Annales de la faculté des sciences de Toulouse

Mohammad Daher

Translations mesurables et ensembles de Rosenthal

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 14, nº 1 (2005), p. 105-121

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_2005_6_14_1_105_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. XIV, n° 1, 2005
pp. 105–121

Translations mesurables et ensembles de Rosenthal

MOHAMMAD DAHER[1]

RÉSUMÉ. — Soient G un groupe abélien compact métrisable et Γ son groupe dual ; nous étudions plusieurs questions liées à la généralisation vectorielle de la notion de sous-ensemble de Rosenthal de Γ. Nous montrons par exemple que si Λ est un sous-ensemble de Γ et si $C_\Lambda(G, c_0) = L^\infty_\Lambda(G, c_0)$ alors Λ est un ensemble fini. Étant donnés deux sous-ensembles du groupe dual, $\Lambda_1 \subset \Lambda \subset \Gamma$ et un espace de Banach complexe X, nous étudions des situations où l'on a une identification entre l'espace $C_\Lambda(G, X)/C_{\Lambda_1}(G, X)$ et l'espace $L^\infty_\Lambda(G, X)/L^\infty_{\Lambda_1}(G, X)$.

ABSTRACT. — Let G be a metrizable compact Abelian group, and let Γ denote the dual group ; we study several questions related to the vector case generalization of the notion of Rosenthal subset of Γ. We show for example that if $C_\Lambda(G, c_0) = L^\infty_\Lambda(G, c_0)$ for some subset Λ in Γ, then Λ is a finite set. Given two subsets of the dual group, $\Lambda_1 \subset \Lambda \subset \Gamma$ and a complex Banach space X, we investigate situations where $C_\Lambda(G, X)/C_{\Lambda_1}(G, X)$ can be identified with $L^\infty_\Lambda(G, X)/L^\infty_{\Lambda_1}(G, X)$.

Soient G un groupe abélien compact métrisable, m la mesure de Haar sur G, Γ le groupe dual et $\Lambda \subset \Gamma$; soit d'autre part X un espace de Banach complexe, et soit $\mathcal{F}(G, X)$ un espace de fonctions définies sur G, intégrables par rapport à m et à valeurs dans X ; on notera $\mathcal{F}_\Lambda(G, X)$ le sous-espace de $\mathcal{F}(G, X)$ formé des fonctions dont le spectre est contenu dans Λ, c'est-à-dire formé des fonctions f telles que

$$\widehat{f}(\lambda) = \int_G f(u)\overline{\lambda(u)}\, dm(u) = 0$$

pour tout $\lambda \notin \Lambda$. Cette notation sera appliquée en particulier aux espaces $L^p_\Lambda(G, X)$.

(*) Reçu le 9 septembre 2003, accepté le 19 février 2004.
(1) Université Paris 7, UFR de Mathématiques, 2 Place Jussieu, 75251 Paris CEDEX 05
email : mohammad.daher@wanadoo.fr

Un sous-ensemble Λ de Γ est appelé *ensemble de Rosenthal* (voir par exemple [13], [14]) lorsque toute fonction complexe mesurable bornée f sur G, et à spectre dans Λ, est en fait une fonction continue sur G (c'est-à-dire qu'il existe un représentant continu dans la classe de f). Autrement dit, Λ est un ensemble de Rosenthal lorsque $L^\infty_\Lambda(G) = C_\Lambda(G)$, où nous désignons par $C(G)$, ou $C(G,X)$, l'espace des fonctions continues sur G, scalaires ou vectorielles. Dans le cas du tore ($G = \mathbb{T}$, $\Gamma = \mathbb{Z}$), les ensembles lacunaires au sens de Hadamard fournissent des exemples (très particuliers) d'ensembles de Rosenthal infinis. Il est naturel d'étudier un certain nombre de généralisations de cette notion d'ensemble de Rosenthal au cas de fonctions à valeurs vectorielles. La question la plus naïve est la suivante : si Λ est un ensemble de Rosenthal, a-t-on $L^\infty_\Lambda(G,X) = C_\Lambda(G,X)$ pour tout espace de Banach X ? La réponse est évidemment oui si Λ est fini, mais nous montrons dans notre proposition 25 que la réponse à cette question générale est négative : dans le cas où $X = c_0$, on a $L^\infty_\Lambda(G,c_0) = C_\Lambda(G,c_0)$ si et seulement si l'ensemble Λ est fini.

Si Y est un sous-espace fermé de l'espace de Banach X et si toute fonction f de $L^\infty_\Lambda(G,X)$ est une fonction continue, la même propriété est évidemment vraie pour les fonctions de $L^\infty_\Lambda(G,Y)$, puisqu'elles font partie des précédentes. En particulier, l'égalité vectorielle $L^\infty_\Lambda(G,X) = C_\Lambda(G,X)$ n'est possible que si Λ est un ensemble de Rosenthal (on suppose bien sûr $X \neq \{0\}$).

Si X est un espace séparable on sait que $C(G,X)$ est séparable. Il en résulte que $C_\Lambda(G,X)$ est séparable, donc l'égalité de Rosenthal vectorielle $L^\infty_\Lambda(G,X) = C_\Lambda(G,X)$ entraînera la séparabilité de $L^\infty_\Lambda(G,X)$. Nous étudions des réciproques de cette remarque évidente ; dans le corollaire 9, nous montrons que si $L^\infty_\Lambda(G,X)$ est séparable, alors $L^\infty_\Lambda(G,X) = C_\Lambda(G,X)$. Supposons maintenant que $\Lambda_1 \subset \Lambda \subset \Gamma$. On s'intéresse dans cet article à une propriété de Rosenthal vectorielle *relative*, caractérisée par l'égalité

$$L^\infty_\Lambda(G,X)/L^\infty_{\Lambda_1}(G,X) = C_\Lambda(G,X)/C_{\Lambda_1}(G,X)\,;$$

