

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

S. KICHENASSAMY

Compléments à l'interprétation physique de la relativité générale : applications

Annales de l'I. H. P., section A, tome 1, n° 2 (1964), p. 129-145

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1964__1_2_129_0

© Gauthier-Villars, 1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Compléments à l'interprétation physique de la Relativité générale : Applications

par

S. KICHENASSAMY
Institut Henri Poincaré.

SOMMAIRE. — On propose une interprétation des termes d'ordre supérieur à deux dont la métrique riemannienne diffère d'une métrique euclidienne osculatrice à cette métrique; on montre ensuite que cette interprétation permet de compléter la théorie de J. L. Synge du décalage vers le rouge des raies spectrales et de distinguer dans l'effet global l'effet gravitationnel de l'effet Doppler.

SUMMARY. — An interpretation is proposed of the terms of order higher than two by which a riemannian metric differs from its osculating euclidian metric; it is also shown that this interpretation allows one to complete J. L. Synge's theory of the red shift of spectral lines and to distinguish in the total effect the gravitational effect from the Doppler effect.

INTRODUCTION

1. Ce mémoire est issu des efforts en vue de surmonter les divergences qui subsistent apparemment, non pas sur le résultat final mais sur le fond de l'explication du décalage vers le rouge des raies spectrales, telle qu'elle est fournie par divers classiques de la Relativité ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Par exemple : A. EINSTEIN, P. G. BERGMANN, V. FOCK, LANDAU et LIFSCHITZ, G. C. MCVITTIE, C. MOLLER, W. PAULI, J. L. SYNGE, VON LAUE.

L'idée essentielle, déjà contenue dans l'œuvre d'Einstein et de ses commentateurs, consiste :

a) à admettre que la Relativité restreinte est, dans une région infiniment petite d'espace-temps, valable d'une manière approchée, c'est-à-dire que les étalons d'un observateur local et les phénomènes élémentaires s'y comportent comme dans un système d'inertie si l'on convient de négliger les termes d'ordre supérieur à deux ;

b) et à modifier dans l'espace-temps de la Relativité générale les étalons locaux, de manière à continuer d'attribuer aux phénomènes physiques d'une région finie, mais petite, des grandeurs numériquement égales à celles qu'ils auraient dans un système d'inertie, en l'absence du champ de gravitation (ces dernières étant naturellement évaluées avec des étalons du système d'inertie).

Nous verrons que cette idée est strictement compatible avec l'équivalence faible et que l'exploitation systématique de cette idée ajoute des éléments de profonde compréhension à la Relativité générale et conduit à une explication satisfaisante du décalage vers le rouge, explication qui complète celle de J. L. Synge (*).

Nous allons donc refaire brièvement le chemin qui va de la Relativité restreinte à la Relativité générale et tenter à nouveau de déterminer le lien qu'il convient d'établir entre les données théoriques et les résultats de mesure dans le cadre de la Relativité générale.

L'INTERPRÉTATION PHYSIQUE DE LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE

2. Fondements de la Relativité générale. — On sait depuis la Relativité restreinte, qu'il est impossible de mettre en évidence la translation uniforme d'un système de référence *S* uniquement au moyen d'expériences effectuées dans *S* ; mais il semble que l'on puisse déceler le mouvement accéléré de *S* au moyen d'expériences internes à *S* et mettant en jeu les forces fictives d'inertie ; ainsi, le pendule de Foucault ou le dispositif de Harress-Sagnac semblent pouvoir mettre en évidence la rotation uniforme de *S*.

Cependant, contrairement à une conception largement exprimée un tel mouvement accéléré, une telle rotation ne peuvent être absolus au sens newtonien du terme puisque, depuis la Relativité restreinte, le système d'inert-

(*) *Relativity the general theory*, North Holland Pub., 1960, p. 119-123.

tie par rapport auquel s'effectue le mouvement considéré ne peut être absolu.

Toutefois, il semble que l'on puisse reconnaître au moyen d'expériences internes à S son état de mouvement accéléré par rapport à un système d'inertie. Il n'en est rien tant qu'on se limite à une région infiniment petite de l'espace-temps où les postulats de la Relativité restreinte peuvent être supposés valables, c'est-à-dire dans une région où :

- a) le principe d'inertie peut être satisfait en raison de l'impossibilité pratique d'observer une accélération relative;
- b) les étalons de longueur et de durée peuvent être liés par la vitesse de la lumière dans le vide;
- c) la réciprocité entre des systèmes de référence à vitesse relative uniforme peut être admise.

Il ne s'ensuit pas que dans cette région infiniment petite, S constitue un véritable système d'inertie : les étalons de longueur et de durée ne peuvent en effet coïncider avec ceux d'un système d'inertie qu'à des infiniment petits près. Pour cette raison, nous dirons que S constitue dans cette région un « pseudo-système d'inertie ».

Mais, si l'on s'intéresse à une région étendue, l'accélération devient accessible à l'expérience et les postulats de la Relativité restreinte cessent d'y être valables ; S ne constitue plus un système d'inertie, un système tel qu'en tous ses points deux événements soient caractérisés par les mêmes intervalles de longueur et de durée. Il en résulte qu'un système de référence étendu à une région finie de l'espace-temps puisse être conçu comme une infinité de pseudo-systèmes d'inertie se raccordant entre eux, ou que l'espace-temps correspondant soit décrit par une variété à connexion linéaire.

