

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

A. S. WIGHTMAN

La théorie quantique locale et la théorie quantique des champs

Annales de l'I. H. P., section A, tome 1, n° 4 (1964), p. 403-420

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1964__1_4_403_0

© Gauthier-Villars, 1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

La théorie quantique locale et la théorie quantique des champs (*)

par

A. S. WIGHTMAN (**)

SOMMAIRE. — Dans la théorie quantique locale on étudie les algèbres de von Neumann, $\mathcal{R}(\mathcal{O})$, engendrées par les observables qu'on peut mesurer en employant un appareil localisé dans un domaine ouvert borné, \mathcal{O} , de l'espace-temps. On fait l'hypothèse que les algèbres satisfont à :

- 1) $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$ implique que $\mathcal{R}(\mathcal{O}_1) \subset \mathcal{R}(\mathcal{O}_2)$.
- 2) $U(a, A)\mathcal{R}(\mathcal{O})U(a, A)^{-1} = \mathcal{R}(\Lambda(A)\mathcal{O} + a)$.
- 3) $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}'_2$ implique que $\mathcal{R}(\mathcal{O}_1) \subset \mathcal{R}(\mathcal{O}_2)'$.
- 4) $\mathcal{R}(\cup_i \mathcal{O}_i) = \vee_i \mathcal{R}(\mathcal{O}_i)$.

Dans le présent exposé, on résume quelques théorèmes de la théorie et on discute la relation entre la théorie quantique locale et la théorie quantique des champs. Le principal résultat nouveau est une démonstration que les champs de la théorie quantique des champs ne peuvent pas être définis en chaque point.

{
cf p 414
et \oplus p 417
—

ABSTRACT. — Local quantum theory studies the von Neumann algebras, $\mathcal{R}(\mathcal{O})$, generated by the observables which can be measured by using an apparatus located in a bounded open set, \mathcal{O} , of space-time, assuming that they have the properties :

- 1) $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$ implies $\mathcal{R}(\mathcal{O}_1) \subset \mathcal{R}(\mathcal{O}_2)$.
- 2) $U(a, A)\mathcal{R}(\mathcal{O})U(a, A)^{-1} = \mathcal{R}(\Lambda(A)\mathcal{O} + a)$.
- 3) $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}'_2$ implies $\mathcal{R}(\mathcal{O}_1) \subset \mathcal{R}(\mathcal{O}_2)'$.
- 4) $\mathcal{R}(\cup_i \mathcal{O}_i) = \vee_i \mathcal{R}(\mathcal{O}_i)$.

(*) Texte étendu d'une conférence faite à l'Institut Henri Poincaré, janvier 1964.

(**) En congé de l'Université de Princeton.

The present article reviews some basic theorems of the subject and discusses the relation between the $\mathcal{R}(\mathcal{O})$ and quantum field theory. The principal new result is a proof that in quantum field theory fields cannot be defined in each point.

Le but de cet exposé est d'expliquer comment on pourrait arriver à une théorie des champs en partant d'une théorie dans laquelle des expériences localisées dans l'espace-temps sont possibles. Qu'une telle voie soit très naturelle, a été suggéré il y a dix ans par R. Haag, mais une théorie mathématique complète réalisant ses idées n'existe pas encore ⁽¹⁾. Pourtant, ces dernières années ont vu un progrès considérable, qui mérite d'être exposé ⁽²⁾.

La plupart des résultats qui suivent, sauf peut-être ceux du paragraphe 3, sont connus au moins parmi les experts. C'est aux autres que s'adresse cette version. On trouve d'autres points de vue dans ⁽³⁾ ⁽⁴⁾ ⁽⁵⁾.

Je remercie MM. R. Kadison, H. Epstein et H. Borchers pour d'utiles suggestions.

I. — PRÉLIMINAIRES

Il s'agit ici des théories quantiques concrètes, c'est-à-dire qu'on n'essaie pas de caractériser une théorie de façon purement algébrique (Le lecteur est renvoyé à ⁽⁶⁾ pour une tentative dans ce sens). Par conséquent, une telle théorie associe à chaque état du système considéré, un rayon dans un espace hilbertien séparable \mathcal{H} . A chaque observable, elle associe un opérateur auto-adjoint de \mathcal{H} .

Nous ne considérons que des opérateurs bornés sauf mention explicite du contraire.

⁽¹⁾ Voir R. HAAG et B. SCHROER, *Jour. Math. Phys.*, t. 3, 1962, p. 248-256 et articles antérieurs qui y sont cités.

⁽²⁾ La discussion la plus complète est celle de H. ARAKI, Conférences à Zurich, 1961-1962 et en Illinois, 1963 (*à paraître*).

⁽³⁾ I. E. SEGAL, *Les problèmes mathématiques de la théorie quantique des champs*, C. N. R. S., 1959, p. 57-103.

⁽⁴⁾ G. W. MACKEY, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, W. A. Benjamin, 1963.

⁽⁵⁾ A. S. WIGHTMAN, *Les problèmes mathématiques de la théorie quantique des champs*, C. N. R. S., 1959, p. 1-56.

⁽⁶⁾ D. KASTLER et R. HAAG, An algebraic approach to quantum field theory, *Jour. Math. Phys.*, 1964 (*à paraître*).

L'invariance relativiste exige qu'il existe une réalisation du groupe de Poincaré restreint (\equiv groupe de Lorentz inhomogène $\equiv \mathcal{P}_+^\uparrow$) par des transformations des rayons dans \mathcal{K} . Il est bien connu que, par un choix convenable des vecteurs représentant des rayons, cette réalisation apparaît comme représentation unitaire continue du groupe de recouvrement de \mathcal{P}_+^\uparrow (?). Si a est une translation dans l'espace-temps et A un élément du groupe de recouvrement du groupe de Lorentz homogène, la transformation unitaire qui correspond à A suivie de a se dénote $U(a, A)$. La loi de multiplication est

$$U(a_1, A_1) U(a_2, A_2) = U(a_1 + \Lambda(A_1)a_2, A_1A_2),$$

où $\Lambda(A)$ est la transformation de Lorentz homogène qui correspond à A . L'interprétation physique est très simple : si Φ est un vecteur de \mathcal{K} qui représente un état du système, $U(a, A)\Phi$ représente l'état obtenu en faisant subir à celui représenté par Φ , la transformation de Lorentz homogène $\Lambda(A)$ suivie de la translation a .