(pour $\Lambda_1 = \emptyset$, il s'agit de la propriété vectorielle usuelle). Si X est séparable, on voit que l'espace quotient $C_\Lambda(G,X)/C_{\Lambda_1}(G,X)$ est un espace séparable. Nous montrons que réciproquement, la séparabilité de $L^\infty_\Lambda(G,X)/L^\infty_{\Lambda_1}(G,X)$ entraîne l'identification de cet espace avec $C_\Lambda(G,X)/C_{\Lambda_1}(G,X)$, et dans la Proposition 19 nous généralisons au cas relatif et vectoriel des résultats de F. Lust-Piquard [13], formulés en termes de propriété de Radon-Nikodym. On montre aussi des résultats analogues à ceux de la Proposition 6 pour les espaces $VB^p_\Lambda(G,X)/VB^p_{\Lambda_1}(G,X)$ (Proposition 15 ; ces espaces VB^p sont définis plus loin).

Dans le Lemme 21 on donne un critère de continuité pour une fonction f mesurable bornée de G dans X, critère qui porte sur des propriétés de la famille $(f_s)_{s\in G}$ des translatées de f ; on montre que si $f \in L^\infty(G,X)$ et si l'application $s \to (f_s, \xi)$ est continue pour toute forme linéaire continue $\xi \in L^\infty(G,X)^*$, alors f est une fonction continue de G dans X. Dans la Proposition 24 on donne le critère analogue pour montrer qu'un élément $f \in VB^p(G,X)$ est en fait dans $L^p(G,X)$, $p \in [1,+\infty)$.

Étant donnés deux ensembles de Rosenthal Λ et Λ_1 pour deux groupes abéliens compacts G et G_1, il est en général difficile de décider si l'ensemble produit $\Lambda \times \Lambda_1$ est un ensemble de Rosenthal pour le groupe produit $G \times G_1$. Nous proposons un critère suffisant dans notre Corollaire 23, critère dérivé du Lemme 21.

Si $p \in (1,+\infty)$ et si q désigne l'exposant conjugué, on note $VB^p(G,X)$ l'espace des applications linéaires $T : L^q(G) \to X$ pour lesquelles il existe une fonction $g \in L^p(G)$ telle que

$$\forall f \in L^q(G), \quad \|Tf\| \leqslant \int_G |f(u)|\, g(u)\, dm(u) \tag{0.1}$$

(cf. [2]–[3] ; la fonction g est nécessairement $\geqslant 0$ presque partout). Si $T \in VB^p(G,X)$ on définit $\|T\|_{VB^p(G,X)}$ comme l'inf de $\|g\|_{L^p(G)}$, où l'inf porte toutes les fonctions $g \in L^p(G)$ qui vérifient les inégalités (0.1). Nous définissons alors $VB^p_\Lambda(G,X)$ comme l'espace des applications linéaires T dans $VB^p(G,X)$ telles que $T(\lambda) = 0$ pour tout $\lambda \notin \Lambda$. On note $VB^1(G,X)$ l'espace des mesures définies sur G à valeurs dans X à variation bornée, et $VB^\infty(G,X)$ l'espace des applications linéaires bornées $T : L^1(G) \to X$. On peut également définir $VB^1_\Lambda(G,X)$ et $VB^\infty_\Lambda(G,X)$ comme dans le cas $1 < p < +\infty$.

Rappelons qu'un opérateur linéaire borné $T : L^1(\Omega,\mu) \to X$ est dit *représentable* s'il existe une fonction mesurable bornée φ sur Ω, à valeurs dans X telle que

$$\forall f \in L^1(\Omega,\mu), \quad T(f) = \int_\Omega f(u)\varphi(u)\, d\mu(u).$$

On dit que X possède la *propriété de Radon-Nikodym* lorsque tout opérateur borné d'un espace $L^1(\Omega,\mu)$ dans X est représentable. Si X vérifie la propriété de Radon-Nikodym, l'espace $VB^\infty(G,X)$ s'identifie à $L^\infty(G,X)$.

Si $f \in L^1(G,X)$ est une fonction définie sur G et si $s \in G$, on définit la fonction translatée f_s par $f_s(u) = f(s+u)$, $u \in G$, et pour tout $T \in$

$VB^p(G,X)$ on définit $T_s(f) = T(f_s)$ ($f \in L^q(G)$, et $f \in C(G)$ si $p=1$). Si X est un espace de Banach, on notera $(x, x^*) = x^*(x)$, pour tout $x \in X$ et tout $x^* \in X^*$, le dual de X.

Nous commencerons par deux remarques qui seront utilisées plus loin.

Remarque 1. — Soient X un espace de Banach complexe et $\Lambda_1 \subset \Lambda \subset \Gamma$; désignons par J_∞ la projection de $L^\infty_\Lambda(G,X)$ sur $L^\infty_\Lambda(G,X)/L^\infty_{\Lambda_1}(G,X)$, et notons Λ_1^c le complémentaire de l'ensemble Λ_1. Pour tout $g \in C_{\Lambda_1^c}(G)$ on définit une semi-norme $\|.\|_g$ sur $L^\infty_\Lambda(G,X)/L^\infty_{\Lambda_1}(G,X)$ par

$$\forall f \in L^\infty_\Lambda(G,X), \quad \|J_\infty f\|_g = \Big\| \int_G \overline{g(u)} f(u)\, dm(u) \Big\|_X .$$

On voit facilement que la famille de semi-normes $\{\|.\|_g : g \in C_{\Lambda_1^c}(G)\}$ définit une topologie séparée sur $L^\infty_\Lambda(G,X)/L^\infty_{\Lambda_1}(G,X)$: si $J_\infty f \neq 0$, il existe un caractère $\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda_1$ tel que $\widehat{f}(\lambda) \neq 0$, et la semi-norme associée à $g = \lambda$ est non-nulle sur f ; cette topologie est clairement moins fine que la topologie de la norme sur $L^\infty_\Lambda(G,X)/L^\infty_{\Lambda_1}(G,X)$. Nous utiliserons cette remarque en conjonction avec le théorème de Lusin, qui dit que la tribu borélienne d'un espace polonais ne change pas si on remplace la topologie polonaise par une topologie séparée moins fine.

