) \\ &+ C^\alpha \overline{\Omega}_{\alpha\beta} \nabla_\lambda \left(\frac{w}{F^2} \right) - C^\alpha \overline{\Omega}_{\alpha\lambda} \nabla_\beta \left(\frac{w}{F^2} \right). \end{aligned}$$

Or $\overline{\Omega}_{\alpha\beta}$ étant une forme fermée :

$$\nabla_\lambda \overline{\Omega}_{\alpha\beta} + \nabla_\beta \overline{\Omega}_{\lambda\alpha} = \nabla_\alpha \overline{\Omega}_{\lambda\beta}$$

et l'expression considérée s'écrit :

$$(33)\quad \frac{w}{F^2}(C^\alpha \overline{\Omega}_{\lambda\beta} + \nabla_\alpha C^\alpha_{.} \overline{\Omega}_{\alpha\beta} - \overline{\Omega}_{\alpha\lambda} \nabla_\beta C^\alpha) + C^\alpha \overline{\Omega}_{\alpha\beta} \partial_\lambda \left(\frac{w}{F^2}\right) - C^\alpha \overline{\Omega}_{\alpha\lambda} \partial_\beta \left(\frac{w}{F^2}\right)$$

ou encore :

$$(33)\qquad \frac{w}{F^2} C^\alpha \nabla_\alpha \overline{\Omega}_{\lambda\beta} + \overline{\Omega}_{\alpha\beta} \nabla_\lambda \left(\frac{wu^\alpha}{F}\right) - \overline{\Omega}_{\alpha\lambda} \nabla_\beta \left(\frac{wu^\alpha}{F}\right).$$

L'expression (33) généralise le premier membre de l'équation d'Helmholtz obtenu par Y. Choquet-Bruhat [*17*].

Dans ce qui suit nous ne considérerons que la partie principale des équations qui régissent l'évolution du totationnel c'est-à-dire celle qui renferme les dérivées de $\overline{\Omega}_{\alpha\beta}$ car c'est de cette partie seulement que dépend la structure du système. Nous calculerons donc modulo les autres termes, ce que nous traduirons par le signe $\sim$. Ainsi :

$$(34)\qquad \nabla_\lambda \left(\frac{w}{F^2} C^\alpha \overline{\Omega}_{\alpha\beta}\right) - \nabla_\beta \left(\frac{w}{F^2} C^\alpha \overline{\Omega}_{\alpha\lambda}\right) \sim \frac{w}{F^2} C^\alpha \nabla_\alpha \overline{\Omega}_{\alpha\beta}.$$

Calcul de $2\nabla_\lambda(\gamma^\rho_\beta \nabla_\alpha \bar{\varepsilon}_{.\rho}^{\alpha})$.

D'après l'équation de continuité (31-1) nous avons :

$$\nabla_\lambda (u^\rho u_\beta \nabla_\alpha \bar{\varepsilon}^{\alpha}_{.\beta}) \sim 0$$

donc :

$$2\nabla_\lambda(\gamma^\rho_\beta \nabla_\alpha \bar{\varepsilon}^{\alpha}_{.\beta}) \sim 2\nabla_\lambda \nabla_\alpha \bar{\varepsilon}^{\alpha}_{.\beta} = A_{\lambda\beta}.$$

Pour calculer $A_{\lambda\beta}$ nous prendrons $2\bar{\varepsilon}_{.\beta}^{\alpha}$ sous la forme :

$$2\bar{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \gamma^\rho_\alpha \nabla_\rho C_\beta + \gamma^\rho_\beta \nabla_\rho C_\alpha - \gamma^\rho_\alpha K_\rho C_\beta - \gamma^\rho_\beta K_\rho C_\alpha$$

où rappelons-le $K_\alpha = \dfrac{\partial_\alpha F}{F}$.

On voit alors que les seuls termes en dérivée seconde seront donnés par :

$$\gamma^{\alpha\rho} \nabla_\lambda \nabla_\alpha \nabla_\rho C_\beta + \gamma^\rho_\beta \nabla_\lambda \nabla_\alpha \nabla_\rho C^\alpha$$

ce qui, compte tenu des identités de Ricci et de $\nabla_\alpha C^\alpha = 0$ se résout à :

$$\gamma^{\alpha\rho} \nabla_\alpha \nabla_\rho \nabla_\lambda C_\beta$$

modulo des termes en $\nabla_\rho C_\mu$.

Le calcul des termes en dérivée première de $\overline{\Omega}_{\alpha\beta}$ ne présente qu'une difficulté d'écriture si l'on remarque que :

$$\nabla_\alpha \gamma^\rho_\beta = -\frac{1}{F^2}(C_\beta \nabla_\alpha C^\rho + C^\rho \nabla_\alpha C_\beta)$$

modulo des termes en C_α et l'on obtient en définitive :

$$\begin{aligned} A_{\lambda\beta} \sim{} & \gamma^{\alpha\rho}\nabla_\alpha\nabla_\rho\nabla_\lambda C_\beta - \frac{1}{F^2}(\nabla_\rho C_\beta - K_\rho C_\beta)C^\alpha\nabla_\lambda\nabla_\alpha C^\rho \\ & - \frac{1}{F^2}C^\alpha\nabla_\alpha C^\rho . \nabla_\lambda\nabla_\rho C_\beta - \frac{1}{F^2}(C_\beta\nabla_\lambda\nabla_\alpha C^\rho + C^\rho\nabla_\lambda\nabla_\alpha C_\beta)(\nabla_\rho C^\alpha - K_\rho C^\alpha) \\ & - \frac{1}{F^2}(C_\beta\nabla_\alpha C^\rho + C^\rho\nabla_\alpha C_\beta)\nabla_\lambda\nabla_\rho C^\alpha - \frac{1}{F^2}(C^\alpha\nabla_\lambda C^\rho + C^\rho\nabla_\lambda C^\alpha)\nabla_\alpha\nabla_\rho C_\beta \\ & - \gamma^{\alpha\rho}K_\rho\nabla_\lambda\nabla_\alpha C_\beta. \end{aligned}$$

A ce stade du calcul la difficulté est de faire apparaître les expressions $\overline{\Omega}_{\rho\sigma}$ dans les termes qui, après antisymétrisation en λ et β renfermeront encore des dérivées secondes de C_λ. On lève cette difficulté en différentiant l'équation de continuité ce qui conduit à la relation :

$$2(\nabla^\alpha C^\rho)\nabla_\lambda \overline{K}_{\alpha\rho} \sim C^\alpha\nabla_\lambda\overline{\Omega}_{\alpha\rho}\left(\frac{2}{F^2}C^\sigma\nabla_\sigma C^\rho + \frac{1}{F^2}C^\sigma\nabla^\rho C_\sigma + K^\rho\right)$$

laquelle est suffisante pour faire apparaître les termes en $\nabla_\alpha\overline{\Omega}_{\rho\mu}$. Il vient alors :

$$\begin{aligned} A_{\lambda\beta} - A_{\beta\lambda} \sim{} & \nabla_\alpha\nabla_\rho\overline{\Omega}_{\lambda\beta} - (\nabla^\rho u^\alpha + u^\alpha u^\sigma\nabla_\sigma u^\rho)(u_\beta\nabla_\lambda\overline{\Omega}_{\alpha\rho} - u_\lambda\nabla_\beta\overline{\Omega}_{\alpha\rho}) \\ & - \frac{2}{F^2}C^\alpha(\nabla^\rho C_\beta\nabla_\lambda\overline{\Omega}_{\alpha\rho} + \nabla_\lambda C^\rho\nabla_\rho\overline{\Omega}_{\alpha\beta} - \nabla^\rho C_\lambda\nabla_\beta\overline{\Omega}_{\alpha\rho} - \nabla_\beta C^\rho\nabla_\rho\overline{\Omega}_{\alpha\lambda} \\ & - (K^\alpha + 2u^\rho\nabla_\rho u^\alpha)\nabla_\alpha\overline{\Omega}_{\lambda\beta}. \end{aligned}$$

Si bien que les équations qui régissent l'évolution de $\overline{\Omega}_{\alpha\rho}$ s'écrivent :

$$\boxed{\gamma^{\alpha\rho}\nabla_\alpha\nabla_\rho\overline{\Omega}_{\lambda\beta} + A^{\sigma\alpha\rho}_{\lambda\beta}\nabla_\sigma\overline{\Omega}_{\alpha\rho} + B_{\lambda\beta} = 0} \tag{35}$$

où $B_{\lambda\beta}$ est un tenseur qui ne renferme aucune dérivée de $\overline{\Omega}_{\alpha\rho}$ et où l'on a posé :

$$\begin{aligned} A^{\sigma\alpha\rho}_{\lambda\beta} ={} & g^\alpha_\lambda g^\rho_\beta\left(\frac{w}{\nu F^2}C^\sigma - K^\sigma - 2u^\nu\nabla_\nu u^\sigma\right) \\ & - \frac{2}{F^2}C^\alpha(g^\sigma_\lambda\nabla^\rho C_\beta - g^\sigma_\beta\nabla^\rho C_\lambda + g^\rho_\beta\nabla_\lambda C^\sigma - g^\rho_\lambda\nabla_\beta C^\sigma) \\ & - (u_\beta g^\sigma_\lambda - u_\lambda g^\sigma_\beta)(\nabla^\rho u^\alpha + u^\alpha u^\nu\nabla_\nu u^\rho). \end{aligned} \tag{36}$$

Les équations (35) présentent une particularité remarquable : celle d'être résolues par rapport aux expressions $\gamma^{\alpha\rho}\nabla_\alpha\nabla_\rho\overline{\Omega}_{\lambda\beta}$. Si nous calculons cette expression dans un repère (R) nous obtenons :

$$\gamma^{\alpha\rho}\nabla^\alpha\nabla_\rho\overline{\Omega}_{\lambda\beta} = -\nabla_k\nabla_k\overline{\Omega}_{\lambda\beta},$$

ce qui montre que les seules dérivées secondes de $\overline{\Omega}_{\alpha\beta}$ sont des dérivées dans l'espace propre et se présentent sous une forme qui rappelle le Laplacien classique.

Cette remarque va nous permettre de préciser la structure du système des équations (35) pour un milieu non indicié.

B-2. — Les fluides visqueux incompressibles non indiciés.

Dans ce paragraphe nous reprenons comme tenseur d'impulsion énergie :

$$\text{(37)} \qquad T_{\alpha\beta} = wu_\alpha u_\beta - pg_{\alpha\beta} + \lambda\gamma_{\alpha\beta}\nabla_\sigma u^\sigma + \nu\gamma^\rho_\alpha\gamma^\mu_\beta(\nabla_\rho u_\mu + \nabla_\mu u_\rho).$$

Nous dirons qu'un fluide est incompressible si $\nabla_\alpha u^\alpha = 0$ et nous prendrons comme définition du rotationnel $\Omega_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha u_\beta - \nabla_\beta u_\alpha$.

B-2-1. **Un théorème sur les écoulements irrotationnels.** — A partir de la formule (37), à l'aide des conditions de conservation on obtient l'équation de continuité :

$$\text{(38-1)} \qquad \nabla_\alpha(wu^\alpha) = u^\rho\partial_\rho p + \lambda(\nabla_\alpha u^\alpha)(\nabla_\sigma u^\sigma) - 2\nu u^\sigma\nabla_\alpha\varepsilon^\alpha_{.\sigma}$$

et les équations du mouvement :

$$\text{(38-2)} \quad wu^\alpha\nabla_\alpha u_\beta = \gamma^\alpha_\beta(\partial^\alpha(p - \lambda\nabla_\rho u^\rho) + \lambda u^\sigma\nabla_\sigma u_\alpha\nabla_\rho u^\rho - 2\nu\nabla_\rho\varepsilon^\rho_\alpha).$$

Nous pouvons transformer les équations (38-2) en remarquant que :

$$\nabla_\alpha\varepsilon^\alpha_\beta = \nabla_\alpha\nabla_\beta u^\alpha + \nabla_\alpha\Theta^\alpha_{.\beta}$$

avec :

$$2\Theta_{\alpha\beta} = \Omega_{\alpha\beta} - u^\lambda(\Omega_{\lambda\alpha}u_\beta + \Omega_{\lambda\beta}u_\alpha)$$

on en déduit :

$$\nabla_\alpha\varepsilon^\alpha_{.\beta} = \nabla_\alpha\nabla_\beta u^\alpha + \nabla_\alpha\Theta^\alpha_{.\beta}$$

soit en utilisant l'identité de Ricci :

$$\nabla_\alpha\varepsilon^\alpha_{.\beta} = \nabla_\beta\nabla_\alpha u^\alpha + R_{\beta\alpha}u^\alpha.$$

Or d'après les équations d'Einstein : $\gamma^\alpha_\sigma R_{\alpha\rho}u^\rho = 0$ si bien que les équations (38-2) s'écrivent :

$$\text{(38-3)} \quad wu^\alpha\nabla_\alpha u_\beta = \gamma^\alpha_\beta(\partial_\alpha(p - (\lambda + 2\nu)\nabla_\rho u^\rho) + \lambda u^\sigma\nabla_\sigma u_\alpha\nabla_\rho u^\rho - 2\nu\nabla_\rho\Theta^\rho_{.\alpha}$$

en particulier pour un écoulement irrotationnel et incompressible il vient :

$$wu^{\alpha}\nabla_{\alpha}u_{\beta} = \gamma^{\alpha}_{\beta}\partial_{\alpha}p$$

qui est l'équation des lignes de courant d'un fluide parfait.

THÉORÈME III : *Si un fluide visqueux incompressible admet un écoulement isentropique irrotationnel, les lignes de courant sont identiques à celles d'un fluide parfait de même enthalpie w.*

B-2-2. **Diffusion du rotationnel pour le fluide incompressible.** — Pour obtenir les équations d'évolution de Ω on peut soit partir de (38-3) soit dans les équations (35) faire $F = 1$, $C = u$ et $\overline{\Omega} = \Omega$. Dans les deux cas on obtient la même partie principale pour les équations.

Nous partirons des équations (35) et dans les termes en dérivées premières de Ω, nous mettrons en évidence les dérivées le long des lignes de courant et les dérivées d'espace. Pour cela nous écrivons :

$$A^{\sigma\alpha\rho}_{\lambda\beta}\nabla_{\sigma}\Omega_{\alpha\rho} = A^{\sigma\alpha\rho}_{\lambda\beta}(u_{\sigma}u^{\nu} + \gamma^{\nu}_{\sigma})\nabla_{\nu}\Omega_{\alpha\rho}.$$

Les équations de diffusion du rotationnel peuvent alors s'écrire :

$$\left(g^{\alpha}_{\lambda}g^{\rho}_{\beta}\,\frac{w}{\nu} - 2u^{\alpha}(u_{\lambda}\nabla^{\rho}u_{\beta} - u_{\beta}\nabla^{\rho}u_{\lambda})\right)u^{\sigma}\nabla_{\sigma}\Omega_{\alpha\rho} + \gamma^{\alpha\rho}\nabla_{\alpha}\nabla_{\rho}\Omega_{\lambda\beta} + C_{\lambda\beta} = 0$$

où les seules dérivées que renferment $C_{\lambda\beta}$ sont des dérivées premières d'espace.

Nous allons étudier ce système en prenant un repère propre (R). Dans un tel repère :

$$u^0 = u_0 = 1 \qquad u^i = u_i = 0 \qquad \gamma^{00} = \gamma^{0i} = 0.$$

Le système s'écrit alors :

$$(39)\qquad \left\{\begin{aligned} &\partial_0\Omega_{ij} = \frac{\nu}{w}\,\partial_{kk}\Omega_{ij} + \dots \\ &\left(\frac{w}{\nu}\,\delta^k_j - 2\nabla^k u_j\right)\partial_0\Omega_{0k} = \partial_{kk}\Omega_{0j} + \dots \end{aligned}\right.$$

où les termes non écrits ne renferment que des dérivées $\partial_k\Omega_{\alpha\beta}$.