Inversement, si un dispositif expérimental intéressant une région finie du système S donne un résultat différent de celui que l'on obtiendrait dans un système d'inertie, on peut naturellement affirmer que S n'est pas un système d'inertie. Peut-on en déduire que S est le siège d'accélération d'inertie ? Non, si l'on s'en tient au comportement d'une particule d'épreuve (ou de plusieurs particules d'épreuve dans une région limitée telle que le champ y soit homogène) car le principe d'équivalence fondé sur l'égalité de la masse grave passive et de la masse inerte (Eotvös) ne permet pas de distinguer entre champ d'inertie et champ de gravitation homogènes. Bien entendu, si la région est suffisamment étendue pour permettre de déceler la source du champ de gravitation homogène, cette distinction gardera son sens.

Il découle de ce qui précède, que la représentation d'un système non inertial de référence par une variété à connexion linéaire (que nous postulons

riemannienne) réalise indifféremment dans une région limitée, la description soit d'un champ d'inertie, soit d'un champ de gravitation.

L'équivalence que nous avons admise ici, d'un champ d'inertie et d'un champ de gravitation dans une région limitée est l'équivalence *faible*, la *forte* tendant en outre à assimiler les pseudo-systèmes d'inertie à de véritables systèmes d'inertie de la Relativité restreinte et à admettre que les lois de la Physique, y compris le contenu numérique, observées localement dans un système en chute libre sont indépendantes de la situation dans le temps et dans l'espace du laboratoire ⁽³⁾.

Nous allons maintenant montrer que l'équivalence forte n'est compatible avec la structure riemannienne de l'espace-temps que de manière approchée.

3. Structure riemannienne et validité locale de la Relativité restreinte. — L'introduction d'une structure riemannienne pour décrire l'espace-temps enlève irrévocablement toute signification immédiate aux coordonnées; cette signification est acquise grâce à la métrique supposée régulière et de type hyperbolique normal qui, dans un système de coordonnées locales x^α ($\alpha = 0, 1, 2, 3$), s'écrit :

$$(3.1) \quad ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta.$$

Le fait que les coordonnées n'ont, dans le cadre d'une variété non euclidienne, qu'une signification purement topologique nous semble être l'essence du postulat de covariance générale dont Einstein lui-même n'a pas manqué de souligner l'insuffisance pour fonder mathématiquement la Relativité générale ⁽⁴⁾.

Pour préciser dans quelle mesure, les postulats de la Relativité restreinte peuvent être supposés vérifiés localement, considérons une représentation du second ordre ⁽⁵⁾ ⁽⁶⁾ du voisinage d'un point M de coordonnées x_0^α appartenant à la variété espace-temps V_4 sur un espace de Minkowski E_4 ; si m_0 est l'image de M_0 , l'image m de tout autre point M de coordonnées x^α peut être défini par :

$$(3.2) \quad \overrightarrow{m_0 m} = \left[(x^\alpha - x_0^\alpha) + \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\gamma \end{matrix} \right\}_0 (x^\beta - x_0^\beta)(x^\gamma - x_0^\gamma) + \psi_3^\alpha(x^\sigma - x_0^\sigma) \right] \vec{e}_\alpha$$

⁽³⁾ C. BRANS et R. H. DICKE, *Phys. Rev.*, t. 124, 1961, p. 925.

⁽⁴⁾ A. EINSTEIN, Autobiographical notes : dans A. EINSTEIN, *Philosopher-Scientist*, Tudor, 1951.

⁽⁵⁾ E. CARTAN, *Géométrie des espaces de Riemann*, Gauthier-Villars, Paris, 1951.

⁽⁶⁾ A. LICHNEROWICZ, *Éléments de calcul tensoriel*, A. Colin, Paris, 1951.

où ψ_3^α est d'ordre supérieur à deux en $(x^\alpha - x_0^\alpha)$ et les \vec{e}_α sont les vecteurs de base d'un repère en m_0 vérifiant les relations :

$$(3.3) \quad \vec{e}_\alpha \vec{e}_\beta = (g_{\alpha\beta})_0.$$

En introduisant dans E_4 des coordonnées \bar{x}^α telles que :

$$(3.4) \quad (\bar{x}^\alpha)_{m_0} = \bar{x}_0^\alpha = x_0^\alpha.$$

$$(3.5) \quad \bar{x}^\alpha - \bar{x}_0^\alpha = x^\alpha - x_0^\alpha + \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta \psi \end{matrix} \right\}_0 (x^\beta - x_0^\beta)(x^\gamma - x_0^\gamma) + \psi_3^\alpha (x^\sigma - x_0^\sigma) = \Lambda_\sigma^\alpha (x^\sigma - x_0^\sigma)$$

(3.2) s'écrit aussi :

$$(3.6) \quad \vec{m}_0 \vec{m} = (\bar{x}^\alpha - \bar{x}_0^\alpha) \vec{e}_\alpha = (x^\sigma - x_0^\sigma) \Lambda_\sigma^\alpha \vec{e}_\alpha = (x^\sigma - x_0^\sigma) \vec{e}_\sigma$$

avec :

$$(3.7) \quad (\Lambda_\alpha^\beta)_{m_0} = \delta_\alpha^\beta.$$

Ainsi à l'intervalle élémentaire de V_4 :

$$(3.8) \quad ds^2 = \overline{M_0 M^2} = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

correspond dans E_4 l'intervalle élémentaire :

$$(3.9) \quad \bar{ds}^2 = \overline{m_0 m^2} = \bar{g}_{\alpha\beta} d\bar{x}^\alpha d\bar{x}^\beta,$$

$$(3.10) \quad \bar{g}_{\alpha\beta} = \Lambda_\alpha^\rho \Lambda_\beta^\sigma g_{\rho\sigma}$$

et l'on a évidemment, de manière intrinsèque :

$$(3.11) \quad (\bar{g}_{\alpha\beta})_0 = (g_{\alpha\beta})_0,$$

$$(3.12) \quad (\partial_\gamma \bar{g}_{\alpha\beta})_0 = (\partial_\gamma g_{\alpha\beta})_0.$$

