ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

ANDRÉ LICHNEROWICZ

Champ de Dirac, champ du neutrino et transformations C, P, T sur un espace-temps courbe

Annales de l'I. H. P., section A, tome 1, nº 3 (1964), p. 233-290

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1964__1_3_233_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section A
Vol. I, nº 3, 1964, p. 233-290. *Physique théorique.*

Champ de Dirac, champ du neutrino et transformations C, P, T sur un espace-temps courbe

par

André LICHNEROWICZ
(Collège de France)

INTRODUCTION

Dans deux travaux récents (Lichnerowicz [*1*] [*3*]), j'ai exposé en détail les principaux éléments d'une théorie quantique des champs sur un espace-temps courbe V_4. La construction, dans le cadre de la relativité générale, des commutateurs et anticommutateurs des différents champs physiques suppose l'introduction de « propagateurs » tensoriels ou spinoriels relatifs à des opérateurs différentiels hyperboliques sur V_4.

Dans mon premier travail [*1*], j'ai développé la théorie mathématique de ces propagateurs dans le cas tensoriel et j'ai appliqué cette théorie à l'étude du méson vectoriel ou du champ électromagnétique (spin 1) ainsi qu'à celle du champ gravitationnel varié (spin 2) sur la variété espace-temps V_4. Le mémoire [*3*] a été consacré aux propagateurs spinoriels et a permis la construction d'anticommutateurs rigoureux par le champ de Dirac (spin 1/2) et pour le champ de Rarita-Schwinger (spin 3/2), ainsi que l'extension à la relativité générale de la classique théorie de Pétiau-Duffin-Kemmer (spin maximum 1) et du commutateur correspondant d'Umezawa-Visconti.

* * *

Le présent travail a deux buts : il convenait, d'une part, de développer une théorie des neutrinos sur un espace-temps courbe. Il convenait aussi, à la lumière des études des différents champs physiques, d'élaborer, dans le cadre ainsi créé, une théorie des transformations C, P et T. La théorie des neutrinos proposée ici ne se réduit pas, même dans le cas plan à la classique théorie de Yang et Lee; elle prévoit l'existence de deux neutrinos ν et ν' et de deux antineutrinos $\bar{\nu}$ et $\bar{\nu}'$, correctement liés par conjugaison de charge. L'essentiel de cette théorie a été publié, en collaboration avec Mme Moret-Bailly, dans une note aux Comptes rendus.

En ce qui concerne les transformations C, P, T, il nous a fallu modifier assez sensiblement le point de vue classique pour le rendre formulable sur un espace-temps courbe. Nous avons ainsi été conduits à donner une définition nouvelle de la symétrie d'espace P et de la symétrie de temps T faisant intervenir directement deux de ces « objets géométriques » que l'on nomme des orientations. L'orientation temporelle ρ de V_4 et son orientation spatiale σ (ou son orientation totale $\varepsilon = \rho\sigma$) jouent ici un rôle essentiel. Une invariance CTP apparaît pour des systèmes physiques invariants d'une part par conjugaison hermitienne (transformation H), d'autre part par symétrie totale (transformation K).

*
* *

Ce travail est divisé en quatre parties : la partie I est consacrée aux spineurs sur un espace-temps courbe muni de deux orientations. La notion d'espace fibré des repères spinoriels y joue le rôle principal et les spineurs envisagés sont toujours des « spineurs à 4 composantes ». On notera que, dans un but de simplicité, nous avons systématiquement adopté des matrices de Dirac réelles, ce qui conduit pour la conjugaison de charge à la représentation la plus simple.

Une seconde partie porte sur la théorie générale du champ de Dirac et montre comment la théorie classique du cas plat s'étend sans difficultés à un espace-temps courbe quelconque. Il est alors aisé de développer la théorie du champ neutrinique considéré comme un champ de Dirac sans terme de masse. Après décomposition du spineur ψ correspondant en spineurs positif et négatif, ψ_+ et ψ_-, il est possible de déduire de la théorie les anticommutateurs rigoureux des champs ψ_+ et ψ_- et d'étudier les propriétés des principaux observables.

La partie IV est consacrée à l'étude des C, P ou T-invariances des différentes théories des champs physiques dans le cadre adopté. Ce cadre et le formalisme correspondant rendent presque triviale l'étude des invariances.

Je tiens à remercier ici Mme Moret-Bailly pour sa collaboration et M. Louis Michel pour quelques entretiens extrêmement fructueux.

I. — LES SPINEURS SUR UN ESPACE-TEMPS COURBE

1. **Orientations sur un espace-temps.** — *a)* Soit V_4 une variété différentiable de dimension 4, de classe C^∞. Nous supposons l'espace-temps V muni d'une structure riemanienne dont la métrique ds^2 est de type *hyperbolique normal*. Nous avons en coordonnées locales (x^α) (α, tout indice grec $= 0, 1, 2, 3$) de V_4 :

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x^\alpha)dx^\alpha dx^\beta \tag{1-1}$$

Nous désignons par $\mathbf{g}$ le tenseur métrique de V_4. Si T_x est l'espace vectoriel tangent en x à V_4, la métrique (1-1) définit dans T_x, en chaque point x de V_4, un cône convexe du second ordre, le cône élémentaire C_x lieu des directions spatio-temporelles telles que $ds^2 = 0$.

Nous rapportons systématiquement l'espace-temps V_4 à des repères orthonormés, éléments d'un *espace fibré principal* $E(V_4)$ sur la base V_4, de groupe structural le groupe de Lorentz homogène L(4). Relativement à ces repères $y = \{ e_0, e_A \}$ ($A = i$, 2, 3) la métrique peut être écrite localement sur un voisinage ouvert de V_4 :

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\theta^\alpha\theta^\beta \tag{1-2}$$

où les θ^α sont des formes de Pfaff et où $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ avec $\eta_{\alpha\beta} = 0$ pour $\alpha \neq \beta$, $\eta_{00} = 1$, $\eta_{AA} = -1$.

b) Le groupe de Lorentz complet L(4) comprend quatre composantes connexes dont la composante de l'identité sera notée $L_0(4)$ et dite le *groupe de Lorentz connexe*. La « symétrie dans l'espace » ($e_0 \to e_0$, $e_A \to -e$) relativement à un repère orthonormée fournit un élément d'une seconde composante $L_1(4)$ qui définit avec $L_0(4)$ le *groupe de Lorentz orthochrone*. De même la « symétrie dans le temps » ($e_0 \to -e_0$, $e_A \to e_A$) définit une troisième composante $L_2(4)$ qui constitue avec $L_0(4)$ le *groupe de Lorentz orthospatial*. Enfin la symétrie totale ($e_0 \to -e_0$, $e_A \to -e_A$) fournit un élément de la quatrième composante $L_3(4)$ qui définit avec $L_0(4)$ le *groupe de Lorentz unimodulaire*.

Si $A = (A^{\lambda'}_\alpha) \in L(4)$ nous pouvons définir son appartenance à l'une des quatre composantes de L(4) de la manière suivante : nous appelons *signature totale* ε_A de la matrice A un nombre égal à ± 1 selon le signe de dét. A. La *signature temporelle* ρ_A de la matrice A est égale à ± 1 selon le signe de $A^{0'}_0$; enfin la *signature spatiale* σ_A de A peut être définie par le produit $\varepsilon_A\rho_A$.

Il en résulte que les quatre composantes de L(4) peuvent être caractérisées par les signatures suivantes :

$$(1\text{-}3)\qquad \begin{array}{lll} L_0(4) : \rho_A = 1, & \sigma_A = 1 \rightarrow \varepsilon_A = 1 \\ L_1(4) : \rho_A = 1, & \sigma_A = -1 \rightarrow \varepsilon_A = -1 \\ L_2(4) : \rho_A = -1, & \sigma_A = 1 \rightarrow \varepsilon_A = -1 \\ L_3(4) : \rho_A = -1, & \sigma_A = -1 \rightarrow \varepsilon_A = 1. \end{array}$$

c) Nous appelons *orientation totale* ε de V_4 un pseudoscalaire de carré 1. Un tel objet géométrique, s'il existe, est défini relativement aux repères y de $E(V_4)$ par une composante $\varepsilon_y = \pm 1$ telle que si $y = y'A$ $(A \in L(4))$

$$(1\text{-}4)\qquad \varepsilon_y = \varepsilon_{y'}\varepsilon_A.$$

Si ε et ε' sont deux orientations totales de V_4, $\varepsilon\varepsilon'$ est un scalaire de V_4 de carré 1. Par suite, on a sur V_4 soit $\varepsilon\varepsilon' = 1$, soit $\varepsilon\varepsilon' = -1$. Ainsi V_4 admet au plus deux orientations totales ε et $-\varepsilon$.

Supposons que V_4 admette une orientation totale ε et considérons un recouvrement arbitraire de V_4 par des voisinages ouverts munis de repères orthonormés. Si $\{\theta^\alpha\}$ sont les formes de Pfaff correspondant à un ouvert quelconque du recouvrement, les

$$\varepsilon\theta^0 \wedge \theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \theta^3$$

définissent sur V_4 une 4-forme globale η, la *forme élément de volume* définie par la métrique et l'orientation. La donnée de la forme η est équivalente à celle de l'orientation.

d) Une *orientation temporelle* ρ est définie sur V_4, relativement aux repères $y \in E(V_4)$ par une composante $\rho_y = \pm 1$ telle que si $y = y'A$, on ait

$$(1\text{-}5)\qquad \rho_y = \rho_{y'}\rho_A.$$

On voit de même que V_4 admet au plus deux orientations temporelles ρ et $-\rho$.

Nous supposons dans toute la suite que V_4 *admet une orientation totale* ε *et une orientation temporelle* ρ *que nous choisissons.*

On notera qu'une variété hyperbolique V_4 peut admettre une orientation totale et n'admettre aucune orientation temporelle ou inversement.

Un vecteur e_0 avec $(e_0^2 = 1)$ en x *est orienté vers le futur* (resp. le passé) si la composante de ρ relativement aux repères orthonormés (e_0, e_A) est égale à 1 (resp. -1). L'orientation temporelle ρ permet ainsi de distinguer, de façon cohérente sur toute la variété, les demi-cônes de C_x, *demi-cône futur* C_x^+ *et demi-cône passé* C_x^-.

La donnée de ε et ρ définit sur V_4 une *orientation spatiale* $\sigma = \varepsilon\rho$ de composante $\sigma_y = \varepsilon_y \rho_y = \pm 1$ telle que si $y = y'A$:

(1-6) $$\sigma_y = \sigma_{y'} \sigma_A.$$

Ces différentes orientations jouent un rôle fondamental pour la définition des transformations P et T.

2. **Variétés globalement hyperboliques.** — *a)* Sur la variété espace-temps V_4 munie de l'orientation temporelle ρ, un *chemin temporel* est un chemin dont la tangente en tout point x est dans ou sur C_x. Si K est un ensemble de V_4 le *futur* $E^+(K)$ de K est l'ensemble des chemins temporels issus des points x de K dans le futur de x ; le *passé* $E^-(K)$ est l'ensemble des chemins temporels aboutissant aux points x de K dans le passé de x.

Ces définitions s'appliquent en particulier au cas où $K = \{ x' \}$. L'émission $E(x')$ d'un point x' est la réunion de son futur $E^+(x')$ et de son passé $E^-(x')$. La frontière $\dot{E}(x')$ de cette émission est caractéristique relativement au champ des cônes élémentaires, c'est-à-dire est tangente en chacun de ses points x au cône C_x. A$\dot{E}(x') = \Gamma_{x'}$, on donne le nom de *conoïde caractéristique de sommet* x'. Ce conoïde est un lieu de bicaractéristiques ou géodésiques isotropes issues de x'.

A l'aide de coordonnées normales géodésiques de centre x', on voit qu'au voisinage de son sommet, le conoïde $\Gamma_{x'}$ est difféomorphe à un voisinage du sommet d'un cône, les bicaractéristiques correspondant aux génératrices du cône. Il n'en est plus de même loin du sommet x', même sous les hypothèses globales que nous allons indiquer; en particulier les géodésiques isotropes issues de x' peuvent se recouper.

b) Dans la théorie générale des systèmes linéaires hyperboliques, Leray a introduit des hypothèses globales qui assurent l'existence de solutions élémentaires, même en présence de singularités du conoïde caractéristique. Nous aurons besoin dans la suite de ces hypothèses.

L'espace-temps V_4 *envisagé sera toujours supposé globalement hyperbolique dans le sens suivant : l'ensemble des chemins temporels joignant deux points est toujours soit vide, soit compact* : de tout ensemble infini de chemins temporels joignant ces deux points, on peut alors extraire une suite convergeant vers un chemin temporel. Si cette condition est satisfaite, aucune ligne de temps ne peut être fermée.

c) Exemple de variété globalement hyperbolique : Considérons une variété difféomorphe à R^4, munie d'une métrique telle que sur R^4 rapporté à ses coordonnées canoniques (x^λ), tous les cônes C_x définis par les $g^{\alpha\beta}(x^\lambda)$ et ramenés par translation au sommet O soient intérieurs à un même cône fixe. Les pentes des chemins temporels sont alors uniformément bornées, ce qui implique l'hyperbolicité globale.

d) Sur une variété globalement hyperbolique, un ensemble K est dit *compact vers le passé* (resp. le futur) si l'intersection de K avec $E^-(x)$ (resp. $E^+(x)$) est compacte ou vide pour tout x; $E^+(K)$ et tout sous-ensemble fermé de $E^+(K)$ sont alors aussi compacts vers le passé.

D'un lemme fondamental de Leray, il résulte que si K *est compact vers le passé et* K′ *compact, l'intersection* $E^+(K) \cap E^-(K')$ *est compacte.*

Tout point d'une variété localement hyperbolique admet un voisinage Ω homéomorphe à une boule ouverte et globalement hyperbolique, de telle sorte que les résultats précédents sont valables sur Ω.

3. **Le groupe Spin** (4). — *a)* Considérons un espace-temps de Minkowski rapporté à un repère orthonormé et désignons par $g_{\alpha\beta}$ les composantes du tenseur métrique. Introduisons un système $\{\gamma_\alpha\}$ de quatre matrices 4×4 de Dirac à éléments complexes

$$\gamma_\alpha = (\gamma_\alpha{}^a{}_b).$$

Les indices grecs α, β, ... sont dits indices tensoriels, les indices latins a, b, ... ($= 1, 2, 3, 4$) indices spinoriels. Dire que les γ_α sont un système de matrices de Dirac, c'est dire que l'on a l'identité

$$(v^\alpha \gamma_\alpha)^2 = -(v^\alpha v^\beta g_{\alpha\beta})e \tag{3-1}$$

quels que soient les v^α appartenant au corps C des complexes; e est la matrice unité. Cette identité se traduit par les conditions fondamentales :

$$\gamma_\alpha \gamma_\beta + \gamma_\beta \gamma_\alpha = -2g_{\alpha\beta}e \tag{3-2}$$

γ_α et γ_β anticommutent pour $\alpha \neq \beta$ et $\gamma_\alpha^2 = -g_{\alpha\alpha}e$. Les systèmes de matrices de Dirac jouissent des propriétés suivantes :

1° Toute matrice 4×4 sur les complexes qui commute avec les γ_α est de la forme ae, où $a \in C$.

2° Si $\{\gamma'_\alpha\}$ est un second système de matrices de Dirac vérifiant (3-2), il existe une matrice régulière Λ sur C telle que :

$$\gamma'_\alpha = \Lambda \gamma_\alpha \Lambda^{-1}.$$

3° On a $\text{dét}(\gamma_\alpha) = 1$, $\text{Tr}(\gamma_\alpha) = 0$, $\text{Tr}(\gamma_\alpha\gamma_\beta) = 0$ pour $\alpha \neq \beta$, $\text{Tr}(\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\gamma) = 0$ pour $\alpha \neq \beta \neq \gamma$, etc.

Considérons ainsi les matrices

(3-3) $e, \quad \gamma_\alpha, \quad \gamma_\alpha\gamma_\beta, \quad \gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\gamma, \quad \gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\gamma\gamma_\delta \qquad (\alpha < \beta < \gamma < \delta).$

On démontre à l'aide de la propriété de trace du 3° que les 16 matrices (3-3) sont indépendantes sur le corps complexe et engendrent l'espace vectoriel sur C des matrices 4 × 4.

b) Considérons maintenant l'*espace vectoriel sur le corps* R *des réels* ayant pour base l'ensemble des 16 matrices envisagées. On déduit de (3-2) que les produits de matrices γ sont éléments de cet espace. Par le produit ordinaire des matrices, cet espace est par suite doué d'une structure Γ d'algèbre, l'algèbre de Clifford réelle engendrée par les γ_α. Les éléments réguliers de Γ forment un groupe multiplicatif Γ^* qui est, d'une manière naturelle, un groupe de Lie (1).

Considérons le sous-espace $\mathcal{M}$ *de* Γ *engendré par les* γ_α *et étudions le sous-groupe* G *de* Γ^* *défini par les matrices* Λ *telles que* :

1° $\Lambda\mathcal{M}\Lambda^{-1} \subset \mathcal{M}$

2° dét $(\Lambda) = 1$

c'est-à-dire telles que :

$$\Lambda\gamma_\alpha\Lambda^{-1} = A_\alpha^{\lambda'}\gamma_{\lambda'} \qquad (\text{dét}\ \Lambda = 1) \tag{3-4}$$

où $A = (A_\alpha^{\gamma'})$ *est une matrice 4 × 4 à éléments réels.*

On déduit aisément de (3-2) que A est un élément de groupe de Lorentz L(4). La formule (3-4) fournit une application $p : \Lambda \in G \to A \in L(4)$ qui est manifestement, d'après sa définition même, un *homomorphisme de* G *dans* L(4).

c) Soit G l'algèbre de Lie de G, $L(4)$ celle de L(4). La projection p définit une projection p' : $\lambda \in G \to \mu \in L(4)$. Si nous représentons μ par le tenseur antisymétrique contravariant $\mu^{\alpha\beta}$, ou déduit par dérivation de (3-4)

$$\lambda\gamma^\alpha - \gamma^\alpha\lambda = -\mu^{\alpha\beta}\gamma_\beta \qquad (\text{Tr}\ \lambda = 0) \tag{3-5}$$

où l'on a posé $\gamma^\alpha = g^{\alpha\beta}\gamma_\beta$. Inversement si $\mu \in L(4)$, toute solution de l'équation précédente peut s'écrire $\lambda = -\frac{1}{4}\mu^{\alpha\beta}\gamma_\alpha\gamma_\beta + ae$ et n'est de trace nulle que pour $a = 0$. Ainsi, quel que soit μ, le système (3-5) admet la solution unique en λ :

$$\lambda = -\frac{1}{4}\mu^{\alpha\beta}\gamma_\alpha\gamma_\beta. \tag{3-6}$$

(1) Sur la théorie du groupe spinoriel, voir R. Brauer et Hermann Weyl, Lichnerowicz [*2*] et géométrie spinorielle (*sous presse*).

Il en résulte aisément que *p' est un isomorphisme de G sur L*(4).

d) Soit G_0 la composante de l'unité de G. De l'isomorphisme entre algèbres de Lie, il résulte dim $p(G_0) =$ dim $L_0(4)$ et par suite :

$$p(G_0) = L_0(4).$$

D'autre part, la matrice γ_0 de déterminant 1 vérifie :

$$\gamma_0\gamma_\alpha\gamma_0^{-1} = -(2g_{0\alpha}e + \gamma_\alpha\gamma_0)\gamma_0^{-1} = 2g_{0\alpha}\gamma_0 - \gamma_\alpha = (S_e)_\alpha^{\lambda'}\gamma_{\lambda'}$$

où $S_e \in L_1(4)$ est la matrice représentant la symétrie dans l'espace; la composante $L_1(4)$ est donc comprise dans $p(G)$.

Enfin la matrice $\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ de déterminant 1 vérifie :

$$(\gamma_1\gamma_2\gamma_3)\gamma_\alpha(\gamma_1\gamma_2\gamma_3)^{-1} = -2\sum_A g_{A\alpha}\gamma_A - \gamma_\alpha = (S_t)_\alpha^{\lambda'}\gamma_{\lambda'}$$

où $S_t \in L_2(4)$ est la matrice représentant la symétrie dans le temps; $L_2(4)$ est donc comprise dans $p(G)$ et il en est de même par produit pour $L_3(4)$. On en déduit :

$$p(G) = L(4).$$

Ainsi p est un *homomorphisme de* G *sur* L(4) dont il est aisé d'obtenir le noyau : celui-ci est à l'intersection de G et du centre Re de Γ; pour qu'une matrice ae ($a \in$ R) appartienne à G, il faut et il suffit d'après la condition de déterminant que $a = \pm 1$. Le noyau est donc constitué par les deux éléments $\pm e$ et L(4) est isomorphe au groupe quotient de G par ce noyau. On démontre aisément que ce noyau appartient à G_0 et que G_0 est simplement connexe.