La théorie des représentations du groupe des translations donne une forme canonique pour $U(a, 1)$:

$$U(a, 1) = \int \exp(ip \cdot a) dE(p) \tag{1.1}$$

où E est une mesure à valeurs projecteurs, définie sur \mathbf{R}^4 (espace des caractères du groupe des translations). En coordonnées, nous écrivons

$$p \cdot a = p^0 a^0 - \vec{p} \cdot \vec{a} \equiv p^0 a^0 - p^1 a^1 - p^2 a^2 - p^3 a^3,$$

forme invariante par le groupe homogène. De l'action du sous-groupe des transformations de Lorentz homogène sur les translations on peut déduire que $dE(p)$ est absolument continue par rapport à $dE(\Lambda p)$.

On interprète p comme quadrivecteur d'énergie impulsion totale du système. Par conséquent, on ne considère que les représentations telles que $dE(p)$ a son support dans la fermeture, \bar{V}^+ , du cône futur, V^+ , défini par

$$(p^0)^2 - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2 > 0, \quad p^0 > 0.$$

Dans ce cas, l'énergie sera positive; c'est ce qu'on appelle *condition spectrale*.

Chaque état possède une décomposition selon la mesure E :

$$\| \Phi \|^2 = \int d \| E(p) \Phi \|^2. \tag{1.2}$$

(?) Voir, par exemple, *Relations de dispersion et particules élémentaires*, Hermann, 1960, p. 159-221.

Si $E(p)\Phi$ a son support dans une partie compacte de \mathbf{R}^4 , on dit que Φ est à *énergie compacte*. En particulier, une théorie peut posséder un vide, Ψ_0 , c'est-à-dire par définition, un état uniquement caractérisé par la condition :

$$U(a, A)\Psi_0 = \Psi_0$$

à un facteur complexe près. Nous ne supposons pas en général que notre théorie a un vide, sauf pour le théorème du paragraphe 3.

Si Φ est à énergie compacte, on peut définir $U(a_1 + ia_2)\Phi$ pour tout $a_1 + ia_2 \in \mathbf{C}^4$, par

$$(\chi, U(a_1 + ia_2)\Phi) = \int \exp(ip(a_1 + ia_2))d(\chi, E(p)\Phi). \quad (1.3)$$

$a_1 + ia_2 \rightarrow U(a_1 + ia_2)\Phi$ est une fonction holomorphe sur \mathbf{C}^4 , à valeurs vecteurs dans \mathcal{H} . Le vecteur $U(a_1 + ia_2)\Phi$ est à énergie compacte.

Dans la nature, il existe des limitations sur l'observation qu'on dénote *règles de supersélection*. On peut résumer leurs conséquences en disant qu'il existe une somme directe

$$\mathcal{H} = \bigoplus_j \mathcal{H}_j \quad (1.4)$$

telle que

$$U(a, A)\mathcal{H}_j \subset \mathcal{H}_j \quad (1.5)$$

i. e. U est réduite par la somme directe et telle que

$$B\mathcal{H}_j \subset \mathcal{H}_j \quad (1.6)$$

pour tout opérateur auto-adjoint qui correspond à un observable. En outre, la décomposition doit être minimale en ce sens qu'il n'existe de sous-espace non trivial \mathcal{H}'_j de \mathcal{H}_j satisfaisant à (1.5) et (1.6). En un mot, les B restreints à \mathcal{H}_j doivent être irréductibles pour chaque j . Les \mathcal{H}_j sont appelés *sous-espaces cohérents* ou *secteurs de supersélection*.

La signification physique de \mathcal{H}_j est la suivante. Tout état qu'on peut réaliser au laboratoire est représenté par un vecteur dans un certain \mathcal{H}_j . Une combinaison linéaire non triviale de vecteurs appartenant à des secteurs distincts ne peut correspondre à un état réalisable.

Un exemple typique de règle de supersélection est celui de la charge électrique : tout sous-espace cohérent a une valeur définie de la charge électrique, multiple entier de la charge de l'électron.

Les représentations unitaires continues irréductibles du groupe de recouvrement de \mathcal{F}^\dagger sont de dimension infinie à la seule exception de la représentation identique $(a, A) \rightarrow 1$. Par conséquent, les sous-espaces cohérents, \mathcal{H}_j , sont de dimension infinie. Il y aurait une exception si le vide constituait

à lui seul un sous-espace cohérent, mais ce n'est pas vrai dans la nature. Nous excluons donc ce cas.

Ce que j'ai dit plus haut des règles de supersélection peut être résumé et précisé comme l'*hypothèse des règles de supersélection commutative* : l'ensemble des opérateurs qui commutent avec toutes les observables est commutatif, engendré par les projecteurs sur les sous-espaces cohérents, \mathcal{K}_j , et commute avec les opérateurs unitaires qui représentent le groupe de Poincaré.

II. — LA THÉORIE QUANTIQUE LOCALE ⁽¹⁾ ⁽²⁾

Toutes les expériences qu'un physicien peut faire ont la propriété qu'elles se produisent dans un domaine borné de l'espace-temps. Ainsi, il est naturel d'associer à chaque partie ouverte bornée, \mathcal{O} , de l'espace-temps les observables qu'on peut mesurer avec un appareil situé dans \mathcal{O} , observables que nous appelons *localisées dans* \mathcal{O} . Évidemment, on ne peut pas dire grand-chose actuellement sur la possibilité des mesures dans une partie ouverte de diamètre 10^{-10} cm mais il y a quelques propriétés générales qu'il est très raisonnable d'attribuer à toute observable localisée. C'est le point de départ de la *théorie quantique locale*.

On commence par remplacer l'ensemble des observables localisées dans \mathcal{O} par l'algèbre de von Neumann, $R(\mathcal{O})$, qu'elles engendrent.

On peut considérer cette démarche comme une affaire de commodité mathématique. Si tout élément auto-adjoint de $R(\mathcal{O})$ est observable on ne perd pas d'information en passant à $R(\mathcal{O})$. Sinon, notre ignorance des véritables observables est telle qu'il serait très difficile de les étiqueter. En tout cas, on va étudier les $R(\mathcal{O})$. Il est possible qu'il y ait des distinctions importantes qui sont perdues en passant à l'algèbre de von Neumann et qui seraient préservées en passant à la C^* algèbre ⁽³⁾. Nous n'en discuterons pas ici.