Les trois premières équations considérées comme équations en Ω_{ij} ont manifestement une structure parabolique puisque w et ν sont deux quantités positives. Avant de voir si le système (39) a une structure parabolique, rappelons la définition de la parabolicité au sens de Pétrowsky [*18*] pour les systèmes linéaires : étant donné le système d'équations aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \sum_{j,k,l} A_i^{jkl} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^k \partial x^l} + D_{ij}$$

$(i, j = 1 \ldots N)$ $(k, l = 1 \ldots n)$, où les N fonctions u_j dépendent des $n + 1$ variables x^k, t et où les coefficients A_i^{jkl}, D_{ij} ne renferment que des dérivées par rapport aux x^k et d'ordre au plus égal à 1, ce système est dit parabolique si les valeurs propres de la matrice $(- A_i^{jkl}\xi_k\xi_l)$ ont leur partie réelle inférieure à $- \delta$.

δ est un nombre positif et les quantités ξ_k réelles sont soumises à la seule condition $\sum_{k=i}^{n} \xi_k^2 = 1$.

Pour appliquer cette définition, nous pouvons supposer le système (39) sous la forme :

$$(40) \qquad \begin{cases} \partial_0 \Omega_{ij} = \dfrac{\nu}{w} \partial_{kk} \Omega_{ij} + \ldots \\ \partial_0 \Omega_{0j} = \mathcal{A}_j^l \partial_{kk} \Omega_{0l} + \ldots \end{cases} \qquad (i, j \ldots = 1, 2, 3)$$

où la matrice $(\mathcal{A}_k^l)$ est définie par :

$$\mathcal{A}_j^l B_l^i \equiv \mathcal{A}_j^l \left(\frac{w}{\nu} \delta_l^i - 2 \nabla^i u_l \right) = \delta_k^i.$$

La matrice dont nous devons étudier les valeurs propres s'écrit :

$$\begin{pmatrix} -\frac{\nu}{w} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu}{w} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu}{w} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & \left(-\mathcal{A}_k^l \right) & \\ 0 & 0 & 0 & & & \end{pmatrix}$$

Nous avons la valeur propre $-\frac{\nu}{w}$ comptée trois fois. Les autres valeurs propres sont celles de la matrice $(- \mathcal{A}_k^l)$. Nous pouvons transformer les conditions imposées aux valeurs propres de $\mathcal{A}$ en conditions sur les valeurs propres de B. En effet soit $\sigma = a + ib$ une valeur propre (B), il lui correspond la valeur propre de $(-\mathfrak{A})$, $-\frac{1}{\sigma}$ soit $-\frac{a - ib}{a^2 + b^2}$.

Pour que le système soit parabolique il faut donc et il suffit que :

$$\frac{a}{a^2 + b^2} > \delta > 0. \tag{41}$$

Or on vérifie immédiatement que les valeurs propres de la matrice $B = \left(\frac{w}{\nu}\delta^i_l - 2\nabla^i u_l\right)$ sont les solutions de l'équation du troisième degré en σ :

$$\left(\frac{w}{\nu} - \sigma\right)^3 - 2\left(\frac{w}{\nu} - \sigma\right)\nabla_j u^i \nabla_i u^j - 8 \mid \nabla_i u^j \mid = 0 \tag{42}$$

où $\mid \nabla_i u^j \mid$ désigne le déterminant de la matrice $(\nabla_i u^j)$.

D'après la condition (41), pour que le système soit parabolique, il faut et il suffit que les parties réelles des racines de (42) soient positives.

Or ces racines s'écrivent :

$$\sigma = \frac{w}{\nu} - z$$

où z est racine de l'équation :

$$z^3 - 2z\nabla_j u^i \nabla_i u^j - 8 \mid \nabla_i u^j \mid = 0. \tag{43}$$

Les parties réelles des racines de cette équation sont des fonctions continues des coefficients, donc des quantités $\nabla_i u^j$ lesquelles représentent les composantes d'espace du gradient de la vitesse. Il en résulte que si à l'instant initial ces dernières quantités sont bornées alors les parties réelles des racines z seront bornées et, pour des valeurs suffisamment grandes de w, la partie réelle de σ sera positive; le système sera parabolique.

Remarquons bien que cette propriété est valable parce que nous avons pris comme lignes de temps (lignes x^0 variable) les lignes de courant; pour d'autres lignes de temps le système ne sera en général pas parabolique.

Nous pouvons donc énoncer :

THÉORÈME IV : *Lorsque les composantes d'espace du gradient de vitesse sont bornées, pour des valeurs suffisamment grandes de w et pour des lignes de temps tangentes aux lignes de courant, le système des équations qui régissent l'évolution du rotationnel d'un fluide visqueux incompressible est parabolique au sens de Pétrowsky.*

CHAPITRE III

LE FLUIDE PARFAIT CHARGÉ ISENTROPIQUE

Dans tout ce chapitre nous négligeons les processus dissipatifs de viscosité et d'échange de chaleur ainsi que les phénomènes d'électrostriction et de magnétostriction. Le tenseur d'impulsion énergie aura donc comme expression :

$$(44) \qquad T_{\alpha\beta} = w u_\alpha u_\beta - p g_{\alpha\beta} + \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} G^{\lambda\mu} H_{\lambda\mu} - G^{\rho}_{.\alpha} H_{\rho\beta} + \overset{(i)}{\tau}_{\alpha\beta}.$$

Comme, nous ne voulons pas préjuger de la forme de $\overset{(i)}{\tau}_{\alpha\beta}$ et que nous savons que ce terme est très faible $\left(\text{de l'ordre de } \frac{1 - \varepsilon\mu}{c^2}\right)$, nous ferons $\nabla_\alpha \overset{(i)}{\tau}{}^{\alpha}_{.\beta} = 0$, hypothèse physiquement en accord avec la mécanique classique et la relativité restreinte, où on ne symétrise pas.

Une autre possibilité serait de modifier le premier membre des équations d'Einstein en prenant à la place de $S_{\alpha\beta}$ un tenseur conservatif non symétrique.

A. — Le problème de Cauchy.

A-1. Quelques relations. — Nous savons qu'à partir des 2 formes H et G, les champs électrique $\vec{E}$, induction électrique $\vec{D}$, magnétique $\vec{H}$, induction magnétique $\vec{B}$ sont donnés par les formules :

$$(45) \qquad E_\alpha = u^\rho H_{\rho\alpha} \qquad D_\alpha = u^\rho G_{\rho\alpha} \qquad H_\alpha = u^\rho \overset{*}{G}_{\rho\alpha} \qquad B_\alpha = u^\rho \overset{*}{H}_{\rho\alpha}$$

où $\overset{*}{G}$ et $\overset{*}{H}$ sont les formes adjointes de G et H respectivement. Il est intéressant pour les calculs qui suivent d'avoir les formules de passage inverse. On vérifie aisément, en prenant par exemple un repère (R) que :

$$\left\{\begin{array}{lll}(46\text{-}1) & G_{\alpha\beta} = u_\alpha D_\beta - u_\beta D_\alpha - \eta_{\alpha\beta\rho\lambda} u^\rho H^\lambda \\ (46\text{-}2) & H_{\alpha\beta} = u_\alpha E_\beta - u_\beta E_\alpha - \eta_{\alpha\beta\rho\lambda} u^\rho B^\lambda \\ (46\text{-}3) & \overset{*}{G}_{\alpha\beta} = u_\alpha H_\beta - u_\beta H_\alpha + \eta_{\alpha\beta\rho\lambda} u^\rho D^\lambda \\ (46\text{-}4) & \overset{*}{H}_{\alpha\beta} = u_\alpha B_\beta - u_\beta B_\alpha + \eta_{\alpha\beta\rho\lambda} u^\rho E^\lambda .\end{array}\right.$$

Les lois de l'induction :

(47) $$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \mu\vec{H}$$

se traduisent alors à l'aide des formes G et H pour la relation :

(48-1) $$\mu G_{\gamma\alpha} = H_{\gamma\alpha} + (1 - \varepsilon\mu)(H_{\beta\gamma}u^{\beta}u_{\alpha} - H_{\beta\alpha}u^{\beta}u_{\gamma})$$

relation que nous pouvons écrire sous la forme :

(48-2) $$G_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta}{}^{\rho\mu}H_{\rho\mu}$$

où l'on a posé :

(49) $$\varepsilon_{\alpha\beta}{}^{\rho\nu} = \frac{1}{\mu}(g^{\rho}_{\alpha}g^{\nu}_{\beta} - g^{\rho}_{\beta}g^{\nu}_{\alpha}) + \frac{1-\varepsilon\mu}{\mu}(g^{\nu}_{\alpha}u^{\rho}u_{\beta} - g^{\nu}_{\beta}u^{\rho}u_{\alpha} - g^{\rho}_{\alpha}u^{\nu}u_{\beta} + g^{\rho}_{\beta}u^{\nu}u_{\alpha}).$$

Nous aurons besoin de la divergence du tenseur de Maxwell-Minkowski :

$$\tau_{\alpha\beta} = \frac{1}{4}g_{\alpha\beta}(G^{\lambda\mu}H_{\lambda\mu}) - G^{\rho}_{.\alpha}H_{\rho\beta}.$$

Pham Mau Quan a donné, en utilisant les équations de Maxwell, une expression de cette divergence qui s'écrit [*7*] :

$$\nabla_{\alpha}\tau^{\alpha}_{.\beta} = J^{\lambda}H_{\lambda\beta} - \frac{1-\varepsilon\mu}{\mu}H^{\rho\sigma}H_{\rho\alpha}u_{\sigma}\nabla_{\beta}u^{\alpha},$$

or, nous avons :

$$- H^{\rho\sigma}H_{\rho\alpha}u_{\sigma} = E^{\rho}H_{\rho\alpha}$$

c'est-à-dire d'après la formule (46-2) :

$$- H^{\rho\sigma}H_{\rho\alpha}u_{\sigma} = \mu\eta_{\alpha\sigma\lambda\rho}u^{\sigma}H^{\lambda}E^{\rho} = \mu P_{\alpha}$$

où P_{α} est le vecteur de Poynting.

Il vient alors :

(50) $$\boxed{\nabla_{\alpha}\tau^{\alpha}_{.\beta} = J^{\lambda}H_{\lambda\beta} + (1 - \varepsilon\mu)P^{\alpha}\nabla_{\beta}u_{\alpha}}$$

A-2. **Les équations du fluide parfait isentropique.** — Nous prendrons avec Abraham [*13*] un vecteur courant $\vec{J}$ défini par

$$\vec{J} = \gamma\vec{u} + \sigma\vec{E} + b\vec{P}$$

où γ est la densité de charge propre, σ la conductivité du milieu et $b\vec{P}$ un terme qui traduit l'effet Hall. Rappelons que cet effet constitue en l'apparition d'une différence de potentiel donc d'un courant électrique, dans un conducteur soumis à une induction magnétique et à un champ électrique dont les directions ne sont pas parallèles. Cet effet peut être mesuré expérimentalement [*8*]. Nous supposerons que σ et b sont données expérimentalement comme étant des fonctions de ρ et θ dépendant seulement du milieu considéré.

Les inconnues du système seront les 29 fonctions :

$$g_{\alpha\beta}, \quad H_{\alpha\beta}, \quad G_{\alpha\beta}, \quad u_\alpha, \quad r, \quad p, \quad \gamma.$$

Les équations seront :

$$S_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta}$$

$$\nabla_\alpha \overset{*}{H}{}^{\alpha\beta} = 0 \tag{51-1}$$

$$\nabla_\alpha G^{\alpha\beta} = J^\beta \tag{51-2}$$

$$G_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta}{}^{\rho\nu} H_{\rho\nu} \tag{51-3}$$

$$r = \varphi(p) \tag{51-4}$$

$$g^{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta = 1. \tag{51-5}$$

Avec les quatre conditions de coordonnées nous obtenons ainsi un système de 30 équations.

A-3. **Les variétés caractéristiques.** — $G_{\alpha\beta}$ s'exprimant en fonction de $H_{\alpha\beta}$ en termes finis ainsi que r en fonction de p, il suffit de prendre comme données de Cauchy sur l'hypersurface (Σ) d'équation $x^0 = 0$:

$$u_\alpha, \quad p, \quad H_{\alpha\beta}, \quad g_{\alpha\beta}, \quad \partial_0 g_{\alpha\beta}, \quad \gamma.$$

Comme pour le fluide visqueux thermodynamique, on voit que le problème se décompose en deux parties :

— Problème des conditions initiales : trouver les données de Cauchy qui satisfont sur (Σ) aux relations :

$$S^0_\alpha = \chi T^0_\alpha \qquad \nabla_\alpha \overset{*}{H}{}^{\alpha 0} = 0 \qquad \nabla_\alpha G^{\alpha 0} = J^0. \tag{52}$$

— Problème d'évolution : les conditions (52) étant satisfaites, trouver la solution du système qui satisfait sur (Σ) aux données de Cauchy. C'est ce second problème que nous étudions.

Les premières inconnues à calculer sont les valeurs sur (Σ) des quantités

$$\partial_0 u_\alpha, \quad \partial_0 r, \quad \partial_0 H_{\alpha\beta}, \quad \partial_{00} g_{\alpha\beta}.$$

Sous l'hypothèse $g^{00} \neq 0$, le calcul des $\partial_{00} g_{\alpha\beta}$ s'effectue comme pour le fluide visqueux à l'aide des équations d'Einstein et des conditions de coordonnées.

L'équation (51-1) peut s'écrire :

$$\nabla_\alpha H_{\beta\sigma} + \nabla_\beta H_{\sigma\alpha} + \nabla_\sigma H_{\alpha\beta} = 0 \tag{53}$$

ce qui donne en faisant $\alpha = 0$, $\beta = i$, $\sigma = j$

$$\partial_0 H_{ij} = (\text{D.C}). \tag{54}$$

Le calcul des trois quantités $\partial_0 H_{0i}$ s'effectue à l'aide de (51-2) qui compte tenu de (53) et (54) s'écrit :

$$[(g^{00} - (1 - \varepsilon\mu)u^0u^0)\delta^j_k + (1 - \varepsilon\mu)u_k(u^0g^{j0} - g^{00}u^j)]\partial_0 H_{0j} = (\text{D.C}).$$

Le calcul du déterminant Δ du système s'effectue à l'aide du lemme établi au chapitre II paragraphe A-3 et donne :

$$\Delta = g^{00}[g^{00} - (1 - \varepsilon\mu)u^0u^0]^2$$

sous l'hypothèse $\Delta \neq 0$ on saura donc calculer les $\partial_0 H_{0i}$.

Calcul de $\partial_0 u_\alpha$ et $\partial_0 r$:

On utilise les conditions de conservation écrites en équation de continuité et équations du mouvement.