Le groupe G est appelé ici le *groupe spinoriel* Spin (4). Nous énonçons :

THÉORÈME. — *Le groupe* Spin (4) (*resp.* Spin_0 (4)) *est le revêtement d'ordre 2 du groupe de Lorentz* L(4) (*resp.* $L_0(4)$). Spin_0 (4) *est simplement connexe. La projection p de* Spin (4) *sur* L(4) *est telle que si*

$$A = (A_\alpha^{\lambda'}) = p\Lambda \; \{ A \in L(4), \Lambda \in \text{Spin}(4) \},$$

on ait :

$$\Lambda\gamma_\alpha\Lambda^{-1} = A_\alpha^{\lambda'}\gamma_{\lambda'} \tag{3-7}$$

p induit un isomorphisme p' d'algèbres de Lie défini par (3-5) *et* (3-6).

4. **L'espace fibré des repères spinoriels.** — *a)* Nous supposons désormais que la variété V_4 est telle que du fibré principal $E(V_4)$ des repères orthonormés (§ 1), on puisse déduire *par extension* un fibré principal $S(V_4)$

de groupe structural Spin (4). Lorsqu'il en est ainsi nous disons que V_4 admet une *structure spinorielle*; un point z de $S(V_4)$ est appelé un *repère spinoriel* et $S(V_4)$ l'*espace fibré des repères spinoriels*. L'existence de $S(V_4)$ est liée à la nullité de la seconde classe de Stiefel-Whitney de la variété V_4. Nous notons π la projection canonique de $S(V_4)$ sur V_4 et p la projection de $S(V_4)$ sur $E(V_4)$. Un tenseur de V_4, ou une orientation, est dit rapporté à un repère spinoriel s'il est rapporté au repère orthonormé $y = pz$ correspondant à z.

Soit M un espace vectoriel de matrices 1×4 à éléments complexes sur lequel opère le groupe Spin (4). Un *1-spineur contravariant* ψ au point x de V_4 est une application $z \to \psi(z)$ de $\pi^{-1}(x)$ dans M telle que :

(4-1) $$\psi(z\Lambda^{-1}) = \Lambda\psi(z) \qquad (\Lambda \in \text{Spin}\ (4)).$$

Si $\psi(z) = (\psi^a)$, les ψ^a sont les composantes de ψ par rapport au repère spinoriel z. Si $\psi(z\Lambda^{-1}) = (\psi^{b'})$, les $\psi^{b'}$ sont les composantes de ψ par rapport à $z\Lambda^{-1}$ et (4-1) peut s'écrire :

$$\psi^{b'} = \Lambda_a^{b'}\psi^a \qquad (\Lambda = (\Lambda_a^{b'})).$$

Un *1-spineur covariant* φ en x est une application $z \to \varphi(z)$ de $\pi^{-1}(x)$ dans l'espace dual M' de M telle que :

(4-2) $$\varphi(z\Lambda^{-1}) = \varphi(z)\Lambda^{-1} \qquad (\Lambda \in \text{Spin}\ (4)).$$

Si $\varphi(z) = (\varphi_a)$, les φ_a sont les composantes de φ par rapport à z et (4-2) s'écrit :

$$\varphi_{b'} = \Lambda_{b'}^a\varphi_a \qquad (\Lambda^{-1} = (\Lambda_{b'}^a)).$$

Les 1-spineurs contravariants forment un espace vectoriel S_x sur les complexes, les 1-spineurs covariants l'espace vectoriel dual S'_x, la forme bilinéaire fondamentale étant

(4-3) $$(\varphi, \psi)_x = \varphi_a\psi^a.$$

b) Par produits tensoriels de S_x et S'_x, nous obtenons l'espace vectoriel des spineurs de type (p, q), contravariant d'ordre p, covariant d'ordre q. Si nous introduisons en outre dans les produits tensoriels l'espace T_x^C, complexifié de l'espace tangent en x, nous obtenons la notion de tenseur-spineur.

Un *champ de 1-spineurs contravariants* de V_4 est une application $z \to \psi(z)$ de $S(V_4)$ dans M satisfaisant (4-1). Des définitions semblables sont valables pour les champs de spineurs de type (p, q) et pour les champs de tenseurs-spineurs.

A l'aide de ces notions, nous pouvons donner une interprétation de la relation (3-7). Elle peut s'écrire :

$$\gamma_{\lambda'} = A_{\lambda'}^{\alpha}\Lambda\gamma_\alpha\lambda^{-1} \qquad A^{-1} = (A_{\lambda'}^{\alpha})$$

soit

(4-4) $\qquad \gamma_{\lambda'}{}^{l'}{}_{m'} = A^{\alpha}_{\lambda'}\Lambda^{l'}_{a}\Lambda^{b}_{m'}\gamma_{\alpha}{}^{a}{}_{b} \qquad (\Lambda = (\Lambda^{l'}_{a})\ ;\ \Lambda^{-1} = (\Lambda^{b}_{m'})).$

On voit sur (4-4) que les $\gamma_{\alpha}{}^{a}{}_{\beta}$ sont les composantes par rapport à un repère spinoriel d'un vecteur spineur γ de type (1, 1); γ est dit le *vecteur-spineur fondamental de* V_4.

5. **Conjugaison de charge et adjonction de Dirac.** — Nous notons Λ^* la complexe conjuguée d'une matrice arbitraire Λ, par Λ^T la transposée de Λ, par $\tilde{\Lambda} = \Lambda^{T*}$ son adjointe. Par raison de simplicité des calculs et des interprétations, nous supposons dans la suite que l'on a choisi pour système de matrices de Dirac γ_α un *système de matrices réelles.*

Il est aisé de vérifier que les matrices suivantes vérifient la condition fondamentale (3-2)

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nous appellerons ce système de matrices le système des matrices standard. On notera que :

(5-1) $$\tilde{\gamma}_\alpha = -\, g_{\alpha\alpha}\gamma_\alpha.$$

b) Si Λ appartient à Spin (4), on a :

(5-2) $$\Lambda\gamma_\alpha\Lambda^{-1} = A^{\lambda'}_{\alpha}\gamma_{\lambda'}.$$

Par passage aux complexes conjugués, il vient :

$$\Lambda^*\gamma_\alpha\Lambda^{*-1} = A^{\lambda'}_{\alpha}\gamma_{\lambda'}.$$

Par suite :

$$\Lambda^*\gamma_\alpha\Lambda^{*-1} = \Lambda\gamma_\alpha\Lambda^{-1}$$

soit :

$$(\Lambda^{-1}\Lambda^*)\gamma_\alpha(\Lambda^{*-1}\Lambda) = \gamma_\alpha.$$

La matrice $\Lambda^{-1}\Lambda^*$ commute avec les γ_α; il en résulte qu'il existe un scalaire complexe a_Λ dépendant continûment de Λ tel que :

(5-3) $$\Lambda^* = a_\Lambda\Lambda.$$

En égalant les déterminants des deux membres de (5-3), on a $(a_\Lambda)^4 = 1$, c'est-à-dire $a_\Lambda = \pm 1$ ou $a_\Lambda = \pm i$; a_Λ dépendant continûment de Λ et ne pouvant prendre que des valeurs discrètes, conserve la même valeur sur chaque composante connexe de Spin (4). Les matrices $\Lambda = e$, $\Lambda = \gamma_0$, $\Lambda = \gamma_1\gamma_2\gamma_3$ étant réelles, on a $a_\Lambda = 1$ pour toutes les composantes de L(4). Ainsi :

(5-4) $$\Lambda^* = \Lambda$$

et par ce choix des matrices de Dirac, Spin (4) a pour éléments des *matrices réelles.*

b) Soit ψ un 1-spineur contravariant, on a :

$$\psi(z\Lambda^{-1}) = \Lambda\psi(z).$$

Par passage aux complexes conjugués, il vient puisque $\Lambda^* = \Lambda$:

$$\psi^*(z\Lambda^{-1}) = \Lambda\psi^*(z).$$

Ainsi il existe une *application antilinéaire* C de S_x sur lui-même qui à tout 1-spineur ψ fait correspondre :

$$C : \psi \to \psi^C = \psi^*.$$

On voit immédiatement que $C^2 = Id$. A C on donne le nom de *conjugaison de charge.*

Par dualité et produit tensoriel, la conjugaison C peut être étendue d'une manière naturelle à des spineurs de type quelconque. En particulier, le conjugué de charge d'un 1-spineur covariant φ est $C\varphi = \varphi^*$. On voit que :

(5-5) $$(C\varphi, \psi) = (\varphi, C\psi)^*.$$

c) De (3-2) il résulte d'après (5-1) :

(5-6) $$\gamma_0\gamma_\alpha\gamma_0^{-1} = -\tilde{\gamma}_\alpha.$$

Introduisons la matrice $\beta = i\gamma_0$ qui pour le système standard s'écrit :

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

β est imaginaire pure, hermitienne et vérifie $\beta^2 = e$. D'après (5-6), on a :

(5-7) $$\beta\gamma_\alpha\beta^{-1} = -\tilde{\gamma}_\alpha.$$

Si $\Lambda \in \text{Spin}\ (4)$, on déduit de (5-2) par passage aux adjoints :

$$\tilde{\Lambda}^{-1}\tilde{\gamma}_\alpha\tilde{\Lambda} = A_\alpha^{\lambda'}\tilde{\gamma}_{\lambda'}$$

soit

$$\tilde{\Lambda}^{-1}\beta\gamma_\alpha\beta^{-1}\tilde{\Lambda} = A_\alpha^{\lambda'}\beta\gamma_{\lambda'}\beta^{-1}.$$

Il en résulte :

$$(\beta^{-1}\tilde{\Lambda}^{-1}\beta)\gamma_\alpha(\beta^{-1}\tilde{\Lambda}\beta) = A_\alpha^{\lambda'}\gamma_{\lambda'} = \Lambda\gamma_\alpha\Lambda^{-1}, \tag{5-8}$$

(5-8) montre qu'il existe un scalaire complexe b_Λ, dépendant continûment de Λ, tel que :

$$\Lambda = b_\Lambda\beta^{-1}\tilde{\Lambda}^{-1}\beta.$$

On voit encore que $b_\Lambda = \pm 1$ ou $\pm\, i$ et que b_Λ conserve la même valeur dans chaque composante connexe de Spin (4). Pour $\Lambda = e$ et $\Lambda = \gamma_0$ on a $b_\Lambda = 1$. Pour $\Lambda = \gamma_1\gamma_2\gamma_3$, on a $b_\Lambda = -1$. Désignons par ρ_Λ la signature temporelle de la matrice Λ qui est *par définition* celle de la matrice $A = p\Lambda$. Il vient :

$$\Lambda = \rho_\Lambda\beta^{-1}\tilde{\Lambda}^{-1}\beta. \tag{5-9}$$

d) Soit ψ un 1-spineur contravariant. De

$$\psi(z\Lambda^{-1}) = \Lambda\psi(z)$$

on déduit par passage aux adjoints :

$$\tilde{\psi}(z\Lambda^{-1}) = \tilde{\psi}(z)\tilde{\Lambda}.$$

Par suite :

$$\tilde{\psi}(z\Lambda^{-1})\beta = \tilde{\psi}(z)\tilde{\Lambda}\beta$$

soit d'après (5-9) :

$$\tilde{\psi}(z\Lambda^{-1})\beta = \rho_\Lambda\tilde{\psi}(z)\beta\Lambda^{-1}.$$

Si ρ_z (resp. $\rho_{z\Lambda^{-1}}$) sont les composantes de l'orientation temporelle ρ par rapport au repère spinoriel z (resp. $z\Lambda^{-1}$), on a :

$$\rho_{z\Lambda^{-1}} = \rho_z\rho_{\Lambda^{-1}} = \rho_z\rho_\Lambda.$$

Il en résulte :

$$\rho_{z\Lambda^{-1}}\tilde{\psi}(z\Lambda^{-1})\beta = \rho_z\tilde{\psi}(z)\beta^{-1}, \tag{5-10}$$

(5-10) exprime que, sur la variété V_4 munie de l'orientation temporelle ρ, on peut associer à tout 1-spineur contravairant ψ, le 1-spineur covariant :

$$\bar{\psi} = \rho\tilde{\psi}\beta.$$

Inversement tout 1-spineur covariant φ est l'image du 1-spineur contravariant $\rho\beta\tilde{\varphi}$. Nous définissons ainsi une *application antilinéaire* A de S_x sur S'_x.

$$A : \psi \to \bar{\psi} = \rho\tilde{\psi}\beta$$

A est appelée l'*adjonction de Dirac*. Il lui correspond sur S_x une forme sesquilinéaire non dégénérée définie par :

$$H(\psi_1, \psi_2) = (A\psi_1, \psi_2) = (A\psi_2, \psi_1)^*. \tag{5-11}$$

L'adjonction de Dirac A s'étend d'une manière naturelle, par dualité et produits tensoriels aux spineurs de type quelconque.

e) En théorie quantique des champs, on substitue aux composantes complexes d'un spineur ψ des composantes opérateurs linéaires dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Soit $\{\ldots, \ldots\}$ le produit scalaire dans cet espace de Hilbert. Si on note par le symbole $\#$ le conjugué hermitien d'un opérateur de $\mathcal{H}$, on a :

$$\{\psi(z)u, v\} = \{u, \psi^{\#}(z)v\}$$

où $u, v \in \mathcal{H}$.

Si ψ est un 1-spineur contravariant opératoriel, il vient :

$$\{\psi(z\Lambda^{-1})u, v\} = \{\Lambda\psi(z)u, v\} = \Lambda\{\psi(z)u, v\} = \Lambda\{u, \psi^{\#}(z)v\} = \{u, \Lambda^*\psi^{\#}(z)v\}.$$

On en déduit :

$$\psi^{\#}(z\Lambda^{-1}) = \Lambda^*\psi^{\#}(z). \tag{5-12}$$

Désignons, d'autre part, par le symbole $\times$ le produit de la conjugaison hermitienne par la transposition T en tant que matrice d'opérateurs. Par transposition de (5-12), il vient :

$$\psi^{\times}(z\Lambda^{-1}) = \psi^{\times}(z)\tilde{\Lambda}. \tag{5-13}$$

Il en résulte que si ψ est *opératoriel*, on peut définir la *conjugaison de charge* en substituant $\psi^{\#}$ à ψ^* et l'adjonction de Dirac en substituant $\psi^{\times}$ à $\tilde{\psi}$. Si ψ est un 1-spineur contravariant opératoriel, on a ainsi, avec notre système de matrices de Dirac :

$$\psi^c = \psi^{\#} \qquad \bar{\psi} = \rho\psi^{\times}\beta.$$

6. **La 2-forme spinorielle fondamentale.** — *a)* Cherchons la loi de commutation entre adjonction de Dirac et conjugaison de charge sur les 1-spineurs. Si ψ est un 1-spineur contravariant ordinaire :

$$C\psi = \psi^*$$

et par suite :

$$AC\psi = \rho\overset{T}{\psi}\beta.$$

D'autre part de :

$$A\psi = \rho\tilde{\psi}\beta$$

on déduit :

$$CA\psi = \rho\overset{T}{\psi}\beta^*$$

soit d'après le caractère imaginaire pur de β :

$$CA\psi = -\rho\overset{T}{\psi}\beta.$$

On a ainsi :

$$AC\psi = -CA\psi.$$

L'adjonction de Dirac et la conjugaison de charge anticommutent sur les 1-spineurs.

b) A tout 1-spineur contravariant ψ, faisons correspondre le 1-spineur covariant $AC\psi$. Nous définissons ainsi un isomorphisme Γ (application *linéaire*) de S_x sur S'_x, c'est-à-dire un 2-spineur Γ covariant non dégénéré. Si Γ_{ab} sont les composantes du 2-spineur Γ :

$$(\Gamma\psi)_a = \Gamma_{ab}\psi^b.$$

Si ψ_1, ψ_2 sont deux 1-spineurs contravariants, on a d'après (5-11) :

$$(\Gamma\psi_1, \psi_2) = (AC\psi_1, \psi_2) = (A\psi_2, C\psi_1)^*$$

soit d'après (5-5) et l'anticommutation de A et C

$$(\Gamma\psi_1, \psi_2) = (CA\psi_2, \psi_1) = -(AC\psi_2, \psi_1).$$

La relation :

$$(\Gamma\psi_1, \psi_2) = -(\Gamma\psi_2, \psi_1)$$

exprime que le 2-spineur Γ est antisymétrique. La 2-forme spinorielle Γ est appelée la *2-forme spinorielle fondamentale.* Au moyen de Γ, il est possible d'identifier les 1-spineurs contravariants et covariants et par suite de ne considérer que des p-spineurs d'un seul type. Mais l'antisymétrie de Γ doit conduire à des précautions concernant les signes.

Au vecteur-spineur fondamental γ de type (1, 1) correspond par Γ un vecteur-2 spineur covariant qui est symétrique en tant que spineur :

$$\gamma_{\alpha ab} = \Gamma_{ar}\gamma_{\alpha}{}^{r}{}_{b} = \gamma_{\alpha ba}.$$

7. **Le 2-spineur** ξ. — *a)* Entre l'espace vectoriel des formes ou tenseurs antisymétriques au point x de V_4 et l'espace des 2-spineurs de type (1, 1),

il existe un *isomorphisme naturel* S défini de la manière suivante. A toute p-forme $\alpha^{(p)}$ à valeurs complexes faisons correspondre le (1, 1) spineur :

$$S\alpha^{(p)} = \frac{1}{p\,!}\gamma^{\rho_1}\ldots\gamma^{\rho_p}\alpha^{(p)}_{\rho_1\ldots\rho_p}.$$

Si α est une forme *non homogène* à valeurs complexes, on a :

$$\alpha = \sum_{p=0}^{4}\alpha^{(p)} \qquad \text{et} \qquad S\alpha = \sum_{p=0}^{4} S\alpha^{(p)}.$$

Inversement en le rapportant à la base définie par les produits de matrices de Dirac distinctes, tout (1, 1)-spineur ψ peut s'écrire d'une manière et d'une seule, d'après les considérations du § 3 :

$$\psi = \sum_{p=0}^{4}\frac{1}{p\,!}\gamma^{\rho_1}\ldots\gamma^{\rho_p}\alpha^{(p)}_{\rho_1\ldots\rho_p} = \sum_{p=0}^{4}S\alpha^{(p)} \tag{7-1}$$

où les $\alpha^{(p)}$ sont des p-formes à valeurs complexes. Ainsi il existe une forme α et une seule telle que

$$\psi = S\alpha. \tag{7-2}$$

b) Sur la variété espace-temps V_4 munie de l'orientation ε, nous avons défini la forme élément de volume η. A cette forme correspond par S le (1, 1)-spineur $S\eta$. Posons :

$$\xi = iS\eta = \frac{i}{4\,!}\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}\gamma^{\gamma}\gamma^{\delta}\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}. \tag{7-3}$$

Sur un voisinage ouvert de V_4 muni de repères spinoriels, on a :

$$\xi = i\varepsilon\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3. \tag{7-4}$$

Pour le système de matrices de Dirac standard, le spineur ξ est imaginaire pur et vérifie :

$$\tilde{\xi} = \xi. \tag{75}$$

On voit immédiatement que ξ satisfait :

$$\xi\gamma^{\alpha} + \gamma^{\alpha}\xi = 0 \tag{7-6}$$

et

$$\xi^2 = e. \tag{7-7}$$

c) Soit B (resp. $\bar{B}$) l'automorphisme de S_x (resp. S'_x) défini par

$$B : \psi \to \xi\psi \qquad \bar{B} : \varphi \to \varphi\xi$$

et étudions les propriétés de B et $\bar{B}$. Transformons $B\psi$ par conjugaison de charge; il vient :

$$CB\psi = (\xi\psi)^* = -\xi\psi^* = -\xi\psi^c = -BC\psi.$$

Ainsi :

$$(7\text{-}8) \qquad CB = -BC \qquad C\bar{B} = -\bar{B}C.$$

En ce qui concerne l'adjonction de Dirac, on a d'après (7-5) et (7-6) :

$$AB\psi = \rho\tilde{\psi}\tilde{\xi}\beta = \rho\tilde{\psi}\xi\beta = -\rho\tilde{\psi}\beta\xi = -\bar{\psi}\xi = -\bar{B}A\psi.$$

Ainsi :

$$(7\text{-}9) \qquad AB = -\bar{B}A \qquad A\bar{B} = -BA.$$

D'après (7-7), l'opérateur B vérifie $B^2 = Id$. Il en résulte que B admet les valeurs propres ± 1 et S_x peut être décomposé en somme directe $S_{x^+} \oplus S_{x^-}$ de sous-espaces propres de B. Un élément de S_{x^+}(resp. S_{x^-}) est appelé un spineur de *type positif* (resp. *négatif*) ou, par abrégé, un spineur positif ou négatif. Si ψ_+ est un spineur positif :

$$B\psi_+ = \psi_+.$$

Par conjugaison de charge, on a :

$$CB\psi_+ = C\psi_+$$

soit d'après (7-8)

$$B(C\psi_+) = -C\psi_+$$

C applique ainsi S_{x^-} sur S_{x^+} et réciproquement. Les dimensions complexes de S_{x^+} et S_{x^-} sont donc égales entre elles et *égales à 2.*

Si $\psi \in S_x$, on a :

$$\psi = \psi_+ + \psi_-$$

où $\psi_+ \in S_{x^+}$, $\psi_- \in S_{x^-}$. On en déduit :

$$B\varphi = \psi_+ - \psi_-.$$

Il en résulte

$$(7\text{-}10) \qquad \psi_+ = \frac{1}{2}(I + B)\psi \qquad \psi_- = \frac{1}{2}(I - B)\psi.$$

Les résultats et la terminologie sont semblables pour $\bar{B}$. Nous écrirons $S'_x = S'_{x+} \oplus S'_{x-}$. L'application A vérifiant (7-9) change le type des spineurs positifs ou négatifs, c'est-à-dire applique S_{x+} (resp. S_{x-}) sur S'_{x-} (resp. S'_{x+}) et inversement.