Les métriques riemannienne $g_{\alpha\beta}$ et euclidienne $\bar{g}_{\alpha\beta}$ sont ainsi osculatrices au point M_0 . C'est ce qui permet d'identifier en ce point l'espace de Riemann V_4 et l'espace euclidien osculateur E_4 en vue d'introduire les grandeurs géométriques de V_4 à partir de celles de E_4 .

Cette identification n'est cependant justifiée que modulo des termes d'ordre supérieur à deux en dx^α . En effet, les intervalles élémentaires qui séparent deux points x^α et $x^\alpha + dx^\alpha$ en présence et en l'absence du champ de gravitation sont tels que :

$$(3.13) \quad ds^2 = \bar{ds}^2 + \Phi_3$$

où Φ_3 est d'ordre 3 au moins en dx^α . Il est clair que, dans des domaines infiniment petits, l'équivalence de ces deux intervalles élémentaires n'est assurée que modulo Φ_3 , ce que nous traduisons par :

$$(3.14) \quad ds^2 \simeq \bar{d}s^2.$$

Or, les dx^α correspondant à des grandeurs physiques effectivement mesurables ne peuvent être infiniment petits et il est naturel d'admettre que les deux éléments linéaires en un point M cessent d'être égaux pour devenir proportionnels :

$$(3.15) \quad ds^2 = \Lambda_M^2 \bar{d}s^2,$$

le rapport de proportionnalité dépendant évidemment du champ de gravitation présente en ce point.

Λ_M semble indéterminé du fait qu'il puisse exister une infinité de métriques osculatrices au point M à la métrique riemannienne. Sans aborder ici le calcul explicite de Λ_M en fonction des termes de courbure, nous nous contenterons de remarquer qu'il suffit pour assurer la validité de nos considérations que le choix de la métrique osculatrice demeure arbitraire dans les applications, comme dans l'étude du décalage vers le rouge où la métrique osculatrice s'élimine du résultat final. Nous ne retenons d'ailleurs dans ce qui suit, que la signification temporelle de Λ_M .

Signification de Λ_M . — Pour déterminer la signification de Λ_M , effectuons la réduction à la forme canonique de (3.8) et (3.9) :

$$(3.16) \quad ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = \left(\frac{g_{0\alpha} dx^\alpha}{\sqrt{g_{00}}} \right)^2 + \left(g_{ij} - \frac{g_{0i} g_{0j}}{g_{00}} \right) dx^i dx^j = \eta_{\alpha\beta} \omega^\alpha \omega^\beta$$

où les ω^α sont un système de formes de Pfaff linéairement indépendantes, et :

$$(3.17) \quad \bar{d}s^2 = \bar{g}_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = \left(\frac{\bar{g}_{0\alpha} dx^\alpha}{\sqrt{\bar{g}_{00}}} \right)^2 + \left(\bar{g}_{ij} - \frac{\bar{g}_{0i} \bar{g}_{0j}}{\bar{g}_{00}} \right) dx^i dx^j = \eta_{\alpha\beta} \bar{\omega}^\alpha \bar{\omega}^\beta$$

où les $\bar{\omega}^\alpha$ sont des formes de Pfaff complètement intégrables.

L'équation (3.15) signifie qu'au même phénomène élémentaire en M, décrit par des coordonnées dx^α , correspondent des longueurs et des durées différentes suivant que l'on est en présence ou non d'un champ de gravitation, ces grandeurs étant évaluées dans les deux cas avec les mêmes étalons, ceux du système d'inertie. En particulier, au phénomène élémentaire qui a lieu en un point fixe A d'une section d'espace de V_4 , c'est-à-dire tel que $\omega_\lambda^i = 0$ (ce qui entraîne $dx^i = 0$ et $\bar{\omega}_\lambda^i = 0$) correspondent la durée ω_λ^0 en présence du champ de gravitation et la durée $\bar{\omega}_\lambda^0$ en l'absence de ce

champ, ces deux durées étant évaluées en unité de temps ε du système d'inertie et l'on a :

$$(3.18) \quad \omega_A^0 = \Lambda_A \bar{\omega}_A^0$$

ce qui fournit :

$$(3.19) \quad \Lambda_A = (g_{00}/\bar{g}_{00})^{\frac{1}{2}}$$

Soit ω_{AA}^0 la durée dans V_4 du même phénomène évaluée non plus avec ε , mais avec une unité ε_A :

$$(3.20) \quad \varepsilon_A = \Lambda_A \varepsilon.$$

Celle-ci pourrait être l'unité de temps marquée par l'horloge standard du système d'inertie, en présence du champ de gravitation. On a :

$$(3.21) \quad \omega_A^0 \varepsilon = \omega_{AA}^0 \varepsilon_A = \omega_{AA}^0 \Lambda_A \varepsilon$$

ce qui entraîne :

$$(3.22) \quad \omega_{AA}^0 = \bar{\omega}_A^0.$$

Ainsi, la durée ω_{AA}^0 d'un phénomène élémentaire en présence d'un champ de gravitation, évaluée avec une horloge soumise elle aussi au même champ, est numériquement égale à la durée $\bar{\omega}_A^0$ du même phénomène mesurée avec la même horloge, l'horloge et le phénomène étant dans ce dernier cas, soustraits à l'influence du champ de gravitation.