Les propriétés fondamentales des $R(\mathcal{O})$ sont les suivantes :

$$\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2 \implies R(\mathcal{O}_1) \subset R(\mathcal{O}_2) \quad (2.1)$$

et

$$U(a, A)R(\mathcal{O})U(a, A)^{-1} = R(\Lambda(A)\mathcal{O} + a) \quad (2.2)$$

avec une signification évidente, et

$$\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2' \implies R(\mathcal{O}_1) \subset R(\mathcal{O}_2)' \quad (2.3)$$

On écrit \mathcal{O}' pour l'ensemble des points tels que leur séparation de tout point de \mathcal{O} est de genre espace. D'un autre côté, $R(\mathcal{O})'$ est le commutant de $R(\mathcal{O})$.

Cette condition (2.3) veut dire que des observations faites dans deux domaines, dont la séparation est de genre espace, sont indépendantes.

Pour une théorie soumise à des règles de supersélection dont

$$\mathcal{H} = \bigoplus_j \mathcal{H}_j$$

est la décomposition en sous-espaces cohérents, il est nécessaire que toutes les $R(\mathcal{O})$ laissent invariant chaque \mathcal{H}_j . En outre, chaque observable étant localisable dans quelque partie ouverte bornée, l'algèbre de von Neumann engendrée par l'ensemble des $R(\mathcal{O})$ doit être la même que l'algèbre engendrée par toutes les observables. Il résulte de l'hypothèse des règles de supersélection commutative, que cela veut dire

$$\{ R(\mathcal{O}); \mathcal{O} \text{ bornée ouverte} \}' = \{ [\mathcal{H}_j] \}'' \quad (2.4)$$

où $\{ [\mathcal{H}_j] \}''$ est l'algèbre de von Neumann engendrée par les projecteurs sur les sous-espaces cohérents $[\mathcal{H}_j]$.

Un autre aspect de l'idée intuitive que chaque appareil est un objet étendu dans l'espace-temps est exprimé par l'axiome suivant :

$$R(\cup_i \mathcal{O}_i) = \text{VR}(\mathcal{O}_i). \quad (2.5)$$

où $\text{VR}(\mathcal{O}_i)$ est l'algèbre de von Neumann engendré par les $R(\mathcal{O}_i)$.

Il y a d'autres propriétés des $R(\mathcal{O})$ qu'on pourrait considérer comme souhaitables dans une théorie quantique locale et qu'on a réussi à démontrer dans quelques cas particuliers ⁽⁸⁾. Par exemple, la propriété de dualité

$$R(\overset{\circ}{\mathcal{O}}') = R(\mathcal{O})'$$

où $\overset{\circ}{\mathcal{O}}'$ est l'intérieur de \mathcal{O}' et puisque $\overset{\circ}{\mathcal{O}}'$ sera non bornée si \mathcal{O} est bornée, on doit définir le sens du membre de gauche de (2.6) en employant (2.5). Un autre exemple est la propriété d'être facteur

$$R(\mathcal{O}) \cap R(\mathcal{O})' = \{ \alpha I \}.$$

Les deux propriétés ne semblent pas indispensables et par la suite, nous appelons *théorie quantique locale* un couple $\{ U, R \}$, où R est une fonction définie sur les parties bornées ouvertes de l'espace-temps à valeurs algèbres de von Neumann dans un espace hilbertien \mathcal{H} . \mathcal{H} désigne ici un espace hilbertien séparable, U est une représentation unitaire continue du groupe de

⁽⁸⁾ H. ARAKI, *Jour. Math. Phys.*, t. 4, 1963, p. 1343 et t. 5, 1964, p. 1.

recouvrement de \mathcal{F}_\dagger dans \mathcal{K} , réduite par la somme directe $\bigoplus_j \mathcal{K}_j$ et les $R(\mathcal{O})$, satisfont à (2.1) ... (2.5).

Dans la suite, un rôle très important est joué par le théorème suivant, qui est essentiellement dû à Reeh et Schlieder ⁽⁹⁾.

THÉORÈME (2.1). — Soit Φ un vecteur à énergie compacte tel que la projection Φ_j de Φ sur \mathcal{K}_j n'est pas nulle pour $j \in S$. Alors, Φ est totalisateur et séparateur pour $R(\mathcal{O})$ restreinte à $\bigoplus_{j \in S} \mathcal{K}_j$. \mathcal{O} est ici une partie ouverte bornée quelconque de l'espace-temps.

Démonstration. — Soit Φ un vecteur satisfaisant aux hypothèses du théorème. Ce qu'il faut démontrer pour établir que Φ est totalisateur est que $\chi \in \bigoplus_{j \in S} \mathcal{K}_j$ et

$$(\chi, B\Phi) = 0 \quad \text{pour chaque } B \in R(\mathcal{O}) \tag{2.7}$$

impliquent $\chi = 0$. Puisque l'hypothèse (2.4) implique que les projecteurs $E_j = [\mathcal{K}_j]$ appartiennent à l'algèbre de von Neumann $\{R(\mathcal{O}_2); \mathcal{O}_2 \text{ bornée ouverte}'\}$, on a

$$(\chi, B\Phi) = \sum_{j \in S} (E_j \chi, BE_j \Phi).$$

Par conséquent, en remplaçant Φ par $E_j \Phi$, il suffit de démontrer Φ totalisateur dans le cas $\chi, \Phi \in \mathcal{K}_j$. En outre, $E_j \{R(\mathcal{O}_2); \mathcal{O}_2 \text{ bornée ouverte}'\}$ E_j étant par (2.4) un ensemble irréductible d'opérateurs, il suffit d'établir que

$$(\chi, B_1, \dots, B_n \Phi) = 0 \tag{2.8}$$

pour chaque produit de B_i appartenant à $R(\mathcal{O}_i)$, \mathcal{O}_i ouvertes bornées. Ici, on utilise le fait que chaque vecteur non nul est totalisateur pour une algèbre de von Neumann irréductible.