Un spineur arbitraire peut être décomposé d'une manière et d'une seule en somme de spineurs de types purs, c'est-à-dire éléments de produits tensoriels des espaces S_{x+}, S_{x-}, S'_{x+}, S'_{x-}. Nous appellerons cette décomposition, la décomposition selon les types positifs et négatifs.

d) Soit $\psi \in S_x$, $\varphi \in S'_x$ deux 1-spineurs, l'un contravariant, l'autre covariant. On a :

$$(\varphi, B\psi) = \varphi\xi\psi$$

et par suite :

$$(\varphi, B\psi) = (\bar{B}\varphi, \psi). \tag{7-11}$$

Si $\varphi = \varphi_+$ est de type positif et $\psi = \psi_-$ de type négatif :

$$(\varphi_+, B\psi_-) = -(\varphi_+, \psi_-) \qquad (\bar{B}\varphi_+, \psi_-) = (\varphi_+, \psi_-).$$

De (7-11), il résulte :

$$(\varphi_+, \psi_-) = 0 \qquad (\varphi_-, \psi_+) = 0. \tag{7-12}$$

On en déduit que si $\varphi = \varphi_+ + \varphi_- \in S'_x$, $\psi = \psi_+ + \psi_- \in S_x$, il vient :

$$(\varphi, \psi) = (\varphi_+, \varphi_+) + (\varphi_-, \psi_-). \tag{7-13}$$

8. **Connexion spinorielle.** — *a)* Une *connexion spinorielle* est par définition une connexion infinitésimale sur le fibré principal $S(V_4)$. Une telle connexion est définie par une 1-forme σ de $S(V_4)$ à valeurs dans l'algèbre de Lie de Spin (4) satisfaisant les deux conditions usuelles pour les formes de connexion. *Il existe une correspondance biunivoque entre les connexions spinorielles et les « connexions de Lorentz »*, c'est-à-dire les connexions sur $E(V_4)$; la correspondance est définie de la manière suivante : si ω est une 1-forme de $E(V_4)$ à valeurs dans l'algèbre de Lie de L(4) définissant une connexion de Lorentz :

$$\sigma(V_z) = p'^{-1}\omega(pV_z)$$

où pV_z est la projection sur $E(V_4)$ du vecteur V_z tangent à z à $S(V_4)$ et où p' est l'isomorphisme de *Spin* (4) sur $L(4)$. Nous ne considérons ici que la *connexion spinorielle dite canonique correspondant à la connexion riemannienne* ω *de* V_4.

Soit U un voisinage de V_4 au-dessus duquel se trouvent définies une section locale de $S(V_4)$ et, par p, une section locale de $E(V_4)$. Sur U, la métrique s'écrit $ds^2 = g_{\alpha\beta}\theta^\alpha\theta^\beta$, où $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ et où les θ^α sont des formes de Pfaff correspondant à la section locale. La connexion ω peut être définie sur U par une matrice $(\omega^\alpha{}_\beta)$ ou $(\omega^{\alpha\beta})$ dont les éléments sont des formes linéaires. La matrice :

$$\sigma = -\frac{1}{4}\,\omega^{\alpha\beta}\gamma_\alpha\gamma_\beta = -\frac{1}{4}\,\omega^\alpha{}_\beta\gamma_\alpha\gamma^\beta \tag{8-1}$$

définit la connexion spinorielle correspondant à ω. Les éléments de σ sont les 1-formes locales :

$$\sigma^a_b = -\frac{1}{4}\,\omega^\alpha{}_\beta\gamma_\alpha{}^a{}_r\gamma^{\beta r}{}_b. \tag{8-2}$$

Si l'on désigne par $C^\alpha_{\beta\rho}$ les coefficients de la connexion ω par rapport aux repères orthonormés de U, les coefficients correspondants de σ sont :

$$\sigma^a_{b\rho} = -\frac{1}{4}C^\alpha_{\beta\rho}\gamma_\alpha{}^a{}_r\gamma^{\beta r}{}_b. \tag{8-3}$$

b) D'après la théorie générale des connexions, un 1-spineur contravariant ψ admet une différentielle absolue qui est une 1-forme $\nabla\psi$, du type 1-spineur contravariant, définie par :

$$\nabla\psi = d\psi + \sigma\psi.$$

La dérivée covariante correspondante est le tenseur-spineur de composantes :

$$\nabla_\rho\psi^a = \partial_\rho\psi^a + \sigma_b{}^a{}_\rho\psi^b$$

où ∂_ρ est la dérivée pfaffienne par rapport aux formes $\{\theta^\rho\}$. Pour un 1-spineur covariant

$$\nabla\varphi = d\varphi - \varphi\sigma$$

et

$$\nabla_\rho\varphi_a = \partial_\rho\varphi_a - \sigma_a{}^b{}_\rho\varphi_b.$$

Par produit tensoriel, on obtient les composantes de la dérivée covariante d'un tenseur-spineur arbitraire. On a le théorème suivant :

THÉORÈME. — 1° *Les dérivées covariantes du vecteur-spineur γ et du 2-spineur ξ sont nulles.*

2° *La conjugaison de charge et l'adjonction de Dirac commutent avec la dérivation covariante.*

3° *La dérivée covariante de la 2-forme spinorielle Γ est nulle.*

En effet, en ce qui concerne le 1°, nous avons :

$$\nabla\gamma^\alpha = d\gamma^\alpha + \omega^\alpha{}_\beta\gamma^\beta + \sigma\gamma^\alpha - \gamma^\alpha\sigma$$

soit :

$$\nabla\gamma^\alpha = \sigma\gamma^\alpha - \gamma^\alpha\sigma + \omega^{\alpha\beta}\gamma_\beta$$

qui est nul en vertu de (3-5) et (8-1).

η et γ étant à dérivées covariantes nulles, il résulte de la définition :

$$\xi = \frac{i}{4\,!}\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}$$

du spineur ξ que celui-ci est à dérivée covariante nulle.

En ce qui concerne le 2°, on a par exemple pour un 1-spineur contravariant :

$$\nabla_\rho C\psi = \partial_\rho\psi^* - \frac{1}{4}C^\alpha_{\beta\rho}\gamma_\alpha\gamma^\beta\psi^*$$

soit d'après la réalité des matrices γ_α choisie :

$$\nabla_\rho C\psi = \left(\partial_\rho\psi - \frac{1}{4}C^\alpha_{\beta\rho}\gamma_\alpha\gamma^\beta\psi\right)^* = C\nabla_\rho\psi.$$

Un raisonnement semblable est valable pour l'adjonction de Dirac. L'isomorphisme Γ n'étant autre que le produit AC, le 3° est une conséquence immédiate du 2°.

c) La courbure de la connexion spinorielle est définie par une 2-forme Π sur $S(V_4)$ de type spinoriel (1, 1). Sur le voisinage U, Π est donnée par la matrice $\Pi = (\Pi^a_b)$ avec :

(8-4) $$\Pi^a_b = d\sigma^a_b + \sigma^a_r \wedge \sigma^r_b.$$

A Π est canoniquement associé le *tenseur-spineur de courbure* P dont les composantes sur U sont données par :

$$\Pi^a_b = \frac{1}{2}P^a{}_{b,\lambda\mu}\theta^\lambda \wedge \theta^* \quad \left(\text{avec } P^a{}_{b,\lambda\mu} = -P^a{}_{b,\mu\lambda}\right).$$

De l'expression de σ, on déduit aisément :

(8-5) $$P^a{}_{b,\lambda\mu} = -\frac{1}{4}R^\alpha{}_{\beta,\lambda\mu}(\gamma_\alpha\gamma^\beta)^a_b$$

où $R^\alpha{}_{\beta,\lambda\mu}$ est le tenseur de courbure riemanienne. Il en résulte en particulier que P vérifie l'*identité de Bianchi*

(8-6) $$\nabla_\lambda P^a{}_{b,\mu\nu} + \nabla_\mu P^a{}_{b,\nu\lambda} + \nabla_\nu P^a{}_{b,\lambda\mu} = 0.$$

Par un raisonnement analogue au raisonnement classique concernant les connexions linéaires, on établit l'*identité de Ricci*

$$(8\text{-}7)\qquad (\nabla_\lambda \nabla_\mu - \nabla_\mu \nabla_\lambda)\psi^{a_1\ldots a_p}_{b_1\ldots b_q} = \sum_{i=1}^{p} \mathrm{P}^{a_i}{}_{r,\lambda\mu}\psi^{a_1\ldots r\ldots a_p}_{b_1\ldots\ldots b_q} - \sum_{j=1}^{q} \mathrm{P}^{r}{}_{b_j,\lambda\mu}\psi^{a_1\ldots\ldots a_p}_{b_1\ldots r\ldots b_q}$$

Pour un tenseur-spineur, apparaissent au second membre des termes classiques supplémentaires contenant le tenseur de courbure.

De (3-2) et des propriétés du tenseur de courbure, on déduit par un calcul local aisé les identités suivantes qui seront utiles dans la suite :

$$(8\text{-}8)\qquad \mathrm{R}_{\alpha\beta,\lambda\mu}\gamma^\beta\gamma^\lambda\gamma^\mu = 2\mathrm{R}_{\alpha\beta}\gamma^\beta \qquad \mathrm{R}_{\alpha\beta,\lambda\mu}\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\lambda\gamma^\mu = -2\mathrm{R}e$$

où $\mathrm{R}_{\alpha\beta}$ est le tenseur de Ricci et R la courbure riemannienne scalaire.

II. — THÉORIE DU CHAMP DE DIRAC

9. **Spineurs-distributions et bispineurs de Dirac.** — La théorie des opérateurs différentiels spinoriels sur un espace-temps courbe nécessite, comme nous le verrons, l'introduction de la notion de spineur-distribution.

a) Soit ψ un 1-spineur contravariant, φ un 1-spineur covariant tels que l'intersection $\mathrm{S}(\psi) \cap \mathrm{S}(\varphi)$ de leurs supports soit compacte. Nous posons

$$(9\text{-}1)\qquad \langle \varphi, \psi \rangle = \int_{\mathrm{V}_4} (\varphi, \psi)_x \eta(x).$$

Un 1-spineur-distribution covariant (resp. contravariant) est une fonctionnelle linéaire continue à valeurs complexes des 1-spineurs contravariants (resp. covariants) à support compact. Si ψ est un tel 1-spineur, nous notons $\langle \varphi, \psi \rangle$ la valeur pour ψ du spineur-distribution φ. Par la formule (9-1) un 1-spineur ordinaire φ définit un 1-spineur distribution.

L'opérateur de dérivation covariante s'étend naturellement aux spineurs-distributions.

b) Nous aurons besoin en particulier de la notion de *bi-1-spineur de Dirac*. Désignons par $s(x, x')$ un bi-1-spineur arbitraire élément de $\mathrm{S}_x \oplus \mathrm{S}'_{x'}$ (c'est-à-dire contravariant en x, covariant en x'), de composantes $s^a_{r'}$, astreint seulement à ce que $s(x, x)$ puisse être identifié à l'opérateur identité sur S_x, soit :

$$(9\text{-}2)\qquad s^a_{r'}(x, x) = \delta^a_{r'}$$

où les $\delta^{a}_{r'}$ sont les symboles de Kronecker. Le *bi-1-spineur de Dirac* de V est le bi-1-spineur distribution :

$$\Sigma^{(\frac{1}{2})}(x, x') = s(x, x')\delta(x, x') \tag{9-3}$$

où $\delta(x, x')$ est le bi-scalaire de Dirac de V_4. Il ne dépend que de la structure riemannienne de V_4 et non du choix de s et peut être défini par :

$$\langle \Sigma^{(\frac{1}{2})}(x, x'), \psi(x') \rangle = \psi(x) \tag{9-4}$$

pour tout 1-spineur contravariant ψ. On a aussi :

$$\langle \Sigma^{(\frac{1}{2})}(x', x), \varphi(x') \rangle = \varphi(x) \tag{9-5}$$

pour tout 1-spineur covariant φ. En ce qui concerne la conjugaison de charge et l'adjonction de Dirac, on vérifie aisément sur (9-3) que :

$$\overset{c}{\Sigma}{}^{(\frac{1}{2})}(x, x') = \Sigma^{(\frac{1}{2})}(x, x') \qquad \overline{\Sigma}{}^{(\frac{1}{2})}(x, x') = \Sigma^{(\frac{1}{2})}(x', x). \tag{9-6}$$

10. **Opérateurs de Dirac et de Klein-Gordon sur les 1-spineurs.** — *a)* Si ψ est un 1-spineur contravariant, φ un 1-spineur covariant nous introduisons les *opérateurs de Dirac*.

$$P\psi = \gamma^{\alpha}\nabla_{\alpha}\psi \qquad \overline{P}\varphi = -\nabla_{\alpha}\varphi\gamma^{\alpha}.$$

Considérons le scalaire :

$$(\varphi, P\psi) = \varphi\gamma^{\alpha}\nabla_{\alpha}\psi = \nabla_{\alpha}(\varphi\gamma^{\alpha}\psi) - \nabla_{\alpha}\varphi\gamma^{\alpha}\psi.$$

Il vient ainsi :

$$(\varphi, P\psi) = (\overline{P}\varphi, \psi) + \nabla_{\alpha}(\varphi\gamma^{\alpha}\psi). \tag{10-1}$$

Si l'intersection des supports de ψ et φ est compacte, on obtient par intégration sur V_4 :

$$\langle \varphi, P\psi \rangle = \langle \overline{P}\varphi, \psi \rangle. \tag{10-2}$$

En ce qui concerne la conjugaison de charge, il résulte de la réalité des γ_{α} et de la commutation de C avec la dérivation covariante :

$$CP\psi = PC\psi \qquad C\overline{P}\varphi = \overline{P}C\varphi. \tag{10-3}$$

D'autre part de $\beta\gamma_{\alpha}\beta^{-1} = -\tilde{\gamma}_{\alpha}$ et de la commutation avec A de la dérivation covariante, on déduit en ce qui concerne l'adjonction de Dirac :

$$AP\psi = \overline{P}A\psi \qquad A\overline{P}\varphi = PA\varphi. \tag{10-4}$$

De (10-3) et (10-4), il résulte :

$$\Gamma P\psi = \bar{P}\Gamma\psi. \tag{10-5}$$

b) Le *laplacien* d'un 1-spineur contravariant (resp. covariant) est l'opérateur $\Delta = P^2$ (resp. $\Delta = \bar{P}^2$). Il est aisé de donner de cet opérateur une expression simple :

$$P^2\psi = \frac{1}{2}(\gamma^\lambda\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^\lambda)\nabla_\lambda\nabla_\mu\psi + \frac{1}{2}\gamma^\lambda\gamma^\mu(\nabla_\lambda\nabla_\mu - \nabla_\mu\nabla_\lambda)\psi.$$

Or d'après l'identité de Ricci

$$(\nabla_\lambda\nabla_\mu - \nabla_\mu\nabla_\lambda)\psi^a = P^a{}_{r,\lambda\mu}\psi^r = -\frac{1}{4}R_{\alpha\beta,\lambda\mu}(\psi^\alpha\psi^\beta)^a_r\psi^r.$$

Ainsi :

$$P^2\psi = -\nabla^\rho\nabla_\rho\psi - \frac{1}{8}R_{\lambda\mu,\alpha\beta}\gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta\psi.$$

De (8-8), il résulte

$$P^2\psi = -\nabla^\rho\nabla_\rho\psi + \frac{1}{4}R\psi. \tag{10-6}$$

On démontre de même que :

$$\bar{P}^2\varphi = -\nabla^\rho\nabla_\rho\varphi + \frac{1}{4}R\varphi.$$

Ainsi dans les deux cas :

$$\Delta = -\nabla^\rho\nabla_\rho + \frac{1}{4}R \tag{10-7}$$

expression dont nous nous servirons. De (10-2) il résulte que si $S(\varphi) \cap S(\psi)$ est compact :

$$\langle \Delta\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, \Delta\psi \rangle. \tag{10-8}$$

c) Étudions l'influence des opérateurs de Dirac sur la décomposition des spineurs selon les types positifs et négatifs. Si ψ est un 1-spineur contravariant, on a puisque ξ est à dérivée covariante nulle

$$BP\psi = \xi\gamma^\alpha\nabla_\alpha\psi = -\gamma^\alpha\xi\nabla_\alpha\psi = -\gamma^\alpha\nabla_\alpha(\xi\psi) = -PB\psi.$$

On obtient ainsi :

$$BP = -PB \qquad \bar{B}\bar{P} = -\bar{P}\bar{B}. \tag{10-9}$$

De (10-9) il résulte que les opérateurs de Dirac changent le type des spineurs positifs et négatifs. Quant au laplacien Δ, il conserve le type de ces spineurs.

d) Un *champ de Dirac* (spin 1/2) *classique* peut être défini par un 1-spineur (ou 1-spineur distribution) contravariant ψ astreint à l'équation de champ libre :

(10-10) $$(P - \mu)\psi = 0 \qquad (\mu = \text{const.})$$

où $\mu\psi$ est le terme de masse. L'adjoint de Dirac $\bar{\psi}$ vérifie alors :

(10-11) $$(\bar{P} - \mu)\bar{\psi} = 0.$$

En vertu de (10-3) les équations (10-10) et (10-11) sont *invariantes par conjugaison de charge*, c'est-à-dire par substitution à ψ de son conjugué de charge ψ^c.

Comme $\Delta - \mu^2 = (P + \mu)(P - \mu)$, tout 1-spineur distribution solution de l'équation de Dirac (10-10) est solution de l'équation de Klein-Gordon

(10-12) $$(\Delta - \mu^2)\psi = 0.$$

Nous montrerons que tout spineur-distribution solution de (10-10) peut se déduire d'une solution de l'équation de Klein-Gordon (10-12) par l'action de l'opérateur $(P + \mu)$.

Décomposons ψ en $\psi_+ + \psi_-$ selon les types positifs et négatifs. L'opérateur P changeant les types, on voit que (10-10) peut s'écrire

(10-13) $$P\psi_+ = \mu\psi_- \qquad P\psi_- = \mu\psi_+.$$

De même (10-11) s'écrit :

(10-14) $$\overline{P\psi_+} = \mu\bar{\psi}_- \qquad \overline{P\psi_-} = \mu\bar{\psi}_+$$

ψ_+ et ψ_- étant eux-mêmes solutions de l'équation de Klein-Gordon.

e) Nous allons montrer que les équations du champ de Dirac dérivent du *lagrangien* :

(10-15) $$L(\psi) = \frac{1}{2}(\bar{\psi}\gamma^\alpha\nabla_\alpha\psi - \nabla_\alpha\bar{\psi}\gamma^\alpha\psi) - \mu\bar{\psi}\psi.$$

On vérifiera aisément, comme plus bas pour le tenseur canonique d'impulsion-énergie, que $L(\psi)$ *est réel*.