D'autre part, les étalons de longueur et de durée étant dans un système d'inertie, liés par la vitesse de la lumière dans le vide, il convient d'admettre que l'étalon de longueur attaché à un point quelconque A de l'espace-temps de la Relativité générale est lui aussi proportionnel à l'étalon du système d'inertie, le rapport de proportionnalité étant, comme dans le cas des durées, Λ_A .

On est donc ainsi conduit à admettre :

a) ou bien que les règles et horloges standard de la Relativité générale sont telles qu'en *tout point* de l'espace-temps, elles aient le même comportement que les règles et les horloges du système d'inertie. Sous ces hypothèses, un phénomène élémentaire *a*, en présence d'un champ de gravitation, une longueur et une durée différentes de celles qu'il aurait dans un système d'inertie;

b) ou bien que les règles et les horloges de la Relativité générale sont les mêmes que celles de la Relativité restreinte, mais dont le comportement varie d'un point à l'autre de l'espace-temps sous l'influence du champ de

gravitation. Sous ces hypothèses, un phénomène élémentaire a les mêmes longueurs et durées par rapport à un système d'inertie et à un repère local de la Relativité générale (utilisant les étalons modifiés).

Le phénomène élémentaire ne pouvant, en même temps que les règles et les horloges, avoir un comportement identique par rapport à un repère propre de la Relativité restreinte et à un repère local de la Relativité générale, nous sommes conduits à exclure dans le cadre de la Relativité générale, l'équivalence forte qui postule que la Relativité restreinte est en *toute rigueur*, valable localement.

4. Conséquences concernant la définition des grandeurs géométriques. — Nous avons signalé précédemment, que l'identification locale de l'espace de Riemann et de l'espace euclidien osculateur permettait de définir les grandeurs géométriques attachées à un point de V_4 à partir des grandeurs euclidiennes correspondantes.

Ainsi, au vecteur $\bar{u}^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\bar{s}}$ de l'espace de Minkowski, on fait correspondre le vecteur $u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds}$ de l'espace de Riemann, ce que nous noterons :

$$(4.1) \quad (u^\alpha)_A = \frac{dx^\alpha}{ds} \simeq \frac{dx^\alpha}{d\bar{s}} = (\bar{u}^\alpha)_A,$$

la loi de transformation de u^α , lors d'un changement de coordonnées, se déduisant de celle de \bar{u}^α .

Or, à la lueur des considérations précédentes, on a :

$$(4.2) \quad (ds)_A = \Lambda_A(d\bar{s})_A$$

et :

$$(4.3) \quad (ds)_A = ds_A \varepsilon = ds_{AA} \varepsilon_A,$$

$$(4.4) \quad (d\bar{s})_A = d\bar{s}_A \varepsilon$$

en désignant par ε et ε_A les unités de temps propre du système d'inertie et du repère local en A.

Il s'ensuit que (4.1) se traduit par :

$$(4.5) \quad u^\alpha_A = \frac{dx^\alpha}{ds_A} \simeq \frac{dx^\alpha}{d\bar{s}_A} = \bar{u}^\alpha_A$$

tandis que l'on a en toute rigueur :

$$(4.6) \quad u^\alpha_{AA} = \frac{dx^\alpha}{ds_{AA}} = \frac{dx^\alpha}{d\bar{s}_A} = \bar{u}^\alpha_A.$$

Nous sommes ainsi conduits à identifier localement l'espace euclidien osculateur et l'espace de Riemann muni non pas des étalons du système d'inertie, mais des étalons modifiés par le champ de gravitation et cela en conservant au vecteur u^α la même loi de transformation que précédemment.

Nous avons d'autre part :

$$(4.7) \quad g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = g_{\alpha\beta} u^\alpha_A u^\beta_A \varepsilon^{-2} = g_{\alpha\beta} u^\alpha_{AA} u^\beta_{AA} \varepsilon_A^{-2} = 1$$

de telle sorte que l'unitarité de u^α entraîne celle de u^α_A si l'unité de temps propre est celle de la Relativité restreinte, soit $\varepsilon = 1$, celle de u^α_{AA} si cette unité est celle du pseudo-système d'inertie, soit $\varepsilon_A = 1$.

Ainsi, à tout vecteur unitaire v^α défini en un point A :

$$(4.8) \quad g_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta = 1$$

correspond :

a) le vecteur v^α_A unitaire lorsque les étalons utilisés sont ceux du système d'inertie;

b) le vecteur v^α_{AA} unitaire lorsque les étalons sont ceux du pseudo-système d'inertie.

L'extension de ces considérations à des tenseurs d'ordre plus élevé est immédiate.