Remarque 2. — Si $\Lambda_1 \subset \Lambda \subset \Gamma$, pour tout $g \in L^q_{\Lambda_1^c}(G)$ on définit une semi-norme $\|.\|_g$ sur l'espace quotient $VB^p_\Lambda(G,X)/VB^p_{\Lambda_1}(G,X)$ par la formule

$$\forall T \in VB^p_\Lambda(G,X), \quad \|J_p T\|_g = \|Tg\| ;$$

(J_p est maintenant l'application canonique de $VB^p_\Lambda(G,X)$ sur l'espace quotient $VB^p_\Lambda(G,X)/VB^p_{\Lambda_1}(G,X)$). Il est facile de voir que la famille de semi-normes $\{\|.\|_g : g \in L^q_{\Lambda_1^c}(G)\}$ définit une topologie séparée sur le quotient $VB^p_\Lambda(G,X)/VB^p_{\Lambda_1}(G,X)$, moins fine que la topologie de la norme. Par une construction analogue on peut définir la famille de semi-normes $\|.\|_g$ sur les espaces quotients de la forme $VB^1_\Lambda(G,X)/VB^1_{\Lambda_1}(G,X)$.

PROPOSITION 3. — *Pour tout espace de Banach X et pour tout nombre réel $p \in (1,+\infty)$, l'espace $VB^\infty(G,X)$ est dense dans $VB^p(G,X)$.*

Preuve. — Soit $T \in VB^p(G,X)$; par la définition de VB^p il existe une fonction positive $g \in L^p(G)$ telle que, pour toute fonction $f \in L^q(G)$, on ait

$$\|Tf\| \leqslant \int_G |f(u)|\, g(u)\, dm(u).$$

Pour tout entier $n \geqslant 0$ définissons une fonction réelle g_n sur G par $g_n(u) = 1$ si $g(u) \leqslant n$, et $g_n(u) = 0$ sinon. Définissons aussi $T_n : L^q(G) \to X$ par $T_n(f) = T(g_n f)$, pour toute fonction $f \in L^q(G)$; on voit facilement que $T_n \in VB^\infty(G,X)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $T_n \to T$ dans $VB^p(G,X)$. □

Remarque 4. — Si pour toute fonction $g \in L^p(G,X)$ on définit $T_g : L^q(G) \to X$ par

$$\forall f \in L^q(G), \quad T_g f = \int_G f(u) g(-u)\, dm(u),$$

l'opérateur $g \to T_g$ est une isométrie de $L^p(G,X)$ dans $VB^p(G,X)$ (cf. [2], [3]).

COROLLAIRE 5. — *S'il existe un nombre réel $p_0 \in (1,+\infty)$ tel que $VB^{p_0}(G,X) = L^{p_0}(G,X)$, alors pour tout réel $p \in (1,+\infty]$ on a l'égalité $VB^p(G,X) = L^p(G,X)$.*

Preuve. — Comme $VB^\infty(G,X) \subset VB^{p_0}(G,X)$ on voit que $VB^\infty(G,X) = L^\infty(G,X)$; d'après la Proposition 3 l'espace $VB^\infty(G,X)$ est dense dans l'espace $VB^p(G,X)$ donc on obtient l'égalité $VB^p(G,X) = L^p(G,X)$. □

PROPOSITION 6. — *Soient X un espace de Banach et $\Lambda_1 \subset \Lambda \subset \Gamma$; si le quotient $L^\infty_\Lambda(G,X)/L^\infty_{\Lambda_1}(G,X)$ est séparable alors*

$$L^\infty_\Lambda(G,X)/L^\infty_{\Lambda_1}(G,X) = C_\Lambda(G,X)/C_{\Lambda_1}(G,X).$$

LEMME 7 (CF. [11] P. 88, [9], L'APPROXIMATION DE L'IDENTITÉ). — *Il existe une suite $(K_n)_{n\geqslant 0}$ de fonctions positives dans $L^1(G)$ telle que*

1. $K_n * f \to f$ dans $C(G,X)$, pour toute fonction $f \in C(G,X)$ (resp. converge dans $L^p(G,X)$, pour toute fonction $f \in L^p(G,X)$, pour tout $p \in [1,+\infty)$).

2. Pour toute fonction $f \in L^1(G,X)$ et pour tout entier $n \geqslant 0$, $K_n * f$ est un polynôme trigonométrique, *c'est-à-dire une combinaison linéaire finie de caractères de G, à coefficients dans X.*

3. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $\|K_n\|_{L^1(G)} \leqslant 1$.

Dans [11] et [9] le Lemme 7 est démontré pour le cas de fonctions à valeurs dans $X = \mathbb{C}$; il est facile de voir que ce lemme reste valable pour $C(G,X)$ ou bien $L^p(G,X)$, pour tout espace de Banach X. En effet, la propriété d'approximation du point 1 du lemme reste évidemment vraie pour une fonction de la forme $g \in G \to f(g)\,x$, avec f scalaire et $x \in X$; la densité dans $C(G,X)$, ou bien dans $L^p(G,X)$, des combinaisons linéaires de telles fonctions et l'équicontinuité des opérateurs de convolution par les noyaux (K_n) donnent le résultat.