Par variation de (10-15), il vient :

(10-16)
$$\delta L(\psi) = \frac{1}{2}(\delta\bar{\psi}\gamma^\alpha\nabla_\alpha\psi + \bar{\psi}\gamma^\alpha\nabla_\alpha\delta\psi - \nabla_\alpha\delta\bar{\psi}\gamma^\alpha\psi - \nabla_\alpha\bar{\psi}\gamma^\alpha\delta\psi) - \mu(\delta\bar{\psi}\psi + \bar{\psi}\delta\psi)$$

soit, à l'aide d'une « intégration par partie » :

$$\delta L(\psi) = \frac{1}{2}\nabla_\alpha(\bar{\psi}\gamma^\alpha\delta\psi - \delta\bar{\psi}\gamma^\alpha\psi) + \delta\bar{\psi}(\gamma^\alpha\nabla_\alpha\psi - \mu\psi) + (-\nabla_\alpha\bar{\psi}\gamma^\alpha - \mu\bar{\psi})\delta\psi.$$

Soit C une chaîne différentiable de dimension 4 de la variété espace-temps. Au lagrangien $L(\psi)$ correspond l'action relative à C :

$$A = \int_C L(\psi)\eta.$$

Supposons $\delta\psi$, $\delta\bar{\psi}$ arbitraires, leurs supports étant *intérieurs à* C. La variation correspondante de l'action est :

$$\delta A = \int_C \delta L(\psi)\eta = \int_C \{ \delta\bar{\psi}(P - \mu)\psi + (\bar{P} - \mu)\bar{\psi}\delta\psi \} \eta.$$

Pour que $\delta A = 0$ quelles que soient les variations $\delta\psi$, $\delta\bar{\psi}$ à supports intérieurs à C, il faut et il suffit que les équations de Dirac (10-10), (10-11) soient satisfaites.

11. **Vecteur courant du champ de Dirac classique.** — Le lagrangien $L(\psi)$ est manifestement invariant par la transformation :

$$\psi \to e^{i\theta}\psi \qquad \bar{\psi} \to e^{-i\theta}\bar{\psi}$$

où θ est une constante réelle. Nous sommes ainsi conduits à prendre en particulier pour variations $\delta\psi$, $\delta\bar{\psi}$ les variations suivantes :

$$\delta\psi = i\psi\delta\theta \qquad \delta\bar{\psi} = -\, i\bar{\psi}\delta\theta$$

où $\delta\theta$ est une fonction scalaire, à valeurs réelles et à *support intérieur à* C. De (10-16) on déduit directement que pour ces variations

$$\delta L(\psi) = i\bar{\psi}\gamma^\alpha\psi\nabla_\alpha\delta\theta = \nabla_\alpha(i\bar{\psi}\gamma^\alpha\bar{\psi}\delta\theta) - \nabla_\alpha(i\bar{\psi}\gamma^\alpha\psi)\delta\theta.$$

Ainsi :

(11-1) $$\delta A = -\int_C \nabla_\alpha J^\alpha(\psi)\delta\theta\eta$$

où l'on a posé :

(11-2) $$J_\alpha(\psi) = i\bar{\psi}\gamma_\alpha\psi.$$

Si ψ *est une solution de l'équation de champ*, δA est nul quelle que soit $\delta\theta$ à support intérieur à C et par suite :

$$\nabla^\alpha J_\alpha(\psi) = 0.$$

Nous sommes ainsi conduits, par ce raisonnement usuel du formalisme lagrangien, à introduire le vecteur-courant $J(\psi)$ du champ de Dirac, défini par (11-2). Étudions les propriétés de ce vecteur-courant.

a) Tout d'abord le *vecteur* $J(\psi)$ *est un vecteur réel.*

En effet de :

$$J^\alpha = i\rho\tilde{\psi}\beta\gamma^\alpha\psi$$

on déduit par adjonction ordinaire :

$$(J^\alpha)^* = - i\rho\tilde{\psi}\tilde{\gamma}^\alpha\beta\psi.$$

Or d'après (5-7) :

$$\tilde{\gamma}^\alpha\beta = - \beta\gamma^\alpha.$$

Il résulte :

$$(J^\alpha)^* = i\rho\tilde{\psi}\beta\gamma^\alpha\psi = i\bar{\psi}\gamma^\alpha\psi = J^\alpha$$

ce qui démontre la propriété.

b) Relativement au repère spinoriel z, étudions la composante :

$$J^0(z) = i\bar{\psi}(z)\gamma^0\psi(z)$$

du vecteur courant. De la définition de la matrice $\beta = i\gamma^0$, il résulte :

$$J^0(z) = i\rho_z\tilde{\psi}(z)\beta\gamma^0\psi(z) = \rho_z\tilde{\psi}(z)\beta^2\psi(z)$$

soit :

(11-3) $$J^0(z) = \rho_z\tilde{\psi}(z)\psi(z)$$

où $\tilde{\psi}(z)\psi(z)$ est positif et n'est nul que pour $\psi(z) = 0$, auquel cas le vecteur $J(\psi)$ est nul au point correspondant x de V_4. Nous supposons qu'il n'en est pas ainsi.

Le vecteur $J(\psi)$ *ne peut être orienté dans l'espace* en aucun point x de V_4. Sinon on pourrait trouver un repère tel que J soit orthogonal au vecteur temporel e_0 correspondant et la composante J^0 par rapport à ce repère serait nulle. Sur (11-3), on voit que si $\rho_z = 1$, $J^0(z)$ est strictement positif et si $\rho_z = -1$, $J^0(z)$ est strictement négatif.

Ainsi, en chaque point x de V_4, le vecteur-courant $J(\psi)$ est dans ou sur le demi-cône futur C_x^+.

Le résultat précédent est valable pour tout spineur au point x et est indépendant de l'équation de Dirac. Le *vecteur* J *peut être isotrope*. Pour qu'il le soit, il faut et il suffit qu'on puisse trouver un repère spinoriel en x tel que les composantes de J vérifient :

(11-4) $$J^1 = J^0$$

et

(11-5) $$J^2 = J^3 = 0.$$

L'équation (11-4) s'écrit :

$$\tilde{\psi}(\beta\gamma^1 - \beta\gamma^0)\psi = 0$$

soit

(11-6) $$\tilde{\psi}(\gamma^0\gamma^1 + e)\psi = 0.$$

Pour les matrices standard du § 5, on a :

$$\gamma^0\gamma^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \gamma^0\gamma^1 + e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et (11-6) s'écrit :

$$\psi^{2*}\psi^2 + \psi^{4*}\psi^4 = 0.$$

Ainsi $\psi^2 = \psi^4 = 0$. Inversement on vérifie aisément que si $\psi^2 = \psi^4 = 0$, (11-5) est vérifié. Le vecteur courant d'un spineur $\psi = (\psi^1, 0, \psi^3, 0)$ est bien isotrope.

c) ψ_1, ψ_2 étant deux 1-spineurs contravariants, posons :

(11-7) $$J^\alpha(\psi_2, \psi_2) = i\bar{\psi}_1\gamma^\alpha\psi_2.$$

On a :

$$J^\alpha(B\psi_1, B\psi_2) = -i\overline{B\psi_1}\gamma^\alpha B\psi_2 = -i\bar{\psi}_1\xi\gamma^\alpha\xi\psi_2 = i\bar{\psi}_1\gamma^\alpha\xi^2\psi_2.$$

Comme $\xi^2 = e$, il vient :

(11-8) $$J^\alpha(B\psi_1, B\psi_2) = J^\alpha(\psi_1, \psi_2).$$

Appliquons cette relation à un spineur $\psi_1 = \psi_+$ de type positif et à un spineur $\psi_2 = \psi_-$ de type négatif.

On a :

$$J^\alpha(B\psi_+, B\psi_-) = J^\alpha(\psi_+, \psi_-).$$

Or :

$$J^\alpha(B\psi_+, B\psi_-) = -i\overline{B\psi_+}\gamma^\alpha B\psi_- = -i\bar{\psi}_+\gamma^\alpha\psi_-$$

soit :

$$J^\alpha(B\psi_+, B\psi_-) = -J^\alpha(\psi_+, \psi_-).$$

On en déduit :

(11-9) $$J^\alpha(\psi_+, \psi_-) = 0$$

ψ étant un 1-spineur contravariant arbitraire, décomposons-le en $\psi_+ + \psi_-$ selon les types positif ou négatif.

De (11-9) il résulte :

$$J^\alpha(\psi, \psi) = J^\alpha(\psi_+, \psi_+) + J^\alpha(\psi_-, \psi_-)$$

soit en abrégeant :

$$J^\alpha(\psi) = J^\alpha(\psi_+) + J^\alpha(\psi_-) \tag{11-10}$$

où l'on a posé :

$$J^\alpha(\psi_+) = i\bar{\psi}_+\gamma^\alpha\psi_+ \qquad J^\alpha(\psi_-) = i\bar{\psi}_-\gamma^\alpha\psi_-. \tag{11-11}$$

d) D'après son origine même, le *vecteur courant d'un champ de Dirac est conservatif*

$$\nabla_\alpha J^\alpha(\psi) = 0. \tag{11-12}$$

On peut le vérifier directement. En effet, de (10-1) écrit pour $\varphi = \bar{\psi}$, on déduit :

$$\nabla_\alpha J^\alpha(\psi) = i\,\{\,\bar{\psi}, P\psi) - (P\bar{\psi}, \psi)\,\}.$$

Si ψ et $\bar{\psi}$ *satisfait aux équations* (10-10), (10-11) *du champ de Dirac libre*, il vient

$$\nabla_\alpha J^\alpha(\psi) = i\mu\,\{\,(\bar{\psi}, \psi) - (\bar{\psi}, \psi)\,\} = 0.$$

Dans la décomposition (11-10) de $J^\alpha(\psi)$, les parties $J^\alpha(\psi_+)$ et $J^\alpha(\psi_-)$ *ne sont pas en général conservatives.*

De

$$\nabla_\alpha J^\alpha(\psi_+) = i\,\{\,\bar{\psi}_+, P\psi_+) - (P\bar{\psi}_+, \psi_+)\,\}$$

on déduit en effet :

$$\nabla_\alpha J^\alpha(\psi_+) = i\mu\,\{\,(\bar{\psi}_+, \psi_-) - (\bar{\psi}_-, \psi_+)\,\}. \tag{11-13}$$

12. **Décomposition du vecteur-courant d'un champ de Dirac.** — Pour un champ satisfaisant aux équations de Dirac *avec* $\mu \neq 0$, la décomposition suivante du vecteur courant $J(\psi)$ est physiquement intéressante. Posons

$$\overset{s}{J}{}^\alpha = -\frac{i}{4\mu}\nabla_\beta\,\{\,\bar{\psi}(\gamma^\beta\gamma - \gamma^\alpha\gamma^\beta)\psi\,\}. \tag{12-1}$$

En explicitant la dérivation, il vient :

$$\overset{s}{J}{}^\alpha = -\frac{i}{4\mu}\,\{\,\nabla_\beta\bar{\psi}(\gamma^\beta\gamma^\alpha - \gamma^\alpha\gamma^\beta)\psi + \bar{\psi}(\gamma^\beta\gamma^\alpha - \gamma^\alpha\gamma^\beta)\nabla_\beta\psi\,\}$$

soit d'après les relations fondamentales vérifiées par les γ :

$$\overset{s}{J}{}^\alpha = -\frac{i}{2\mu}\,\{\,\nabla_\beta\bar{\psi}(\gamma^\beta\gamma^\alpha + g^{\alpha\beta}e)\psi + \bar{\psi}\,(-\,g^{\alpha\beta}e - \gamma^\alpha\gamma^\beta)\nabla_\beta\psi\,\}.$$

On obtient ainsi :

$$\overset{s}{J}{}^{\alpha} = \frac{i}{2\mu}(\overline{P\psi}\gamma^{\alpha}\psi + \overline{\psi}\gamma^{\alpha}P\psi + \overline{\psi}\nabla^{\alpha}\psi - \nabla^{\alpha}\overline{\psi}\psi).$$

En vertu des équations de Dirac $P\psi = \mu\psi$, $\overline{P\psi} = \mu\overline{\psi}$, le vecteur $\overset{s}{J}$ se réduit à :

$$\overset{s}{J}{}^{\alpha} = i\overline{\psi}\gamma^{\alpha}\psi + \frac{i}{2\mu}(\overline{\psi}\nabla^{\alpha}\psi - \nabla^{\alpha}\overline{\psi}\psi).$$

Ainsi le vecteur courant J^{α} peut s'écrire :

(12-2) $$J^{\alpha} = \overset{s}{J}{}^{\alpha} + \overset{or}{J}{}^{\alpha}$$

où l'on a posé :

(12-3) $$\overset{s}{J}{}^{\alpha} = -\frac{i}{4\mu}\nabla_{\beta}\{\overline{\psi}(\gamma^{\beta}\gamma^{\alpha} - \gamma^{\alpha}\gamma^{\beta})\psi\} \qquad \overset{or}{J}{}^{\alpha} = -\frac{i}{2\mu}(\overline{\psi}\nabla^{\alpha}\psi - \nabla^{\alpha}\overline{\psi}\psi).$$

Au vecteur $\overset{s}{J}$ on donne le nom de *courant de spin* et au vecteur $\overset{or}{J}$ celui de *courant orbital* du champ. Le tenseur

(12-4) $$\sigma^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta} - \gamma^{\beta}\gamma^{\alpha})$$

qui apparaît dans l'expression de

$$\overset{s}{J}{}^{\alpha} = \frac{i}{2\mu}\nabla_{\beta}(\overline{\psi}\sigma^{\alpha\beta}\psi)$$

est appelé le *tenseur de spin*.

13. **Tenseur canonique d'impulsion-énergie.** — *a)* Soit X un champ de vecteur arbitraire de V_4, $\mathcal{L}(X)$ l'opérateur de transformation infinitésimale (ou de dérivation de Lie) correspondant. Proposons-nous d'évaluer :

$$\mathcal{L}(X)L(\psi) = X^{\alpha}\nabla_{\alpha}L(\psi).$$

Il vient :

$$\mathcal{L}(X)L(\psi) = \frac{1}{2}X^{\alpha}\nabla_{\alpha}(\overline{\psi}\gamma^{\beta}\nabla_{\beta}\psi - \nabla_{\beta}\overline{\psi}\gamma^{\beta}\psi) - \mu X^{\alpha}\nabla_{\alpha}(\overline{\psi}\psi)$$

soit en développant :

$$\mathcal{L}(X)L(\psi) = \frac{1}{2}X^{\alpha}(\nabla_{\alpha}\overline{\psi}\gamma^{\beta}\nabla_{\beta}\psi - \nabla_{\beta}\overline{\psi}\gamma^{\beta}\nabla_{\alpha}\psi + \overline{\psi}\gamma^{\beta}\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}\psi - \nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}\overline{\psi}\gamma^{\beta}\psi) - \mu X^{\alpha}\nabla_{\alpha}(\overline{\psi}\psi).$$

A l'aide d'une intégration par parties on obtient :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(X)L(\psi) &= \frac{1}{2} X^\alpha \nabla_\beta(\nabla_\alpha \bar{\psi}\gamma^\beta\psi - \bar{\psi}\gamma^\beta\nabla_\alpha\psi) \\ &+ \frac{1}{2} X^\alpha \{ \bar{\psi}\gamma^\beta(\nabla_\alpha\nabla_\beta + \nabla_\beta\nabla_\alpha)\psi - (\nabla_\alpha\nabla_\beta + \nabla_\beta\nabla_\alpha)\bar{\psi}\gamma^\beta\psi \} \\ &- \mu X^\alpha(\nabla_\alpha\bar{\psi}\psi + \bar{\psi}\nabla_\alpha\psi).\end{aligned}$$

Or d'après les propriétés du tenseur de courbure :

$$\gamma^\beta(\nabla_\alpha\nabla_\beta - \nabla_\beta\nabla_\alpha)\psi = -\frac{1}{4} R_{\alpha\beta,\lambda\mu}\gamma^\beta\gamma^\lambda\gamma^\mu\psi = -\frac{1}{2} R_{\alpha\beta}\gamma^\beta\psi$$

et de même :

$$(\nabla_\alpha\nabla_\beta - \nabla_\beta\nabla_\alpha)\bar{\psi}\gamma^\beta = \frac{1}{4} R_{\alpha\beta,\lambda\mu}\bar{\psi}\gamma^\lambda\gamma^\mu\psi^\beta = -\frac{1}{2} R_{\alpha\beta}\bar{\psi}\gamma^\beta.$$

Il en résulte :

(13-1) $\mathcal{L}(X)L(\psi)$

$$= \frac{1}{2} X^\alpha\nabla_\beta(\nabla_\alpha\bar{\psi}\gamma^\beta\psi - \bar{\psi}\gamma^\beta\nabla_\alpha\psi) + X^\alpha\{ \bar{\psi}\nabla_\alpha(P-\mu)\psi + \nabla_\alpha(\bar{P}-\mu)\bar{\psi}\cdot\psi \}.$$

Par suite *pour une solution des équations de Dirac* :

$$\mathcal{L}(X)L(\psi) = \frac{1}{2} X^\alpha\nabla_\beta(\nabla_\alpha\bar{\psi}\gamma^\beta\psi - \bar{\psi}\gamma^\beta\nabla_\alpha\psi). \tag{13-2}$$

b) D'autre part

$$\mathcal{L}(X)L(\psi) = X^\alpha\nabla_\alpha L(\psi) = X^\alpha\nabla_\beta \{ g_\alpha^\beta L(\psi) \}.$$

De (13-2) on déduit par suite que, pour une solution des équations de champ :

$$\nabla_\beta \left\{ \frac{1}{2} (\nabla_\alpha\bar{\psi}\gamma^\beta\psi - \bar{\psi}\gamma^\beta\nabla_\alpha\psi) - g_\alpha^\beta L(\psi) \right\} = 0. \tag{13-3}$$

Mais $L(\psi)$ peut s'écrire :

$$L(\psi) = \frac{1}{2} \{ \bar{\psi}(P-\mu)\psi + (\bar{P}-\mu)\bar{\psi}\cdot\psi \}$$

et par suite *est nul* pour une solution des équations de Dirac.

Nous sommes ainsi conduits à introduire le tenseur $T(\psi)$ défini par :

$$T_{\alpha\beta}(\psi) = \frac{1}{2} (\nabla_\alpha\bar{\psi}\gamma_\beta\psi - \bar{\psi}\gamma_\beta\nabla_\alpha\psi). \tag{13-4}$$

De (13-3) et de la nullité de $L(\psi)$, il résulte que pour une solution des équations de champ :

$$\nabla_\beta T_\alpha{}^\beta(\psi) = 0. \tag{13-5}$$

Au tenseur $T(\psi)$ ainsi déduit de $L(\psi)$ à l'aide du formalisme lagrangien, on donne le nom de *tenseur canonique d'impulsion énergie*. Ce tenseur n'est pas symétrique.

c) On peut aussi établir que le tenseur $T(\psi)$ satisfait la relation :

$$\nabla_\alpha T^\alpha{}_\beta(\psi) = 0. \tag{13-6}$$

En effet de (13-4) on déduit par dérivation :

$$\nabla_\alpha T^\alpha{}_\beta(\psi) = \frac{1}{2}(\nabla^\alpha\bar{\psi}\gamma_\beta\nabla_\alpha\psi - \nabla^\alpha\bar{\psi}\gamma_\beta\nabla_\alpha\psi + \nabla^\alpha\nabla_\alpha\bar{\psi}\gamma_\beta\psi - \bar{\psi}\gamma_\beta\nabla^\alpha\nabla_\alpha\psi).$$

Or ψ et $\bar{\psi}$ satisfaisant les équations de Dirac, on a :

$$\Delta\psi \equiv -\nabla^\alpha\nabla_\alpha\psi + \frac{1}{4}R\psi = \mu^2\psi \qquad \Delta\bar{\psi} \equiv -\nabla^\alpha\nabla_\alpha\bar{\psi} + \frac{1}{4}R\bar{\psi} = \mu^2\bar{\psi}.$$

Ainsi :

$$\nabla_\alpha T^\alpha{}_\beta(\psi) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}R - \mu^2\right)(\bar{\psi}\gamma_\beta\psi - \bar{\psi}\gamma_\beta\psi) = 0.$$

d) Établissons enfin que le tenseur $T(\psi)$ est un tenseur réel. En effet de :

$$T_{\alpha\beta}(\psi) = \frac{\rho}{2}\{(\nabla_\alpha\psi)^{\sim}\beta\gamma_\beta\psi - \tilde{\psi}\beta\gamma_\beta\nabla_\alpha\psi\}$$

on déduit par adjonction ordinaire :

$$T^*_{\alpha\beta}(\psi) = \frac{\rho}{2}\{\tilde{\psi}\tilde{\gamma}_\beta\beta\nabla_\alpha\psi - (\nabla_\alpha\psi)^{\sim}\tilde{\gamma}_\beta\beta\psi\}$$

d'où, d'après $\tilde{\gamma}_\beta\beta = -\beta\gamma_\beta$

$$T^*_{\alpha\beta}(\psi) = \frac{\rho}{2}\{(\nabla_\alpha\psi)^{\sim}\beta\gamma_\beta\psi - \tilde{\psi}\beta\gamma_\beta\nabla_\alpha\psi\} = T_{\alpha\beta}(\psi)$$

ce qui démontre la réalité de $T(\psi)$.