Considérons maintenant les vecteurs en A, r^α et w^α (par rapport à un système de coordonnées locales x^α) déduits des vecteurs en B, $u^{\alpha'}$ et $v^{\alpha'}$ (par rapport à un autre système de coordonnées locales $x^{\alpha'}$) par transport parallèle le long d'une courbe donnée joignant A et B, afin de préciser les conséquences de notre point de vue sur le transport parallèle. A ces vecteurs correspondent d'une part r^α_{AA} et w^α_{AA} tels que :

$$(4.9) \quad r^\alpha_{AA} = r^\alpha_A \Lambda_A \quad w^\alpha_{AA} = w^\alpha_A \Lambda_A$$

et d'autre part $u^{\alpha'}_{BB}$ et $v^{\alpha'}_{BB}$ tels que :

$$(4.10) \quad u^{\alpha'}_{BB} = u^{\alpha'}_B \Lambda_B \quad v^{\alpha'}_{BB} = v^{\alpha'}_B \Lambda_B$$

et l'on a bien évidemment :

$$(4.11) \quad u^{\alpha'}_{BB} v_{\alpha' BB} \varepsilon_B^{-2} = u^{\alpha'}_B v_{\alpha' B} \varepsilon_B^{-2} = (u^{\alpha'} v_{\alpha'})_B = (r^\alpha w_\alpha)_A = r^\alpha_A w_{\alpha A} \varepsilon_A^{-2} = r^\alpha_{AA} w_{\alpha AA} \varepsilon_A^{-2}$$

si bien que :

$$(4.12) \quad u^{\alpha'}_{BB} v_{\alpha' BB} = w^\alpha_{AA} r_{\alpha AA}$$

lorsque les étalons en A et B sont tels que :

$$(4.13) \quad \varepsilon_A = 1 \quad \varepsilon_B = 1.$$

Ce dernier résultat nous sera utile lors de l'étude du décalage vers le rouge pour distinguer l'effet gravitationnel proprement dit de l'effet Doppler.

5. Conséquences sur la synchronisation des horloges voisines.

— Les considérations précédentes concernant les grandeurs attachées à un point de l'espace de Riemann nous ont conduit à adopter en chaque point des étalons de longueur et de durée différents de ceux du système d'inertie, ceux qui correspondent aux règles et horloges standard du système d'inertie soumises à l'influence du champ de gravitation. Que peut-on dire des étalons liés à deux points infiniment voisins, en particulier de deux horloges voisines ?

Considérons à cet effet, deux événements $A(x^\alpha)$ et $B(x^\alpha + dx^\alpha)$:

a) Si ces deux événements correspondent à l'émission d'un signal lumineux en A et réception du même signal en B dans l'espace-temps plat, les horloges identiques en A et B, c'est-à-dire celles qui marquent la même unité de temps, sont synchronisées lorsque l'horloge en A marquant X^0 , l'horloge en B marque $X^0 + \bar{\omega}^0$ avec :

$$(5.1) \quad \bar{\omega}^0 = \frac{\bar{g}_{0\alpha} dx^\alpha}{\sqrt{g_{00}}}$$

et les dx^α correspondant à un parcours lumineux élémentaire :

$$(5.2) \quad d\bar{s}^2 = \bar{g}_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = 0.$$

b) Si au contraire, ces deux événements correspondent à l'émission et à la réception d'un signal lumineux non plus dans l'espace plat, mais dans l'espace-temps de la Relativité générale, on sait que les dx^α doivent vérifier :

$$(5.3) \quad ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = 0.$$

Les horloges identiques en A et B sont, d'après ce qui précède, celles qui ont leurs unités de temps ε_A et ε_B telles que :

$$(5.4) \quad \varepsilon_A \Lambda_A^{-1} = \varepsilon_B \Lambda_B^{-1} = \varepsilon$$

et elles pourront être considérées comme synchronisées si, l'horloge en A marquant $X^0 \Lambda_A^{-1}$, l'horloge en B marque $(X^0 + \omega^0) \Lambda_B^{-1}$ où ω^0 est le temps évalué en unité ε que met la lumière à parcourir la distance AB :

$$(5.5) \quad \omega^0 = g_{0\alpha} dx^\alpha / \sqrt{g_{00}}.$$

Ainsi, deux horloges synchronisées au moyen d'un signal lumineux dans l'espace plat cessent de l'être en présence d'un champ d'accélération,

ce qui, nous le verrons dans la suite, explique en particulier les résultats d'expérience effectuées à bord d'un disque tournant.

Nous remarquerons pour terminer que le type d'horloge envisagé ici est loin d'être un concept théorique : c'est en particulier le cas des horloges atomiques (?).

6. Équations d'Einstein. — Rappelons, avant d'aborder quelques-unes des applications des considérations précédentes que la Relativité générale limite la généralité des potentiels $g_{\alpha\beta}$ en les astreignant aux conditions suivantes :

a) Dans des domaines vides d'énergie (non gravitationnelle), la métrique est régulière et satisfait aux équations d'Einstein du cas extérieur :

$$(6.1) \quad S_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = 0.$$

b) Dans des domaines limités par des hypersurfaces-frontières S et renfermant une distribution énergétique décrite par $T_{\alpha\beta}$, la métrique régulière satisfait aux équations d'Einstein du cas intérieur :

$$(6.2) \quad S_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta}.$$

c) A la traversée des hypersurfaces S, les potentiels et leurs dérivées premières sont continus conformément aux conditions de raccordement de Schwarzschild.

D'autre part, l'existence des quatre identités :

$$(6.3) \quad \nabla_{\alpha} S_{\alpha}^{\sigma} = 0$$

permet le choix arbitraire des coordonnées et assure, en vertu de (6.2), la déduction des équations du mouvement à partir des équations du champ.

APPLICATIONS

7. Nous allons maintenant illustrer l'intérêt des développements précédents fondés sur l'équivalence faible en étudiant deux problèmes particuliers : le décalage vers le rouge des raies spectrales et l'effet Harress-Sagnac.