LEMME 8. — *Pour tout espace de Banach X complexe et pour tout $\Lambda_1 \subset \Lambda \subset \Gamma$, l'espace $C_\Lambda(G,X)/C_{\Lambda_1}(G,X)$ est un sous-espace fermé de l'espace quotient $L^\infty_\Lambda(G,X)/L^\infty_{\Lambda_1}(G,X)$.*

Preuve. — Soient J l'application canonique de projection de $C_\Lambda(G,X)$ sur l'espace quotient $C_\Lambda(G,X)/C_{\Lambda_1}(G,X)$, J_∞ l'application de $L^\infty_\Lambda(G,X)$ sur le quotient $L^\infty_\Lambda(G,X)/L^\infty_{\Lambda_1}(G,X)$ et $f \in C_\Lambda(G,X)$; il est clair que $\|J_\infty f\| \leqslant \|Jf\|$; supposons que $\|J_\infty f\| < 1$; il existe donc une fonction $g \in L^\infty_{\Lambda_1}(G,X)$ telle que $\|f+g\| < 1$; on en déduit que $\|K_n * f + K_n * g\| \leqslant \|f+g\| < 1$ pour tout $n \geqslant 0$; d'autre part $\|K_n * f - f\|$ tend vers 0 par le Lemme 7, ce qui implique que $\|f + K_n * g\| < 1$ pour n assez grand ; comme $K_n * g \in C_{\Lambda_1}(G,X)$ on obtient $\|Jf\| < 1$; il en résulte que $\|J_\infty f\| = \|Jf\|$, ce qui implique le lemme. □

Démonstration de la Proposition 6. — Soit $f \in L^\infty_\Lambda(G,X)$, et supposons que $\|J_\infty f\| \leqslant 1$; on définit une application $F : G \to L^\infty_\Lambda(G,X)/L^\infty_{\Lambda_1}(G,X)$ par $F(s) = J_\infty(f_s)$, $\forall s \in G$. Pour tout $g \in C_{\Lambda_1^c}(G)$ et pour tout $h \in L^\infty_\Lambda(G,X)$, soit V l'ensemble défini pour $\varepsilon > 0$ fixé par

$$V = \left\{ J_\infty(\varphi) : \left\| \int_G \overline{g(u)}\,\big(\varphi(u) - h(u)\big)\,dm(u) \right\|_X = \|J_\infty(\varphi - h)\|_g < \varepsilon \right\}.$$

Il est facile de voir que $F^{-1}(V)$ est un ouvert de G, car $s \to \int_G \overline{g(u)} f_s(u)\,dm(u)$ est continue d'après la continuité de g ; l'application F est donc continue de G à valeurs dans $L^\infty_\Lambda(G,X)/L^\infty_{\Lambda_1}(G,X)$ muni de la topologie définie à la Remarque 1 ; d'après la Remarque 1 et le théorème de Lusin (cf. [4], § 6, n° 7) on voit que F est fortement mesurable et bornée, donc F est dans l'espace $L^\infty(G, L^\infty_\Lambda(G,X)/L^\infty_{\Lambda_1}(G,X))$; d'après le Lemme 7 on a $K_n * F \to F$ dans $L^1(G, L^\infty_\Lambda(G,X)/L^\infty_{\Lambda_1}(G,X))$; on peut en déduire qu'il existe une sous-suite $(K_{n_k})_{k\geqslant 0}$ et $v \in G$ tels que

$$(K_{n_k} * F)(v) \to F(v) \text{ dans } L^\infty_\Lambda(G,X)/L^\infty_{\Lambda_1}(G,X).$$

Soit $f_k = K_{n_k} * f_v \in C_\Lambda(G,X)$; on vérifie facilement que $J_\infty(f_k) = (K_{n_k} * F)(v)$, ce qui entraîne que la suite $(J_\infty(f_k))_{k\geqslant 0}$ est de Cauchy dans le quotient $L^\infty_\Lambda(G,X)/L^\infty_{\Lambda_1}(G,X)$; par le Lemme 8 on voit que $(J(f_k))_{k\geqslant 0}$ est de Cauchy dans le quotient $C_\Lambda(G,X)/C_{\Lambda_1}(G,X)$ (remarquons que f_k est un polynôme trigonométrique) par conséquent il existe une fonction

$g \in C_\Lambda(G,X)$ telle que $J(f_k) \to J(g)$ dans $C_\Lambda(G,X)/C_{\Lambda_1}(G,X)$. On obtient finalement $J_\infty(f_v) = J_\infty(g)$ et $J_\infty(f) = J_\infty(g_{-v})$, ce qui montre la proposition. $\square$

COROLLAIRE 9. — *Si l'espace $L^\infty_\Lambda(G,X)$ est séparable, on a l'égalité $L^\infty_\Lambda(G,X) = C_\Lambda(G,X)$.*

Le rapporteur nous a fait remarquer que le résultat précédent peut être obtenu en remplaçant la théorie de la mesure par la théorie de Baire. Si $f \in L^\infty_\Lambda(G,X)$ est donnée, on voit facilement que l'ensemble

$$\{a \in G : \|f_a - f\|_\infty \leqslant \varepsilon\}$$

est fermé, en utilisant la continuité des translations sur $L^1(G,X)$; si on munit G de la semi-distance $d_\infty(a,b) = \|f_a - f_b\|_\infty$, l'ensemble précédent est une d_∞-boule fermée autour de l'élément neutre 0_G ; sous l'hypothèse du corollaire, l'ensemble des f_a, $a \in G$, est séparable en norme L^∞, donc G peut être recouvert par une suite de d_∞-boules fermées de même rayon $\varepsilon > 0$; l'une de ces boules aura un intérieur non vide pour la topologie originale du compact G, d'après le théorème de Baire. Il existe donc un ouvert V de G tel que $\|f_a - f_b\|_\infty \leqslant 2\varepsilon$, pour tous $a, b \in V$. On en déduit facilement que $\|f_a - f\|_\infty$ tend vers 0 quand a tend vers 0_G, puis que f est continue.

Remarque 10. — Une version simplifiée de l'argument de la Proposition 6 permet de vérifier le fait suivant : *soit $f \in L^\infty(G,X)$; si l'application $F : s \to f_s$ est fortement mesurable de G dans $L^\infty(G,X)$, alors f est continue.*

En effet, il existe une suite (n_k) et un point $v \in G$ tels que $(K_{n_k} * F)(v)$ converge vers $F(v)$ dans $L^\infty(G,X)$, c'est-à-dire que la suite de fonctions continues $(K_{n_k} * f_v)$ converge vers f_v dans $L^\infty(G,X)$, donc f_v et aussi f sont continues.