En utilisant la formule (50) on obtient :

$$\begin{cases} \nabla_\alpha(wu^\alpha) - u^\lambda\partial_\lambda p + J^\lambda H_{\lambda\beta}u^\beta + (1 - \varepsilon\mu)u^\beta P^\alpha \nabla_\beta u_\alpha = 0 & (55\text{-}1) \\ wu^\alpha \nabla_\alpha u_\beta - \gamma^\lambda_\beta[\partial_\lambda p - J^\rho H_{\rho\lambda} - (1 - \varepsilon\mu)P^\alpha \nabla_\lambda u_\alpha] = 0 & (55\text{-}2) \end{cases}$$

ce qui conduit compte tenu de $u^\alpha u_\alpha = 1$ au système :

$$\begin{cases} u^0\partial_0 r + w\partial_0 u^0 + (1 - \varepsilon\mu)u^0P_\alpha\partial_0 u^\alpha = (\text{D.C}) & (56\text{-}1) \\ wu^0\partial_0 u^\beta - \gamma^{\beta 0}[\partial_0 p - (1 - \varepsilon\mu)P_\alpha\partial_0 u^\alpha] = (\text{D.C}) & (56\text{-}2) \\ u_0\partial_0 u^0 = - u_i\partial_0 u^i + (\text{D.C}). & (46\text{-}3) \end{cases}$$

De l'équation (56-1) nous tirons $\partial_0 p$ en remplaçant $\partial_0 r$ par $\varphi'\partial_0 p$. Nous reportons cette valeur dans (56-2), compte tenu de (56-3) nous nous ramenons à un système de 3 équations en $\partial_0 u^i$ qui s'écrit :

$$(\varphi' wu^0u^0u_0\delta^j_k + \gamma^{j0}A_k)\partial_0 u^k = (\text{D.C})$$

où l'on a posé :

$$A_k = - wu_k + u^0(1 - \varepsilon\mu)(\varphi' + 1)(u_0P_k - P_0u_k).$$

Le calcul du déterminant de ce système s'effectue en utilisant le lemme du chapitre II paragraphe A-3 ce qui donne immédiatement :

$$\Delta_1 = (\varphi' wu^0u^0u_0)^2(\varphi' wu^0u^0u_0 + \gamma^{k0}A_k).$$

Le premier facteur de $\triangle_1$ sera différent de 0 si $u_0 u^0 \neq 0$, le deuxième facteur se réduit à :

$$\varphi' w u^0 u^0 + \gamma^{00} w + (1 - \varepsilon\mu)(\varphi' + 1) u^0 P^0 = 0$$

équation qui s'écrit dans un système de coordonnées quelconques où (Σ) est définie par $f(x^\lambda) = 0$:

$$\boxed{\left[\varphi' u^\alpha u^\beta + \gamma^{\alpha\beta} + \frac{1 + \varphi'}{w}(1 - \varepsilon\mu) u^\alpha P^\beta\right] \partial_\alpha f \partial_\beta f = 0} \tag{57}$$

Nous avons ainsi mis en évidence toutes les caractéristiques qui apparaissent lors de la résolution du problème de Cauchy d'où :

THÉORÈME V : *Les variétés caractéristiques des équations des fluides parfaits chargés isentropiques sont* :

— *les variétés tangentes au cône isotrope définies par* :

$$g^{\alpha\beta} \partial_\alpha f \partial_\beta f = 0,$$

— *les variétés tangentes aux lignes de courant définies par* :

$$u^\alpha \partial_\alpha f = 0,$$

— *les variétés des équations de Maxwell définies par* :

$$[g^{\alpha\beta} - (1 - \varepsilon\mu) u^\alpha u^\beta] \partial_\alpha f \partial_\beta f = 0,$$

— *les variétés définies par l'équation* :

$$\left[\varphi' u^\alpha u^\beta + \gamma^{\alpha\beta} + \frac{1 + \varphi'}{w}(1 - \varepsilon\mu) u^\alpha P^\beta\right] \partial_\alpha f \partial_\beta f = 0.$$

A-4. **Les ondes dans les fluides chargés.** — Les deux premières familles de variétés caractéristiques ont déjà été interprétées au chapitre II en termes d'ondes.

Les variétés caractéristiques des équations de Maxwell ont été étudiées par Pham Mau Quan et correspondent aux ondes électromagnétiques. Le calcul de leur vitesse de propagation s'effectue par la méthode indiquée au chapitre II et donne $v = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ c'est-à-dire la vitesse de propagation classique. Remarquons que jusqu'à présent nous n'avons fait aucune hypothèse sur $\varepsilon\mu$. Or en théorie relativiste, la vitesse de propagation des phénomènes physiques est en principe $\leqslant 1$, donc nous ferons dans les chapitres suivants l'hypothèse $\varepsilon\mu \geqslant 1$ ce qui est en fait toujours vérifié expérimentalement.

La dernière famille de variétés caractéristiques s'introduit quand on calcule les dérivées de la densité et de la vitesse de l'élément fluide. C'est donc en termes d'ondes acoustiques que nous allons l'interpréter.

Pour calculer la vitesse de propagation correspondante nous divisons le premier membre de l'équation (57) par $\gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha f \partial_\beta f$ il vient :

$$-\varphi' v^2 + 1 + \frac{1+\varphi'}{w}(1-\varepsilon\mu)\frac{u^\alpha \partial_\alpha f P^\beta \partial_\beta f}{\gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha f \partial_\beta f} = 0. \tag{58}$$

Considérons un repère propre et un observateur (0) lié à ce repère. L'équation (58) s'écrit :

$$\varphi' v^2 + (\varepsilon\mu - 1)\left(\frac{1+\varphi'}{w}\right)\frac{\partial_0 f P_i \partial_i f}{\sum_i (\partial_i f)^2} - 1 = 0.$$

Soit à l'instant x^0 la surface (S) à deux dimensions dont l'équation est $f(x^0, x^i) = 0$ cette surface étant plongée dans l'espace orthogonal à $\vec{u}$ et représentant l'onde acoustique.

Un vecteur normal à cette surface est le vecteur de composantes :

$$n_i = \frac{\partial_i f}{\sqrt{\sum_i (\partial_i f)^2}}.$$

L'observateur (0) verra se déplacer cette onde acoustique avec une vitesse v dans la direction $\vec{n}$. Elle a pour expression $v = -\dfrac{\partial_0 f}{\sqrt{\Sigma(\partial_i f)^2}}$ [*11*] et l'équation (58) devient :

$$\varphi' v^2 - (\varepsilon\mu - 1)\left(\frac{1+\varphi'}{w}\right)(\vec{P}\cdot\vec{n})v - 1 = 0$$

où $\vec{P}.\vec{n}$ est le produit scalaire ordinaire.

Avec des notations évidentes on a :

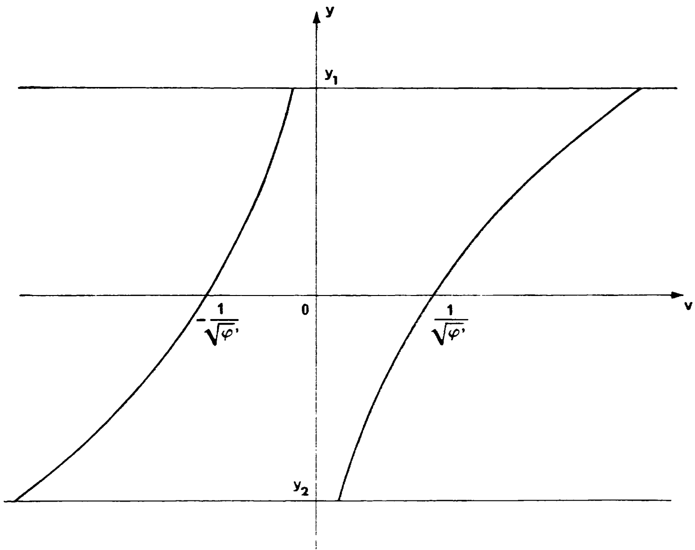
$$\varphi' v^2 - yv - 1 = 0$$

où y est du signe de $\vec{P}.\vec{n}$.

Étudions comment varie v lorsqu'on fait varier la direction $\vec{n}$ par rapport à $\vec{P}$ y varie entre les deux valeurs :

$$y_1 = (\varepsilon\mu - 1)\left(\frac{1+\varphi'}{w}\right)|P| \quad \text{et} \quad -(\varepsilon\mu - 1)(1+\varphi')\frac{|P|}{w} = y_2$$

Le graphique suivant sonne la variation de y en fonction de v.



Ce graphique met en évidence le phénomène suivant :

— Si l'onde acoustique se propage dans la direction du vecteur de Poynting alors sa vitesse de propagation est supérieure à la vitesse $\frac{1}{\sqrt{\varphi'}}$ correspondant au fluide non chargé.

— Si l'onde acoustique se propage dans la direction opposée au vecteur de Poynting sa vitesse de propagation est inférieure à $\frac{1}{\sqrt{\varphi'}}$.

— Enfin pour une direction perpendiculaire au vecteur $\vec{P}$ la vitesse de propagation est égale à $\frac{1}{\sqrt{\varphi'}}$.

B. — Le champ électromagnétique singulier.

Une étude du champ électromagnétique singulier a déjà été effectuée par Pham Man Quau par introduction d'une métrique auxiliaire [7]. Certains de nos résultats pourraient se déduire de ceux de Pham Mau Quan. Nous en donnons une démonstration directe qui permettra une comparaison avec le champ des discontinuités.

B-1. Les valeurs propres du tenseur de Maxwell. — Les champs et les inductions étant définis par les formules (45), le tenseur de Maxwell :

$$\tau_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} g_{\alpha\beta}\, G^{\lambda\mu} H_{\lambda\mu} - G^{\rho}_{\cdot\alpha} H_{\rho\beta}$$

peut se mettre, en utilisant les formules (46) sous la forme :

$$(59) \quad \tau_{\alpha\beta} = \left(\frac{1}{2} g_{\alpha\beta} - u_\alpha u_\beta\right)(D^\rho E_\rho + B^\rho H_\rho) - D_\alpha E_\beta - B_\alpha H_\beta + u_\alpha Q_\beta + u_\beta P_\alpha$$

où P_α et Q_α sont deux vecteurs de Poynting :

$$(60) \quad \begin{cases} P_\rho = \gamma_{\alpha\rho} u^\beta \tau^{\alpha}_{\cdot\beta} = \eta_{\rho\gamma\delta\mu} u^\gamma H^\delta E^\mu \\ Q_\rho = \gamma_{\rho\beta} u^\alpha \tau_\alpha^{\cdot\beta} = \eta_{\rho\gamma\delta\mu} u^\gamma B^\delta D^\mu. \end{cases}$$

Dans l'hypothèse où les inductions sont parallèles aux champs, on a $\vec{Q} = \varepsilon\mu\vec{P}$.

Nous dirons qu'un vecteur $\vec{e}$ est vecteur de $\tau_{\alpha\beta}$ associé à la valeur propre s, si l'on a :

$$\tau_{\alpha\beta} e^\beta = s e_\alpha.$$

Nous voyons, en utilisant la formule (59) que $\vec{u}$ sera vecteur propre de $\tau_{\alpha\beta}$ si et seulement si $\vec{P}$ est égal à 0. *Dans tout ce qui suit nous supposerons* $\vec{P} \neq 0$, ce qui se traduit physiquement en disant que les champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ ne sont pas parallèles.

Pour étudier les valeurs propres de $\tau_{\alpha\beta}$ nous considérons un repère (R) tel que $\vec{e}_{(0)} = \vec{u}$ et $\vec{e}_{(1)}$ soit parallèle à $\vec{P}$. En posant :

$$\Lambda = \frac{1}{2}(D^\rho E_\rho + B^\rho H_\rho)$$

la matrice $\tau_{\alpha\beta}$ s'écrit :

$$\tau_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} -\Lambda & Q_1 & Q_2 & Q_3 \\ P_1 & -\Lambda & \tau_{12} & \tau_{13} \\ 0 & 0 & \tau_{22} & \tau_{23} \\ 0 & 0 & \tau_{32} & \tau_{33} \end{vmatrix}$$

avec :

$$\tau_{22} = -\tau_{33} = -\Lambda - D_2E_2 - B_2H_2$$
$$\tau_{23} = -D_2E_3 - B_2H_3 \qquad \tau_{32} = -D_3E_2 - B_3H_2$$
$$P_1 = E_2H_3 - E_3H_2 \qquad Q_1 = D_2B_3 - D_3B_2$$

on en déduit l'équation aux valeurs propres s :

$$(s^2 - \Lambda^2 + P_1Q_1)^2 = 0$$

qui s'écrit dans un système quelconque :

(61) $$[4s^2 - (D^\rho E_\rho + B^\rho H_\rho)^2 - 4P^\rho Q_\rho]^2 = 0.$$

Introduisons dans l'espace propre le produit scalaire et le produit vectoriel ordinaire (61), peut s'écrire :

(61-1) $$[4s^2 - (E.D + B.H)^2 + 4(E \wedge H)(D \wedge B)]^2 = 0$$

ou encore :

(61-2) $$[4s^2 - (E.D - B.H)^2 - 4(E.B)(D.H)]^2 = 0$$

ce que nous noterons :

$$(4s^2 - A)^2 = 0.$$

Sous la forme (61-2) on voit que la quantité A n'est pas nécessairement positive. On vérifie d'ailleurs que $A^2 = 16 \mid \tau_{\alpha\beta} \mid$ où $\mid \tau_{\alpha\beta} \mid$ est le déterminant associé à la matrice $(\tau_{\alpha\beta})$. Notons enfin que ces résultats purement algébriques ne nécessitent aucune hypothèse sur les lois de l'induction.

THÉORÈME VI : *Les 4 valeurs propres du tenseur de Maxwell $\tau_{\alpha\beta}$ sont toujours deux à deux égales et opposées.*

Elles sont réelles si la quantité :

$$A = (D^\rho E_\rho + B^\rho H_\rho)^2 + 4P^\rho Q_\rho$$

est positive, imaginaires pures dans le cas contraire.

Dans le cas qui nous intéresse, où les inductions sont parallèles aux champs avec $\varepsilon\mu - 1 > 0$, on a :

(62) $$A = [\varepsilon(\vec{E})^2 - \mu(\vec{H})^2]^2 + 4\varepsilon\mu(\vec{E}.\vec{H})^2$$

et A est toujours une quantité positive ou nulle.

Les relations (61) et (62) généralisent celles obtenues par A. Lichnerowicz [*19*] dans le cas non inductif.

Définition :

Nous dirons avec A. Lichnerowicz qu'un champ électromagnétique est singulier si les valeurs propres du tenseur de Maxwell sont nulles.

Cela entraîne $A = 0$ et l'interprétation physique se déduit de la formule (62) : pour un champ singulier $\vec{E}$ et $\vec{H}$ sont orthogonaux et le rapport de leurs modules est constant et égal à $\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}$.

B-2. Introduction d'un repère adapté. Notations. — Dans ce qui suit nous supposerons le schéma singulier avec $\vec{P} \neq 0$, $\varepsilon\mu - 1 > 0$.

Il résulte de ce qui précède que nous pouvons introduire un repère (R_1) orthonormé défini par :

$$\vec{e}_{(0)} = \vec{u} \qquad \pi\vec{e}_{(1)} = -\vec{P} \qquad E^2\vec{e}_{(2)} = \vec{E} \qquad H^3\vec{e}_{(3)} = \vec{H}$$

avec $E^2 > 0$, $H^3 > 0$. π est la norme du vecteur de Poynting; on a :

$$\pi = P_1 = E_2H_3 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}(E_2)^2 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}(H_3)^2$$

(R_1) sera dit repère adapté.