8. **Décalage vers le rouge des raies spectrales** (8). — Cet effet réalise une vérification de l'influence d'un champ d'accélération sur le

(?) C. MÖLLER et K. DANSK, *Vid. Selsk. Mat. Fys.*, t. 30, 1955, p. 10.

(8) Voir aussi : E. SCHRÖDINGER, *Expanding universes*, Cambridge, 1956.

comportement des horloges; il résulte de la comparaison en un même point des fréquences de deux sources identiques situées en deux points distincts. Plus précisément, si ν_{BB} est la fréquence en B (évaluée en ϵ_B^{-1}) d'une source S située en B, et ν_{AA} la fréquence en A (évaluée en ϵ_A^{-1}) d'une source S identique située en A, il s'agit de comparer par exemple au point A la fréquence ν_{BB} telle qu'elle est perçue en A, soit ν_{BA} , avec la fréquence ν_{AA} .

a) *Identité des sources.* — Les considérations précédentes conduisent à considérer comme identiques les sources en A et B si la période τ_{AA}^0 de la source en A (mesurée en ϵ_A) est la même que celle τ_{BB}^0 de la source en B (mesurée en ϵ_B), toutes les deux étant d'ailleurs égales à la période $\bar{\tau}^0$ des mêmes sources placées dans un système d'inertie :

$$(8.1) \quad \tau_{AA}^0 = \tau_{BB}^0 = \bar{\tau}^0,$$

ce qui entraîne :

$$(8.2) \quad \nu_{AA} = \nu_{BB}.$$

Cette hypothèse est celle qui est généralement adoptée, d'une manière plus ou moins explicite, par les différents auteurs. Toutefois, en parlant de temps propre, sans préciser la nature de l'horloge standard utilisée, certains auteurs semblent sous-entendre cette autre définition de l'identité des sources en A et B :

$$(8.3) \quad \tau_{AA}^0 \Lambda_A = \tau_{BB}^0 \Lambda_B$$

qui exprime que les périodes τ_A^0 et τ_B^0 des sources en A et B (évaluées en unité ϵ du système d'inertie) sont égales. Nous verrons que cette définition n'est pas satisfaisante.

b) *Évaluation de la fréquence ν_{BA} (*)*. — Pour évaluer la fréquence de réception ν_{BA} en A, mesurée en ϵ_A^{-1} , correspondant à la fréquence ν_{BB} émise en B et mesurée en ϵ_B^{-1} , considérons les lignes d'univers L et L' respectivement tangentes aux vitesses unitaires locales $u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds}$ et $u^{\alpha'} = \frac{dx^{\alpha'}}{ds'}$ de l'observateur en A utilisant les coordonnées x^α et de la source en B rapportée à des coordonnées $x^{\alpha'}$.

Imaginons le 2-espace formé par les géodésiques isotropes $\Gamma(u)$ qui appliquent L sur L' et soient :

i) v un paramètre spécial sur chacune de ces géodésiques tel que $v = v_1$

(*) Le principe de cette détermination est dû à J. L. SYNGE, *loc. cit.*

sur L et $v = v_2$ sur L', ce qui est possible puisque ce paramètre est déterminé à une transformation linéaire près;

ii) et u un second paramètre constant le long de chaque géodésique.

En posant :

$$(8.4) \quad U^\alpha = \frac{dx^\alpha}{du} \quad V^\alpha = \frac{dx^\alpha}{dv}$$

on a :

$$(8.5) \quad V^\sigma \nabla_\sigma V^\alpha = \frac{\delta V^\alpha}{\delta v} = 0 \quad V^\alpha V_\alpha = 0$$

et :

$$(8.6) \quad \frac{\partial}{\partial v} (U^\alpha V_\alpha) = V_\alpha \frac{\delta U^\alpha}{\delta v} = V_\alpha \frac{\delta V^\alpha}{\delta u} = \frac{\delta}{\delta u} (V_\alpha V^\alpha) = 0,$$

c'est-à-dire encore :

$$(8.7) \quad U^\alpha V_\alpha = \text{const. (indépendant de } v).$$

En particulier, si k^α et $k^{\alpha'}$ sont les vecteurs isotropes tangents en A et B à la géodésique de référence et $U^{\alpha'} = \frac{dx^{\alpha'}}{du}$, on a :

$$(8.8) \quad U^\alpha k_\alpha = U^{\alpha'} k_{\alpha'}$$

ou encore :

$$(8.9) \quad u^\alpha k_\alpha ds = U^\alpha k_\alpha du = U^{\alpha'} k_{\alpha'} du = u^{\alpha'} k_{\alpha'} ds'.$$

D'autre part, en exprimant que le nombre de fronts d'onde émis en B pendant le temps $ds'_{BB} = ds' \varepsilon_B^{-1}$ (évalué en ε_B) est le même que celui reçu en A pendant $ds_{AA} = ds \varepsilon_A^{-1}$ (évalué en ε_A), ce qui est naturel puisque ds et ds' correspondent à la même valeur de du , on a :

$$(8.10) \quad v_{BA} \Lambda_A^{-1} ds = v_{BB} \Lambda_B^{-1} ds'.$$

Par suite :

$$(8.11) \quad \frac{v_{BA} \Lambda_A^{-1}}{v_{BB} \Lambda_B^{-1}} = \frac{u^\alpha k_\alpha}{u^{\alpha'} k_{\alpha'}}$$

ce qui devient :

$$(8.12) \quad \frac{v_{BA}}{v_{BB}} = \frac{\Lambda_B}{\Lambda_A} \frac{u_{AA}^\alpha k_{\alpha AA}}{u_{BB}^{\alpha'} k_{\alpha' BB}}$$

lorsque, conformément aux considérations du § 4, on exprime u^α , k^α , $u^{\alpha'}$ et $k^{\alpha'}$ en fonction des vecteurs u_{AA}^α , k_{AA}^α , $u_{BB}^{\alpha'}$ et $k_{BB}^{\alpha'}$ effectivement obtenus avec les horloges standard de la Relativité restreinte dont le comportement est modifié par le champ d'accélération.