Supposons que G soit un groupe localement compact abélien ; soit $f \in L^\infty(G,X)$ telle que l'application $F : s \to f_s$ soit fortement mesurable ; comme l'approximation de l'identité (par une suite filtrante) est vraie pour G (cf. [11], p. 298), on montre par une méthode analogue que f est égale presque-partout à une fonction uniformément continue sur G ; en effet, la convolution de F avec une fonction dans $L^1(G)$ est une fonction uniformément continue (cf. [10], p. 295).

Remarque 11. — Dans l'article [21], M. Talagrand a montré que si $f \in L^\infty(G)$ et si $s \to f_s$ est fortement mesurable, alors f est égale presque-partout à une fonction uniformément continue sur G, (G étant ici un groupe localement compact abélien).

Exemple 12. — Si X est un espace de Banach séparable ne contenant pas c_0 et si $\Lambda \subset \Gamma$ est un ensemble de Sidon, alors $L^\infty_\Lambda(G,X) = C_\Lambda(G,X)$.

Dire que Λ est un ensemble de Sidon signifie qu'il existe une constante C telle que

$$\sum_{\gamma\in\Lambda} |a_\gamma| \leqslant C \,\Big\|\sum_{\gamma\in\Lambda} a_\gamma \gamma\Big\|_\infty$$

pour toute famille de scalaires (a_γ) dont seulement un nombre fini sont non nuls. Soit $f \in L^\infty_\Lambda(G,X)$, avec $f \sim \sum_{\gamma\in\Lambda} c_\gamma\,\gamma$, $c_\gamma \in X$; pour tout $x^* \in X^*$, les coefficients de Fourier $(x^*(c_\gamma))$ de la fonction scalaire $x^*(f)$ sont absolument sommables, avec la majoration $\sum_{\gamma\in\Lambda} |x^*(c_\gamma)| \leqslant C\,\|x^*\|\,\|f\|_\infty$, ce qui implique que toutes les sommes finies de vecteurs $\sum_{\gamma\in\Lambda_1} c_\gamma$, avec $\Lambda_1 \subset \Lambda$ fini, sont bornées en norme par $C\,\|f\|_\infty$; puisque X ne contient pas c_0, la famille de vecteurs (c_γ) est sommable dans X, et la fonction f peut être approchée par une combinaison finie de caractères, ce qui prouve la séparabilité de l'espace $L^\infty_\Lambda(G,X)$.

Exemple 13. — L'exemple précédent d'application de la Proposition 6 ou du Corollaire 9 n'est peut-être pas totalement convaincant, car nous pourrions facilement conclure directement que les fonctions de $L^\infty_\Lambda(G,X)$ sont continues. Voici un autre exemple, dans le cas de la propriété de Rosenthal relative. Un cas extrême de la situation $\Lambda_1 \subset \Lambda \subset \Gamma$ est celui où $\Lambda = \Gamma$. Supposons que le complémentaire Λ_1^c soit un ensemble $\Lambda(p)$ pour un $p > 1$, c'est-à-dire que les normes L^1 et L^p sont équivalentes sur $L^p_{\Lambda_1^c}(G)$. On sait d'après Bachelis et Ebenstein [1] que cela équivaut à dire que $L^1_{\Lambda_1^c}(G)$ est réflexif ; cet espace est de plus séparable, donc son dual $L^\infty(G)/L^\infty_{\Lambda_1}(G)$ est séparable. Il coïncide donc avec $C(G)/C_{\Lambda_1}(G)$ par la Proposition 6.

L'égalité précédente caractérise le fait que Λ_1^c soit $\Lambda(p)$ pour un $p > 1$; en effet, si $L^1_{\Lambda_1^c}(G)$ n'est pas réflexif, il contient ℓ^1 d'après [12] et son dual n'est pas séparable, puisqu'il contient alors ℓ^∞. La situation est moins claire pour les fonctions à valeurs vectorielles. Indiquons un cas très particulier : si $Y = L^q(\Omega)$, avec $1 < q \leqslant p$, il est facile de déduire de l'équivalence des normes L^1 et L^q sur $L^q_{\Lambda_1^c}(G)$ l'égalité des espaces $L^q_{\Lambda_1^c}(G,Y)$ et $L^1_{\Lambda_1^c}(G,Y)$, ce qui implique que ce dernier espace est réflexif. En effet, puisque Λ_1^c est $\Lambda(p)$, il existe une constante C telle que $\|g\|_q \leqslant C\,\|g\|_1$ pour toute fonction $g \in L^1_{\Lambda_1^c}(G)$, et si $f(t,\omega) = \sum_{i=1}^n g_i(t) y_i(\omega)$ est une fonction du sous-espace

$L^1_{\Lambda_1^c}(G) \otimes Y$, dense dans $L^1_{\Lambda_1^c}(G, Y)$, on aura

$$\|f\|^q_{L^q(Y)} \leqslant C^q \int \Big(\int |f(t,\omega)|\, dt \Big)^q d\omega \leqslant C^q \Big(\int \Big(\int |f(t,\omega)|^q \, d\omega \Big)^{1/q} dt \Big)^q$$

par Minkowski. Si X est un espace séparable qui se plonge dans $Y = L^q(\Omega)$ pour un $q \in (1, p]$, l'espace $L^1_{\Lambda_1^c}(G, X)$ sera donc réflexif et séparable. Ceci s'applique à tout espace X qui est un L^r séparable avec $1 < r \leqslant 2$. On peut conclure comme avant que le dual $L^\infty(G, X^*)/L^\infty_{\Lambda_1}(G, X^*)$ est séparable, donc $L^\infty(G, X^*)/L^\infty_{\Lambda_1}(G, X^*) = C(G, X^*)/C_{\Lambda_1}(G, X^*)$. En particulier, pour tout s tel que $2 \leqslant s < \infty$ on a

$$L^\infty(G, \ell^s)/L^\infty_{\Lambda_1}(G, \ell^s) = C(G, \ell^s)/C_{\Lambda_1}(G, \ell^s).$$