On peut choisir une partie ouverte $\mathcal{O}^{(1)} \subset \mathcal{O}$ et telle que la distance euclidienne entre les frontières de \mathcal{O}_1 et \mathcal{O} n'est pas nulle. Alors $\mathcal{O}^{(1)} + a \subset \mathcal{O}$ pour toute a suffisamment petite. Par conséquent, l'égalité (2.7) implique

$$(\chi, B_{1a_1} \dots B_{na_n} \Phi) = 0 \tag{2.9}$$

pour chaque ensemble de $B_i \in R(\mathcal{O}^{(1)})$ et tout ensemble de a_i suffisamment petit. Ici on écrit

$$B_a = U(a)BU(a)^{-1}. \tag{2.10}$$

⁽⁹⁾ H. REEH et S. SCHLIEDER, *Nuovo Cim.*, t. 22, 1961, p. 1051.

Mais $(\chi, B_{1a_1} \dots B_{na_n} \Phi)$ est valeur au bord de la fonction

$$(\chi, U(a_1 + ib_1)B_1U[(a_2 - a_1 + i(b_2 - b_1))]B_2 \dots \\ \dots U[(a_n - a_{n-1} + i(b_n - b_{n-1}))]B_nU(a_n - ib_n)\Phi)$$

holomorphe si $b_1, b_2 - b_1, \dots, b_n - b_{n-1} \in V_+$. Si une telle fonction holomorphe a des valeurs à bord s'annulant sur une partie réelle ouverte, elle s'annule partout. Ainsi l'égalité (2.9) implique (2.8) pour tout ensemble de \mathcal{O}_i de la forme $\mathcal{O}^{(1)} + a_i, a_i$ une translation quelconque. En employant l'hypothèse (2.5), on voit que cela implique (2.8) pour tout ensemble de \mathcal{O} et il est démontré que Φ est totalisateur.

\mathcal{O} étant bornée, \mathcal{O}' contient une partie ouverte bornée, $\mathcal{O}^{(2)}$, et par la démonstration ci-dessus, on voit que Φ est totalisateur pour $R(\mathcal{O}^{(2)})$. Mais, la condition de commutativité (2.3) implique que $R(\mathcal{O}) \subset R(\mathcal{O}^{(2)})'$. Par conséquent, Φ est séparateur pour $R(\mathcal{O})$ ⁽¹⁰⁾ et la démonstration du théorème est complète.

Remarques. — 1° Évidemment, la démonstration vaut également pour toute \mathcal{O} telle que \mathcal{O}' contient un point intérieur, si on étend la définition de $R(\mathcal{O})$ des parties bornées ouvertes que nous avons considérées jusqu'à maintenant aux parties ouvertes non bornées.

2° Le théorème est également vrai si on remplace l'hypothèse « $\Phi =$ vecteur à énergie compacte » par « $\Phi =$ vecteur analytique pour un groupe à un paramètre $U(\tau n, 1)$, $-\infty < \tau < \infty$, n étant un vecteur du genre temps i. e. $n^2 > 0$ ». La démonstration utilise la propriété de $U(-a_n - ib_n)\Phi$, d'être holomorphe pour b_n dans un voisinage de l'origine.

3° Le fait que les vecteurs d'énergie compacte sont totalisateurs et séparateurs implique que chaque * isomorphisme algébrique d'une algèbre $R(\mathcal{O})$ dans \mathcal{H} sur une algèbre $R_1(\mathcal{O}_1)$ dans \mathcal{H}_1 est spatial ⁽¹¹⁾ i. e. il existe un opérateur unitaire \mathcal{U} de domaine \mathcal{H} et contre-domaine \mathcal{H}_1 tel que l'isomorphisme est donné par $A \rightarrow A_1 = \mathcal{U}A\mathcal{U}^{-1}$. Ce fait doit être capital dans les applications de la théorie quantique locale, mais n'a pas encore été exploité.

L'argumentation du théorème 2.1 un peu raffinée peut fournir des informations sur les relations d'égalité entre les $R(\mathcal{O})$. Le théorème général qui suit a été trouvé par H. J. Borchers ⁽¹²⁾.

D'abord, quelques notations. A chaque partie ouverte bornée, \mathcal{O} , de

⁽¹⁰⁾ Si Φ est totalisateur pour une algèbre de von Neumann R , il est séparateur pour R' . Voir J. DIXMIER, *Algèbres de von Neumann*, p. 6, proposition 5.

⁽¹¹⁾ J. DIXMIER, *C. R. Acad. Sci.*, Paris, t. 238, 1954, p. 439.

⁽¹²⁾ H. J. BORCHERS, *Nuovo Cim.*, t. 22, 1961, p. 1051.

l'espace-temps, on peut en associer une autre que nous dénotons $\langle \mathcal{O} \rangle$, « \mathcal{O} à chapeaux de genre espace » définie comme suit. Si x et y sont deux points tels que $x - y \in V_+$, on appelle le double cône, $\mathcal{C}_{x,y}$, du couple x, y , la partie ouverte déterminée par

$$x - z \in V_+, \quad z - y \in V_+.$$

On obtient $\langle \mathcal{O} \rangle$ comme union des doubles cônes des couples

$x, y \in \mathcal{O}$, tels que $x - y \in V_+$ et le segment $\alpha x + (1 - \alpha)y$, $0 < \alpha < 1$ est dans \mathcal{O} .

THÉORÈME (2.2). — $R(\langle \mathcal{O} \rangle) = R(\mathcal{O})$.

Démonstration. — Soit x, y , un couple de points de \mathcal{O} : $x - y \in V_+$; $\alpha x + (1 - \alpha)y \in \mathcal{O}$ pour $0 < \alpha < 1$.

Puisque \mathcal{O} est ouverte, il existe un voisinage, \mathcal{N} , du segment $[x, y]$ tel que $\mathcal{N} \subset \mathcal{O}$. Nous pouvons choisir une partie ouverte $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$, telle que $\mathcal{M} + a \subset \mathcal{N}$ pour tout a dans un voisinage du segment $\lambda \left(\frac{x - y}{2} \right)$, $-1 \leq \lambda \leq 1$.