Introduisons d'autre part le cône (L) des normales aux variétés caractéristiques des équations de Maxwell. Nous avons vu au paragraphe précédent que (L) avait pour équation :

$$[g_{\alpha\beta} + (\varepsilon\mu - 1)u_\alpha u_\beta]X^\alpha X^\beta = 0 \tag{63}$$

ce qui donne dans le repère (R_1) :

$$\varepsilon\mu(X^0)^2 - (X^1)^2 - (X^2)^2 - (X^3)^2 = 0. \tag{63-1}$$

Soit (K) le cône dual de (L) c'est-à-dire le cône caractéristique des équations de Maxwell. (K) a pour équation :

$$[\varepsilon\mu g_{\alpha\beta} - (\varepsilon\mu - 1)u_\alpha u_\beta]X^\alpha X^\beta = 0 \tag{64}$$

ce qui donne dans le repère (R_1) :

$$(X^0)^2 - \varepsilon\mu[(X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2] = 0. \tag{64-1}$$

Remarquons que l'hypothèse $\varepsilon\mu - 1 > 0$ entraîne que tous les vecteurs du cône (L) sont orientés dans l'espace et que tous les vecteurs du cône (K) sont orientés dans le temps.

Nous poserons :

$$\tag{65} \left\{ \begin{array}{ll} l_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + (\varepsilon\mu - 1)u_\alpha u_\beta & \\ k_{\alpha\beta} = \varepsilon\mu g_{\alpha\beta} - (\varepsilon\mu - 1)u_\alpha u_\beta & \\ \vec{l} = \vec{e}_{(0)} - \sqrt{\varepsilon\mu}\,\vec{e}_{(1)} & \vec{l} \in (L) \\ \vec{k} = \sqrt{\varepsilon\mu}\,\vec{e}_{(0)} - \vec{e}_{(1)} & \vec{k} \in (K). \end{array} \right.$$

On a les relations suivantes :

$$\tag{66} \left\{ \begin{array}{lll} l^\alpha k_\alpha = 0 & k_{\alpha\beta}l^{\alpha\rho} = \varepsilon\mu g^\rho_\beta & l_{\alpha\beta}l^\beta = \sqrt{\varepsilon\mu}k_\alpha \\ l^\alpha u_\alpha = 1 & k^\alpha u_\alpha = \sqrt{\varepsilon\mu} & k_{\alpha\beta}k^\beta = \sqrt{\varepsilon\mu}l_\alpha. \end{array} \right.$$

B-3. Étude algébrique du champ singulier. — Dans le repère (R_1) la matrice $\tau_{\alpha\beta}$ prend la forme :

$$\tau_{\alpha\beta} = \varepsilon(E^2)^2 \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{\varepsilon\mu} & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{67}$$

Le trois-plan des vecteurs propres de $\tau_{\alpha\beta}$ a donc pour équation :

$$X^0 + \sqrt{\varepsilon\mu}X^1 = 0$$

ce qui montre que ce plan est tangent au cône (K) le long du vecteur $\vec{k}$. D'autre part sous la forme (67) on vérifie immédiatement que :

$$\tau_{\alpha\beta} = \pi k_\alpha l_\beta$$

d'où :

THÉORÈME VII : *Dans un schéma électromagnétique singulier le trois-plan des vecteurs propres du tenseur de Maxwell est tangent au cône caractéristique des équations de Maxwell.*

La génératrice de contact est portée par le vecteur $\vec{k} = \sqrt{\varepsilon\mu}\vec{u} + \frac{\vec{P}}{\pi}$, *la normale est portée par le vecteur* $\vec{l} = \vec{u} + \sqrt{\varepsilon\mu}\frac{P}{\pi}$. *Le tenseur* $\tau_{\alpha\beta}$ *a pour expression :*

$$\tau_{\alpha\beta} = \pi k_\alpha l_\beta$$

π *désignant la norme du vecteur de Poynting.*

Expression des 2-formes G *et* H :

Dans un repère quelconque nous définirons les deux 2-formes G et H par les relations :

$$H = \frac{1}{2} H_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta \qquad G = \frac{1}{2} G_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta.$$

De même nous désignerons par e et h les 1-formes :

$$e = E_\alpha dx^\alpha \qquad h = H_\alpha dx^\alpha.$$

A partir des relations (46) on obtient dans (R_1) :

$$\begin{array}{llllll}
H_{01} = 0 & H_{02} = E_2 & H_{03} = 0 & H_{23} = 0 & H_{31} = 0 & H_{12} = \mu H_3 \\
\overset{*}{H}_{01} = 0 & \overset{*}{H}_{02} = 0 & \overset{*}{H}_{03} = H_3 & \overset{*}{H}_{23} = 0 & \overset{*}{H}_{31} = -E_2 & \overset{*}{H}_{12} = 0 \\
G_{01} = 0 & G_{02} = \varepsilon E_2 & G_{03} = 0 & G_{23} = 0 & G_{31} = 0 & G_{12} = H_3 \\
\overset{*}{G}_{01} = 0 & \overset{*}{G}_{02} = 0 & \overset{*}{G}_{03} = H_3 & \overset{*}{G}_{23} = 0 & \overset{*}{G}_{31} = -\varepsilon E_2 & \overset{*}{G}_{12} = 0
\end{array}$$

ce qui permet de vérifier les relations suivantes :

$$(68\text{-}1)\qquad \boxed{\begin{array}{ll} G = \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}}\, k \wedge e & \overset{*}{H} = \sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}\, k \wedge h \\ \overset{*}{G} = l \wedge h & H = l \wedge e \end{array}}$$

Les relations (68-1) ont pour conséquences :

$$(68\text{-}2)\qquad \begin{cases} l^\alpha \overset{*}{H}_{\alpha\beta} = 0 & k^\alpha H_{\alpha\beta} = 0 \\ l^\alpha G_{\alpha\beta} = 0 & k^\alpha \overset{*}{G}_{\alpha\beta} = 0. \end{cases}$$

Première réciproque :

La première réciproque se pose de la façon suivante : étant donné deux 2-formes G et H non nulles reliées par les lois de l'induction :

$$(48\text{-}1)\qquad \mu G_{\gamma\alpha} = H_{\gamma\alpha} + (1 - \varepsilon\mu)(H_{\beta\gamma} u^\beta u_\alpha - H_{\beta\alpha} u^\beta u_\gamma)$$

ou les relations équivalentes :

$$(48\text{-}3)\qquad \varepsilon H_{\gamma\alpha} = \varepsilon\mu G_{\gamma\alpha} + (\varepsilon\mu - 1)(G_{\beta\gamma} u^\beta u_\alpha - G_{\beta\alpha} u^\beta u_\gamma)$$

supposons qu'il existe un vecteur $\vec{k}$ non nul qui annule G et $\overset{*}{H}$ c'est-à-dire tel que :

$$(70)\qquad k^\alpha H_{\alpha\beta} = 0 \qquad k^\alpha \overset{*}{G}_{\alpha\beta} = 0$$

alors $\vec{k}$ appartient au cône (K) et le champ défini par H et G est un champ singulier.

Montrons d'abord que $\vec{k}$ ne peut pas être isotrope.

Si $\vec{k}$ était isotrope, étant vecteur propre de H et $\overset{*}{G}$ il serait aussi vecteur propre de G et $\overset{*}{H}$ (cf. [*19*], p. 13) et l'on aurait a et b étant deux scalaires :

$$(70\text{-}1)\qquad k^\alpha \overset{*}{H}_{\alpha\beta} = a k_\beta \qquad k^\alpha G_{\alpha\beta} = b k_\beta.$$

Des relations (70) on tire $k^\alpha E_\alpha = 0$, $k^\alpha H_\alpha = 0$ si bien qu'en multipliant les relations (70-1) par u^β on a :

$$a k_\beta u^\beta = 0 \qquad b k_\beta u^\beta = 0.$$

Alors ou bien $k_\beta u^\beta = 0$ et le vecteur $\vec{k}$ est nul ou bien $a = b = 0$ et, en multipliant (48-1) et (48-3) par k^α cela entraîne $\vec{E} = \vec{H} = 0$ donc les formes G et H nulles.

$\vec{k}$ n'étant pas isotrope nous pouvons le prendre comme vecteur de base d'un repère orthonormé. Dans ce repère nous désignerons par A l'indice de la composante relative à $\vec{k}$ et par B, C, D, ..., les autres.

On ne sommera pas sur A ce que nous indiquerons en soulignant l'indice $\underline{A}$.

Les relations (70) entraînent :

$$G_{BC} = 0 \qquad H_{AB} = 0$$

et la relation (48-3) conduit à :

$$\varepsilon\mu G_{AB} + (\varepsilon\mu - 1)(G_{CA}u^C u_B - G_{\underline{A}B}u^{\underline{A}}u_{\underline{A}}) = 0.$$

Les trois quantités G_{AB} satisfont donc au système :

$$(\varepsilon\mu\,\delta^C_B - (\varepsilon\mu - 1)u^{\underline{A}}u_A\delta^C_B - (\varepsilon\mu - 1)u^C u_B)G_{AC} = 0.$$

Le déterminant de ce système est égal à 0 sinon la forme G serait nulle. On le calcule en utilisant le lemme du chapitre II et il vient :

$$\varepsilon\mu - (\varepsilon\mu - 1)u^{\underline{A}}u_{\underline{A}} = 0,$$

ce qui s'écrit en repère quelconque :

$$\varepsilon\mu k^\alpha k_\alpha - (\varepsilon\mu - 1)(u^\alpha k_\alpha)^2 = 0$$

dont le vecteur $\vec{k}$ appartient au cône (K) et est orienté dans le temps. A partir d'un vecteur unitaire porté par $\vec{k}$, on pourrait, comme on l'a fait avec $\vec{u}$ définir les champs et inductions associés à $\vec{k}$ et calculer les valeurs propres de $\tau_{\alpha\beta}$ à l'aide de la formule (61). Mais les formules (70) montrent que les champs électriques et magnétiques seraient nuls donc aussi les valeurs propres de $\tau_{\alpha\beta}$. Le champ électromagnétique défini par G et H est donc singulier.

Deuxième réciproque :

Étant donné deux 2-formes G et H reliées par les lois de l'induction, s'il existe un vecteur $\vec{l}$ non nul qui annule $\overset{*}{G}$ et H, alors $\vec{l}$ appartient au cône (L) et le champ défini par G et H est singulier.

On montre par un calcul analogue au précédent que $\vec{l} \in$ (L), mais $\vec{l}$ étant orienté dans l'espace on ne peut plus conclure comme précédemment.

On peut toujours supposer $l^\alpha l_\alpha = 1 - \varepsilon\mu$ si bien que $l_{\alpha\beta}l^\alpha l^\beta = 0$ entraîne $(l_\alpha u^\alpha)^2 = 1$, et, quitte à changer le sens de $\vec{l}$ on peut prendre $l_\alpha u^\alpha = 1$.

Posons alors :

$$k_\alpha = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\, l_{\alpha\beta}l^\beta$$

on a :

$$k_\alpha k^\alpha = \varepsilon\mu - 1 \qquad k_\alpha l^\alpha = 0 \qquad k_{\alpha\beta} k^\alpha k^\beta = 0$$

$\vec{k}$ est donc un vecteur orienté dans le temps qui appartient à (K).

La relation (48-1) peut s'écrire :

$$\mu G_{\alpha\beta} = l^\rho_\beta H_{\alpha\rho} + (\varepsilon\mu - 1) H_{\rho\beta} u^\rho u_\alpha$$

ce qui donne en multipliant par l_β :

$$\begin{aligned}\mu l^\beta G_{\alpha\beta} &= \sqrt{\varepsilon\mu}\, k^\rho H_{\alpha\rho} + (\varepsilon\mu - 1)\sqrt{\varepsilon\mu}\, k^\beta H_{\rho\beta} u^\rho u_\alpha \\ &= \sqrt{\varepsilon\mu}\, k^\rho H_{\beta\rho} l^\beta_\alpha.\end{aligned}$$

D'après l'hypothèse $l^\beta G_{\alpha\beta} = 0$ et comme le déterminant de la matrice(l^β_α) est égal à $\varepsilon\mu$ alors :

$$k^\rho H_{\beta\rho} = 0.$$

De même en utilisant la relation conséquence des formules (46) :

$$\varepsilon \overset{*}{H}_{\alpha\beta} = l^\rho_\beta \overset{*}{G}_{\alpha\rho} + (\varepsilon\mu - 1) \overset{*}{G}_{\rho\beta} u^\rho u_\alpha$$

on démontre que :

$$k^\rho \overset{*}{G}_{\beta\rho} = 0.$$

La deuxième réciproque apparaît ainsi comme une conséquence de la première.

Troisième réciproque :

Soit un tenseur $\tau_{\alpha\beta}$ qui peut se mettre sous la forme $\tau_{\alpha\beta} = A k_\alpha l_\beta$ où A est une constante que l'on peut supposer positive, k_α un vecteur orienté dans le temps, l_β un vecteur orienté dans l'espace, orthogonal à k; $\tau_{\alpha\beta}$ est alors le tenseur de Maxwell d'un champ électromagnétique singulier.

Démonstration :

Quitte à modifier la constante A on peut toujours supposer :

$$k^\alpha k_\alpha = \varepsilon\mu - 1 = - l^\alpha l_\alpha > 0$$

où $\varepsilon\mu$ est une constante positive supérieure à 1.

Définissons alors $\vec{u}$ et $\vec{p}$ par les relations :

$$\begin{cases} l_\alpha = u_\alpha + p_\alpha \sqrt{\varepsilon\mu} \\ k_\alpha = u_\alpha \sqrt{\varepsilon\mu} + p_\alpha \end{cases}$$

on a alors le système à 3 inconnues $u^\alpha u_\alpha$, $p^\alpha p_\alpha$, $u^\alpha p_\alpha$:

$$\begin{cases} l^\alpha l_\alpha \equiv u^\alpha u_\alpha + 2u^\alpha p_\alpha \sqrt{\varepsilon\mu} + \varepsilon\mu p^\alpha p_\alpha = 1 - \varepsilon\mu \\ k^\alpha k_\alpha \equiv \varepsilon\mu u^\alpha u_\alpha + 2u^\alpha p_\alpha \sqrt{\varepsilon\mu} + p^\alpha p_\alpha = \varepsilon\mu - 1 \\ k^\alpha l_\alpha \equiv \sqrt{\varepsilon\mu} u^\alpha u_\alpha + u^\alpha p_\alpha (1 + \varepsilon\mu) + p^\alpha p_\alpha \sqrt{\varepsilon\mu} = 0 \end{cases}$$

le déterminant de ce système est $(\varepsilon\mu - 1)^3$. L'unique solution est donc :

$$u^\alpha u_\alpha = 1 \qquad p^\alpha p_\alpha = -1 \qquad u^\alpha p_\alpha = 0.$$

On peut se donner le champ $\vec{E}$ associé à $\vec{u}$ en lui imposant seulement d'être orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{P}$ puis introduire la constante ε par la relation :

$$A = \frac{\varepsilon(E)^2}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

Le champ $\vec{H}$ perpendiculaire à $\vec{u}$, $\vec{P}$, $\vec{E}$ est alors complètement déterminé par la relation :

$$A.p_\rho = P_\rho = \eta_{\rho\gamma\delta\mu} u^\gamma H^\delta E^\mu.$$

Les deux 2-formes G et H sont enfin obtenues à l'aide des relations (46). Nous pouvons donc reconstruire à partir de $\tau_{\alpha\beta}$ un champ électromagnétique singulier, et ceci d'une infinité de façons.

Nous pouvons résumer cette étude en un théorème.

THÉORÈME VIII : *Étant donné un champ électromagnétique inductif pour lequel* $\varepsilon\mu - 1 > 0$, *les propositions suivantes sont équivalentes :*

A) *Le champ est singulier.*

B) *Il existe une 1-forme l, nécessairement orientée dans l'espace* ($l^\alpha l_\alpha < 0$) *annulant simultanément les deux 2-formes* $\overset{*}{G}$ *et* H.