Exemple 14. — Donnons un autre exemple dans le même esprit. Considérons les trois ensembles $\Lambda_1 = \{n \in \mathbb{Z} : n < 0\}$, $\Lambda_3 = \{2^n : n \geqslant 0\}$ et $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_3$. Il est connu que la projection orthogonale est bornée de $L^1_{\Lambda_1^c}(\mathbb{T}) = H^1(\mathbb{T})$ sur $L^1_{\Lambda_3}(\mathbb{T}) \sim \ell^2$ (c'est la projection dite de Paley, [18]) ; il en résulte que le quotient $L^1_{\Lambda_1^c}(\mathbb{T})/L^1_{\Lambda^c}(\mathbb{T})$ est isomorphe à ℓ_2 et son dual $L^\infty_\Lambda(\mathbb{T})/L^\infty_{\Lambda_1}(\mathbb{T}) \sim \ell_2$ est donc séparable, par conséquent égal à $C_\Lambda(\mathbb{T})/C_{\Lambda_1}(\mathbb{T})$.

On peut s'intéresser à la généralisation vectorielle $P \otimes Id_X$ de la projection de Paley P, agissant de $L^1_{\Lambda_1^c}(\mathbb{T}, X) = H^1(\mathbb{T}, X)$ vers $L^1_{\Lambda_3}(\mathbb{T}, X)$. Il est clair que la démonstration originelle de Paley passe au cas $X = \ell_2$, mais d'autres exemples d'espaces X réflexifs et séparables pour lesquels cette projection est bornée sont connus ; ainsi, F. Lust-Piquard et G. Pisier ont montré dans [15] que la projection est bornée lorsque $X = C_p$, l'espace de Schatten, avec $1 < p < +\infty$.

Supposons donc que X soit un espace réflexif séparable tel que la projection de Paley vectorielle $P \otimes Id_X$ soit bornée de $H^1(\mathbb{T}, X)$ sur $L^1_{\Lambda_3}(\mathbb{T}, X)$; il en résulte que le quotient $L^1_{\Lambda_1^c}(\mathbb{T}, X)/L^1_{\Lambda^c}(\mathbb{T}, X)$ est isomorphe à $L^1_{\Lambda_3}(\mathbb{T}, X)$. Par ailleurs, on sait par un résultat de Pisier [20] que si (ε_k) est une suite de variables de Bernoulli, définie sur un espace de probabilité (Ω, μ), et (x_k) une suite de vecteurs de X, on a

$$\int_0^{2\pi} \Big\| \sum_{k \geqslant 0} x_k \mathrm{e}^{i 2^k t} \Big\|_X \, dt \simeq \int_\Omega \Big\| \sum_{k \geqslant 0} x_k \varepsilon_k(s) \Big\|_X \, d\mu(s),$$

où la constante de l'équivalence est universelle ; par les inégalités de Kahane, avec une autre constante universelle, on a

$$\int_\Omega \Big\| \sum_{k \geqslant 0} x_k \varepsilon_k(s) \Big\|_X \, d\mu(s) \simeq \Big(\int_\Omega \Big\| \sum_{k \geqslant 0} x_k \varepsilon_k(s) \Big\|_X^2 \, d\mu(s) \Big)^{1/2},$$

ce qui montre que $L^1_{\Lambda_3}(\mathbb{T},X)$ est isomorphe à un sous-espace de $L_2(\Omega,X)$, donc est réflexif et séparable. Son dual $L^\infty_\Lambda(\mathbb{T},X^*)/L^\infty_{\Lambda_1}(\mathbb{T},X^*)$ est par conséquent séparable, donc égal à $C_\Lambda(\mathbb{T},X^*)/C_{\Lambda_1}(\mathbb{T},X^*)$. □

Si $T \in VB^p(G,X)$ et $g \in L^1(G)$ on définit $T * g : L^q(G) \to X$ par $(T*g)(f) = T(g*f)$, pour toute fonction $f \in L^q(G)$.

PROPOSITION 15. — *Soient X un espace de Banach complexe, $\Lambda_1 \subset \Lambda \subset \Gamma$ et $p \in [1,+\infty)$; si le quotient $VB^p_\Lambda(G,X)/VB^p_{\Lambda_1}(G,X)$ est un espace séparable alors*

$$VB^p_\Lambda(G,X)/VB^p_{\Lambda_1}(G,X) = L^p_\Lambda(G,X)/L^p_{\Lambda_1}(G,X).$$

LEMME 16. — *L'espace $L^p_\Lambda(G,X)/L^p_{\Lambda_1}(G,X)$ s'identifie à un sous-espace fermé de l'espace $VB^p_\Lambda(G,X)/VB^p_{\Lambda_1}(G,X)$.*

Preuve. — La démonstration de ce lemme est identique à celle du Lemme 8 en remarquant que si $T \in VB^p_{\Lambda_1}(G,X)$ alors pour toute fonction $g \in L^1(G)$, on a $T*g \in L^p(G,X)$ et $\|T*g\|_{L^p(G,X)} \leqslant \|g\|_{L^1(G)}\|T\|$, (cf. [3]) (si $\nu \in VB^1_{\Lambda_1}(G,X)$ pour tout $g \in C(G)$, $\nu * g \in L^1(G,X)$). □

Démonstration de la Proposition 15 —Pour montrer la Proposition 15 il suffit d'utiliser des arguments analogues à ceux de la Proposition 6 en utilisant le Lemme 16, le théorème de sélection, la Remarque 2 et le théorème de Lusin. □

On note par σ la mesure de Lebesgue normalisée sur le tore $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et par $\mathbb{D}$ le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$. Pour tout $p > 0$ on note $\mathbf{h}^p(\mathbb{D},X)$ l'espace des fonctions harmoniques $f : \mathbb{D} \to X$ telles que

$$\sup_{0\leqslant r<1} \int_{\mathbb{T}} \|f(re^{it})\|^p \, d\sigma(t) < +\infty$$

et on désigne par $H^p(\mathbb{D},X)$ le sous-espace de $\mathbf{h}^p(\mathbb{D},X)$ formé des fonctions *holomorphes* $F : \mathbb{D} \to X$. Si $r \in [0,1)$ on note P_r le noyau de Poisson, défini pour tout $\theta \in \mathbb{T}$ par

$$P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2}.$$

Le corollaire suivant se trouve aussi dans [6].