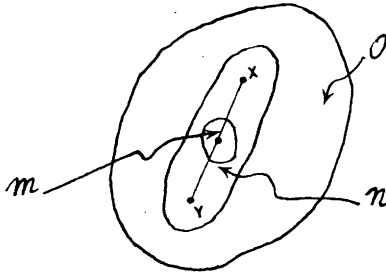


FIG. 1. — Configuration des points $x, y \in \mathcal{O}$, et voisinages \mathcal{M} et \mathcal{N} .

On considère les fonctions continues de a ,

$$(\Phi, B_a C \Psi) \quad \text{et} \quad (\Phi, C B_a \Psi)$$

avec Φ, Ψ à énergie compacte. La première est valeur au bord d'une fonction

$$(U(- (a - ib))\Phi, BU(- (a + ib))C\Psi)$$

holomorphe dans l'argument $(a + ib)$ pour $b \in -V_+$. La deuxième est valeur à bord de

$$(\Phi, CU(a + ib)BU(- (a + ib))\Psi)$$

holomorphe dans l'argument $a + ib$ pour $b \in V_+$. Si $C \in R(\mathcal{N})'$, elles coïncident pour $b = 0$, a dans un voisinage de $\lambda \left(\frac{x-y}{2} \right)$, $-1 \leq \lambda \leq 1$. Alors le théorème « Edge of the Wedge » ⁽¹³⁾ dit qu'elles sont holomorphes dans un voisinage du double cône $C_{\frac{x-y}{2}, -\left(\frac{x-y}{2}\right)}$ du couple $\frac{x-y}{2}$, $-\left(\frac{x-y}{2}\right)$.

Ainsi, $C \in R(\mathcal{N})'$ implique que $C \in R(C_{x,y})'$. Considérons, en particulier $C \in R(\mathcal{O})'$. Alors $\mathcal{N} \subset \mathcal{O}$ et (2.1) donne $R(\mathcal{O})' \subset R(\mathcal{N})' \subset R(C_{x,y})'$ pour chaque \mathcal{N} et chaque segment du genre temps $[x, y] \subset \mathcal{N}$. Puisque par (2.5), les $R(C_{x,y})$ engendrent $R(\langle \mathcal{O} \rangle)$, on a $R(\mathcal{O})' \subset R(\langle \mathcal{O} \rangle)'$. Mais $\mathcal{O} \subset \langle \mathcal{O} \rangle$ et (2.1) donne $R(\mathcal{O}) \subset R(\langle \mathcal{O} \rangle)$. Par conséquent, $R(\mathcal{O})' = R(\langle \mathcal{O} \rangle)'$ et

$$R(\mathcal{O}) = R(\mathcal{O})'' = R(\langle \mathcal{O} \rangle)'' = R(\langle \mathcal{O} \rangle).$$

Une simple relation d'inégalité est donnée par

THÉORÈME (2.3). — Si $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}$ et la distance euclidienne entre les frontières de \mathcal{O}_1 et \mathcal{O} n'est pas nulle, on a $R(\mathcal{O}_1) \neq R(\mathcal{O})$.

Démonstration. — Sous les hypothèses du théorème pour a suffisamment petit

$$R(\mathcal{O}_1 + a) = U(a)R(\mathcal{O}_1)U(a)^{-1} \subset R(\mathcal{O}).$$

Supposons de plus que $R(\mathcal{O}_1) = R(\mathcal{O})$. Alors

$$R(\mathcal{O}_1 + a) = \mathcal{U}(a)R(\mathcal{O}_1)U(a)^{-1} \subset R(\mathcal{O}_1). \quad (2.11)$$

Puisque tout a est somme de vecteurs pris dans un voisinage arbitraire de $a = 0$ (2.11) vaut pour tout a . En employant (2.5) et (2.4), on voit que $R(\mathcal{O}_1) = R(\mathcal{O})$ pour tout \mathcal{O} et $R(\mathcal{O}_1)' = \{[\mathcal{E}_j]\}''$. D'un autre côté, il existe $\mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_1$ telle que $R(\mathcal{O}_2) \subset R(\mathcal{O}_1)'$ et tout vecteur à énergie compacte et $\in \mathcal{E}_j$ est totalisateur pour $R(\mathcal{O}_2)$ et par conséquent pour $\{[\mathcal{E}_j]\}''$. C'est là une contradiction et le théorème est démontré.

Les théorèmes (2.1) et (2.3) rendent applicable à la théorie quantique locale un résultat de Kadison sur le type des algèbres de von Neumann possédant un vecteur totalisateur et séparateur ⁽¹⁴⁾.

THÉORÈME (2.4). — Si R_1 et R sont des algèbres de von Neumann, $R_1 \subset R$, $R_1 \neq R$ et si Φ est un vecteur séparateur et totalisateur pour R_1 et pour R , ni R_1 ni R ne sont finis.

⁽¹³⁾ Voir référence ⁽¹²⁾ et B. S. VLADIMIROV, Trudi STEKLOV, *Matem. Inst.*, t. 60, 1961, p. 102, théorème 5.

⁽¹⁴⁾ R. V. KADISON, *Jour. Math. Phys.*, t. 4, 1963, p. 1511. Voir aussi pour le cas $R(\mathcal{O})$ au facteur, M. GUÉNIN et B. MISRA, *Nuovo Cim.*, t. 30, 1963, p. 1272 et S. DOPPLICHER, *Tesi di Laurea Roma*, 1963 (non publié).

Je rappelle qu'un projecteur E est *infini dans une algèbre de von Neumann* R s'il existe un projecteur $F \in R$ tel que

$$F \neq E \quad FE = F \quad \text{et} \quad UU^* = E, \quad U^*U = F$$

pour quelque $U \in R$. Un projecteur est *fini dans* R s'il n'est pas infini dans R . Une algèbre de von Neumann R est finie si tous ses projecteurs sont finis dans R . Elle est *purement infinie* si tous ses projecteurs sont infinis dans R .

La démonstration de Kadison est simple, mais elle fait appel à la théorie de la dimension à valeurs dans le centre. Cela nécessite trop de technique pour notre exposé.

Puisque toute algèbre abélienne est finie, on a le

COROLLAIRE. — Aucune algèbre $R(\mathcal{O})$ d'une théorie quantique locale n'est abélienne.