c) *Effet gravitationnel et effet Doppler.* — On tire facilement de (8.2) et (8.12) :

$$(8.13) \quad \frac{v_{BA}}{v_{AA}} = \frac{\Lambda_B}{\Lambda_A} \frac{u_{AA}^\alpha k_{\alpha AA}}{u_{BB}^{\alpha'} k_{\alpha' BB}}.$$

Mais, on sait par (4.12) que :

$$(8.14) \quad w_{AA}^\alpha k_{\alpha AA} = u_{BB}^{\alpha'} k_{\alpha' BB}$$

où w^α est le vecteur en A déduit de $u^{\alpha'}$ par transport parallèle le long de la géodésique de référence, les vecteurs k^α et $k^{\alpha'}$ se correspondant naturellement au cours de ce transport parallèle (rappelons que (8.14) suppose que les unités de temps propre sont en A et B respectivement ε_A et ε_B).

On en déduit :

$$(8.15) \quad \frac{v_{BA}}{v_{AA}} = \frac{\Lambda_B}{\Lambda_A} \frac{u_{AA}^\alpha k_{\alpha AA}}{w_{AA}^\alpha k_{\alpha AA}}$$

où toutes les grandeurs sont mesurées au même point A avec des étalons correspondant à ceux du système d'inertie modifiés par le champ de gravitation.

Posons pour simplifier :

$$(8.16) \quad u_{AA}^\alpha = \bar{u}^\alpha \quad k_{AA}^\alpha = \bar{k}^\alpha \quad w_{AA}^\alpha = \bar{w}^\alpha$$

ce qui est d'ailleurs conforme au fait que l'on puisse identifier localement l'espace de Riemann muni des étalons locaux modifiés et l'espace euclidien osculateur.

Soit \tilde{u}^α la vitesse relative de l'observateur par rapport à la source; on a :

$$(8.17) \quad u^\alpha = \tilde{u}^\alpha + \bar{u}^\sigma \bar{w}_\sigma \bar{w}^\alpha$$

avec :

$$(8.18) \quad \tilde{u}^\sigma \bar{w}_\sigma = 0.$$

Posons d'autre part :

$$(8.19) \quad \bar{k}^\alpha = \bar{k}^\sigma \bar{w}_\sigma (\bar{w}^\alpha + \tilde{k}^\alpha)$$

où :

$$(8.20) \quad \tilde{k}^\sigma \tilde{k}_\sigma = -1.$$

La relation fondamentale devient alors :

$$(8.21) \quad \frac{v_{BA}}{v_{AA}} = \frac{\Lambda_B}{\Lambda_A} (\bar{u}^\sigma \bar{w}_\sigma + \tilde{u}^\sigma \tilde{k}_\sigma).$$

Telle est la formule générale du décalage vers le rouge des raies spectrales.

Il est facile de reconnaître que

i) la formule (8.21) donne l'effet gravitationnel classique lorsque la source et l'observateur sont au repos relatif, soit :

$$(8.22) \quad \tilde{u}^\alpha = 0$$

et :

$$(8.23) \quad \frac{v_{BA}}{v_{AA}} = \frac{\Lambda_B}{\Lambda_A} = \left[\frac{(g_{00})_B}{(g_{00})_A} \right]^{1/2}.$$

On sait que dans le cadre d'un espace-temps statique, la formule théorique (8.23) est expérimentalement vérifiée :

α) dans le cas du soleil, près du disque solaire, la valeur observée diminuant vers le centre ;

β) dans le cas du compagnon du Sirius, l'accord étant ici beaucoup plus satisfaisant.

Ajoutons que la vérification expérimentale de (8.21) grâce à la possibilité d'obtenir des raies de résonance fines offertes par l'effet Mössbauer semble virtuellement assurée.

ii) la formule (8.21) donne l'effet Doppler, lorsque le champ de gravitation est nul, soit :

$$(8.24) \quad \Lambda_B = \Lambda_A = 1$$

et :

$$(8.25) \quad \frac{v_{BA}}{v_{AA}} = \bar{u}^\sigma \bar{w}_\sigma + \tilde{u}^\sigma \tilde{k}_\sigma$$

les vitesses qui y interviennent s'identifiant naturellement avec les vitesses mesurées dans un système d'inertie.

En particulier, lorsque la source est au repos :

$$(8.26) \quad \bar{w}^0 = 1 \quad \bar{w}^i = 0$$

on a :

$$(8.27) \quad \frac{v_{BA}}{v_{AA}} = \frac{1 + \beta^i \tilde{k}_i}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1 + \beta \cos \theta}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

en posant :

$$(8.28) \quad \bar{u}^0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \bar{u}^i = \frac{\beta^i}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \beta^2 = \delta_{ij} \beta^i \beta^j$$

où θ mesure l'angle que fait la vitesse relative de la source et de l'observateur avec la direction de l'observation.