COROLLAIRE 17. — *Soit X un espace de Banach ; supposons qu'il existe $p \in (1,+\infty)$ tel que $\mathbf{h}^p(\mathbb{D},X)$ soit séparable ; alors X a la propriété de Radon-Nikodym (cf. [5], [7]).*

Preuve. — En utilisant le noyau de Poisson on montre l'égalité $\mathbf{h}^p(\mathbb{D},X) = VB^p(\mathbb{T},X)$; d'après la Proposition 15, on sait que $\mathbf{h}^p(\mathbb{D},X) = L^p(\mathbb{T},X)$ c'est-à-dire que chaque fonction $f \in \mathbf{h}^p(\mathbb{D},X)$ admet des limites radiales presque-partout, ce qui montre que X a la propriété de Radon-Nikodym (cf. [5]). □

COROLLAIRE 18. — *Soit X un espace de Banach complexe ; si $H^p(D,X)$ est séparable pour un $p \in [1,+\infty)$, alors X a la propriété de Radon-Nikodym analytique (cf. [5], [8]).*

PROPOSITION 19. — *Soit X un espace tel que $C_\Lambda(G,X)/C_{\Lambda_1}(G,X)$ ait la propriété de Radon-Nikodym, alors*

$$L^\infty_\Lambda(G,X)/L^\infty_{\Lambda_1}(G,X) = C_\Lambda(G,X)/C_{\Lambda_1}(G,X).$$

Preuve. — Soit $f \in L^\infty_\Lambda(G,X)$ avec $\|J_\infty f\| \leqslant 1$; soit U l'application de $L^1(G)$ dans $C_\Lambda(G,X)/C_{\Lambda_1}(G,X)$ définie par $Ug = J(g*f)$, pour toute fonction $g \in L^1(G)$; l'opérateur U est borné ; comme $C_\Lambda(G,X)/C_{\Lambda_1}(G,X)$ a la propriété de Radon-Nikodym, il existe $\psi \in L^\infty(G, C_\Lambda(G,X)/C_{\Lambda_1}(G,X))$ telle que

$$\forall g \in L^1(G), \quad Ug = \int_G g(u)\psi(u)\,dm(u).$$

La forme donnée par Michael du théorème de relèvement de Bartle-Graves montre qu'il existe une sélection continue $S : C_\Lambda(G,X)/C_{\Lambda_1}(G,X) \to C_\Lambda(G,X)$ telle que l'image de la boule unité de $C_\Lambda(G,X)/C_{\Lambda_1}(G,X)$ par S soit contenue dans la boule de rayon 2 dans $C_\Lambda(G,X)$; pour presque tout $u \in G$ posons $H(u,v) = S(\psi(u))(v)$; pour toute $h \in C_{\Lambda_1^c}(G)$ on a

$$\int_G \overline{h(u)}\,((g*f)(u))\,dm(u) = \int_G g(u)\Big[\int_G \overline{h(v)}H(u,v)\,dm(v)\Big]\,dm(u).$$

Cela implique que pour toute fonction $g \in L^1(G)$ on a

$$\int_G g(u)\Big[\int_G \overline{h(v)}f(v-u)\,dm(v)\Big]\,dm(u) = \int_G g(u)\overline{h(v)}H(u,v)\,dm(v)dm(u).$$

Par conséquent on a pour presque tout $u_0 \in G$ l'égalité

$$\int_G \overline{h(v)}f(v-u_0)\,dm(v) = \int_G \overline{h(v)}H(u_0,v)\,dm(v)$$

ce qui entraîne en prenant pour h les caractères de l'ensemble (dénombrable) Λ_1^c, l'existence d'un $u_0 \in G$ tel que $v \to f(v-u_0) - H(u_0,v)$ soit à spectre dans Λ_1. Soit $\alpha(v) = H(u_0,v)$; cette fonction est une fonction continue à spectre dans Λ ; d'après ce qui précède $f - \alpha \in L^\infty_{\Lambda_1}(G,X)$ et $J_\infty f = J\alpha$.
□

Remarque 20. — Dans [13], F. Lust-Piquard a montré que si $C_\Lambda(G)$ a la propriété de Radon-Nikodym, alors $L^\infty_\Lambda(G) = C_\Lambda(G)$, autrement dit Λ est un ensemble de Rosenthal.

LEMME 21. — *Soient X un espace de Banach et $f \in L^\infty(G,X)$; alors f est égale presque-partout à une fonction continue si et seulement si pour tout élément $\xi \in L^\infty(G,X)^*$, l'application $s \to (f_s,\xi)$ est continue.*

Preuve. — Soit $f \in L^\infty(G,X)$; supposons qu'il existe $g \in C(G,X)$ tel que $f = g$ presque-partout ; on a donc $(f_s,\xi) = (g_s,\xi)$ pour tout $s \in G$ et pour tout $\xi \in L^\infty(G,X)^*$, mais l'application $s \to g_s$ est continue de G dans $C(G,X)$, donc $s \to (g_s,\xi) = (f_s,\xi)$ est continue.