C) *Il existe une 1-forme k, nécessairement orienté dans le temps* ($k^\alpha k_\alpha > 0$) *annulant simultanément les deux 2-formes* G *et* $\overset{*}{H}$.

D) *Il existe deux vecteurs orthogonaux, $\vec{k}$ orienté dans le temps, $\vec{l}$ orienté dans l'espace tels que le tenseur de Maxwell s'écrive :*

$$\tau_{\alpha\beta} = \pi k_\alpha l_\beta.$$

Les vecteurs $\vec{k}$ et $\vec{l}$ de la proposition D *sont les vecteurs des propositions* C *et* B. *$\vec{k}$ est la génératrice de contact du cône caractéristique des équations de Maxwell avec le 3-plan des vecteurs propres de $\tau_{\alpha\beta}$, $\vec{l}$ la normale à ce 3-plan. On a enfin :*

$$l^\alpha l_\alpha = - k^\alpha k_\alpha = 1 - \varepsilon\mu.$$

B-4. Permanence du champ électromagnétique singulier. — Soit un domaine de V_4 meublé par un schéma fluide électromagnétique singulier. Les vecteurs $\vec{k}$ et $\vec{l}$ définis par les formules (65) engendrent deux champs vectoriels. De la formule :

$$l_{\alpha\beta} l^{\beta} = \sqrt{\varepsilon\mu}\, k_{\alpha}$$

il résulte que le champ des vecteurs $\vec{k}$ engendre les bicaractéristiques des équations de Maxwell [*16*].

Soit $(\mathcal{C})$ une telle bicaractéristique. Prenons la dérivée de Lie du tenseur $H_{\alpha\beta}$ le long de $(\mathcal{C})$ (cf. [*1*], p. 251). Par définition cette dérivée est le tenseur :

$$[L(\vec{k})H]_{\alpha\beta} = k^{\rho}\nabla_{\rho}H_{\alpha\beta} + H_{\rho\beta}\nabla_{\alpha}k^{\rho} + H_{\alpha\rho}\nabla_{\beta}k^{\rho}$$

ce qui peut s'écrire puisque $H_{\alpha\beta}$ est antisymétrique :

$$(L(\vec{k})H)_{\alpha\beta} = k^{\rho}[\nabla_{\rho}H_{\alpha\beta} + \nabla_{\alpha}H_{\beta\rho} + \nabla_{\beta}H_{\rho\alpha}] + \nabla_{\alpha}(k^{\rho}H_{\rho\beta}) + \nabla_{\beta}(k^{\rho}H_{\alpha\rho}).$$

Il résulte alors de l'équation de Maxwell :

$$\nabla_{\alpha}\overset{*}{H}{}^{\alpha\beta} = 0$$

et des relations (68-2) que $L(\vec{k}).H = 0$.

La 2-forme H est donc invariante par le champ des vecteurs $\vec{k}$.

Le même calcul effectué à partir de la 2-forme $\overset{*}{G}$ conduit compte tenu des équations de Maxwell à :

$$(L(\vec{k})\overset{*}{G})_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta\rho\lambda}k^{\rho}J^{\lambda}$$

donc la 2-forme G ne sera invariante que si les vecteurs $\vec{k}$ et $\vec{J}$ sont colinéaires.

Or pour les mouvements isentropiques nous avons :

$$\vec{J} = \gamma\vec{u} + \delta\vec{E} + b\vec{P}$$

et

$$\vec{k} = \sqrt{\nu\mu}\,\vec{u} + \frac{\vec{P}}{|P|}$$

une condition nécessaire serait que le milieu soit de conductivité nulle. D'une façon générale nous pouvons énoncer :

THÉORÈME IX : *Dans un schéma électromagnétique singulier, la 2-forme* H *se conserve par transport le long des bicaractéristiques des équations de Maxwell.*

Pour que la 2-forme $\overset{*}{G}$ *se conserve le long d'une bicaractéristique* $(\mathcal{C})$ *il faut et il suffit que le vecteur courant* $\vec{J}$ *soit tangent à* $(\mathcal{C})$.

Ces résultats seront à rapprocher des résultats concernant la propagation des discontinuités éventuelles de H et G le long des bicaractéristiques que nous étudierons au paragraphe suivant.

Le champ singulier intégrable :

Considérons un champ électromagnétique inductif quelconque (non nécessairement singulier). Nous pouvons encore introduire le champ de vecteurs $\vec{k}$ défini par :

$$\vec{k} = \sqrt{\varepsilon\mu}\,\vec{u} + \frac{\vec{P}}{|P|}$$

avec l'hypothèse $\vec{P} \neq 0$, et le champ de vecteurs $\vec{l}$ défini par :

$$\vec{l} = \vec{u} + \sqrt{\varepsilon\mu}\,\frac{\vec{P}}{|P|}.$$

En un point de V_4 nous pouvons considérer un repère orthonormé (R_2) pour lequel $\vec{e}_{(0)} = \vec{u}$, $\vec{e}_{(1)} = -\frac{\vec{P}}{|P|}$ et utilisant les formules (46) nous pouvons calculer les composantes dans (R_2) des vecteurs :

$$k^\alpha H_{\alpha\beta} \qquad k^\alpha \overset{*}{G}_{\alpha\beta} \qquad l^\alpha G_{\alpha\beta} \qquad l^\alpha \overset{*}{H}_{\alpha\beta}.$$

Nous obtenons le tableau de composantes covariantes suivant :

$$k^\alpha H_{\alpha\beta} \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ \sqrt{\varepsilon\mu}E_2 - \mu E_3 \\ \mu H_2 \end{array} \right. \qquad k^\alpha \overset{*}{G}_{\alpha\beta} \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ \sqrt{\varepsilon\mu}H_2 \\ \sqrt{\varepsilon\mu}H_3 - \varepsilon E_2 \end{array} \right.$$

$$l^\alpha G_{\alpha\beta} \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ \varepsilon E_2 - \sqrt{\varepsilon\mu}H_3 \\ \sqrt{\varepsilon\mu}H_2 \end{array} \right. \qquad l^\alpha \overset{*}{H}_{\alpha\beta} \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ \mu H_2 \\ \mu H_3 - \sqrt{\varepsilon\mu}E_2. \end{array} \right.$$

On en déduit alors les relations suivantes :

$$(71) \qquad \left\{ \begin{array}{l} l^\alpha G_{\alpha\beta} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, k^\alpha H_{\alpha\beta} = n_\beta \\ k^\alpha \overset{*}{G}_{\alpha\beta} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, l^\alpha \overset{*}{H}_{\alpha\beta} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, m_\beta \end{array} \right.$$

où n_β et m_β sont deux vecteurs orthogonaux situés dans le *2*-plan défini par $\vec{E}$ et $\vec{H}$.

On peut traduire ces relations en termes de formes en posant $\overset{*}{n}_{\alpha\beta\gamma} = \eta_{\alpha\beta\gamma\rho} n^\rho$ on a :

$$\text{(71-1)} \qquad \begin{cases} -\overset{*}{n} = l \wedge \overset{*}{G} = \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}}\, k \wedge \overset{*}{H} \\ \overset{*}{m} = l \wedge H = \sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}\, k \wedge G. \end{cases}$$

Remarquons que ces relations montrent l'équivalence des deux premières réciproque du théorème VIII et que le cas singulier est caractérisé par :

$$m = 0 \qquad\qquad n = 0.$$

Par différentiation des relations (71) on obtient :

$$\begin{cases} \nabla_\rho l^\alpha G_{\alpha\beta} + l^\alpha \nabla_\rho G_{\alpha\beta} = \nabla_\rho n_\beta \\ \nabla_\rho l^\alpha \overset{*}{H}_{\alpha\beta} + l^\alpha \nabla_\rho \overset{*}{H}_{\alpha\beta} = \nabla_\rho m_\beta. \end{cases}$$

Contractant ρ et β, il vient compte tenu des équations de Maxwell :

$$\text{(72)} \qquad \begin{cases} \nabla_\rho l^\alpha G_\alpha^{\cdot\rho} - l^\alpha J_\alpha = \nabla_\rho n^\rho \\ \nabla_\rho l^\alpha \overset{*}{H}{}_\alpha^{\cdot\rho} \qquad\quad = \nabla_\rho m^\rho. \end{cases}$$

Nous dirons avec A. Lichnerowicz [*19*] qu'un champ électromagnétique est de type intégrable si le champ des vecteurs $\vec{l}$ est un champ de gradient, ce qui se traduit par :

$$\nabla_\alpha l_\rho - \nabla_\rho l_\alpha = 0.$$

D'autre part compte tenu de $l^\rho l_\rho = 1 - \varepsilon\mu$ on tire :

$$l^\rho \nabla_\alpha l_\rho = 0 \quad \text{d'où} \quad l^\rho \nabla_\rho l_\alpha = 0$$

l'hypothèse de l'intégrabilité entraîne donc que les trajectoires du champ de vecteur $\vec{l}$ sont les géodésiques de V_4.

Nous supposerons en plus de l'intégrabilité du champ électromagnétique que le vecteur courant $\vec{J}$ est partout orthogonal à $\vec{l}$: $l^\alpha J_\alpha = 0$.

Dans ces conditions le système (72) s'écrit :

$$\text{(72-1)} \qquad \begin{cases} \nabla_\rho n^\rho = 0 \\ \nabla_\rho m^\rho = 0. \end{cases}$$

Or nous avons vu que l'on peut écrire, en posant :

$$a = \varepsilon E_2 - \sqrt{\varepsilon\mu}\, H_3 \qquad b = \sqrt{\varepsilon\mu}\, H_2$$

$$\begin{cases} \vec{n} = a\vec{e}_{(2)} + b\vec{e}_{(3)} \\ \vec{m} = \sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}\, (b\vec{e}_{(2)} - a\vec{e}_{(3)}) \end{cases}$$

$\vec{e}_{(2)}$ et $\vec{e}_{(3)}$ étant les deux derniers vecteurs d'un repère orthonormé lié à $\vec{u}$ et $\vec{P}$.

Les relations (72-1) s'écrivent alors :

$$\text{(72-2)} \qquad \left\{ \begin{aligned} & e^{\rho}_{(2)}\partial_{\rho}a + e^{\rho}_{(3)}\partial_{\rho}b + a\nabla_{\rho}e^{\rho}_{(2)} + b\nabla_{\rho}e^{\rho}_{(3)} = 0 \\ & -e^{\rho}_{(3)}\partial_{\rho}a + e^{\rho}_{(2)}\partial_{\rho}b - a\nabla_{\rho}e^{\rho}_{(3)} + b\nabla_{\rho}e^{\rho}_{(2)} = 0. \end{aligned} \right.$$

Soit alors (Σ) une hypersurface orientée par exemple dans l'espace et sur laquelle le champ est singulier c'est-à-dire sur laquelle $a = 0$, $b = 0$.

Prenons l'équation de (Σ) sous la forme $x^0 = 0$ et cherchons à résoudre le problème de Cauchy pour les fonctions a et b. Les relations (72-2) donnent, sous l'hypothèse $(e^0_{(2)})^2 + (e^0_{(3)})^2 \neq 0$:

$$\partial_0 a = 0 \qquad \partial_0 b = 0 \qquad \text{sur } (\Sigma).$$

De même par dérivation par rapport à x^0 des équations (72-2) on déduit que toutes les dérivées de a et b que l'on pourra calculer (compte tenu des hypothèses de différentiabilité) auront des valeurs nulles sur (Σ).

Donc a et b seront nulles dans un voisinage de (Σ) et le champ sera singulier dans ce voisinage.

L'hypothèse $(e^0_{(2)})^2 + (e^0_{(3)})^2 = 0$ entraîne :

$$e^0_{(2)} = 0 \qquad e^0_{(3)} = 0$$

ce qui signifie que le 2-plan engendré par $\vec{E}$ et $\vec{H}$ est tangent à (Σ) d'où :

THÉORÈME X : *Étant donné un champ électromagnétique de type intégrable, satisfaisant aux équations de Maxwell avec* $l^{\alpha}J_{\alpha} = 0$, *si ce champ est singulier sur une hypersurface non tangente à la fois à* $\vec{E}$ *et* $\vec{H}$ *alors il est singulier dans un voisinage* (Σ).

Si dans tout ce paragraphe on fait $\varepsilon\mu = 1$ on retrouve les résultats établis par A. Lichnerowicz [*19*] pour le champ électromagnétique non inductif.

C. — Couches tensorielles et courants.

L'étude des discontinuités du champ électromagnétique à la traversée d'une hypersurface (Σ) de V_4 introduit la notion, au sens de G. de Rham, de courant à support sur (Σ). C'est cette notion que nous allons maintenant préciser.

Nous considérons une variété différentiable V_n, orientable, de classe C^h $(h \geqslant 3)$ munie d'une métrique dont les coefficients notés encore $g_{\alpha\beta}$ seront supposés de classe maximum compatible avec la structure de V_n, c'est-à-dire C^{h-1}. Les indices grecs $\alpha, \beta \ldots$ prennent les valeurs $0, 1, 2 \ldots (n-1)$.

Soit dans un système de coordonnées x^λ une fonction $f(x^\lambda)$ de classe C^h qui définit localement une sous-variété (Σ) par la relation $f(x^\lambda) = 0$. Dans tout ce qui suit nous nous placerons dans un voisinage $(\mathcal{V})$ de (Σ) pour lequel $\overrightarrow{\text{grad}} f \neq 0$.

Pour des commodités d'écriture, l'opérateur [3] d'adjonction sur les formes sera placé non plus au-dessus mais à gauche de la forme sur laquelle il opère. Ainsi la forme élément de volume sera notée :

$$*1 = \sqrt{|g|} \quad dx^0 \wedge \ldots \wedge dx^{n-1}.$$

C-1. La forme ω de Leray. — A partir de la forme $*1$ et de la forme df nous pouvons définir une forme ω par la relation [3] :

$$*1 = df \wedge \omega \tag{73}$$

ω, de degré $(n-1)$ n'est pas univoquement déterminée.

Si ω' est une autre solution de (73) nous avons :

$$df \wedge (\omega - \omega') = 0$$

ce qui entraîne :

$$\omega' = \omega + df \wedge \gamma$$

où γ est une forme de degré $n-2$.

Cependant si nous prenons l'intégrale de ω' sur une chaîne portée par (Σ) nous obtiendrons la même valeur que pour l'intégrale de ω puisque sur (Σ), f est nulle.

C-2. Les distributions $\bar{\delta}$, Y^+, Y^-. — Soit dans V_n un élément de chaîne ouvert c dans le voisinage $(\mathcal{V})$ de (Σ). Nous supposerons que la surface (Σ) partage la chaîne c en deux éléments de chaîne c^+ et c^- le premier correspondant à l'ensemble des points tels que $f > 0$, le second à l'ensemble des points tels que $f < 0$. b sera l'opérateur bord.

Nous désignerons par φ une fonction définie dans V_n de classe C^r $(r \geqslant 2)$ à support compact *dans* la chaîne c. Sur l'ensemble des fonctions φ les distributions δ, Y^+, Y^- seront définies par :

$$\left\{ \langle \bar{\delta}, \quad \varphi \rangle = \int_{bc^+} \varphi\omega = -\int_{bc^-} \varphi\omega \right. \tag{74-1}$$

$$\left\{ \langle Y^+, \varphi \rangle = -\int_{c^+} \varphi *1 \right. \tag{74-2}$$

$$\left\{ \langle Y^-, \varphi \rangle = \int_{c^-} \varphi *1 \right. \tag{74-3}$$

[3] Pour la définition de ω voir J. Leray : *Bull. Soc. Math.*

$\bar{\delta}$ apparaît ainsi comme une mesure de Dirac sur (Σ). La barre au-dessus de δ est mise pour éviter la confusion avec le symbole de co-différentiation.