14. **Tenseur symétrique d'impulsion-énergie.** — *a)* La dérivée covariante contractée de certains 2-tenseurs fait intervenir le tenseur canonique $T(\psi)$ et nous permettra de la symétriser.

A cet effet, nous établirons le lemme suivant :

LEMME. — *Si τ et τ' sont les 2-tenseurs définis par*

$$\tau^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\nabla_\rho(\bar{\psi}\sigma^{\rho\beta}\gamma^\alpha\psi) \qquad \tau'^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\nabla_\rho(\bar{\psi}\gamma^\alpha\sigma^{\rho\beta}\psi) \tag{14-1}$$

on a les formules

(14-2) $$\tau^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha} + \bar{\psi}\gamma^{\beta}\nabla^{\alpha}\psi$$

et

(14-3) $$\tau'^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha} - \nabla^{\alpha}\bar{\psi}\gamma^{\beta}\psi.$$

1° Pour établir (14-2) explicitons :

$$\tau^{\alpha\beta} = \frac{1}{4}\nabla_{\rho}\{\bar{\psi}(\gamma^{\rho}\gamma^{\beta} - \gamma^{\beta}\gamma^{\rho})\gamma^{\alpha}\psi\}$$
$$= \frac{1}{4}\nabla_{\rho}\bar{\psi}(\gamma^{\rho}\gamma^{\beta} - \gamma^{\beta}\gamma^{\rho})\gamma^{\alpha}\psi + \frac{1}{4}\bar{\psi}(\gamma^{\rho}\gamma^{\beta} - \gamma^{\beta}\gamma^{\rho})\gamma^{\alpha}\nabla_{\rho}\psi.$$

En utilisant les relations fondamentales (3-2), il vient :

$$2\tau^{\alpha\beta} = \nabla_{\rho}\bar{\psi}(\gamma^{\rho}\gamma^{\beta} + g^{\rho\beta}e)\gamma^{\alpha}\psi - \bar{\psi}(\gamma^{\beta}\gamma^{\rho} + g^{\rho\beta}e)\gamma^{\alpha}\nabla_{\rho}\psi.$$

Il en résulte :

$$2\tau^{\alpha\beta} = (\nabla^{\beta}\bar{\psi}\gamma^{\alpha}\psi - \bar{\psi}\gamma^{\alpha}\nabla^{\beta}\psi) + \nabla_{\rho}\bar{\psi}\gamma^{\rho}\gamma^{\beta}\gamma^{\alpha}\psi - \bar{\psi}\gamma^{\beta}\gamma^{\rho}\gamma^{\alpha}\nabla_{\rho}\psi$$

soit en introduisant le tenseur canonique :

$$2\tau^{\alpha\beta} = 2T^{\beta\alpha} + \nabla_{\rho}\bar{\psi}\gamma^{\rho}\gamma^{\beta}\gamma^{\alpha}\psi + \bar{\psi}\gamma^{\beta}(\gamma^{\alpha}\gamma^{\rho} + 2g^{\alpha\rho}e)\nabla_{\rho}\psi.$$

On obtient ainsi :

$$2\tau^{\alpha\beta} = 2T^{\beta\alpha} - \overline{P\psi}\gamma^{\beta}\gamma^{\alpha}\psi + \bar{\psi}\gamma^{\beta}\gamma^{\alpha}P\psi + 2\bar{\psi}\gamma^{\beta}\nabla^{\alpha}\psi$$

ψ et $\bar{\psi}$ vérifiant les équations de Dirac $P\psi = \mu\psi$, $\overline{P\psi} = \mu\bar{\psi}$, il vient (14-2).

2° Évaluons :

$$\gamma^{\alpha}\sigma^{\rho\beta} = \frac{1}{2}\gamma^{\alpha}(\gamma^{\rho}\gamma^{\beta} - \gamma^{\beta}\gamma^{\rho}) = \frac{1}{2}(-\gamma^{\rho}\gamma^{\alpha} - 2g^{\rho\alpha}e)\gamma^{\beta} + \frac{1}{2}(\gamma^{\beta}\gamma^{\alpha} + 2g^{\alpha\beta}e)\gamma^{\rho}.$$

Il en résulte :

$$\gamma^{\alpha}\sigma^{\rho\beta} = g^{\alpha\beta}\gamma^{\rho} - g^{\alpha\rho}\gamma^{\beta} + \frac{1}{2}\gamma^{\rho}(\gamma^{\beta}\gamma^{\alpha} + 2g^{\alpha\beta}e) - \frac{1}{2}\gamma^{\beta}(\gamma^{\rho}\gamma^{\alpha} + 2g^{\alpha\rho}e).$$

En faisant apparaître $\sigma^{\rho\beta}\gamma^{\alpha}$ et réduisant, il vient :

(14-4) $$\gamma^{\alpha}\sigma^{\rho\beta} = \sigma^{\rho\beta}\gamma^{\alpha} + 2g^{\alpha\beta}\gamma^{\rho} - 2g^{\alpha\rho}\gamma^{\beta}.$$

Le tenseur τ' peut donc s'exprimer à l'aide du tenseur τ par :

$$\tau'^{\alpha\beta} = \tau^{\alpha\beta} - \nabla^{\alpha}(\bar{\psi}\gamma^{\beta}\psi) + g^{\alpha\beta}\nabla_{\rho}(\bar{\psi}\gamma^{\rho}\psi).$$

Soit, puisque le vecteur courant est conservatif :

$$\tau'^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha} + \bar{\psi}\gamma^{\beta}\nabla^{\alpha}\psi - \nabla^{\alpha}(\bar{\psi}\gamma^{\beta}\psi)$$

ce qui conduit à (14-3).

b) De (14-2) et (14-3) on déduit :

$$\frac{1}{2}(\tau^{\alpha\beta} + \tau'^{\alpha\beta}) = T^{\beta\alpha} - \frac{1}{2}(\nabla^{\alpha}\bar{\psi}\gamma^{\beta}\psi - \bar{\psi}\gamma^{\beta}\nabla^{\alpha}\psi).$$

Il vient ainsi :

$$T^{\alpha\beta} - T^{\beta\alpha} = -\frac{1}{2}(\tau^{\alpha\beta} + \tau'^{\alpha\beta}). \tag{14-5}$$

Cela posé, considérons le tenseur symétrique :

$$\Theta^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(T^{\alpha\beta} + T^{\beta\alpha}). \tag{14-6}$$

En vertu de (13-5) et (13-6), ce tenseur est conservatif :

$$\nabla_{\beta}\Theta_{\alpha}{}^{\beta} = 0. \tag{14-7}$$

De plus, d'après (14-5),

$$\Theta^{\alpha\beta} = T^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}(T^{\alpha\beta} - T^{\beta\alpha}) = T^{\alpha\beta} + \frac{1}{4}(\tau^{\alpha\beta} + \tau'^{\alpha\beta}).$$

Nous sommes ainsi conduits à introduire le tenseur :

$$S^{\rho\beta,\alpha} = \frac{1}{4}\bar{\psi}(\sigma^{\rho\beta}\gamma^{\alpha} + \gamma^{\alpha}\sigma^{\rho\beta})\psi \tag{14-8}$$

antisymétrique par rapport à ses deux premiers indices. On obtient ainsi :

$$\Theta^{\alpha\beta} = T^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\nabla_{\rho}S^{\rho\beta,\alpha}. \tag{14-9}$$

Le tenseur S est appelé le *tenseur moment de spin.* La différence entre le tenseur symétrique $\Theta(\psi)$ et le tenseur canonique *ne fait intervenir que la divergence du moment de spin.* Au tenseur $\Theta(\psi)$, on donne le *tenseur symétrique d'impulsion-énergie.*

15. **Noyaux élémentaires et propagateur de l'équation de Klein-Gordon.** — *a)* Considérons l'opérateur de Klein-Gordon $(\Delta - \mu^2)$, (μ = const.) sur les 1-spineurs. De l'expression (10-7) de Δ il résulte que

l'opérateur de Klein-Gordon est un opérateur hyperbolique admettant comme cône caractéristique en $x \in V_4$, le cône élémentaire C_x. Des théorèmes généraux sur les opérateurs hyperboliques, on déduit le résultat suivant : *si la variété espace-temps* V_4 *est globalement hyperbolique, il existe deux noyaux élémentaires de cet opérateur, c'est-à-dire deux bi-1-spineurs distributions* $G^{(\frac{1}{2})\pm}$ *vérifiant*

$$(15\text{-}1) \qquad (\Delta_x - \mu^2)G^{(\frac{1}{2})\pm}(x, x') = \Sigma^{(\frac{1}{2})}(x, x')$$

et qui, pour x' *fixé, ont leurs supports respectivement dans* $E^+(x')$ *ou* $E^-(x')$.

Ces deux noyaux élémentaires sont ainsi définis d'une manière unique. Cette unicité est un cas particulier du théorème général d'unicité suivant : *tout 1-spineur distribution* ψ *solution de* $(\Delta - \mu^2)\psi = 0$ *et à support compact vers le passé ou vers le futur est nécessairement nul.*

Soit θ un 1-spineur covariant à support compact. Toute solution φ à support compact vers le passé de l'équation :

$$(15\text{-}2) \qquad (\Delta - \mu^2)\psi = \theta$$

s'écrit aisément :

$$(15\text{-}3) \qquad \varphi(x) = \langle G^{(\frac{1}{2})-}(x', x), \theta(x') \rangle.$$

En effet l'intersection $K = E^+(S(\theta)) \cap E^-(x)$ est compacte. Si f est une fonction C^∞ différentiable à support compact, égale à 1 sur un voisinage compact de K, on a :

$$\langle G^{(\frac{1}{2})-}(x', x), \theta(x') \rangle = \langle G^{(\frac{1}{2})-}(x', x), (\Delta_{x'} - \mu^2)(f\varphi)(x') \rangle$$
$$= \langle (\Delta_{x'} - \mu^2)G^{(\frac{1}{2})-}(x', x), (f\varphi)(x') \rangle = \varphi(x).$$

De (15-1) on déduit par adjonction de Dirac, compte tenu de (9-6) :

$$(15\text{-}4) \qquad (\Delta_x - \mu^2)\overline{G}^{(\frac{1}{2})\pm}(x, x') = \Sigma^{(\frac{1}{2})}(x', x).$$

Il en résulte que :

$$\varphi(x) = \langle \overline{G}^{(\frac{1}{2})+}(x, x'), \theta(x') \rangle$$

est une solution de (15-2) dont le support est manifestement compact vers le passé. Par comparaison avec (15-3), on voit que pour tout θ à support compact :

$$\langle \overline{G}^{(\frac{1}{2})+}(x, x'), \theta(x') \rangle = \langle G^{(\frac{1}{2})-}(x', x), \theta(x') \rangle.$$

Ainsi :

$$(15\text{-}5) \qquad \overline{G}^{(\frac{1}{2})\pm}(x, x') = G^{(\frac{1}{2})\mp}(x', x).$$

En particulier les noyaux élémentaires $G^{(\frac{1}{2})\pm}$ vérifient ainsi, d'après (15-4),

(15-6) $$(\Delta_x - \mu^2)G^{(\frac{1}{2})\pm}(x', x) = \Sigma^{(\frac{1}{2})}(x', x).$$

De (15-1), on déduit par conjugaison de charge, compte tenu de (9-6) :

$$(\Delta_x - \mu^2)\overset{c}{G}{}^{(\frac{1}{2})\pm}(x, x') = \Sigma^{(\frac{1}{2})}(x, x')$$

et d'après le théorème d'unicité

(15-7) $$\overset{c}{G}{}^{(\frac{1}{2})\pm}(x, x') = G^{(\frac{1}{2})\pm}(x, x').$$

b) J'appelle *propagateur spinoriel relatif à l'opérateur de Klein-Gordon* sur les 1-spineurs, le noyau

$$G^{(\frac{1}{2})}(x, x') = G^{(\frac{1}{2})-}(x, x') - G^{(\frac{1}{2})+}(x, x')$$

qui, pour x' fixé, a son support dans $E(x')$. Par changement de l'orientation temporelle ρ en $-\rho$, $G^{(\frac{1}{2})}$ est changé en $-G^{(\frac{1}{2})}$. D'après (15-1) et (15-6), le propagateur $G^{(\frac{1}{2})}$ satisfait

(15-8) $$(\Delta_x - \mu^2)G^{(\frac{1}{2})}(x, x') = 0 \qquad (\Delta_{x'} - \mu^2)G^{(\frac{1}{2})}(x, x') = 0.$$

D'après (15-5), on a :

(15-9) $$\overline{G}{}^{(\frac{1}{2})}(x, x') = -G^{(\frac{1}{2})}(x', x)$$

et d'après (15-7) :

(15-10) $$\overset{c}{G}{}^{(\frac{1}{2})}(x, x') = G^{(\frac{1}{2})}(x, x').$$

c) On démontre (Lichnerowicz [*1*] et [*3*]) que tout 1-spineur distribution contravariant ψ solution de l'équation de Klein-Gordon

$$(\Delta - \mu^2)\psi = 0$$

peut s'obtenir par *composition de Volterra* du propagateur $G^{(\frac{1}{2})}$ et d'un 1-spineur distribution contravariant χ *à support compact vers le passé et le futur*

(15-11) $$\psi(x) = \int G^{(\frac{1}{2})}(x, x')\chi(x')\eta(x').$$

La composition est entendue au sens suivant : pour tout 1-spineur covariant θ à support compact, on définit ψ par :

$$\langle \psi(x), \theta(x) \rangle = \langle \chi(x'), \varphi(x') \rangle$$

où l'on a posé :

$$\varphi(x') = \langle G^{(\frac{1}{2})}(x, x'), \theta(x) \rangle.$$

16. Noyaux élémentaires et propagateurs des opérateurs $(P - \mu)$ et $(\bar{P} - \mu)$. — *a) Tout 1-spineur distribution* ψ (resp. φ) *solution de* $(P - \mu)\varphi = 0$ (resp. $(\bar{P} - \mu)\varphi = 0$) *et à support compact vers le passé ou vers le futur est nécessairement nul,* puisqu'il est solution de l'équation de Klein-Gordon.

Considérons les deux noyaux :

$$\text{(16-1)} \qquad S^{(\frac{1}{2})\pm}(x, x') = (P_x + \mu)G^{(\frac{1}{2})\pm}(x, x').$$

Ces deux noyaux sont les *noyaux élémentaires de l'opérateur* $(P - \mu)$ puisque, d'après (15-1), ils vérifient :

$$\text{(16-2)} \qquad (P_x - \mu)S^{(\frac{1}{2})\pm}(x, x') = \Sigma^{(\frac{1}{2})}(x, x')$$

et ont, pour x' fixé, leurs supports respectivement dans $E^+(x')$ et $E^-(x')$.

Soit θ un 1-spineur covariant à support compact. Toute solution φ à support compact vers le passé de l'équation :

$$\text{(16-3)} \qquad (\bar{P} - \mu)\varphi = \theta$$

s'écrit nécessairement

$$\text{(16-4)} \qquad \varphi(x) = \langle S^{(\frac{1}{2})-}(x', x), \theta(x') \rangle.$$

Par un raisonnement identique à celui qui établit (15-3), on déduit en effet de (10-2) :

$$\langle S^{(\frac{1}{2})-}(x', x), \theta(x') \rangle = \langle (P_{x'} - \mu)S^{(\frac{1}{2})-}(x', x), \varphi(x') \rangle = \varphi(x)$$

soit (16-4). D'autre part le 1-spineur φ défini par :

$$\varphi(x) = \langle (\bar{P}_x + \mu)G^{(\frac{1}{2})-}(x', x), \theta(x') \rangle$$

répond manifestement à la question, donc coïncide avec (16-4). On en déduit

$$\text{(16-5)} \qquad S^{(\frac{1}{2})\pm}(x, x') = (\bar{P}_{x'} + \mu)G^{(\frac{1}{2})\pm}(x, x')$$

et

$$(\bar{P}_{x'} - \mu)S^{(\frac{1}{2})\pm}(x, x') = \Sigma^{(\frac{1}{2})}(x, x').$$

Les $S^{(\frac{1}{2})\pm}(x, x')$ définissent donc aussi les *noyaux élémentaires de l'opérateur* $(\bar{P} - \mu)$.

b) J'appelle *propagateur spinoriel relatif aux opérateurs* $(P - \mu)$ *et* $(\bar{P} - \mu)$ le noyau

$$\text{(16-6)} \qquad S^{(\frac{1}{2})}(x, x') = S^{(\frac{1}{2})-}(x, x') - S^{(\frac{1}{2})+}(x, x')$$

qui peut aussi être défini par :

$$\text{(16-7)} \qquad S^{(\frac{1}{2})}(x, x') = (P_x + \mu)G^{(\frac{1}{2})}(x, x') = (\bar{P}_{x'} + \mu)G^{(\frac{1}{2})}(x, x').$$

De (10-4) on déduit d'après (15-9)

$$\bar{S}^{(\frac{1}{2})}(x, x') = (\bar{P}_x + \mu)\bar{G}^{(\frac{1}{2})}(x, x') = -(\bar{P}_x + \mu)G^{(\frac{1}{2})}(x', x)$$

soit :

$$\text{(16-8)} \qquad \bar{S}^{(\frac{1}{2})}(x, x') = -S^{(\frac{1}{2})}(x', x).$$

De même en ce qui concerne la conjugaison de charge, on déduit de (10-3) et (15-10) :

$$\text{(16-9)} \qquad \overset{c}{S}{}^{(\frac{1}{2})}(x, x') = S^{(\frac{1}{2})}(x, x').$$

c) On démontre, comme précédemment, que tout 1-spineur distribution contravariant ψ solution de l'équation de Dirac :

$$(P - \mu)\psi = 0$$

peut s'obtenir par composition de Volterra du propagateur $S^{(\frac{1}{2})}$ et d'un 1-spineur distribution contravariant χ *à support compact vers le passé et le futur*

$$\psi(x) = \int S^{(\frac{1}{2})}(x, x')\chi(x')\eta(x')$$

soit :

$$\psi(x) = (P_x + \mu)\int G^{(\frac{1}{2})}(x, x')\chi(x')\eta(x').$$

La formule :

$$\psi_1(x) = \int G^{(\frac{1}{2})}(x, x')\chi(x')\eta(x')$$

définit une solution de l'équation de Klein-Gordon. Il en résulte que tout -spineur distribution ψ solution de l'équation de Dirac $(P - \mu)\psi = 0$ peut se déduire d'une solution ψ_1 de l'équation de Klein-Gordon par :

$$\psi = (P + \mu)\psi_1.$$

17. **Théorie du champ de Dirac quantique.** — *a)* En théorie quantique des champs, on substitue aux composantes numériques du champ de Dirac des composantes opérateurs linéaires dans un espace de Hilbert H. Le champ de Dirac opératoriel ψ est toujours astreint à l'équation de champ :

$$\text{(17-1)} \qquad (P - \mu)\psi = 0$$

qui entraîne par adjonction de Dirac :

$$(\overline{P} - \mu)\overline{\psi} = 0. \tag{17-2}$$

Proposons-nous de construire, pour ce champ, un anticommutateur $[\psi(x), \overline{\psi}(x')]_+$ postulé de la forme $X(x, x')E$, où E est l'opérateur unité dans H; $X(x, x')$ doit être un bi-1-spineur distribution à valeurs complexes dont le support, pour x' fixé, est dans $E(x')$, qui satisfait respectivement en x et x' les équations (17-1) et (17-2) et qui vérifie d'après son origine :

$$\overline{X}(x, x') = X(x', x). \tag{17-3}$$

L'étude du champ spinoriel libre en relativité restreinte conduit à adopter :

$$[\psi(x), \overline{\psi}(x')]_+ = \frac{1}{i}\, S^{(\frac{1}{2})}(x, x')E. \tag{17-4}$$

La condition de support est manifestement satisfaite. D'après (16-7) les équations de Dirac sont vérifiées par le second membre de (17-4). De (16-8) il résulte enfin que (17-3) est satisfaite :

De (16-9), il résulte que :

$$[\psi^c(x), \overline{\psi^c}(x')]_+ = \frac{1}{i}\, S^{(\frac{1}{2})}(x, x')E. \tag{17-5}$$

En effet :

$$\begin{aligned}[\psi^c(x), \overline{\psi^c}(x')]_+ &= [C_x\psi(x), A_{x'}C_{x'}\psi(x')]_+ = -\,[A_xC_x\overline{\psi}(x), A_{x'}C_{x'}\psi(x')]_+ \\ &= -\frac{1}{i}\, A_xA_{x'}C_xC_{x'}S^{(\frac{1}{2})}(x', x)E = \frac{1}{i}\, S^{(\frac{1}{2})}(x, x')E.\end{aligned}$$

Ainsi (17-4) nous fournit un anticommutateur rigoureusement compatible avec les équations de Dirac en relativité générale, invariant par conjugaison de charge, et se réduisant en relativité restreinte à l'anticommutateur usuel de la théorie du champ spinoriel libre correspondant à une particule de spin 1/2.

b) Si φ est un 1-spineur *opératoriel* covariant, ψ un 1-spineur *opératoriel* contravariant, nous posons dans la suite :

$$(\varphi\psi)_- = \frac{1}{2}(\varphi_a\psi^a - \psi^a\varphi_a).$$

Considérons le lagrangien opératoriel :

$$L(\psi) = \frac{1}{2}(\overline{\psi}\gamma^\alpha\nabla_\alpha\psi - \nabla_\alpha\overline{\psi}\gamma^\alpha\psi)_- - \mu(\overline{\psi}\psi)_-. \tag{17-6}$$

On en déduit comme au § 10, *e*

$$\delta L(\psi) = (\delta\bar{\psi}(P - \mu)\psi)_- + ((\bar{P} - \mu)\bar{\psi}\delta\psi)_- + \frac{1}{2} \nabla_\alpha(\bar{\psi}\gamma^\alpha\delta\psi - \delta\bar{\psi}\gamma^\alpha\psi)_-.$$

Les équations de Dirac (17-1), (17-2) rendent manifestement extrémale l'action correspondante :

$$A = \int_C L(\psi)\eta$$

pour des variations $\delta\psi$, $\delta\bar{\psi}$ arbitraires à supports intérieurs à C.