Toute algèbre de von Neumann a une décomposition en somme directe d'algèbres finie, purement infinie et semi-finie infinie (Les algèbres semi-finies infinies contiennent des projecteurs non nuls qui sont finis ainsi que des projecteurs qui sont infinis). La partie semi-finie infinie est encore somme directe d'une algèbre continue et d'une algèbre discrète. Une algèbre est discrète si elle est isomorphe à une algèbre dont le commutant est commutatif. Une algèbre est continue si on ne peut pas la décomposer en somme directe d'une algèbre discrète et d'une autre algèbre. La notation de Murray von Neumann est type $I_\infty =$ semi-fini infini discret, $II_1 =$ fini continu, $II_\infty =$ semi-fini continu, $III_\infty =$ purement infini ⁽¹⁵⁾.

On a actuellement quelques raisons de croire qu'en théorie quantique locale, les $R(\mathcal{O})$ n'ont pas de partie I_∞ non vide. Araki l'a démontré pour une grande classe d'ouverts \mathcal{O} et les $R(\mathcal{O})$ qui se présentent dans la théorie d'un champ libre ⁽¹⁶⁾. Il l'a aussi démontré dans le cas d'une théorie quantique locale arbitraire mais pour une classe très spéciale d' \mathcal{O} , sous l'hypothèse que $R(\mathcal{O})$ est un facteur ⁽¹⁷⁾ (Les \mathcal{O} doivent être invariantes par une translation non nulle).

D'ailleurs on a le résultat suivant ⁽¹⁸⁾.

THÉORÈME (2.5). — Soit $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'_1 \cap \mathcal{O}$ non vide. Alors si E est un projecteur de \mathcal{O}_1 , il est infini dans $R(\mathcal{O})$.

Tout comme actuellement est compatible avec l'hypothèse que les $R(\mathcal{O})$ sont purement infinis, mais on ne connaît aucun cas dans lequel II_∞ peut

⁽¹⁵⁾ Voir J. DIXMIER, référence ⁽¹⁰⁾, p. 96 et 120 pour ces définitions.

⁽¹⁶⁾ H. ARAKI, *Jour. Math. Phys.*, t. 4, 1963, p. 1343.

⁽¹⁷⁾ H. ARAKI, *Jour. Math. Phys.*, t. 5, 1964, p. 1, paragraphe 9.

⁽¹⁸⁾ H. J. BORCHERS (*à paraître*). Voir aussi B. MISRA (*à paraître*).

être exclu. Licht a donné une interprétation physique de la propriété d'être purement infini qui la rend assez plausible ⁽¹⁹⁾.

Une autre série de questions non résolues se présente si on cherche la structure du centre $Z(\mathcal{O}) = R(\mathcal{O}) \cap R(\mathcal{O})'$ de $R(\mathcal{O})$. Pour les $R(\mathcal{O})$ de la théorie d'un champ hermitien scalaire libre, Araki a démontré que les $R(\mathcal{O})$ sont des facteurs : $Z(\mathcal{O}) = \{\alpha I\}$ (Dans cette théorie, il n'existe aucune règle de supersélection et, par conséquent, il y a un seul sous-espace cohérent). Le seul résultat général, connu actuellement sur ce sujet est également dû à H. J. Borchers ⁽¹⁸⁾.

THÉORÈME (2.6). — Soit \mathcal{O}_1 et \mathcal{O} ouvertes et bornées avec $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}$. On suppose que la distance euclidienne entre les frontières de \mathcal{O}_1 et \mathcal{O} n'est pas nulle. Si $E \in Z(\mathcal{O}_1) \cap Z(\mathcal{O})$, alors

$$E \in \{[\mathcal{H}_j]\}''.$$

Il est très naturel de conjecturer que pour \mathcal{O} bornée et ouverte $Z(\mathcal{O}) = \{\alpha I\}$ c'est-à-dire $R(\mathcal{O})$ est un facteur, mais actuellement on ne sait pas le démontrer.

III. — CHAMPS D'OPÉRATEURS I : IMPOSSIBILITÉ DES CHAMPS DÉFINIS EN CHAQUE POINT

D'un point de vue mathématique, il est très naturel de chercher des champs qui engendrent les $R(\mathcal{O})$. On précise les notions requises comme suit.

A titre provisoire, nous appelons champ d'opérateurs bornés une fonction, B , définie sur l'espace-temps à valeurs opérateurs linéaires bornés dans \mathcal{H} satisfaisant à

$$x \in \mathcal{O} \text{ implique que } B(x) \in R(\mathcal{O}) \quad (3.1)$$

et à

$$U(a, 1)B(x)U(a, 1)^{-1} = B(x + a). \quad (3.2)$$

Il suit aussitôt de (2.3), (3.1) et (3.2) que

$$[B(x), B(y)] = 0, \quad \text{si } (x - y)^2 < 0, \quad (3.3)$$

et que

$$[B(x), B(y)^*] = 0, \quad \text{si } (x - y)^2 < 0. \quad (3.4)$$

⁽¹⁹⁾ A. L. LICHT, *Jour. Math. Phys.*, t. 4, 1963, p. 1443 (*Note ajoutée à la correction des épreuves* : Récemment Araki a éliminé la possibilité, Π_∞ , dans le cas d'un champ libre. H. ARAKI : Type of von Neumann Algebra associated with free Field, à paraître).

THÉORÈME (3.1). — Dans une théorie quantique locale, ayant un vide, il n'existe pas de champs d'opérateurs bornés non triviaux. Plus précisément, étant donné un espace hilbertien séparable, \mathcal{H} , une représentation unitaire continue du groupe des translations, $a \rightarrow \mathcal{U}(a)$, satisfaisant à la condition spectrale :

$$U(a) = \int \exp ip \cdot a dE(p), \tag{3.5}$$

support $(dE(p)) \subset \bar{V}_+$ et ayant un vide Ψ_0 uniquement défini par

$$\mathcal{U}(a)\Psi_0 = \Psi_0, \tag{3.6}$$

les seules fonctions satisfaisant à (3.2), (3.3), (3.4) ont la propriété

$$B(x)\Psi_0 = b\Psi_0$$

b un nombre complexe. Si de plus B satisfait à (3.1) pour quelque théorie quantique locale, $B(x) = bI$ dans le sous-espace cohérent contenant le vide.