Remarquons que l'opérateur $\bar{\delta}$ ne fait intervenir que les valeurs de φ sur (Σ); Y^+ ne fait intervenir que les valeurs de φ dans la région $f > 0$ et Y^- dans la région $f < 0$.

Soit $\mathcal{U}$ un champ de vecteurs défini dans c, dont les composantes sont des fonctions de classe C^r ($r \geqslant 2$), à support compact dans la chaîne c, et désignons par θ l'une quelconque des trois distributions $\bar{\delta}$, Y^+, Y^-.

A partir de θ nous pouvons définir avec A. Lichnerowicz [*21*] un vecteur distribution ou tenseur distribution d'ordre 1, noté $\nabla\theta$ et qui sera dit dérivée covariante de θ. Sur le champ « d'épreuve » $\mathcal{U}$, $\nabla\theta$ opère de la façon suivante :

$$\langle \nabla\theta, \mathcal{U} \rangle = - \langle \theta, \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\alpha(\mathcal{U}^\alpha \sqrt{|g|}) \rangle$$

ce qui s'écrit encore en introduisant l'opérateur δ de co-différentiation :

$$\langle \nabla\theta, \mathcal{U} \rangle = \langle \theta, \delta\mathcal{U} \rangle.$$

Dans une base quelconque le vecteur distribution $\nabla\theta$ admet des composantes $\nabla_\alpha\theta$ qui sont des distributions (ou tenseurs distributions d'ordre 0) et qui opèrent sur les fonctions précédemment définies par :

$$\langle \nabla_\alpha\theta, \varphi \rangle = - \langle \theta, \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\alpha(\varphi\sqrt{|g|}) \rangle.$$

Prenons un système de coordonnées y^λ tel que :

$$y^0 = f(x^\lambda)$$

(Le fait d'avoir choisi l'indice 0 ne joue aucun rôle). On a alors :

$$*1 = dy^0 \wedge \omega = \sqrt{|g|}dy^0 \wedge dy^1 \ldots \wedge dy^{n-1}.$$

Par application de la formule de Stokes :

$$\int_{bc^+} \varphi\,\omega = \int_{c^+} d(\varphi\,\omega) = \int_{c^+} \frac{\partial}{\partial y^0} (\varphi\sqrt{|g|}) dy^0 \wedge \ldots \wedge dy^{n-1}$$
$$= - \langle Y^+, \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial y^0} (\varphi\sqrt{|g|}) \rangle = \langle \nabla_0 Y,^+ \varphi \rangle.$$

D'où la formule :

$$\bar{\delta} = \nabla_0 Y^+$$

et de même on établit :

$$\bar{\delta} = - \nabla_0 Y^-.$$

Toujours dans le même système y^α en prenant $i \neq 0$:

$$\langle \nabla_i Y^+, \varphi \rangle = \int_{c^+} \partial_i(\varphi\sqrt{|g|}).dy^0 \wedge \ldots \wedge dy^{n-1}$$

cette dernière intégrale est nulle : on le voit en intégrant d'abord par rapport à la variable y^i et en se souvenant que le support de φ est dans la chaîne c.

Donc $\nabla_i Y^+ = 0$ et de même $\nabla Y^- = 0$.

D'autre part :

$$\begin{aligned}\langle \nabla_i\bar{\delta}, \varphi \rangle = -\int_{bc^+} \partial_i(\varphi\sqrt{|g|})dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^{n-1} \\ = -\int_{c^+} d(\partial_i(\varphi\sqrt{|g|})dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^{n-1}) \\ = -\int_{c^+} \partial_{0i}(\varphi\sqrt{|g|})dy^0 \wedge \ldots \wedge dy^{n-1}\end{aligned}$$

cette dernière intégrale est encore nulle.

Nous pouvons résumer tous ces résultats en introduisant le vecteur $l_\alpha = \partial_\alpha f$ et un vecteur k_α quelconque tangent à (Σ). Dans un système quelconque de coordonnées on a :

$$\boxed{\begin{aligned} l_\alpha\bar{\delta} &= \nabla_\alpha Y^+ && (75\text{-}1)\\ l_\alpha\bar{\delta} &= -\nabla_\alpha Y^- && (75\text{-}2)\\ k^\alpha\nabla_\alpha\bar{\delta} &= 0 && (75\text{-}3)\end{aligned}}$$

$l_\alpha\bar{\delta}$ désigne le produit de la distribution $\bar{\delta}$ par la fonction l_α ; $k^\alpha\nabla_\alpha\bar{\delta}$ est le produit contracté du vecteur k par le vecteur distribution $\nabla_\alpha\bar{\delta}$.

C-3. **Couches tensorielles.** — Dans tout ce qui suit, les tenseurs T que nous considérons seront supposés satisfaire aux conditions suivantes :

1° Dans les régions $f < 0$ et $f > 0$ du voisinage $\mathcal{V}$ de (Σ), T est une fonction continue usuelle ainsi que ses dérivées covariantes premières et secondes ∇T et $\nabla\nabla T$.

2° Lorsque f tend vers 0 en restant positive (respectivement négative) T, ∇T, $\nabla\nabla T$, tendent uniformément vers des fonctions définies sur (Σ) et notées T^+, $(\nabla T)^+$, $(\nabla\nabla T)^+$ (respectivement T^-, $(\nabla T)^-$, $(\nabla\nabla T)^-$). Nous poserons :

$$[T] = T^+ - T^-$$
$$[\nabla T] = (\nabla T)^+ - (\nabla T)^-$$
$$[\nabla\nabla T] = (\nabla\nabla T)^+ - (\nabla\nabla T)^-.$$

Il résulte de l'hypothèse de convergence uniforme que T^+, T^-, $(\nabla T)^+$, $(\nabla T)^-$, $(\nabla\nabla T)^+$, $(\nabla\nabla T)^-$, $[T]$. $[\nabla T]$, $[\nabla\nabla T]$ sont des tenseurs continus définis sur (Σ), donc en désignant par θ une composante quelconque de l'un de ces tenseurs, l'intégrale de $\theta\omega$, prise sur une chaîne à support compact sur (Σ) à un sens.

Nous désignerons par $\mathcal{U}$ un « tenseur d'épreuve » c'est-à-dire un tenseur dont les composantes sont des fonctions de classe C^r ($r \geqslant 2$) à support compact dans la chaîne c. Si T est un tenseur d'ordre p, nous définirons les tenseurs distribution d'ordre p au sens de A. Lichnerowicz, Y^+T, Y^-T, $\bar{\delta}T^+$, $\bar{\delta}T^-$, $\bar{\delta}[T]$ par les formules :

$$\langle Y^+T, u\rangle = -\int_{c^+} T_{\alpha_1\ldots\alpha_p}\mathcal{U}^{\alpha_1\ldots\alpha_p}*1$$

$$\langle Y^-T, u\rangle = \int_{c^-} T_{\alpha_1\ldots\alpha_p}\mathcal{U}^{\alpha_1\ldots\alpha_p}*1$$

$$\langle \bar{\delta}T^+, u\rangle = \int_{bc^+} T^+_{\alpha_1\ldots\alpha_p}\mathcal{U}^{\alpha_1\ldots\alpha_p}.\,\omega$$

$$\langle \bar{\delta}T^-, u\rangle = \int_{bc^+} T^-_{\alpha_1\ldots\alpha_p}\mathcal{U}^{\alpha_1\ldots\alpha_p}.\,\omega$$

$$\bar{\delta}[T] = \bar{\delta}T^+ - \bar{\delta}T^- = \bar{\delta}(T^+ - T^-).$$

De même sur les tenseurs d'épreuves d'ordre $p+1$ seront définis les tenseurs distribution d'ordre $p+1$, $\bar{\delta}(\nabla T)^+$, $\bar{\delta}(\nabla T)^-$ et $\bar{\delta}[\nabla T]$:

$$\langle \bar{\delta}(\nabla T)^+, \mathcal{U}\rangle = \int_{bc^+} (\nabla_{\alpha_1}T_{\alpha_2\ldots\alpha_{p+1}})^+\mathcal{U}^{\alpha_1\ldots\alpha_{p+1}}.\,\omega$$

$$\langle \bar{\delta}(\nabla T)^-, \mathcal{U}\rangle = \int_{bc^+} (\nabla_{\alpha_1}T_{\alpha_2\ldots\alpha_{p+1}})^-\mathcal{U}^{\alpha_1\ldots\alpha_{p+1}}.\,\omega$$

$$\bar{\delta}[\nabla T] = \bar{\delta}(\nabla T)^+ - \bar{\delta}(\nabla T)^-$$

on définit de même $\bar{\delta}[\nabla\nabla T]$.

Propriété fondamentale :

Considérons le tenseur distribution Y^+T, d'ordre deux par exemple, et cherchons à exprimer sa dérivée covariante. Par définition [*21*], en désignant par δ l'opérateur de co-différentiation :

$$\langle \nabla(Y^+T), \mathcal{U}\rangle = \langle Y^+T, \delta\mathcal{U}\rangle.$$

On peut transformer la relation ci-dessus en remarquant que l'opérateur Y^+T ne fait intervenir que les valeurs de T dans l'ouvert défini par $f > 0$. Désignons par $\{T\}^+$ un tenseur de classe C^∞ dans tout l'élément de chaîne c et coïncidant avec T dans l'ouvert $f > 0$ de c. Nous avons :

$$Y^+T = Y^+\{T\}^+ \tag{76}$$

et nous pouvons écrire :

$$\langle Y^+T, \delta\mathfrak{U}\rangle = \langle Y^+\{T\}^+, \delta\mathfrak{U}\rangle = -\int_{c^+}\{T_{\alpha\beta}\}^+\nabla_\rho\mathfrak{U}^{\rho\alpha\beta}{*}1$$

$$= -\int_{c^+}\nabla_\rho(\{T_{\alpha\beta}\}^+\mathfrak{U}^{\rho\alpha\beta}){*}1 + \int_{c^+}\nabla_\rho\{T_{\alpha\beta}\}^+.\mathfrak{U}^{\rho\alpha\beta}{*}1$$

$$= \langle(\nabla_\rho Y^+)\{T_{\alpha\beta}\}^+, \mathfrak{U}^{\rho\alpha\beta}\rangle + \langle Y^+\nabla_\rho\{T_{\alpha\beta}\}^+, \mathfrak{U}^{\rho\alpha\beta}\rangle.$$

D'où la relation :

$$(77) \qquad \nabla(Y^+\{T\}^+) = (\nabla Y^+)\{T\}^+ + Y^+\nabla\{T\}^+.$$

Précisons l'écriture de cette formule :

$\nabla(Y^+\{T\}^+)$ est la dérivée covariante du tenseur distribution $Y^+\{T\}^+$.

$(\nabla Y^+)\{T\}^+$ est le produit du vecteur distribution ∇Y^+ par le tenseur $\{T\}^+$.

$Y^+\nabla\{T\}^+$ est un tenseur distribution défini à partir de la dérivée covariante de $\{T\}^+$.

Enfin les indices seront toujours écrits dans le même ordre.

Compte tenu de la formule (75-1), (77) peut s'écrire :

$$(78\text{-}1) \qquad \nabla_\alpha(Y^+\{T\ldots\}^+) = l_\alpha\bar{\delta}\{T\ldots\}^+ + Y^+\nabla_\alpha\{T\ldots\}^+.$$

En introduisant un tenseur $\{T\}^-$ de classe C^∞ dans tout l'élément de chaîne c et coïncidant avec T dans l'ouvert $f < 0$ on établit avec des notations évidentes, la formule :

$$(78\text{-}2) \qquad \nabla_\alpha(Y^-\{T\ldots\}^-) = -l_\alpha\bar{\delta}\{T\ldots\}^- + Y^-\nabla_\alpha\{T\ldots\}^-.$$

Par addition des formules (78-1) et (78-2) on obtient :

$$(79) \qquad \begin{aligned} &\nabla.(Y^+\{T\ldots\}^+ + Y^-\{T\ldots\}^-) \\ &\qquad = l\cdot\bar{\delta}[T\ldots] + Y^+\nabla.\{T\ldots\}^+ + Y^-\nabla.\{T\ldots\}^-. \end{aligned}$$

Le premier membre de (79) n'est pas autre chose que la dérivée au sens des distributions du tenseur T; $l.\bar{\delta}[T\ldots]$ est un tenseur distribution à support sur la surface (Σ); enfin

$$Y^+\nabla.\{T\ldots\}^+ + Y^-\nabla.\{T\ldots\}^-$$

est le tenseur distribution défini par la dérivée covariante de T laquelle est un tenseur défini presque partout (dans les ouverts $f > 0$ et $f < 0$ de l'élément de chaîne c).

Si S est un tenseur défini et continu sur (Σ) de degré p, $\bar{\delta}S$ sera appelé couche tensorielle d'indice $(0, p)$. La formule (79) montre que la dérivée au sens distribution du tenseur T défini presque partout est égale à la somme d'une couche tensorielle et de la distribution définie à partir de la dérivée covariante usuelle de T.

Application des couches tensorielles :

Le tenseur [T] n'est défini que sur (Σ), donc nous ne pouvons le dériver que sur (Σ). Par contre la couche tensorielle $\bar{\delta}[T]$ peut toujours être dérivée dans n'importe quelle direction.

Plaçons-nous dans le système des y^α défini précédemment, et considérons, α et β étant deux indices fixés la couche tensorielle d'indice (0, 0) : $\bar{\delta}[T_{\alpha\beta}]$ qui est une des composantes de $\bar{\delta}[T]$. Considérons la dérivée par rapport à y^i $(i \neq 0)$ de $\bar{\delta}[T_{\alpha\beta}]$ et que nous noterons $\partial_i(\bar{\delta}[T_{\alpha\beta}])$. Par définition, si φ est une fonction d'épreuve :

$$\langle \partial_i(\bar{\delta}[T_{\alpha\beta}]), \varphi \rangle = - \langle \bar{\delta}, [T_{\alpha\beta}] \frac{\partial_i(\varphi\sqrt{|g|})}{\sqrt{|g|}} \rangle$$

ce qui donne après intégration par parties :

$$\partial_i(\bar{\delta}[T_{\alpha\beta}]) = (\partial_i\bar{\delta})[T_{\alpha\beta}] + \bar{\delta}\partial_i[T_{\alpha\beta}].$$

Il en résulte, compte tenu des hypothèses faites sur la métrique l'égalité entre dérivées covariantes :

$$\nabla_i(\bar{\delta}[T_{\alpha\beta}]) = \nabla_i\bar{\delta}\,.\,[T_{\alpha\beta}] + \bar{\delta}\nabla_i[T_{\alpha\beta}].$$

Or les hypothèses de convergence uniforme entraînent :

$$\nabla_i[T_{\alpha\beta}] = [\nabla_i T_{\alpha\beta}].$$

D'où compte tenu de (75-3) la formule :

$$\nabla_i(\bar{\delta}[T_{\alpha\beta}]) = \bar{\delta}[\nabla_i T_{\alpha\beta}]$$

ce qui donne dans un système de coordonnées quelconques en désignant par k_α un vecteur quelconque porté par (Σ) :

$$k^\alpha(\nabla_\alpha(\bar{\delta}[T\ldots]) - \bar{\delta}[\nabla_\alpha T\ldots]) = 0$$

d'où il résulte l'existence d'un tenseur distribution $t\ldots$ tel que :

$$\boxed{\bar{\delta}[\nabla_\alpha T\ldots] = \nabla_\alpha(\bar{\delta}[T\ldots]) + l_\alpha t\ldots} \qquad (80)$$

Calcul de $\bar{\delta}[\nabla\,.\,\nabla\,.\,T\ldots]$:

Dans la fin de ce paragraphe nous supposerons que dans le voisinage $(\mathcal{V})$ la métrique est de classe C^3 partout et que le tenseur T est de classe C^0, C^2 par morceaux, la seule surface de discontinuité étant (Σ). Les hypothèses de convergence uniforme vers (Σ) des dérivées covariantes premières et secondes, formulées en (C-3) seront encore supposées satisfaites.