Ainsi, l'hypothèse de l'équivalence faible et l'adoption résultante d'étalons

locaux (ceux du système d'inertie modifiés par le champ de gravitation) distincts d'un point à l'autre de l'espace-temps de la Relativité générale, permettent de rendre compte du décalage vers le rouge des raies spectrales de manière intrinsèque et de distinguer dans l'effet global l'effet gravitationnel de l'effet Doppler.

9. **Effet Harress-Sagnac** ⁽¹⁰⁾. — Les effets observés à l'aide d'un dispositif interférentiel solidaire (au moins en partie) d'un disque en comparant les résultats obtenus lorsque le disque est au repos et lorsqu'il est en rotation, illustrent également les développements précédents.

Nous supposons à cet effet connu, l'élément linéaire du disque tournant :

$$(9.1) \quad ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

bien qu'à l'heure actuelle nous ne disposions pas de solution pleinement satisfaisante du problème.

i) L'effet Sagnac qui suppose l'expérience effectuée dans l'air résulte de ce que l'horloge en A attribue au parcours lumineux élémentaire de A(x^α) à B($x^\alpha + dx^\alpha$) :

a) la durée $\omega^0 \Lambda_A^{-1}$ en présence du champ d'accélération avec :

$$(9.2) \quad \omega^0 = g_{0\alpha} dx^\alpha / \sqrt{g_{00}} ;$$

b) la durée $\bar{\omega}^0$ lorsque le disque est au repos :

$$(9.3) \quad \bar{\omega}^0 = \bar{g}_{0\alpha} dx^\alpha / \sqrt{\bar{g}_{00}}$$

de telle sorte que sur tout phénomène vibratoire se propageant le long de AB (phénomène dont le comportement est comparable à celui d'une horloge), la rotation introduit sur le parcours AB, un retard optique :

$$(9.4) \quad \Delta \bar{\omega}^0 = \bar{\omega}^0 - \omega^0 \Lambda_A^{-1} = \frac{\bar{g}_{0i} dx^i}{\sqrt{\bar{g}_{00}}} - \frac{g_{0i} dx^i}{g_{00}} \sqrt{g_{00}}.$$

En particulier, si les coordonnées adoptées sont telles que dans l'espace de Minkowski (correspondant au disque au repos) on ait :

$$(9.5) \quad \bar{g}_{00} = 1 \quad \bar{g}_{0i} = 0$$

ce qui, bien entendu, n'apporte aucune restriction quant à la forme des $g_{\alpha\beta}$ sur le disque en rotation, ce retard optique devient :

$$(9.6) \quad \Delta \bar{\omega}^0 = - \frac{g_{0i} dx^i}{\sqrt{g_{00}}}.$$

⁽¹⁰⁾ S. KICHENASSAMY, *Bol. Univ. Parana. Fis. Teor.*, t. 1, 1961.

L'intégration supposée permise de ce retard sur un circuit fermé permet, l'on sait, de rendre compte de l'effet Sagnac.

ii) Quant à l'effet Harress-Pogany qui suppose l'expérience effectuée dans un milieu réfringent, son interprétation se fait de la même manière que précédemment. :

Bien que le retard optique sur un parcours AB ne soit plus donné dans ce cas, par (9.6), mais par

$$(9.7) \quad \dot{\Delta} \bar{\omega}^0 = - \frac{\dot{g}_{0i} dx^i}{\sqrt{\dot{g}_{00}}} \quad \dot{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - \left(1 - \frac{1}{\varepsilon\mu}\right) u_\alpha u_\beta$$

où $\dot{g}_{\alpha\beta}$ est la métrique associée à la métrique $g_{\alpha\beta}$ à bord d'un disque tournant et définit le conoïde caractéristique des équations de Maxwell-Einstein pour un milieu réfringent ⁽¹¹⁾, il est aisé de voir que (9.7) se réduit à (9.6) par rapport à un observateur entraîné ($u = 1$ et $u^i = 0$)

$$(9.8) \quad \dot{\Delta} \bar{\omega}^0 = - \frac{g_{i0} - (1 - 1/\varepsilon\mu) g_{i0} g_{00}}{g_{00} - (1 - 1/\varepsilon\mu) g_{00} g_{00}} dx^i = - \frac{g_{i0} dx^i}{g_{00}} = \Delta \bar{\omega}^0.$$

Ainsi, dans l'hypothèse où l'élément linéaire du disque tournant est connu, les expériences effectuées à bord d'un disque en rotation corroborent la cohérence de notre point de vue. Ajoutons, ainsi que nous l'avons signalé ailleurs, que l'identité des résultats obtenus dans le vide et en présence d'un milieu réfringent constitue une vérification expérimentale de laboratoire de la Relativité générale.

10. Les considérations précédentes semblent donc indiquer que seule l'équivalence faible entre champ d'inertie et champ de gravitation est satisfaisante tant du point de vue théorique que du point de vue expérimental et que, par suite on ne peut assimiler des domaines infiniment petits d'un système de référence de la Relativité générale qu'à des pseudo-systèmes d'inertie.

Nous avons examiné ici, certaines des conséquences de ce point de vue sur la chronométrie et nous espérons revenir ultérieurement sur l'étude de la mesure des distances.

(Manuscrit reçu le 1^{er} octobre 1963).

(11) PHAM MAU QUAN, *Arch. Rat. Mech. A.*, t. 1, 1957, p. 54.