Démonstration. — Nous étudions la fonction $(\Psi_0, B(x)*B(y)\Psi_0)$ définie pour chaque couple x, y de points de l'espace-temps. On trouve grâce à (3.6) et (3.2) que

$$\begin{aligned} (\Psi_0, B(x+a)*B(y+a)\Psi_0) &= (U(a)^{-1}\Psi_0, B(x)*B(y)U(a)^{-1}\Psi_0) \\ &= (\Psi_0, B(x)*B(y)\Psi_0). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Par conséquent, il existe une fonction continue, F , définie sur \mathbf{R}^4 , telle que

$$F(x-y) = (\Psi_0, B(x)*B(y)\Psi_0). \tag{3.8}$$

Évidemment, F a la propriété

$$\sum \bar{\alpha}_i F(x_i - x_j)_{\alpha_j} = \|\sum \alpha_j B(x_j)\Psi_0\|^2 \geq 0, \tag{3.9}$$

pour tout ensemble fini de nombres complexes α_i et de points de l'espace-temps x_i . C'est la définition d'une fonction de type positif. Le théorème de Bochner implique que

$$F(x) = \int \exp(-ip \cdot x) d\mu(p) \tag{3.10}$$

où μ est une mesure positive et finie sur l'espace d'énergie-impulsion. Le support de μ est contenu dans \bar{V}_+ , car

$$\begin{aligned} F(x) &= (\Psi_0, B(x)*B(0)\Psi_0) = (\Psi_0, B(0)*U(x)^{-1}B(0)\Psi_0) \\ &= \int \exp(-ip \cdot x) d(\Psi_0, B(0)*E(p)B(0)\Psi_0). \end{aligned}$$

En conséquence, F est valeur au bord d'une fonction holomorphe, \mathbf{F} de la variable, $x + iy$, définie pour $y \in -V_+$ par

$$\mathbf{F}(x + iy) = \int \exp(-ip \cdot (x + iy)) d\mu(p).$$

L'argumentation précédente s'applique également à $(\Psi_0, B(y)B(x)^*\Psi_0)$ et donne au lieu de (3.10), pour $G(x - y) = (\Psi_0, B(y)B(x)^*\Psi_0)$:

$$G(x) = \int \exp(-ip \cdot x) d\nu(p),$$

avec : support de $\nu \subset -\bar{V}_+$. G est valeur au bord de

$$\mathbf{G}(x + iy) = \int \exp(-ip \cdot (x + iy)) d\nu(p)$$

holomorphe pour $y \in V_+$.

La condition (3.4) donne maintenant

$$F(x) = G(x), \quad \text{pour } x^2 < 0$$

et nous pouvons appliquer le théorème de Bogoliubov-Vladimirov ⁽²⁰⁾ qui dit que \mathbf{F} et \mathbf{G} sont la même fonction holomorphe et

$$\mathbf{F}(z) = \mathfrak{F}\left(\frac{\partial}{\partial z^\mu}\right) f(z \cdot z)$$

où $z = x + iy$, \mathfrak{F} est un polynôme, f est holomorphe dans \mathbf{C}^1 hors de l'axe positif et

$$f(z \cdot z) = \int \exp[-ip \cdot z] d\lambda(p).$$

où λ a son support dans \bar{V}_+ et est invariante par le groupe de Lorentz restreint :

$$d\lambda(p) = d\lambda(\Lambda p).$$

Par conséquent, $d\lambda$ est de la forme

$$d\lambda(p) = c\delta(p)d^4p + d\rho(p^2)d\Omega_{\sqrt{p^2}}(p)$$

où ρ est une mesure sur \mathbf{R}^1 et $d\Omega_m(p) = [p^2 + m^2]^{-\frac{1}{2}} dp_1 dp_2 dp_3$.

La valeur de F à l'origine est donnée par

$$F(0) = \int d\mu(p) = \int \mathfrak{F}(-ip) d\lambda(p).$$

⁽²⁰⁾ N. N. BOGOLIUBOV et V. S. VLADIMIROV, *Nauchnie Dokladi Vishei Skoli*, t. 26, 1958.

Puisque $d\mu(p) \geq 0$ et $\int d\mu(p) < \infty$, il est possible de faire l'intégration en chaîne

$$F(\mathcal{O}) = c + \int d\rho(p^2) \int \mathcal{F}(-ip) d\Omega_{\sqrt{p^2}}(p).$$

Le deuxième terme est infini presque partout relativement à $d\rho$. Par conséquent, $d\rho = 0$, ce qui veut dire

$$B(x)\Psi_0 = b\Psi_0.$$

Mais, selon (3.1) $B(x) \in R(\mathcal{O})$ si $x \in \mathcal{O}$ et le théorème affirme que Ψ_0 est séparateur pour les $R(\mathcal{O})$ dans le sous-espace cohérent contenant le vide. Ainsi, on a

$$B(x) = b1$$

dans ce sous-espace et le théorème est démontré.

Évidemment, ce théorème implique qu'aucun ensemble $\{B_i\}$ de champs d'opérateurs ne peut avoir la propriété

$$\{B_i(x); x \in \mathcal{O}\}'' = R(\mathcal{O}).$$

En un mot, les $R(\mathcal{O})$ ne peuvent pas être engendrés par des champs. La conclusion est claire : la notion de champ d'opérateurs introduite ci-dessus à titre provisoire est insuffisante pour les besoins de la théorie quantique locale.

Il est intéressant que l'homogénéité de l'espace-temps implique qu'un champ n'est défini en aucun point. Par contre, la plupart des distributions qui se présentent dans l'analyse fonctionnelle sont des fonctions sauf sur quelques variétés qui portent des singularités.

On peut se demander si le théorème (3.1) s'étend au cas des opérateurs, $B(x)$, non bornés. En examinant la démonstration, on voit qu'elle est encore valide si on fait des hypothèses convenables sur les domaines des $B(x)$. La faiblesse fatale de cette notion de champ d'opérateurs est d'être définie en chaque point et non pas d'être bornée. Nous passons sur les détails.

Du théorème (3.1), on peut déduire le théorème suivant :

THÉORÈME (3.2). — Dans toute théorie quantique locale ayant un vide, l'intersection des $R(\mathcal{O})$ contenant un point x est l'algèbre de von Neumann triviale

$$R_x \equiv \bigcap_{\mathcal{O} \ni x} R(\mathcal{O}) = \{1\}$$

dans le sous-espace cohérent du vide.