Dans la formule (80) remplaçons T par ∇T il vient :

$$(81) \qquad \bar{\delta}[\nabla . \nabla . \mathrm{T}\ldots] = \nabla . (\bar{\delta}[\nabla . \mathrm{T}\ldots]) + l.w\ldots$$

où w est un nouveau tenseur distribution.

Les hypothèses faites sur la métrique et T entraînent :

$$[\nabla_\alpha \nabla_\beta \mathrm{T}_{\gamma\delta}] = [\nabla_\beta \nabla_\alpha \mathrm{T}_{\gamma\delta}]$$

et (81) donne alors :

$$(82) \qquad \nabla_\alpha(\bar{\delta}[\nabla_\beta \mathrm{T}\ldots]) - \nabla_\beta(\bar{\delta}[\nabla_\alpha \mathrm{T}\ldots]) = l_\alpha w_{\beta\ldots} - l_\beta w_{\alpha\ldots}.$$

D'autre part (80) donne :

$$(80\text{-}1) \qquad \bar{\delta}[\nabla_\alpha \mathrm{T}\ldots] = l_\alpha t\ldots$$

et (82) devient :

$$\nabla_\alpha(l_\beta t\ldots) - \nabla_\beta(l_\alpha t\ldots) + l_\alpha w_\beta\ldots - l_\beta w_\alpha\ldots = 0$$

ce qui compte tenu du fait que l est un gradient se résout à :

$$l_\alpha(w_\beta\ldots - \nabla_\beta t\ldots) - l_\beta(w_\alpha\ldots - \nabla_\alpha t\ldots) = 0.$$

Il existe donc une distribution $v\ldots$ telle que :

$$w_\alpha\ldots - \nabla_\alpha t\ldots = l_\alpha v\ldots$$

et la formule (81) peut s'écrire compte tenu de (80-1) :

$$(83) \qquad \boxed{\bar{\delta}[\nabla_\alpha \nabla_\beta \mathrm{T}\ldots] = \nabla_\alpha(l_\beta t\ldots) + l_\alpha \nabla_\beta t\ldots + l_\alpha l_\beta v\ldots}$$

Cette formule (83) est fondamentale pour l'étude du tenseur distribution t lequel comme l'indique la formule (80-1) permet de calculer les discontinuités des dérivées premières du tenseur T. On obtient une application intéressante en introduisant le laplacien de T au sens de Lichnerowicz [*21*]. En contractant α et β dans (83) on obtient :

$$(84) \qquad -\bar{\delta}[\Delta \mathrm{T}\ldots] = (\nabla_\alpha l^\alpha)t\ldots + 2l^\alpha \nabla_\alpha t\ldots + l^\alpha l_\alpha v\ldots.$$

En particulier si $[\Delta \mathrm{T}] = 0$ et si $l^\alpha l_\alpha = 0$ il vient :

$$(85) \qquad (\nabla_\alpha l^\alpha)t\ldots + 2l^\alpha \nabla_\alpha t\ldots = 0$$

qui est une formule de propagation le long des géodésiques de longueur nulle.

THÉORÈME XI : *Si, à la traversée d'une hypersurface* (Σ) *tangente au cône isotrope le tenseur de Riemann-Christoffel est continu et qu'un tenseur* T *soit continu ainsi que son laplacien, alors les discontinuités de* T *vérifient l'équation de propagation* (85).

Cette équation (85) a été obtenue par A. Lichnerowicz pour le tenseur qui décrit le champ électromagnétique non inductif [*19*].

C-4. **Tenseurs distributions et courants.** — Dans ce qui suit T désignera non plus un tenseur usuel, mais un tenseur distribution, ou un courant au sens de G. de Rham. Rappelons que sur une variété de dimension n un courant de degré p est une fonctionnelle linéaire continue sur l'ensemble des formes de degré $n - p$. Si T est un tel courant et U une forme « d'épreuve », la valeur de T pour U sera notée $\int T \wedge U$.

Sur une variété riemanienne de dimension n, à tout tenseur distribution $\overset{D}{T}$ de degré p, au sens de Lichnerowicz on peut faire correspondre un courant T de même degré au sens de G. de Rham par la formule :

$$\int T \wedge U = \frac{e(-1)^{p(n-p)}}{p\,!} \langle \overset{D}{T}, *U \rangle$$

où e est le signe du déterminant de la métrique.

Tout courant T de degré p peut être décomposé comme une forme; ses composantes dans une base donnée sont des courants de degré 0, $T_{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ définis par :

$$\int T_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \wedge a*1 = \frac{\delta^{0 \dots (n-1)}_{\alpha_1 \dots \alpha_p \beta_1 \dots \beta_{n-p}}}{(n-p)\,!} \int T \wedge \sqrt{|g|}\, a dx^{\beta_1} \dots dx^{\beta_{n-p}}$$

où a est une forme d'épreuve de degré 0.

Entre les composantes du tenseur distribution et celles du courant associé on a les relations :

$$\int T_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \wedge a*1 = \frac{1}{p\,!} \langle \delta^{\beta_1 \dots \beta_p}_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \overset{D}{T}_{\beta_1 \dots \beta_p}, a \rangle.$$

Si le tenseur distribution $\overset{D}{T}$ est complètement antisymétrique la formule ci-dessus se résout à :

$$\int T_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \wedge a*1 = \langle \overset{D}{T}_{\alpha_1 \dots \alpha_p}, a \rangle.$$

D. — Les discontinuités du champ électromagnétique.

Nous allons appliquer les considérations du paragraphe précédent à l'étude des discontinuités du champ électromagnétique à la traversée d'une hypersurface (Σ) de V_4. Nous supposerons que dans le voisinage $(\mathcal{V})$ de (Σ) les 2-formes G et H sont de classe C^0, C^2, par morceaux la métrique de classe C^3, la double 2-forme $\varepsilon_{\alpha\beta}{}^{\rho\mu}$ de classe C^2, ainsi que le courant électrique $\vec{J}$. La seule surface de discontinuité dans $(\mathcal{V})$ sera (Σ). Les hypothèses de convergence uniforme formulées en (C-3) seront supposées satisfaites.

Les courants que nous introduirons opéreront sur des formes d'épreuves dont les composantes sont des fonctions φ définies en (C-2). Les opérations sur ces courants de différentiation, co-différentiation, passage à l'adjoint, sont celles définies par G. de Rham [*20*].

D-1. **Équations des courants de discontinuité.** — D'après les hypothèses sur G et H et compte tenu de la formule (80-1), il existe deux tenseurs distribution $\overset{D}{\Psi}$ et $\overset{D}{\Phi}$ à support sur (Σ) tels que :

$$\left\{\begin{aligned} &\overline{\delta}[\nabla_\alpha G_{\beta\gamma}] = l_\alpha \overset{D}{\Psi}_{\beta\gamma} && (86\text{-}1)\\ &\overline{\delta}[\nabla_\alpha H_{\beta\gamma}] = l_\alpha \overset{D}{\Phi}_{\beta\gamma}. && (86\text{-}2)\end{aligned}\right.$$

Aux tenseurs distributions $\overset{D}{\Psi}$ et $\overset{D}{\Phi}$ nous associerons les deux courants Ψ et Φ par la méthode indiquée en C-4. Ce sont ces deux courants qui décriront les discontinuités des dérivées premières de G et H à la traversée de (Σ).

Il résulte des équations de Maxwell et l'hypothèse sur la classe de $\vec{J}$:

$$(87) \qquad \left\{\begin{aligned} &l_\alpha \overset{D}{\Psi}{}^{\alpha\beta} = 0 \qquad l_\alpha(*\overset{D}{\Phi})^{\alpha\beta} = 0\\ &\overset{D}{\Psi}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta}{}^{\rho\mu}\overset{D}{\Phi}_{\rho\mu}\end{aligned}\right.$$

ce qui se traduit en termes de courants par :

$$(87\text{-}1) \qquad \left\{\begin{aligned} &*\Psi \wedge l = 0 \qquad \Phi \wedge l = 0\\ &\Psi_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta}{}^{\rho\mu}\Phi_{\rho\mu}.\end{aligned}\right.$$

La dernière égalité étant une égalité entre courants de degré 0. Dans les produits de courants que nous considérons il y aura toujours un courant au plus dont les composantes ne seront pas des fonctions, condition nécessaire pour que ce produit ait un sens.

Dans la formule (83) remplaçons T... par $H_{\gamma\delta}$, t... par $\overset{D}{\Phi}_{\gamma\delta}$ et additionnons les trois relations obtenues en permutant circulairement sur β, γ, δ. Compte tenu de $d\mathrm{H} = 0$ et des formules (87) il vient :

$$d\Phi = -l \wedge \mathrm{V}$$

où V est un courant de degré 2.

De même en remplaçant T par $*$G dans (83) un calcul analogue montre qu'il existe un courant W de degré 2 tel que :

$$d(*\Psi) = -l \wedge \mathrm{W}.$$

L'étude des discontinuités du champ électromagnétique à la traversée de (Σ) se ramène donc à l'étude des courants Φ et Ψ qui satisfont aux relations :

$$\left\{\begin{array}{lr} \Phi \wedge l = 0 & \text{(88-1)} \\ *\Psi \wedge l = 0 & \text{(88-2)} \\ d\Phi = -l \wedge \mathrm{V} & \text{(88-3)} \\ d(*\Psi) = -l \wedge \mathrm{W} & \text{(88-4)} \\ \Psi_{\alpha\beta} = \dfrac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta}{}^{\rho\mu}\Phi_{\rho\mu}. & \text{(88-5)} \end{array}\right.$$

Les équations (88) rappellent les équations du champ électromagnétique singulier. Les équations (88-3) et (88-4) qui jouent les rôles des équations de Maxwell ont cependant toutes les deux un second membre.

D-2. **Étude algébrique des courants de discontinuité.** — L'équation (88-1) traduit qu'il existe un courant a de degré 1 tel que :

$$\Phi = l \wedge a. \tag{89}$$

La relation (88-5) s'écrit alors :

$$\Psi_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta}{}^{\rho\mu} l_\rho a_\mu$$

et (88-2) entraîne :

$$\varepsilon_{\alpha\beta}{}^{\rho\mu} l^\beta l_\rho a_\mu \equiv \mathrm{A}_\alpha^{\cdot\mu} a_\mu = 0 \tag{90}$$

$\mathrm{A}_\alpha^{\cdot\mu} a_\mu$ est un tenseur distribution de degré 1 qui est nul. Donc :

$$\langle \mathrm{A}_\alpha^{\cdot\mu} a_\mu, \mathrm{U}^\alpha \rangle = \langle a_\mu, \mathrm{A}_\alpha^{\cdot\mu} \mathrm{U}^\alpha \rangle = 0. \tag{91}$$

Si la matrice $(A_{\alpha}^{\cdot\mu})$ était de rang 4 en tous les points de la chaîne c, alors a_{μ} serait nul. En fait l'équation (90) admet partout la solution $a = 1$ donc en chaque point de la chaîne c, $(A_{\alpha}^{\cdot\mu})$ est de rang au plus égal à 3.

La solution $a = 1$ ne présente pas d'intérêt physique car elle entraîne $\Phi = \Psi = 0$.

Si dans tout l'élément de chaîne c la matrice $(A_{\alpha}^{\cdot\mu})$ était de rang strictement égal à 3, alors en chaque point de c, $A_{\alpha}^{\cdot\mu}U^{\alpha}$ engendrerait quand U varie l'espace tangent orthogonal à $\vec{l}$ et la formule (91) montre que le tenseur distribution a n'aurait qu'une composante suivant $\vec{l}$ de même que le courant a.

Le courant Φ étant à support sur (Σ), pour que ce courant soit différent de 0, il est donc nécessaire que sur (Σ), $(A_{\alpha}^{\cdot\mu})$ ne soit pas partout de rang 3. Nous supposerons dans tout ce qui suit que sur la portion de (Σ) située dans l'élément de chaîne c, $(A_{\alpha}^{\cdot\mu})$ est de rang au plus égal à 2.

Étude de la matrice $A_{\alpha}^{\cdot\mu}$:

En utilisant la formule (49) et la définition de $l_{\alpha\beta}$ par la formule (65) on vérifie que :

$$\mu A_{\alpha}^{\cdot\sigma} = \left(g^{\beta\sigma}l_{\alpha}^{\cdot\rho} - g_{\alpha}^{\sigma}l^{\beta\rho} + (\varepsilon\mu - 1)\left(g_{\alpha}^{\rho}u^{\sigma}u^{\beta} - g^{\beta\rho}u^{\sigma}u_{\alpha}\right)\right)l_{\beta}l_{\rho}.$$

Posons :

$$l^{\beta\rho}l_{\beta}l_{\rho} = M \qquad u^{\beta}l_{\beta} = N \qquad L = l^{\rho}l_{\rho}$$

et prenons un repère (R). La matrice $\mu(A_{\alpha}^{\cdot\sigma})$ a alors pour expression :

$$\begin{pmatrix} l^0l_0 - M + (\varepsilon\mu - 1)(l_0N - L) & l^1l_0 & l^2l_0 & l^3l_0 \\ l^0l_1 + (\varepsilon\mu - 1)l_1N & l^1l_1 - M & l^2l_1 & l^3l_1 \\ l^0l_2 + (\varepsilon\mu - 1)l_2N & l^1l_2 & l^2l_2 - M & l^3l_2 \\ l^0l_3 + (\varepsilon\mu - 1)l_3N & l^1l_3 & l^2l_3 & l^3l_3 - M \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice $(A_{i}^{\cdot j})$ a donc pour expression :

$$\Delta = M^2(- M + l^il_i).$$

Pour que la matrice soit de rang inférieur à 3, il est nécessaire que Δ soit nul :

1° Supposons d'abord que $M - l^il = 0$. Cette condition s'écrit encore :

$$l^{\rho}l_{\rho} + (\varepsilon\mu - 1)(l^{\rho}u_{\rho})^2 - l^{\rho}l_{\rho} + (u^{\rho}l_{\rho})^2 = 0$$

soit :

$$l^{\rho}u_{\rho} = 0$$

donc exprime que la surface (Σ) est tangente aux lignes de courant. $\vec{l}$ étant orthogonal à $\vec{u}$ on peut le prendre comme vecteur $\vec{e}_{(1)}$ du repère (R) et la matrice $(A_{\alpha}^{\cdot\sigma})$ devient :

$$\begin{pmatrix} -\varepsilon\mu l^1 l_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -l^1 l_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -l^1 l_1 \end{pmatrix}$$

comme nous supposons $\vec{l} \neq 0$, cette matrice est de rang 3.