Il est clair que l'inverse n'est pas exact et que du principe d'extremum, on peut déduire seulement :

$$(P - \mu)\psi = \chi E \qquad (\bar{P} - \mu)\bar{\psi} = \bar{\chi}E$$

où χ est un spineur numérique contravariant ou un spineur distribution contravariant. *Si l'on postule que l'anticommutateur* $[\psi(x), \bar{\psi}(x')]_+$ *est proportionnel à* E *sans que* ψ *et* $\bar{\psi}$ *le soient nécessairement, on se trouve ramené aux équations de Dirac* (17-1) (17-2).

En effet de :

$$[\psi(x), \bar{\psi}(x')]_+ = X(x, x')E$$

on déduit

$$[\psi(x), \bar{\chi}(x')E]_+ = (\bar{P}_{x'} - \mu)X(x, x')E = Y(x, x')E$$

où Y est un bi-1-spineur distribution à valeurs scalaires, ce qui peut s'écrire :

$$\bar{\chi}(x')\psi(x) = Y(x, x')E.$$

Si $\bar{\chi} \neq 0$, il existe un 1-spineur contravariant θ à support compact tel que $\langle \bar{\chi}, \theta \rangle \neq 0$. Ainsi :

$$\langle \bar{\chi}, \theta \rangle \psi(x) = \langle Y(x, x'), \theta(x') \rangle E$$

et ψ est nécessairement proportionnel à E. Ainsi $\chi = 0$.

c) Si l'on substitue à ψ son conjugué de charge ψ^c, on a pour le lagrangien opératoriel

$$L(\psi^c) = L(\psi)$$

la démonstration étant la même que celle relative au tenseur canonique d'énergie (§ 19).

18. **Vecteur-courant du champ de Dirac quantique.** — De (17-6), on déduit le vecteur courant conservatif du champ de Dirac quantique

$$J^\alpha(\psi) = i(\bar{\psi}\gamma^\alpha\psi)_-. \tag{18-b}$$

Posons :

$$J^{\alpha}(\psi) = J^{\alpha}_{(1)}(\psi) - J^{\alpha}_{(2)}(\psi)$$

avec

(18-2) $$J^{\alpha}_{(1)}(\psi) = i\bar{\psi}_a \gamma^{\alpha a}{}_b \psi^b \qquad J^{\alpha}_{(2)}(\psi) = i\psi^b \gamma^{\alpha a}{}_b \bar{\psi}^a.$$

Si ψ^c est le conjugué de charge de ψ, proposons-nous d'évaluer le vecteur courant correspondant $J^{\alpha}(\psi^c)$. Il vient, T étant le symbole de transposition sur les matrices :

$$J^{\alpha}_{(1)}(\psi^c) = i\bar{\psi}^{\#}_a \gamma^{\alpha a}{}_b \psi^{\# b} = i\rho \overset{T}{\psi}_a \beta^a_b \gamma^{\alpha b}{}_c \psi^{\# c}$$

ce qui peut s'écrire :

$$J^{\alpha}_{(1)}(\psi^c) = i\rho \psi^a \overset{T}{\beta}{}^b_a \overset{T}{\gamma}{}^{\alpha c}{}_b \overset{T}{\psi}{}^{\#}_c.$$

Or d'après l'antisymétrie de β et la réalité des γ^{α} :

$$\overset{T}{\gamma}{}^{\alpha} \overset{T}{\beta} = - \tilde{\gamma}^{\alpha}\beta = \beta\gamma^{\alpha}.$$

On en déduit :

$$J^{\alpha}_{(1)}(\psi^c) = i\rho \psi^a \gamma^{\alpha b}{}_a \beta^c_b \psi^{\times}_c = i\psi^a \gamma^{\alpha b}{}_a \bar{\psi}_b.$$

Nous obtenons ainsi :

$$J^{\alpha}_{(1)}(\psi^c) = J^{\alpha}_{(2)}(\psi)$$

et de même

$$J^{\alpha}_{(2)}(\psi^c) = J^{\alpha}_{(1)}(\psi).$$

Il en résulte :

(18-3) $$J^{\alpha}(\psi^c) = - J^{\alpha}(\psi).$$

THÉORÈME. — *Par substitution à ψ de son conjugué de charge ψ^c, le vecteur courant d'un champ de Dirac quantique est changé en son opposé.*

19. Tenseur canonique d'impulsion-énergie du champ de Dirac quantique.

19. Tenseur canonique d'impulsion-énergie du champ de Dirac quantique. — Du lagrangien opératoriel, on déduit comme précédemment le tenseur canonique opératoriel d'impulsion-énergie

(19-1) $$T^{\alpha\beta}(\psi) = \frac{1}{2}(\nabla^{\alpha}\bar{\psi}\gamma^{\beta}\psi - \bar{\psi}\gamma^{\beta}\nabla^{\alpha}\psi)_-$$

qui vérifie toujours les relations :

$$\nabla_{\beta} T_{\alpha}{}^{\beta}(\psi) = 0 \qquad \nabla_{\alpha} T^{\alpha}{}_{\beta}(\psi) = 0.$$

Posons

$$T^{\alpha\beta}(\psi) = T^{\alpha\beta}_{(1)}(\psi) - T^{\alpha\beta}_{(2)}\psi$$

avec

(19-2)

$$T^{\alpha\beta}_{(1)}(\psi) = \frac{1}{2}(\nabla^{\alpha}\bar{\psi}_a \gamma^{\beta a}{}_b \psi^b - \bar{\psi}_a \gamma^{\beta a}{}_b \nabla^{\alpha}\psi^b); \quad T^{\alpha\beta}_{(2)}(\psi) = \frac{1}{2}(\psi^b \gamma^{\beta\alpha}{}_b \nabla^{\alpha}\bar{\psi}_a - \nabla^{\alpha}\psi^b \gamma^{\beta a}{}_b \bar{\psi}_a).$$

Proposons-nous d'évaluer le tenseur d'impulsion-énergie $T^{\alpha\beta}(\psi^c)$ *correspondant au conjugué de charge* ψ^c *de* ψ. Il vient :

$$T^{\alpha\beta}_{(1)}(\psi^c) = \frac{1}{2}\left(\nabla^{\alpha}\bar{\psi}^{\#}_a \gamma^{\beta a}{}_b \psi^{\# b} - \bar{\psi}^{\#}_a \gamma^{\beta a}{}_b \nabla^{\alpha}\bar{\psi}^{\# b}\right).$$

Un raisonnement analogue à celui concernant le vecteur courant nous donne, compte tenu des propriétés de la dérivation covariante :

$$T^{\alpha\beta}_{(1)}(\psi^c) = - T^{\alpha\beta}_{(2)}(\psi).$$

Il en résulte :

(19-3) $$T^{\alpha\beta}(\psi^c) = T^{\alpha\beta}(\psi).$$

THÉORÈME. — *Par substitution à* ψ *de son conjugué de charge* ψ^c, *le tenseur canonique d'impulsion-énergie d'un champ de Dirac quantique n'est pas modifié.*

III. — THÉORIE DES NEUTRINOS

20. **Champ neutrinique.** — J'appelle champ neutrinique un champ de Dirac pour lequel $\mu = 0$. Un tel champ quantique est donc représenté par un 1-spineur opératoriel contravariant ψ vérifiant l'équation de champ

(20-1) $$P\psi = 0.$$

Par adjonction de Dirac, il vient :

(20-2) $$\bar{P}\bar{\psi} = 0.$$

Décomposons ψ selon les types positif ou négatif :

(20-3) $$\psi = \psi_+ + \psi_-$$

A permutant les types, on a :

(20-4) $$\bar{\psi} = \bar{\psi}_+ + \bar{\psi}_-$$

où $\bar{\psi}_+$ est négatif et $\bar{\psi}_-$ positif. De même par conjugaison de charge

(20-5) $$C\psi = C\psi_+ + C\psi_-$$

où $C\psi_+$ est négatif et $C\psi_-$ est positif.

L'opérateur P permutant les types positifs et négatifs, l'équation (20-1) se décompose selon les deux équations de Dirac (voir (10-13)) :

(20-6) $$P\psi_+ = 0 \qquad P\psi_- = 0.$$

De même (20-2) se décompose selon

(20-7) $$\bar{P}\bar{\psi}_+ = 0 \qquad \bar{P}\bar{\psi}_- = 0$$

C commutant avec P et $\bar{P}$, les conjugués de charge des spineurs positifs et négatifs vérifient les mêmes équations.

Le champ neutrinique ψ étant ainsi décomposé en deux champs ψ_+ et ψ_- vérifiant les équations de Dirac et respectivement de type positif et négatif, nous sommes amenés à étudier la décomposition selon les types de l'anti-commutateur correspondant.

21. **Décomposition de $S^{(\frac{1}{2})}$ selon les types.** — Pour cette étude, nous allons nous intéresser à la décomposition selon les types du bi-1-spineur de Dirac $\Sigma^{(\frac{1}{2})}$ et à celle du propagateur $G^{(\frac{1}{2})}$ de l'opérateur Δ.

a) Partons de la décomposition du bi-1-spineur de Dirac :

$$\Sigma^{(\frac{1}{2})}(x, x') = \Sigma^{(\frac{1}{2})}(x^+, x') + \Sigma^{(\frac{1}{2})}(x^-, x')$$

selon les types positifs et négatifs en x. En procédant de même en x', on obtient

(21-1) $$\Sigma^{(\frac{1}{2})}(x, x') = \Sigma^{(\frac{1}{2})}(x^+, x'^+) + \Sigma^{(\frac{1}{2})}(x^+, x'^-) + \Sigma^{(\frac{1}{2})}(x^-, x'^+) + \Sigma^{(\frac{1}{2})}(x^-, x'^-).$$

Si ψ_+ est 1-spineur positif arbitraire

$$\langle \Sigma^{(\frac{1}{2})}(x, x'), \psi_+(x') \rangle = \psi_+(x)$$

soit d'après (7-12) :

$$\langle \Sigma^{(\frac{1}{2})}(x^+, x'^+) + \Sigma^{(\frac{1}{2})}(x^-, x'^+), \psi_+(x') \rangle = \psi_+(x).$$

Par produit des deux membres par B_x, il vient :

$$\langle \Sigma^{(\frac{1}{2})}(x^+, x'^+) - \Sigma^{(\frac{1}{2})}(x^-, x'^+), \psi_+(x') \rangle = \psi_+(x).$$

Il en résulte :

$$\langle \Sigma^{(\frac{1}{2})}(x^-, x'^+), \psi_+(x') \rangle = 0.$$

Par suite, si ψ est un 1-spineur numérique arbitraire :

$$\langle \Sigma^{(\frac{1}{2})}(x^-, x'^+), \psi(x') \rangle = \langle \Sigma^{(\frac{1}{2})}(x^-, x'^+), \psi_+(x') + \psi_-(x') \rangle = 0$$

et il vient :

(21-2) $$\Sigma^{(\frac{1}{2})}(x^-, x'^+) = 0 \qquad \Sigma^{(\frac{1}{2})}(x^+, x'^-) = 0.$$

Ainsi :

(21-3) $$\Sigma^{(\frac{1}{2})}(x, x') = \Sigma^{(\frac{1}{2})}(x^+, x'^+) + \Sigma^{(\frac{1}{2})}(x^-, x'^-).$$

b) Reprenons les noyaux élémentaires $G^{(\frac{1}{2})\pm}(x, x')$ de l'opérateur Δ

$$\Delta_x G^{(\frac{1}{2})\pm}(x, x') = \Sigma^{(\frac{1}{2})}(x, x')$$

L'opérateur Δ conservant les types positifs et négatifs, on en déduit en x :

$$\Delta_x G^{(\frac{1}{2})\pm}(x^+, x') = \Sigma^{(\frac{1}{2})}(x^+, x')$$

et en décomposant selon les types en x' :

$$\Delta_x G^{(\frac{1}{2})\pm}(x^+, x'^-) = \Sigma^{(\frac{1}{2})}(x^+, x'^-) = 0.$$

Du théorème d'unicité, il résulte :

$$G^{(\frac{1}{2})\pm}(x^-, x'^+) = 0 \qquad G^{(\frac{1}{2})\pm}(x^+, x'^-) = 0.$$

Par différence, on a donc aussi pour le propagateur $G^{(\frac{1}{2})}$ de Δ

(21-4) $$G^{(\frac{1}{2})}(x^-, x'^+) = 0 \qquad G^{(\frac{1}{2})}(x^+, x'^-) = 0.$$

c) Le propagateur $S^{(\frac{1}{2})}$ de l'opérateur P s'écrit :

$$S^{(\frac{1}{2})}(x, x') = P_n G^{(\frac{1}{2})}(x, x').$$

L'opérateur P échangeant les types, on déduit de (21-4)

(21-5) $$S^{(\frac{1}{2})}(x^+, x'^+) = 0 \qquad S^{(\frac{1}{2})}(x^-, x'^-) = 0.$$

22. Anticommutateurs des champs des neutrinos. — Le champ neutrinique ψ vérifiant (20-1) admet l'anticommutateur :

(22-1) $$[\psi(x), \overline{\psi(x')}]_+ = \frac{1}{i} S^{(\frac{1}{2})}(x, x')$$

d'où l'on déduit, selon (17-5), pour son conjugué de charge ψ^c,

(22-2) $$[\psi^c(x), \overline{\psi^c(x')}]_+ = \frac{1}{i} S^{(\frac{1}{2})}(x, x').$$

Le premier membre de (22-1) peut s'écrire :

$$[\psi_+(x), \bar\psi_+(x')]_+ + [\psi_-(x), \bar\psi_-(x')]_+ + [\psi_+(x), \bar\psi_-(x')]_+ + [\psi_-(x), \bar\psi_+(x')]_+$$

où les quatre termes sont de types purs en x et x', respectivement $+-$, $-+$, $++$, $--$. Or

$$S^{(1)}(x, x') = S^{(1)}(x^+, x'^-) + S^{(1)}(x^-, x'^+).$$

Il en résulte par décomposition de (22-1) selon les types :

$$(22\text{-}3) \qquad [\psi_+(x). \bar\psi_+(x')] = \frac{1}{i} S^{(1)}(x^+, x'^-), \qquad [\psi_-(x), \bar\psi_-(x')]_+ = \frac{1}{i} S^{(1)}(x^-, x'^+)$$

et

$$(22\text{-}4) \qquad [\psi_+(x), \bar\psi_-(x')] = 0, \qquad [\psi_-(x), \bar\psi_+(x')] = 0.$$

Les deux champs ψ_+ et ψ_- indépendants, vérifiant l'équation de Dirac, que nous avons obtenus admettent donc les anticommutateurs (22-3).

Les conjugués de charge $C\psi_+$ et $C\psi_-$ de ψ_+ et ψ_- sont reliés aux parties positive et négative du conjugué de charge ψ^c de ψ par les relations :

$$(22\text{-}5) \qquad C\psi_+ = \psi^c_- \qquad C\psi_- = \psi^c_+.$$

De (22-2) on déduit par décomposition :

$$(22\text{-}6) \qquad [\psi^c_+(x), \overline{\psi^c_+}(x')]_+ = \frac{1}{i} S^{(1)}(x^+, x'^-), \qquad [\psi^c_-)x', \overline{\psi^c_-}(x')]_+ = \frac{1}{i} S^{(1)}(x^-, x'^+).$$

On en déduit :

(22-7)

$$[C_x\psi_+(x), \overline{C_{x'}\psi_+}(x')]_+ = \frac{1}{i} S^{(1)}(x^-, x'^+), \qquad [C_x\psi_-(x), \overline{C_{x'}\psi_-(x')]_+} = \frac{1}{i} S^{(1)}(x^+, x'^-).$$

Nous nous trouvons en présence de quatre champs, se correspondant deux à deux par conjugaison de charge et qui décrivent des particules que nous notons :

$$\psi_+ : \nu \qquad C\psi_+ = \psi^c_- : \bar\nu$$

$$\psi_- : \bar\nu' \qquad C\psi_- = \psi^c_+ : \nu'.$$

Les particules ν et ν' seraient dites des *neutrinos*, les particules $\bar\nu$ et $\bar\nu'$ des *antineutrinos*.