Démonstration. — Si $B \in \mathcal{R}_x$ et $B \neq \alpha 1$, on définit

$$B(y + x) = U(y, 1)BU(y, 1)^{-1}.$$

Il est clair que

$$\begin{aligned} U(a, 1)B(z)U(a, 1)^{-1} &= B(z + a) \\ B(y) \in \mathcal{O} &\quad \text{si } y \in \mathcal{O} \end{aligned}$$

en vertu de (2.2) et

$$[B(z), B(y)] = 0 = [B(z), B(y)^*]$$

pour tout z, y tel que $(z - y)^2 < 0$ en vertu de (2.3). La fonction $B(y)$ ainsi définie satisfait aux hypothèses du théorème (3.1); la conclusion de ce théorème donne une contradiction avec $B \neq \alpha 1$ et la démonstration est achevée.

IV. — CHAMPS D'OPÉRATEURS II : DISTRIBUTIONS A VALEURS OPÉRATEURS

Puisqu'un champ ne peut pas être défini en chaque point on est conduit au point de vue de la théorie des distributions.

Nous appelons un champ d'opérateurs bornés une fonction linéaire, définie sur $\mathcal{D}(\mathbf{R}^4)$ qui, à chaque $f \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^4)$, associe un opérateur $B(f)$. B doit être continue dans la topologie faible des opérateurs de \mathcal{H} , c'est-à-dire $(\Phi, B(f)\Psi)$ doit être une distribution $\in \mathcal{D}(\mathbf{R}^4)$ pour chaque $\Phi, \Psi \in \mathcal{K}$. De plus, nous exigeons les analogues de (3.1), (3.2), (3.3) et (3.4) :

$$\text{supp } f \subset \mathcal{O} \quad \text{implique que } B(f) \in \mathcal{R}(\mathcal{O}) \quad (4.1)$$

et

$$\begin{aligned} U(a, 1)B(f)U(a, 1)^{-1} &= B(f_a) \\ f_a(x) &= f(x - a). \end{aligned} \quad (4.2)$$

La condition (4.1) implique

$$[B(f), B(g)] = 0 \quad (4.3)$$

$$[B(f), B(g)^*] = 0 \quad (4.4)$$

si $f(x)g(y) = 0$ pour tout couple x, y tel que $(x - y)^2 \geq 0$.

Les champs qu'on considère en physique ont en général une loi de transformation par le groupe de Lorentz. Par exemple, pour un champ scalaire, on a

$$U(0, A)B(f)U(0, A)^{-1} = B(Af) \quad \text{où } (Af)(x) = f(\Lambda(A)^{-1}x). \quad (4.5)$$

Nous n'aurons pas besoin dans cet article d'utiliser une telle loi de transformation et nous ne la postulons donc pas.

La première question qu'on doit poser est évidemment : existe-t-il des champs d'opérateurs bornés non triviaux ? La réponse est que nous ignorons si des champs d'opérateurs bornés existent mais nous connaissons des champs d'opérateurs *non bornés*. Un tel champ, $A(f)$, satisfait à (4.2), (4.3) et (4.4) de façon que l'égalité subsiste quand les deux membres sont appliqués à un vecteur d'un certain domaine dense, D . De plus, on a

$$A(f)D \subset D, \quad U(a, A)D \subset D. \tag{4.6}$$

Cette notion de champ coïncide avec celle que les physiciens emploient depuis quelque temps.

Il n'est pas difficile de construire des champs « approximatifs » en partant d'une théorie quantique locale. On définit

$$B(f) = \int f(x)dx U(x, 1)BU(x, 1)^{-1} \quad \text{avec } B \in R(\mathcal{O}). \tag{4.7}$$

Ainsi défini, $B(f)$ ne satisfait pas exactement à (4.1) mais approximativement

$$B(f) \in R(\text{supp } f + \mathcal{O}). \tag{4.8}$$

Quant à (4.3), elle est remplacée par

$$[B(f), B(g)] = 0$$

si tous les points de $\text{supp } f + \mathcal{O}$ sont séparés de tous les points de $\text{supp } g + \mathcal{O}$ par des intervalles du genre d'espace. Si on pouvait choisir une suite \mathcal{O}_n , tendant vers un point et tel que les $B_n(f)$ correspondants convergent, on aurait l'espoir d'obtenir des champs dans une théorie quantique locale.

A présent, on ne sait pas si un tel procédé est réalisable sauf dans quelques cas très spéciaux. Le problème ressemble à ceux que pose le passage d'une représentation d'un groupe de Lie à la représentation de l'algèbre de Lie associée, avec la différence importante que ces derniers sont résolus.

Le passage inverse d'un ensemble de champs non bornés à une théorie quantique locale est aussi important. Sous des hypothèses assez restrictives Borchers et Zimmermann ont démontré que c'est possible ⁽²¹⁾ :

Pour $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$ et réelle, les opérateurs $A(f)$ doivent avoir le vide, Ψ_0 , comme vecteur analytique, c'est-à-dire

$$\| A(f)^n \Psi_0 \| \leq C^n !$$

(21) H. J. BORCHERS et W. ZIMMERMANN, *Nuovo Cimento*, t. 31, 1964, p. 1047.

Cette inégalité est satisfaite si A est un champ libre mais pour le cas du cube $: A^3$: d'un champ libre elle ne l'est pas ⁽²²⁾. Néanmoins, on peut associer une théorie quantique locale à $: A^3$;, employant la correspondance entre opérateurs non bornés et bornés étudiée par M. H. Stone ⁽²³⁾.

Mais, jusqu'à présent, on n'a pas réussi à démontrer qu'en général les algèbres de von Neumann ainsi obtenues satisfont aux axiomes de la théorie quantique locale. Il y a là bien des questions difficiles, comme partout dans la théorie quantique des champs.

(Manuscrit reçu le 6 juillet 1964).

⁽²²⁾ Remarque que je dois à M. A. Jaffe et D. Currie.

⁽²³⁾ M. H. STONE, *Jour. Indian Math. Soc.*, t. 15, 1951-1952, p. 155.