2° Supposons que $M = 0$. Alors la matrice envisagée devient :

$$\text{(93)} \qquad \begin{pmatrix} l^0 l_0 + (\varepsilon\mu - 1)(l_0 N - L) & l^1 l_0 & l^2 l_0 & l^3 l_0 \\ l^0 l_1 + (\varepsilon\mu - 1) l_1 N & l^1 l_1 & l^2 l_1 & l^3 l_1 \\ l^0 l_2 + (\varepsilon\mu - 1) l_2 N & l^1 l_2 & l^2 l_2 & l^3 l_2 \\ l^0 l_3 + (\varepsilon\mu - 1) l_3 N & l^1 l_3 & l^2 l_3 & l^3 l_3 \end{pmatrix}$$

L'on voit immédiatement que cette matrice est de rang 2.

Aux points où M est nul, la surface (Σ) est tangente au cône caractéristique des équations de Maxwell. Nous pouvons résumer tous ces résultats :

THÉORÈME XII : *Si la portion de* (Σ) *contenue dans l'élément de chaîne c est tangente en chacun de ses points au cône caractéristique des équations de Maxwell alors il peut exister des courants de discontinuité* Φ *et* Ψ *à support sur* (Σ).

En particulier, si la fonction $f(x^\lambda)$ est une solution de l'équation :

$$\text{(E)} \qquad l^{\alpha\beta}\partial_\alpha f \partial_\beta f = 0$$

c'est-à-dire si (Σ) est une variété caractéristique des équations de Maxwell, alors on pourra avoir des discontinuités. C'est dans cette hypothèse que nous nous plaçons désormais. Nous supposerons que la fonction f solution de (E) est partout définie dans l'élément chaîne c, et de classe suffisante pour les calculs qui suivront. En chaque point de la chaîne c, nous pourrons donc associer au vecteur $\vec{l} = \overrightarrow{\text{grad}}\, f$ un vecteur $\vec{k}$ défini par :

$$k_\alpha = l_{\alpha\rho} l^\rho$$

les trajectoires des vecteurs $\vec{k}$ sont les bicaractéristiques des équations de Maxwell.

Réduction canonique des courants Φ *et* Ψ.

De la formule (88-5), compte tenu de (49), on tire :

$$\text{(94)} \qquad \begin{aligned} \mu\Psi_{\alpha\beta} &= k_\alpha a_\beta - k_\beta a_\alpha + (\varepsilon\mu - 1)u^\sigma a_\sigma (l_\alpha u_\beta - l_\beta a_\alpha) \\ &= k_\alpha(a_\beta + (\varepsilon\mu - 1)u^\sigma a_\sigma u_\beta) - k_\beta(a_\alpha + (\varepsilon\mu - 1)u^\sigma a_\sigma u_\alpha) \end{aligned}$$

soit encore :

(94-1) $$\mu\Psi = k \wedge b$$

où b est le courant de composantes :

$$a_\beta + (\varepsilon\mu - 1)u^\sigma a_\sigma u_\beta = l^\alpha_\beta a_\alpha.$$

La formule (88-2) montre qu'il existe un courant c tel que :

$$*\Psi = l \wedge c.$$

Compte tenu de la formule conséquence de (88-5) :

$$\varepsilon(*\Phi)_{\alpha\beta} = (*\Psi)_{\alpha\beta} + (\varepsilon\mu - 1)(u_\beta u^\rho(*\Psi)_{\alpha\rho} - u^\rho u_\alpha(*\Psi)_{\beta\rho})$$

il vient alors :

(95) $$\begin{aligned}\varepsilon(*\Phi)_{\alpha\beta} &= k_\alpha c_\beta - k_\beta c_\alpha + (\varepsilon\mu - 1)(u^\rho c_\rho)(u_\beta l_\alpha - u_\alpha l_\beta)\\ &= k_\alpha e_\beta - k_\beta e_\alpha\end{aligned}$$

où l'on a posé :

$$e_\beta = l^\rho_\beta c_\rho.$$

La formule (95) s'écrit encore :

(95-1) $$\varepsilon(*\Phi) = k \wedge e.$$

Enfin les formules (94) et (95) permettent de vérifier immédiatement les relations :

(96) $$\left\{\begin{aligned}\mu u \wedge \Psi &= u \wedge \Phi = u \wedge l \wedge a\\ \varepsilon u \wedge *\Phi &= u \wedge *\Psi = u \wedge l \wedge c.\end{aligned}\right.$$

Toutes ces formules rappellent celles du champ électromagnétique singulier, les lois (96) étant les lois de l'induction.

L'analogie est plus frappante encore si l'on impose aux courants a et c d'être orthogonaux à u, c'est-à-dire de vérifier les relations :

$$*a \wedge u = 0 \qquad *c \wedge u = 0$$

alors dans ces conditions :

$$b = a \qquad \text{et} \qquad e = c$$

et nous avons les relations :

$$\begin{aligned}\mu\Psi &= k \wedge a & \varepsilon(*\Phi) &= k \wedge c\\ *\Psi &= l \wedge c & \Phi &= l \wedge a.\end{aligned}$$

Ces formules sont identiques aux formules (68-1), a pouvant être interprété comme un champ électrique et c comme un champ magnétique. Nous résumerons les résultats du cas général en un théorème.

THÉORÈME XIII : *Les courants de discontinuité d'un champ électromagnétique inductif admettent la réduction canonique suivante :*

$$\Phi = l \wedge a \qquad \Psi = \frac{l}{\mu} k \wedge b$$

$$*\Phi = \frac{l}{\varepsilon} k \wedge e \qquad *\Psi = l \wedge c$$

où l est le gradient de la fonction f qui définit la surface de discontinuité, k un vecteur défini par $k_\beta = l_{\beta\alpha} l^\alpha$ et a, b, c, e quatre courants de degré 1 dont les composantes vérifient les relations :

$$b_\rho = l^\alpha_\rho a_\alpha \qquad e_\rho = l^\alpha_\rho c_\alpha .$$

Les courants Φ et Ψ satisfont aux lois de l'induction :

$$\mu u \wedge \Psi = u \wedge \Phi$$

$$\varepsilon u \wedge *\Phi = u \wedge *\Psi$$

D-3. **Propagation des courants de discontinuité.** — De la formule :

$$\Phi = l \wedge a$$

on déduit par différenciation, compte tenu du fait que l est un gradient :

$$d\Phi = - l \wedge da.$$

Il résulte donc de la formule (88-3) qu'il existe un courant z de degré 1 tel que :

$$\text{(97)} \qquad \mathrm{V} = da + l \wedge z.$$

Nous allons maintenant revenir au tenseur distribution v de la formule (83) et à partir duquel nous avons construit le courant V, et étudier les propriétés différentielles de v, ce qui nous donnera des propriétés de V.

Pour cela, partons de l'équation de Maxwell valable dans la région $f > 0$ et dans la région $f < 0$:

$$\nabla_\alpha \mathrm{G}^{\alpha\beta} = \mathrm{J}^\beta.$$

Elle s'écrit encore :

$$(\nabla_\alpha \varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}) \mathrm{H}_{\rho\sigma} + \varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} \nabla_\alpha \mathrm{H}_{\rho\sigma} = 2\mathrm{J}^\beta$$

ce qui donne, en différentiant une nouvelle fois et en prenant le saut à la traversée de (Σ) :

$$(\nabla_\alpha \varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma})[\nabla_\gamma H_{\rho\sigma}] + \nabla_\gamma \varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}[\nabla_\alpha H_{\rho\sigma}] + \varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}[\nabla_\gamma \nabla_\alpha H_{\rho\sigma}] = 0,$$

ce qui entraîne d'après les formules (86) :

$$(98) \qquad (\nabla_\alpha \varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}) l_\gamma \overset{D}{\Phi}_{\rho\sigma} + \nabla_\gamma \varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} l_\alpha \overset{D}{\Phi}_{\rho\sigma} + \bar{\delta}(\varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}[\nabla_\gamma \nabla_\alpha H_{\rho\sigma}]) = 0.$$

Or d'après les formules (87) :

$$2 l_\alpha \overset{D}{\Psi}{}^{\alpha\beta} = l_\alpha \varepsilon^{\alpha\beta\rho\mu} \overset{D}{\Phi}_{\rho\mu} = 0$$

et la relation (98) peut alors s'écrire compte tenu de la formule (83) et après division par l_γ :

$$\nabla_\alpha \varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} \overset{D}{\Phi}_{\rho\sigma} + \varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} \nabla_\alpha \overset{D}{\Phi}_{\rho\sigma} + \varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} l_\alpha v_{\rho\sigma} = 0.$$

D'où enfin, compte tenu de la formule (97) :

$$(99) \qquad \boxed{\nabla_\alpha(\varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}) \overset{D}{\Phi}_{\rho\sigma} + 2\varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} l_\alpha \nabla_\rho a_\sigma + 2\varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} l_\alpha l_\rho z_\sigma = 0}$$

ou encore :

$$(99\text{-}1) \qquad \nabla_\alpha \overset{D}{\Psi}{}^{\alpha\beta} + \varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} l_\alpha (da)_{\rho\sigma} + 2\varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} l_\alpha l_\rho z_\sigma = 0.$$

Nous remarquons alors que, d'après le choix du vecteur $\vec{l}$, la matrice $\varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} l_\alpha l_\rho$ est de rang 2 dans toute la chaîne c. En un point donné de c, l'opérateur linéaire associé à cette matrice applique tout l'espace vectoriel tangent dans un 2-plan. On voit immédiatement en considérant l'expression de la matrice $A_\alpha^{\cdot\sigma}$ écrite au paragraphe D-3 que ce 2-plan est engendré par $\vec{u}$ et $\vec{l}$. Il en résulte que le vecteur distribution $\varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} l_\rho l_\alpha z_\sigma$ a pour valeur 0 sur tout champ de vecteur orthogonal en chaque point à $\vec{u}$ et $\vec{l}$, autrement dit ce vecteur distribution peut s'écrire $\lambda l_\alpha + \nu u_\alpha$ ou λ et ν sont deux scalaires distribution.

Nous obtenons ainsi la formule :

$$(100) \qquad \nabla_\alpha \overset{D}{\Psi}{}^{\alpha\beta} + \varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} l_\alpha (da)_{\rho\sigma} + \lambda l_\alpha + \nu u_\alpha = 0.$$

On peut alors traduire cette formule en termes de courant en remarquant que :

$$\nabla \ \Psi^{\alpha\beta} = -(\delta\Psi)^\beta = -\frac{1}{\mu}\,\delta(k \wedge b)$$

où δ est l'opérateur de co-différentiation, et que d'autre part :

$$\mu\varepsilon^{\alpha\cdot\rho\sigma}_{\beta} l_\alpha (da)_{\rho\sigma} = 2k^\rho (da)_{\rho\beta} + (1 - \varepsilon\mu) u_\beta (k^\sigma u^\rho - k^\rho u^\sigma)(da)_{\rho\sigma}.$$

Nous obtenons alors la formule :

$$\boxed{\delta(k \wedge b) + *(k \wedge *da) + (\varepsilon\mu - 1) u * ((k \wedge u) \wedge *da) + \lambda l + \nu u = 0} \tag{101}$$

Cette formule est celle qui régit la propagation du courant de discontinuité a le long d'une bicaractéristique des équations de Maxwell, trajectoire de vecteurs $\vec{k}$.

Elle appelle les remarques suivantes :

1° Si $(\varepsilon\mu - 1) = 0$ alors $k = 1$, $a = b$, $\nu = 0$, la matrice $(A_\alpha^{\cdot\sigma})$ est de rang 1 et on retrouve la formule :

$$\delta(l \wedge a) + *(l \wedge *da) + \lambda l = 0$$

établie par A. Lichnerowicz [*19*].

2° Les effets de l'induction se traduisent par les corrections suivantes dans l'équation :

— dans le premier monôme a_ρ est remplacé par $b_\rho = l^\alpha_\rho a_\alpha$,

— il y a en plus un courant colinéaire à $\vec{u}$.

Si nous ne considérons que les courants a orthogonaux à $\vec{u}$ alors $b = a$ et le seul terme correctif qui intervient dans l'équation est le courant colinéaire à $\vec{u}$.

3° Ne considérant que les courants a orthogonaux à $\vec{u}$, la formule (101) s'explicite :

$$2k^\alpha \nabla_\alpha a_\beta + B^\rho_\beta a_\rho = \nabla_\alpha a^\alpha . k_\beta + \lambda l_\beta + \nu u_\beta$$

avec :

$$B^\rho_\beta = g^\rho_\beta \nabla_\alpha k^\alpha - (\nabla^\rho k_\beta - \nabla_\beta k^\rho) + 2(\varepsilon\mu - 1) u_\beta (u^\sigma \nabla_\sigma k^\rho - k^\sigma \nabla_\sigma u^\rho).$$

4° S'il existe un courant a dont les composantes sont des fonctions et qui soit orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{l}$ (donc aussi à $\vec{k}$) alors en multipliant les deux membres de (101-1) par a^β on obtient :

$$k^\alpha \nabla_\alpha (a^\beta a_\beta) = 0$$

ce qui constitue une équation de conservation le long des bicaractéristiques.

Dans le cas singulier, nous avons vu que la 2-forme H se conservait par transport le long des bicaractéristiques parce que l'équation de Maxwell à laquelle elle obéissait n'avait pas de second membre, et qu'il n'en était pas de même en général de la 2-forme G, à cause de la présence du vecteur courant électrique J.

Il se passe ici le même phénomène, les équations de propagation (101) ne sont pas des équations de conservation parce que les équations (88-3) et (88-4) ont un second membre non nul et que les différentielles des courants Φ et $*\Psi$ ne sont en général pas nulles.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Lichnerowicz, *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*, Masson, éd., 1955.
[2] C. Cattaneo, *Il Nuovo Cimento*, série X, vol. 10, octobre 1958.
[3] E. Cartan, *J. Math. pures et appliquées*, t. 1, 1922, p. 141-203.
[4] Taub, *Physical Reviews*, t. 103, 1956, p. 454-467.
[5] Germain, *Mécanique des milieux continus*, Masson, éd., 1962.
[6] Minkowski, *Die Grundgleichungen für die elecktromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern. Nachr. Ges. Wiss.*, Göttingen, 1908 (53).
[7] Pham Mau Quan, *Cahiers de Physique*, 1958.
[8] G. Bruhat, *Électricité*, Masson, éd.
[9] Boa Teh Chu, *Physics of Fluids*, t. 2, 1959.
[10] Pham Mau Quan, *Thèse, Faculté des Sciences de Paris*, juin 1954.
[11] Y. Choquet-Bruhat, Fluides relativistes de conductivité infinie, *Astronautica Acta*, 6, 1960.
[12] M. Abraham, *R. C. Circ. Mat. Palermo*, t. 28, 1909, p. 1 et t. 30, 1910, p. 33.
[13] M. Abraham, *Thèse, Université de Michigan.*
[14] G. Darmois, Les équations de la gravitation Einsteinienne, *Mém. Sc. Math. fasc.*, t. 25, 1937.
[15] G. Pichon, *C. R. Acad. Sc.*, t. 256.
[16] Hadamard, *Leçons sur la propagation des ondes.* Chelsea, New York, 1949.
[17] Y. Choquet-Bruhat, *Bull. Soc. Math. de France*, t. 86, 1958.
[18] Petrowsky, *Bull. Univers. d'État Moscou*, Sér. Int. Sect., A1, 1938, n° 7.
[19] A. Lichnerowicz, Ondes et radiations électromagnétiques et gravitationnelles en relativité générale, *An. di mat. pura ed appl.*, Série IV, t. 50, 1960.
[20] G. de Rham, *Variétés différentiables*, Hermann, Paris, 1960.
[21] A. Lichnerowicz, *Propagateurs et commutateurs en Relativité générale*, Pub. de l'I. H. E. S., n° 10, 1961.
[22] Coburn, *J. Math. Mech*, t. 10, 1961, p. 361-391.

TABLE DES MATIÈRES