23. **Lagrangien du neutrino.** — *a)* Considérons un champ neutrinique ψ et sa décomposition $\psi_+ + \psi_-$ en spineurs positif et négatif. Étudions :

$$(23\text{-}1) \qquad L_+(\psi) = L(\psi_+) = \frac{1}{2}(\bar\psi_+\gamma^\alpha\nabla_\alpha\psi_+ - \nabla_\alpha\bar\psi_+\gamma^\alpha\psi_+)$$

$L_+(\psi)$ s'exprime aisément à l'aide du champ ψ lui-même en faisant intervenir le 2-spineur ξ. D'après (7-10) et son produit par A, on a :

$$\psi_+ = \frac{1}{2}(I + B)\psi \qquad \bar{\psi}_+ = \frac{1}{2}(I - \bar{B})\bar{\psi}. \tag{23-2}$$

Il en résulte :

$$L_+(\psi) = \frac{1}{8}\{\bar{\psi}(I - \xi)\gamma^\alpha(I + \xi)\nabla_\alpha\psi - \nabla_\alpha\bar{\psi}(I - \xi)\gamma^\alpha(I + \xi)\psi\}.$$

Or, compte tenu de l'anticommutation de ξ et γ^α et de $\xi^2 = I$, on a :

$$(I - \xi)\gamma^\alpha(I + \xi) = 2\gamma^\alpha + 2\gamma^\alpha\xi. \tag{23-3}$$

Il vient ainsi :

$$L_+(\psi) = \frac{1}{4}(\bar{\psi}\gamma^\alpha\nabla_\alpha\psi - \nabla_\alpha\bar{\psi}\gamma^\alpha\psi)_- + \frac{1}{4}(\bar{\psi}\gamma^\alpha\xi\nabla_\alpha\psi - \nabla_\alpha\bar{\psi}\gamma^\alpha\xi\psi)_-.$$

soit :

$$L_+(\psi) = \frac{1}{2}(L(\psi) + M(\psi)) \tag{23-4}$$

où l'on a posé :

$$M(\psi) = -\frac{1}{2}(\bar{\psi}\xi\gamma^\alpha\nabla_\alpha\psi + \nabla_\alpha\bar{\psi}\gamma^\alpha\xi\psi)_-. \tag{23-5}$$

Le lagrangien (23-4) sera dit le *lagrangien du neutrino.*

b) Étudions la variation de $L_+(\psi)$ pour des variations arbitraires $\delta\psi$ et $\delta\bar{\psi}$. Il vient :

$$\begin{aligned}\delta L_+(\psi) = {} & \frac{1}{2}(\delta\bar{\psi}P\psi + \bar{P}\bar{\psi}\delta\psi)_- - \frac{1}{2}(\delta\bar{\psi}\xi P\psi - \bar{P}\bar{\psi}\xi\delta\psi)_- \\ & + \frac{1}{4}\nabla_\alpha(\bar{\psi}\gamma^\alpha\delta\psi - \delta\bar{\psi}\gamma^\alpha\psi)_- - \frac{1}{4}\nabla_\alpha(\bar{\psi}\xi\gamma^\alpha\delta\psi + \delta\bar{\psi}\gamma^\alpha\xi\psi)_-.\end{aligned} \tag{23-6}$$

De cette variation, on déduit en extrémisant l'action correspondante, avec un raisonnement analogue à celui du § 17 :

$$\frac{1}{2}(I - B)P\psi = 0 \qquad \frac{1}{2}(I + \bar{B})\bar{P}\bar{\psi} = 0$$

soit

$$P\left\{\frac{1}{2}(I + B)\psi\right\} = 0 \qquad \bar{P}\left\{\frac{1}{2}(I - \bar{B})\bar{\psi}\right\} = 0$$

ce qui n'est autre que les équations de Dirac :

$$P\psi_+ = 0 \qquad \bar{P}\bar{\psi}_+ = 0$$

portant sur le champ ψ_+ dérivé de ψ.

c) De même qu'au *a)*, on voit que :

$$L(\psi_-) = \frac{1}{2}\{L(\psi) - M(\psi)\}. \tag{23-7}$$

En vertu du § 17 *c)* on a :

$$L(C\psi_-) = L(\psi_-) = \frac{1}{2}\{L(\psi) - M(\psi)\}.$$

Il en résulte :

$$L_+(\psi^c) = L(\psi^c_+) = \frac{1}{2}\{L(\psi) - M(\psi)\}. \tag{23-8}$$

On voit qu'en substituant ψ^c à ψ, le lagrangien $L(\psi)$ n'étant pas changé, $M(\psi)$ est changé en son opposé, ce qu'on pourrait vérifier directement. Nous énonçons :

THÉORÈME. — *Par substitution à ψ de son conjugué de charge ψ^c, le lagrangien*

$$L_+(\psi) = \frac{1}{2}\{L(\psi) + M(\psi)\}$$

est changé en :

$$L_+(\psi^c) = \frac{1}{2}\{L(\psi) - M(\psi)\}.$$

24. **Vecteur-courant du neutrino.** — *a)* Le vecteur-courant correspondant à ψ_+ :

$$J^\alpha_+(\psi) = J^\alpha(\psi_+) = i(\bar{\psi}_+\gamma^\alpha\psi_+)_- \tag{24-1}$$

est *conservatif* puisque ψ_+ vérifie l'équation de Dirac (voir (11-13) avec $\mu = 0$); $J^\alpha_+(\psi)$ est le vecteur courant correspondant au lagrangien $L_+(\psi)$. Exprimons $J^\alpha_+(\psi)$ en fonction de ψ :

$$J^\alpha_+(\psi) = \frac{i}{4}(\bar{\psi}(I - \xi)\gamma^\alpha(I + \xi)\psi)_-$$

soit d'après (23-3) :

$$J^\alpha_+(\psi) = \frac{i}{2}(\bar{\psi}\gamma^\alpha\psi)_- + \frac{i}{2}(\bar{\psi}\gamma^\alpha\xi\psi)_-.$$

Il vient ainsi :

$$J^\alpha_+(\psi) = \frac{1}{2}(J^\alpha(\psi) + K^\alpha(\psi)) \tag{24-2}$$

où l'on a posé :

$$K^\alpha(\psi) = i(\bar{\psi}\gamma^\alpha\xi\psi)_-. \tag{24-3}$$

Le vecteur (24-1) sera dit le *vecteur courant du neutrino.*

b) On voit de même que

$$J^\alpha(\psi_-) = \frac{1}{2}(J^\alpha(\psi) - K^\alpha(\psi))$$

et l'on vérifie bien que $J^\alpha(\psi) = J^\alpha(\psi_+) + J^\alpha(\psi_-)$, selon (11-10).

D'après le théorème du § 18, on a :

$$J^\alpha(C\psi_-) = -\frac{1}{2}(J^\alpha(\psi) - K^\alpha(\psi)).$$

Il en résulte :

$$J^\alpha_+(\psi^c) = -\frac{1}{2}(J^\alpha(\psi) - K^\alpha(\psi)). \tag{24-4}$$

On voit que $K^\alpha(\psi^c) = K^\alpha(\psi)$. Nous énonçons :

THÉORÈME. — *Par substitution à ψ de son conjugué de charge ψ^c, le vecteur-courant conservatif* $J^\alpha(\psi)$ *donné par* :

$$J^\alpha_+(\psi) = \frac{1}{2}(J^\alpha(\psi) + K^\alpha(\psi)).$$

est changé en :

$$J^\alpha_+(\psi^c) = -\frac{1}{2}(J^\alpha(\psi) - K^\alpha(\psi)).$$

25. **Tenseur canonique d'impulsion-énergie du neutrino.** — *a)* Le tenseur canonique d'impulsion-énergie correspondant à ψ_+ :

$$T^{\alpha\beta}_+(\psi) = T^{\alpha\beta}(\psi_+) = \frac{1}{2}(\nabla^\alpha\bar{\psi}_+\gamma^\beta\psi_+ - \bar{\psi}_+\gamma^\beta\nabla^\alpha\psi_+)_- \tag{25-1}$$

vérifie, comme conséquence des équations de Dirac,

$$\nabla_\beta T^{\alpha\beta}_+(\psi) = 0 \qquad\qquad \nabla_\alpha T^{\alpha\beta}_+(\psi) = 0$$

$T^{\alpha\beta}_+(\psi)$ est le tenseur canonique correspondant au lagrangien $L_+(\psi)$. Par un raisonnement analogue à celui des deux paragraphes précédents, on a :

$$T^{\alpha\beta}_+(\psi) = \frac{1}{2}(T^{\alpha\beta}(\psi) + U^{\alpha\beta}(\psi)) \tag{25-2}$$

où l'on a posé :

$$U^{\alpha\beta}(\psi) = \frac{1}{2}(\nabla^\alpha\bar{\psi}\gamma^\beta\xi\psi + \bar{\psi}\xi\gamma^\beta\nabla^\alpha\psi)_-. \tag{25-3}$$

b) On a de même le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Par substitution à ψ de son conjugué de charge ψ^c, le tenseur canonique*

$$T_+^{\alpha\beta}(\psi) = \frac{1}{2}(T^{\alpha\beta}(\psi) + U^{\alpha\beta}(\psi))$$

est changé en :

$$T_+^{\alpha\beta}(\psi^c) = \frac{1}{2}(T^{\alpha\beta}(\psi) - U^{\alpha\beta}(\psi)).$$

IV. — ÉTUDE DES TRANSFORMATIONS C, P, T

26. **Étude du méson scalaire libre.** — *a)* Rappelons brièvement la théorie du méson scalaire libre sur la variété espace-temps V_4. Le champ mésonique scalaire est décrit par un scalaire complexe u vérifiant l'équation de champ :

$$(\Delta - \mu^2)u = 0 \qquad (\mu = \text{const.}) \tag{26-1}$$

où $\Delta = \delta d = -\nabla^\rho \nabla_\rho$. En théorie quantique des champs, u est un scalaire à valeurs opérateurs dans H vérifiant (26-1). Le commutateur correspondant est donné par :

$$[u(x), u^\sharp(x')]_- = \frac{1}{i} G^{(0)}(x, x')E \tag{26-2}$$

où $G^{(0)}$ est le propagateur scalaire relatif à $(\Delta - \mu^2)$ (1).

L'équation (26-1) dérive du *lagrangien* opératoriel :

$$L(u) = (\nabla_\alpha u \nabla^\alpha u^\sharp)_+ - \mu^2(uu^\sharp)_+ \tag{26-3}$$

où le symbole $+$ est le symbole de symétrisation sur les produits d'opérateurs. Au champ u correspond le *vecteur-courant* :

$$J^\alpha(u) = i(u \nabla^\alpha u^\sharp - \nabla^\alpha u . u^\sharp)_+ \tag{26-4}$$

et le *tenseur canonique d'impulsion-énergie*

$$T^{\alpha\beta}(u) = (\nabla^\alpha u \nabla^\beta u^\sharp + \nabla^\beta u \nabla^\alpha u^\sharp)_+ - g^{\alpha\beta}L(u). \tag{26-5}$$

b) Nous appelons *transformation* C — ou conjugaison de charge — l'application involutive :

$$C : u \rightarrow u^c = u^\sharp.$$

(1) En ce qui concerne la théorie des propagateurs tensoriels, voir Lichnerowicz [*1*].

Il est clair que u^c vérifie (26-1). Par C, on a manifestement :

$$\mathrm{C} : \mathrm{L}(u) \rightarrow \mathrm{L}(u), \qquad \mathrm{T}^{\alpha\beta}(u) \rightarrow \mathrm{T}^{\alpha\beta}(u), \qquad \mathrm{J}^{\alpha}(u) \rightarrow -\mathrm{J}^{\alpha}(u).$$

En ce qui concerne la relation de commutation, il vient :

$$[u^c(x), (u^c)^{\#}(x')]_- = [u^{\#}(x), u(x')]_- = -[u(x'), u^{\#}(x)]_- = -\frac{1}{i}\mathrm{G}^{(0)}(x', x)$$

d'après l'antisymétrie de $\mathrm{G}^{(0)}$, on obtient :

$$[u^c(x), (u^c)^{\#}(x')]_- = \frac{1}{i}\mathrm{G}^{(0)}(x, x')\mathrm{E}. \tag{26-6}$$

Il y a donc invariance par C de l'équation de champ, des relations de commutation, du lagrangien et du tenseur d'impulsion-énergie alors que le vecteur-courant est changé en son opposé.

C'est cette situation que l'on décrit en disant que la *théorie est* C-*invariante.*

c) Nous appelons *transformation* P le changement d'*orientation spatiale* $\sigma \rightarrow -\sigma$. Tous les éléments introduits étant manifestement invariants par la transformation P, la théorie est P-invariante.

d) Nous appelons *transformation* T le changement d'orientation temporelle $\rho \rightarrow -\rho$ *complété par le changement* $i \rightarrow -i$ sur les grandeurs non opératorielles.

L'équation (26-1) n'est pas modifiée. Le propagateur $\mathrm{G}^{(0)}$ étant changé en son opposé par changement d'orientation temporelle, la relation de commutation (26-2) est invariante. Enfin par T

$$\mathrm{T} : \mathrm{L}(u) \rightarrow \mathrm{L}(u), \qquad \mathrm{T}^{\alpha\beta}(u) \rightarrow \mathrm{T}^{\alpha\beta}(u), \qquad \mathrm{J}^{\alpha}(u) \rightarrow -\mathrm{J}^{\alpha}(u).$$

Il y a T-*invariance* de la théorie.

e) Supposons que u soit déduit d'une 4-forme par l'opérateur * et dépende par suite de l'*orientation totale* ε de V_4 (cas dit pseudoscalaire). Pour les transformations P et T, on a alors en outre seulement $u \rightarrow -u$, ce qui ne modifie pas les résultats précédents.

Il est clair que le *produit* CTP des transformations laisse invariant chacune des quantités et chacune des équations envisagées.

27. **Champ de Dirac libre.** — *a)* Nous résumons les résultats établis au chapitre II. L'équation de champ pour le spineur ψ est :

$$(\mathrm{P} - \mu)\psi \equiv (\gamma^{\alpha}\nabla_{\alpha} - \mu)\psi = 0. \tag{27-1}$$

L'anticommutateur correspondant est :

$$[\psi(x), \bar{\psi}(x')]_{+} = \frac{1}{i} S^{(1)}(x, x')E. \tag{27-2}$$

Le lagrangien du champ peut s'écrire :

$$L(\psi) = \frac{1}{2}(\bar{\psi}\gamma^{\alpha}\nabla_{\alpha}\psi - \nabla_{\alpha}\bar{\psi}\gamma^{\alpha}\psi)_{-} - \mu(\bar{\psi}\psi)_{-} \tag{27-3}$$

avec comme vecteur-courant :

$$J^{\alpha}(\psi) = i(\bar{\psi}\gamma^{\alpha}\psi)_{-} \tag{27-4}$$

et tenseur d'impulsion-énergie :

$$T^{\alpha\beta}(\psi) = \frac{1}{2}(\nabla^{\alpha}\bar{\psi}\gamma^{\beta}\psi - \bar{\psi}\gamma^{\beta}\nabla^{\alpha}\psi)_{-}. \tag{27-5}$$

b) Nous avons vu que par la transformation C — ou conjugaison de charge

$$\psi \to \psi^{c} = \psi^{\#}$$

l'équation de Dirac et la relation d'anticommutation étaient invariantes et que, par la transformation C, on avait :

$$C : L(\psi) \to L(\psi), \qquad T^{\alpha\beta}(\psi) \to T^{\alpha\beta}(\psi), \qquad J^{\alpha}(\psi) \to -J^{\alpha}(\psi).$$

Il y a *C-invariance* de la théorie.

En ce qui concerne la transformation P, il est clair que tous les éléments introduits sont invariants et que par suite, il y a *P-invariance.*

Enfin pour la transformation C, remarquons d'abord que :

$$\bar{\psi} = \rho\psi^{\times}\beta$$

où β est imaginaire pure, est invariant par le changement simultané $\rho \to -\rho$ et $i \to -i$. L'équation de Dirac, où les matrices γ^{α} sont réelles, demeure invariante. Il en est de même pour la relation d'anticommutation (27-2). De plus par T, on a :

$$T : L(\psi) \to L(\psi), \qquad T^{\alpha\beta}(\psi) \to T^{\alpha\beta}(\psi), \qquad J^{\alpha}(\psi) \to -J^{\alpha}(\psi).$$

La situation est la même que dans le cas du méson scalaire.

28. **Étude du méson vectoriel libre.** — *a)* Un champ mésonique vectoriel est décrit par une 1-forme α à valeurs opératorielles, vérifiant l'équation de champ

$$\delta d\alpha = \mu^{2}\alpha \qquad (\mu = \text{const.} \neq 0) \tag{28-1}$$

où d est l'opérateur de différentiation extérieure et δ celui de codifférentiation. L'équation (28-1) est équivalente au système :

$$(\Delta - \mu^2)\alpha = 0 \tag{28-2}$$

et

$$\delta\alpha = 0 \tag{28-3}$$

où $\Delta = d\delta + \delta d$ est le « laplacien » de G. de Rham sur les formes. Le commutateur correspondant est donné par :

$$[\alpha(x), \alpha^{\#}(x')]_- = \frac{1}{i}\{ G^{(1)}(x, x') - \frac{1}{\mu^2} d_x d_{x'} G^{(0)}(x, x') \} E \tag{28-4}$$

où $G^{(0)}$ et $G^{(1)}$ sont les propagateurs d'ordre 0 et 1 relatifs à l'opérateur $(\Delta - \mu^2)$.

L'équation (28-1) dérive du *lagrangien* :

$$L(\alpha) = \frac{1}{4}(d\alpha_{\lambda\mu} d\alpha^{\#\lambda\mu})_+ - \frac{\mu^2}{2}(\alpha_\lambda \alpha^{\#\lambda})_+, \tag{28-5}$$

A α correspond le *vecteur-courant* :

$$J^\alpha(\alpha) = \frac{i}{2}(\alpha_\rho d\alpha^{\#\alpha\rho} - \alpha^{\#}_\rho d\alpha^{\alpha\rho})_+. \tag{28-6}$$

b) Évaluons le tenseur d'impulsion-énergie correspondant à ce champ. Pour alléger les notations, nous explicitons les calculs pour le cas d'un champ classique. Si X est un champ de vecteurs de V_4, évaluons $\mathcal{L}(X)\, L(\alpha)$, avec :

$$L(\alpha) = \frac{1}{4} d\alpha_{\lambda\mu} d\alpha^{*\lambda\mu} - \frac{\mu^2}{2}\alpha_\lambda \alpha^{*\lambda}.$$

Il vient :

$$\mathcal{L}(X)\, L(\alpha) = \frac{X^\rho}{2}(\nabla_\rho \nabla_\lambda \alpha_\mu d\alpha^{*\lambda\mu} + \nabla_\rho \nabla_\lambda \alpha^*_\mu d\alpha^{\lambda\mu}) - \mu^2 \frac{X^\rho}{2}(\alpha^{*\lambda}\nabla_\rho \alpha_\lambda + \alpha^\lambda \nabla_\rho \alpha^*_\lambda).$$

A l'aide d'une intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(X)\, L(\alpha) = {} & \frac{X^\rho}{2}\nabla_\lambda(\nabla_\rho \alpha_\mu d\alpha^{*\lambda\mu} + \nabla_\rho \alpha^*_\mu d\alpha^{\lambda\mu}) \\ & + \frac{X^\rho}{2}\{ (\nabla_\rho \nabla_\lambda - \nabla_\lambda \nabla_\rho)\alpha_\mu d\alpha^{*\lambda\mu} + (\nabla_\rho \nabla_\lambda - \nabla_\lambda \nabla_\rho)\alpha^*_\mu d\alpha^{\lambda\mu} \} \\ & + \frac{X^\rho}{2}\{ (\delta d - \mu^2)\alpha^\mu \nabla_\rho \alpha^*_\mu + (\delta d - \mu^2)\alpha^{*\mu}\nabla_\rho \alpha_\mu \}.\end{aligned}$$

Or d'après l'identité de Ricci et les propriétés du tenseur de courbure :

$$(\nabla_\rho \nabla_\lambda - \nabla_\lambda \nabla_\rho)\alpha_\mu d\alpha^{*\lambda\mu} = - R^\sigma{}_{\mu,\rho\lambda}\alpha_\sigma d\alpha^{*\lambda\mu} = \frac{1}{2} R^\sigma{}_{\rho,\lambda\mu}\alpha_\sigma d\alpha^{*\lambda\mu}.$$

Il en résulte que *pour une solution des équations de champ* :

(28-7)

$$\mathcal{L}(X) L(\alpha) = \frac{X^\rho}{2} \nabla_\lambda(\nabla_\rho \alpha_\mu d\alpha^{*\lambda\mu} + \nabla_\rho \alpha^*_\mu d\alpha^{\lambda\mu}) + \frac{X^\rho}{4} R^\sigma{}_{\rho,\lambda\mu}(\alpha_\sigma d\alpha^{*\lambda\mu} + \alpha^*_\sigma d\alpha^{\lambda\mu}).$$

c) D'autre part pour une solution de (28-1), on a :

$$\nabla_\lambda(\nabla_\mu \alpha_\rho d\alpha^{*\lambda\mu} + \nabla_\mu \alpha^*_\rho d\alpha^{\lambda\mu})$$
$$= \nabla_\lambda \nabla_\mu \alpha_\rho d\alpha^{*\lambda\mu} + \nabla_\lambda \nabla_\mu \alpha^*_\rho d\alpha^{\lambda\mu} - \mu^2(\alpha^{*\mu}\nabla_\mu \alpha_\rho + \alpha^\mu \nabla_\mu \alpha^*_\rho)$$

soit d'après l'identité de Ricci et (28-3) :

$$\nabla_\lambda(\nabla_\mu \alpha_\rho d\alpha^{*\lambda\mu} + \nabla_\mu \alpha^*_\rho d\alpha^{\lambda\mu})$$
$$= - \frac{1}{2} R^\sigma{}_{\rho,\lambda\mu}(\alpha_\sigma d\alpha^{*\lambda\mu} + \alpha^*_\sigma d\alpha^{\lambda\mu}) - \mu^2 \nabla_\mu(\alpha_\rho \alpha^{*\mu} + \alpha^*_\rho \alpha_\mu).$$

Il résulte ainsi de (28-7) :

(28-8) $$\mathcal{L}(X)L(\alpha) = \frac{X^\rho}{2} \nabla_\lambda \{ d\alpha_{\rho\mu} d\alpha^{*\lambda\mu} + d\alpha^*_{\rho\mu} d\alpha^{\lambda\mu} - \mu^2(\alpha_\rho \alpha^{*\lambda} + \alpha^*_\rho \alpha^\lambda) \}.$$

Or comme :

$$\mathcal{L}(X)L(\alpha) = X^\rho \nabla_\rho \{ g^\lambda_\rho L(\alpha) \}$$

on déduit de (28-8) que *pour une solution des équations de champ* :

(28-9) $$\nabla_\lambda \left\{ \frac{1}{2} (d\alpha_{\rho\mu} d\alpha^{*\lambda\mu} + d\alpha^*_{\rho\mu} d\alpha^{\lambda\mu}) - \frac{\mu^2}{2}(\alpha_\rho \alpha^{*\lambda} + \alpha^*_\rho \alpha^\lambda) - g^\lambda_\rho L(\alpha) \right\} = 0.$$

Nous sommes ainsi conduits à introduire le tenseur d'impulsion-énergie défini par :

(28-10)

$$T^{\alpha\beta}(\alpha) = \frac{1}{2} (d\alpha^\alpha{}_\mu d\alpha^{\#\beta\mu} + d\alpha^{\#\alpha}{}_\mu d\alpha^{\beta\mu})_+ - \frac{\mu^2}{2} (\alpha^\alpha \alpha^{\#\beta} + \alpha^{\#\alpha}\alpha^\beta)_+ - g^{\alpha\beta} L(\alpha).$$

qui en vertu des équations de champ vérifie les relations de conservation :

(28-11) $$\nabla_\beta T^{\alpha\beta}(\alpha) = 0.$$

d) A la forme α, associons le 2-spineur :

(28-12) $$\psi = i\gamma^\rho \alpha_\rho.$$

Pour la transformation C sur ψ, nous avons :

$$\psi \to \psi^c = \psi^{\#}.$$

Désignons par α^c le conjugué de charge de α défini par :

$$\psi^c = i\gamma^\rho \alpha^c_\rho.$$

On a :

$$\psi^{\#} = - i\gamma^\rho \alpha^{\#}_\rho.$$

Par suite la transformation C est définie ici comme l'application involutive

$$C : \alpha \to \alpha^c = - \alpha^{\#}$$

α^c vérifie encore (28-1). De plus par C :

$$C : L(\alpha) \to L(\alpha), \qquad T^{\alpha\beta}(\alpha) \to T^{\alpha\beta}(\alpha), \qquad J^\alpha(\alpha) \to - J^\alpha(\alpha)$$

et le même raisonnement que dans le cas du méson scalaire montre l'invariance de la relation de commutation (28-4). *Il y a C-invariance.* Il y a aussi P-invariance.

En ce qui concerne la transformation T,

$$\psi \to \psi^T = - \psi = - i\gamma^\rho \alpha_\rho.$$

Désignons par α^T le transformé de α défini par :

$$\psi^T = i\gamma^\rho \alpha^T_\rho.$$

On en déduit que par T :

$$T : \alpha \to \alpha^T = - \alpha.$$

Par cette transformation, l'équation (28-1) et la relation de commutation (28-4) sont invariantes et l'on a :

$$T : L(\alpha) \to L(\alpha), \qquad T^{\alpha\beta}(\alpha) \to T^{\alpha\beta}(\alpha), \qquad J^\alpha(\alpha) \to - J^\alpha(\alpha).$$

La situation est la même que dans les cas précédents.

Des résultats strictement analogues sont valables dans le cas du *champ électromagnétique* qui correspond à $\mu = 0$, $\alpha^{\#} = \alpha$.

29. **Étude du champ de Dirac en interaction avec le champ électromagnétique.** — *a)* Considérons un champ de Dirac opératoriel ψ et un champ électromagnétique opératoriel α, supposés *commutants* et associons-leur le lagrangien :

$$L(\psi, \alpha) = L(\psi) + L(\alpha) - e\alpha_\mu J^\mu(\psi) \tag{29-1}$$

où $J^\mu(\psi)$ est le courant du champ de Dirac ψ et e une constante de couplage « la charge électrique élémentaire » du champ. On peut écrire explicitement :

$$(29\text{-}2)\quad L(\psi, \alpha) = \frac{1}{2}(\bar\psi\gamma^\lambda\nabla_\lambda\psi - \nabla_\lambda\bar\psi\gamma^\lambda\psi)_- - \mu(\bar\psi\psi)_- + \frac{1}{4}(\nabla^\lambda\alpha^\mu - \nabla^\mu\alpha^\lambda)(\nabla_\lambda\alpha_\mu - \nabla_\mu\alpha_\lambda)_+ - e\alpha_\mu J^\mu(\psi)$$

avec

$$J^\mu(\psi) = i(\bar\psi\gamma^\mu\psi)_-.$$

Évaluons la variation de $L(\psi, \alpha)$ pour des variations $\delta\psi$, $\delta\bar\psi$, $\delta\alpha$ astreintes seulement à vérifier la condition de commutation. Il vient :

$$\begin{aligned}\delta L(\psi, \alpha) = {} & (\delta\bar\psi(\gamma^\mu\nabla_\mu\psi - \mu\psi))_- + ((-\nabla_\mu\bar\psi\gamma^\mu - \mu\bar\psi)\delta\psi)_- \\ & + (-\nabla^\lambda(\nabla_\lambda\alpha_\mu - \nabla_\mu\alpha_\lambda)\delta\alpha^\mu)_+ \\ & - eJ_\mu(\psi)\delta\alpha^\mu - ie\alpha_\mu(\delta\bar\psi\gamma^\mu\psi + \bar\psi\gamma^\mu\delta\psi)_- + \nabla_\lambda V^\lambda\end{aligned}$$

où le dernier terme désigne une divergence dont l'expression ne nous importe pas. On peut encore mettre $\delta L(\psi, \alpha)$ sous la forme :

$$(29\text{-}3)\quad \begin{aligned}\delta L(\psi, \alpha) = {} & \{\delta\bar\psi(\gamma^\mu(\nabla_\mu - ie\alpha_\mu)\psi - \mu\psi)\}_- \\ & + \{(-(\nabla^\mu + ie\alpha_\mu)\bar\psi\gamma^\mu - \mu\bar\psi)\delta\psi\}_- \\ & + \{(-\nabla^\lambda(\nabla_\lambda\alpha_\mu - \nabla_\mu\alpha_\lambda) - eJ_\mu(\psi))\delta\alpha^\mu\}_+ + \nabla_\lambda V^\lambda.\end{aligned}$$

En extrémisant l'action définie par $L(\psi, \alpha)$, on est amené aux équations de champ suivantes :

$$(29\text{-}4)\quad \gamma^\mu(\nabla_\mu - ie\alpha_\mu)\psi = \mu\psi$$

$$(29\text{-}5)\quad -(\nabla_\mu + ie\alpha_\mu)\bar\psi\gamma^\mu = \mu\bar\psi$$

et

$$(29\text{-}6)\quad \delta d\alpha = eJ(\psi).$$

b) Sans nous préoccuper ici des relations de commutation, considérons, vis-à-vis des transformations C, P, T, le lagrangien (29-1) et les équations correspondantes de champ. Pour la transformation C on a :

$$\psi \to \psi^c = \psi^\#, \qquad \alpha \to \alpha^c = -\alpha, \qquad J(\psi) \to -J(\psi).$$

Il en résulte :

$$L(\psi) \to L(\psi), \qquad L(\alpha) \to L(\alpha), \qquad e\alpha_\mu J^\mu(\psi) \to e\alpha_\mu J^\mu(\psi)$$

et le lagrangien $L(\psi, \alpha)$ défini par (29-1) est invariant.

De même, par C, les équations (29-4) et (29-5) sont invariantes. De (29-4) on déduit en effet par adjonction hermitienne ordinaire :

$$\gamma^\mu(\nabla_\mu + ie\alpha_\mu) = \psi^\# = \mu\psi^\#$$

c'est-à-dire :

$$\gamma^\mu(\nabla_\mu - ie\alpha^c_\mu)\psi^c = \mu\psi^c$$

ce qui démontre l'invariance de (29-4). Il en est de même pour (29-5). Quant à (29-6), elle est évidemment invariante par C.

Il est clair d'autre part, que le lagrangien et les équations de champ sont P-invariants.

En ce qui concerne la transformation T : $\rho \to -\rho$, $i \to -i$, on a, comme on l'a vu

$$\alpha \to -\alpha, \qquad J(\psi) \to -J(\psi)$$

et par suite le lagrangien $L(\psi, \alpha)$ est invariable. Il est clair qu'il en est de même pour les équations de champ (29-4), (29-5), (29-6).

30. **Champ du neutrino.** — *a)* Nous résumons d'abord les résultats établis au chapitre III. Le lagrangien du neutrino relatif au champ neutrinique ψ s'écrit :

(30-1)
$$L_+(\psi) = \frac{1}{2}(L(\psi) + M(\psi))$$

avec

(30-2)
$$L(\psi) = \frac{1}{2}(\bar\psi\gamma^\alpha\nabla_\alpha\psi - \nabla_\alpha\bar\psi\gamma^\alpha\psi)_- \quad M(\psi) = -\frac{1}{2}(\bar\psi\xi\gamma^\alpha\nabla_\alpha\psi + \nabla_\alpha\bar\psi\gamma^\alpha\xi\psi)_-.$$

Il lui correspond les équations de champ :

(30-3)
$$P\left\{\frac{1}{2}(I + B)\psi\right\} = 0 \qquad \bar P\left\{\frac{1}{2}(I - \bar B)\bar\psi\right\} = 0$$

et les relations de commutation

(30-4)
$$\left[\frac{1}{2}(I + B)\psi(x), \overline{\frac{1}{2}(I + B)\psi(x')}\right]_+ = \frac{1}{i} S^{(\frac{1}{2})}(x^+, x'^-).$$

Au lagrangien du neutrino correspond le tenseur d'impulsion-énergie :

(30-5)
$$T^{\alpha\beta}_+(\psi) = \frac{1}{2}(T^{\alpha\beta}(\psi) + U^{\alpha\beta}(\psi))$$

avec

(30-6)
$$T^{\alpha\beta}(\psi) = \frac{1}{2}(\bar\psi\gamma^\beta\nabla^\alpha\psi - \nabla^\alpha\bar\psi\gamma^\beta\psi)_- \quad U^{\alpha\beta}(\psi) = -\frac{1}{2}(\bar\psi\xi\gamma^\beta\nabla_\alpha\psi + \nabla_\alpha\bar\psi\gamma^\beta\xi\psi)_-$$

et le vecteur-courant du neutrino :

$$J_+^\alpha(\psi) = \frac{1}{2}(J^\alpha(\psi) + K^\alpha(\psi)) \tag{30-7}$$

avec

$$J^\alpha(\psi) = i(\bar{\psi}\gamma^\alpha\psi)_- \qquad K^\alpha(\psi) = i(\bar{\psi}\gamma^\alpha\xi\psi)_-. \tag{30-8}$$

b) Par la transformation C ou conjugaison de charge : $\psi \to \psi^c$, nous avons à partir des équations de champ (30-3) :

$$P\left\{\frac{1}{2}(I - B)\psi^c\right\} = 0 \qquad \bar{P}\left\{\frac{1}{2}(I + \bar{B})\overline{\psi^c}\right\} = 0. \tag{30-9}$$

Les relations de commutation (30-4) deviennent :

$$\left[\frac{1}{2}(I - B)\psi^c(x), \overline{\frac{1}{2}(I - B)\psi^c(x')}\right]_+ = \frac{1}{i}S^{(1)}(x^-, x'^+). \tag{30-10}$$

Le lagrangien et le tenseur d'impulsion-énergie se transforment selon :

$$L_+(\psi) = \frac{1}{2}L(\psi) + M(\psi) \to L_+(\psi^c) = \frac{1}{2}(L(\psi) - M(\psi))\,;$$

$$T_+^{\alpha\beta}(\psi) = \frac{1}{2}(T^{\alpha\beta}(\psi) + U^{\alpha\beta}(\psi)) \to T_+^{\alpha\beta}(\psi^c) = \frac{1}{2}(T^{\alpha\beta}(\psi) - U^{\alpha\beta}(\psi))$$

tandis que le vecteur-courant devient :

$$J_+(\psi) = \frac{1}{2}(J(\psi) + K(\psi)) \to J_+(\psi^c) = -\frac{1}{2}(J(\psi) - K(\psi)).$$

Il n'y a pas C-invariance.

Par la transformation P : $\sigma \to -\sigma$, le 2-spineur ξ se transforme selon $\xi \to -\xi$. Les équations de champ (30-3) deviennent :

$$P\left\{\frac{1}{2}(I - B)\psi\right\} = 0 \qquad \bar{P}\left\{\frac{1}{2}(I + \bar{B})\bar{\psi}\right\} = 0 \tag{30-11}$$

et les relations de commutation

$$\left[\frac{1}{2}(I - B)\psi(x), \overline{\frac{1}{2}(I - B)\psi(x')}\right]_+ = \frac{1}{i}S^{(1)}(x^-, x'^+). \tag{30-12}$$

Le lagrangien et le tenseur d'impulsion-énergie se transforme selon :

$$L_+(\psi) = \frac{1}{2}(L(\psi) + M(\psi)) \to \frac{1}{2}(L(\psi) - M(\psi)),$$

$$T_+^{\alpha\beta}(\psi) = \frac{1}{2}(T^{\alpha\beta}(\psi) + U^{\alpha\beta}(\psi)) \to \frac{1}{2}(T^{\alpha\beta}(\psi) - U^{\alpha\beta}(\psi))$$

tandis que le vecteur-courant devient :

$$J_+(\psi) = \frac{1}{2}(J(\psi) + K(\psi)) \rightarrow \frac{1}{2}(J(\psi) - K(\psi)).$$

Il n'y a pas P-*invariance* (non-conservation de la parité).

En ce qui concerne la transformation T : $\rho \rightarrow -\rho$, $i \rightarrow -i$, le 2-spineur ξ n'est pas modifié et $\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}$. Les équations de champ demeurent invariantes ainsi que les relations de commutation. Le lagrangien et le tenseur d'impulsion-énergie deviennent :

$$L_+(\psi) \rightarrow L_+(\psi) \qquad T^{\alpha\beta}_+(\psi) \rightarrow T^{\alpha\beta}_+(\psi)$$

tandis que le vecteur-courant se transforme selon :

$$J_+(\psi) \rightarrow -J_+(\psi).$$

Il y a T-*invariance.*

On note que pour le produit C o T o P des transformations, tous les éléments et toutes les équations introduits sont invariants. La théorie est C o T o P-invariante.

31. **Les transformations** H **et** K. — *a)* Désignons par H, ou *conjugaison hermitienne*, la transformation définie par le changement $i \rightarrow -i$ suivi par la conjugaison de charge et par l'*inversion de l'ordre des opérateurs.* Pour le méson scalaire, l'électron et le méson vectoriel, on a par exemple :

$$u \rightarrow u^{\#}, \quad \psi \rightarrow \psi^{\#} \quad \text{et} \quad \bar{\psi} \rightarrow -\bar{\psi}^{\#}, \quad \alpha \rightarrow \alpha^{\#}.$$

Pour toutes les théories quantiques de champ envisagées, les relations de commutation sont invariantes par H. On le vérifiera immédiatement sur (26-2), (17-4), (28-4). En ce qui concerne le neutrino, on voit que H donne :

$$\psi_+ \rightarrow \psi_- \rightarrow C\psi_-.$$

On en déduit par adjonction de Dirac :

$$\bar{\psi}_+ \rightarrow -\overline{C\psi_-}.$$

Ainsi la relation :

$$[\psi_+(x), \overline{\psi_+(x')}]_+ = \frac{1}{i} S^{(1)}(x^+, x'^-)$$

devient :

$$[C_x\psi_-(x), \overline{C_{x'}\psi_-(x')}]_+ = \frac{1}{i} S^{(1)}(x^+, x'^-)$$

ce qui coïncide bien avec (22-7).

La transformation H laisse invariants le lagrangien, le tenseur canonique, le vecteur-courant dans chaque cas. En particulier, on voit immédiatement que pour l'électron :

$$L(\psi) \to L(\psi).$$

Il suffit de remarquer en outre pour le neutrino que, par $i \to -i$ et $\psi \to \psi^c$, $M(\psi)$ est changé en son opposé; par suite de l'inversion de l'ordre des opérateurs, $M(\psi)$ est invariant par H. Il en est donc de même pour $L_+(\psi)$.

Ainsi, pour toutes les théories quantiques de champ envisagées, H est un isomorphisme de l'algèbre des opérateurs laissant invariants lagrangien, tenseur canonique, vecteur-courant...

b) Désignons par K, ou *symétrie totale*, la transformation définie par $\sigma \to -\sigma$, $\rho \to -\rho$, complétée par l'*inversion de l'ordre des opérateurs*. Pour toutes les théories quantiques de champ envisagées, les relations de commutation sont encore invariantes par K. Cela est évident pour (26-2), (17-4), (28-4).

On voit que par K le bi-spineur ξ est invariant et que par suite le type positif ou négatif des spineurs n'est pas modifié. Il en résulte que pour le neutrino

$$\psi_+ \to \psi_+, \qquad \bar{\psi}_+ \to -\bar{\psi}_+, \qquad S^{(\frac{1}{2})}(x^+, x'^-) \to -S^{(\frac{1}{2})}(x^+, x'^-).$$

Par suite, la relation de commutation (22-3) reste invariante.

La transformation K laisse invariants dans chaque cas le lagrangien, le tenseur canonique, le vecteur-courant. En particulier, il est clair que pour l'électron :

$$L(\psi) \to L(\psi).$$

Pour le neutrino, il suffit de remarquer en outre que ξ restant invariant et $\bar{\psi} \to -\bar{\psi}$, $M(\psi)$ est invariant par K. Il en est donc de même pour $L_+(\psi)$.

Ainsi, pour les théories quantiques de champ envisagées, K est aussi un isomorphisme de l'algèbre des opérateurs laissant invariants lagrangien, tenseur canonique, vecteur-courant...

c) Nos théories sont donc K-invariantes et H-invariantes. De par la définition même des transformations H et K, on voit que :

$$\text{(31-1)} \qquad \mathrm{H} \circ \mathrm{K} = \mathrm{C} \circ \mathrm{T} \circ \mathrm{P}.$$

De (31-1) résulte le théorème :

THÉORÈME. — *Toute théorie quantique de champ invariante par conjugaison hermitienne* H *et par symétrie totale* K *est invariante par le produit* **C o T o P.**

BIBLIOGRAPHIE

BOGLIOUBOV et CHIRKOV, *Introduction à la théorie quantique des champs*, Dunod, Paris, 1960.

Y. BRUHAT : [*1*] *Comptes rendus Acad. Sc. Paris*, t. 242, 1956, p. 1566.

[*2*] *Solutions élémentaires du second ordre*, Coll. Int. CNRS sur les équations aux dérivées partielles, Nancy, 1956.

[*3*] *Comptes rendus Acad. Sc. Paris*, t. 251, 1960, p. 29.

FOCK et O. IVANENKO, Travaux variés.

GUELFAND et CHILOV, *Les distributions*, Dunod, Paris, 1961.

J. LERAY, *Hyperbolic differential equations*, Princeton, 1951-1952.

A. LICHNEROWICZ : [*1*] *Propagateurs et commutateurs en relativité générale*, Publ. Math. Inst. Hautes Et. Sc., n° 10, P. U. F., Paris, 1961.

[*2*] *Théorie quantique des champs sur un espace-temps courbe.* Cours de l'École d'Été de Physique théorique des Houches, 1963.

[*3*] Champs spinoriels et anticommutateurs sur un espace-temps courbe, *Bull. Soc. Math. de France* (sous presse).

[*4*] *Propagateurs et quantification en relativité générale*, Conf. int. sur la gravitation et la relativité, Varsovie, 1962; *Proceeding*, Gauthier-Villars, Paris, 1964,

A. LICHNEROWICZ et F. MORET-BAILLY, *Comptes rendus Acad. Sc. Paris*, t. 257. 1963, p. 3542.

P. ROMAN, *Theory of Elementary Particles*, North Holl. Comp., Amsterdam, 1961.

VISCONTI, *Théorie quantique des champs*, Gauthier-Villars, Paris, 1961.

H. WEYL et R. BRAUER, *Amer. Journ. of Math.*, t. 57, 1935, p. 425.

B. S. DEWITT : [*1*] *Ann. of Physics*, t. 9, 1960, p. 220.

[*2*] *Physic. Rev.*, t. 4, 1960, p. 317.

(Manuscrit reçu le 19 juin 1964).