Démontrons maintenant l'implication inverse. Supposons que pour toute forme linéaire $\xi \in L^\infty(G,X)^*$ l'application $s \to (f_s,\xi)$ soit continue ; il suffit de montrer que l'application $F : G \to L^\infty(G,X)$ définie par $F(s) = f_s$ est fortement mesurable (Remarque 10) ; d'après la Remarque 1 et le théorème de Lusin il suffit de montrer que F est à valeurs dans un sous-espace séparable de $L^\infty(G,X)$. Soit L un sous-ensemble dénombrable dense dans G ; désignons par M le sous-espace fermé de $L^\infty(G,X)$ engendré par $F(L)$ et par M_1 le sous-espace fermé engendré par $F(G)$; montrons que $M = M_1$; sinon d'après le théorème de Hahn-Banach il existe $\xi \in L^\infty(G,X)^*$ tel que $\xi = 0$ sur M et $\xi \neq 0$ sur M_1, donc il existe $s \in G$ tel que $(f_s,\xi) \neq 0$, d'autre part il existe une suite $(s_n)_{n\geqslant 0}$ dans L telle que $s_n \to s$; cela implique que $(f_{s_n},\xi) \to (f_s,\xi) = 0$ car $(f_{s_n},\xi) = 0$ pour tout entier n ; ceci est impossible car $(f_s,\xi) \neq 0$, par conséquent $M = M_1$ et F est à valeurs dans un sous-espace séparable de $L^\infty(G,X)$. □

PROPOSITION 22. — *Soit Y un espace de Banach complexe tel que $X = Y^*$ soit séparable ; on suppose que $L^1(G,Y)/L^1_{\Lambda^c}(G,Y)$ ne contient aucun sous-espace isomorphe à ℓ^1. Si l'espace $C_\Lambda(G)$ est faiblement séquentiellement complet, alors $C_\Lambda(G,X) = L^\infty_\Lambda(G,X)$.*

Preuve. — D'après le Lemme 21 (et le théorème de prolongement de Hahn-Banach) il suffit de montrer que pour tout $f \in L^\infty_\Lambda(G,X)$ et pour tout $\xi \in L^\infty_\Lambda(G,X)^*$ l'application $s \to (f_s,\xi)$ est continue. Notons que $L^\infty(G,X)$ est le dual de $L^1(G,Y)$ puisque $X = Y^*$ est séparable (cf. [7]) ; soient $f \in L^\infty_\Lambda(G,X)$ et $\xi \in L^\infty_\Lambda(G,X)^* = (L^1(G,Y)/L^1_{\Lambda^c}(G,Y))^{**}$; comme $Z = L^1(G,Y)/L^1_{\Lambda^c}(G,Y)$ ne contient pas de copie de ℓ^1, tout élément de Z^{**} est limite simple d'une suite d'éléments de Z (cf. [17]), donc il existe une suite $(g_n)_{n\geqslant 0}$ dans $L^1(G,Y)$ telle que $(g_n,f_s) \to (f_s,\xi)$, pour tout $s \in G$; pour chaque entier n la fonction $s \to (g_n,f_s)$ est continue (c'est essentiellement une convolution $L^1 * L^\infty$) et à spectre dans Λ ; par le théorème de convergence dominée de Lebesgue et le fait que $C_\Lambda(G)$ est supposé faiblement séquentiellement complet on voit que l'application $s \to (f_s, \xi)$ est continue. □

COROLLAIRE 23. — *Soient G, G_1 deux groupes abéliens compacts métrisables ; on suppose que $C_\Lambda(G)$ est faiblement séquentiellement complet, que l'ensemble Λ_1 est un ensemble de Rosenthal pour G_1 et que le quotient $L^1(G\times G_1)/L^1_{(\Lambda\times\Lambda_1)^c}(G\times G_1)$ ne contient pas de copie de ℓ^1 ; alors $\Lambda\times\Lambda_1$ est un ensemble de Rosenthal pour $G\times G_1$.*

Preuve. — D'après la Proposition 22 appliquée à l'espace $X = L^\infty_{\Lambda_1}(G_1) = C_{\Lambda_1}(G_1)$ et à l'espace $Y = L^1(G_1)/L^1_{\Lambda_1^c}(G_1)$ il suffit de montrer que

$$Y_1 = L^1\big(G, L^1(G_1)/L^1_{\Lambda_1^c}(G_1)\big)/L^1_{\Lambda^c}\big(G, L^1(G_1)/L^1_{\Lambda_1^c}(G_1)\big)$$

est égal à

$$Y_2 = L^1(G\times G_1)/L^1_{(\Lambda\times\Lambda_1)^c}(G\times G_1).$$

Désignons par π la projection de $L^1(G,Y)$ sur $L^1(G,Y)/L^1_{\Lambda^c}(G,Y)$ et par π_1 la projection de $L^1(G_1)$ sur $L^1(G_1)/L^1_{\Lambda_1^c}(G_1) = Y$. On décrit d'abord une application T de Y_2 vers Y_1. À chaque fonction $f(x,y) \in L^1(G\times G_1)$, associons la fonction $x \to f_x$ de G dans $L^1(G_1)$ définie par $f_x(y) = f(x,y)$; cette première application est isométrique. Considérons ensuite l'élément h : $x \to \pi_1(f_x)$ qui est dans $L^1(G,Y)$, de norme $\leqslant \|f\|_1$, et posons $T_1 f = \pi(h)$. L'opérateur T_1 est de norme $\leqslant 1$ de $L^1(G\times G_1)$ dans $L^1(G,Y)/L^1_{\Lambda^c}(G,Y)$.

De plus, T_1 est nulle sur $L^1_{(\Lambda\times\Lambda_1)^c}(G\times G_1)$: si un caractère $f(x,y) = \gamma(x)\gamma_1(y)$ n'est pas dans $\Lambda\times\Lambda_1$, ou bien $\gamma_1 \in \Lambda_1^c$, et $f_x = \gamma(x)\gamma_1$ est annulé par π_1, ou bien $\gamma \in \Lambda^c$ et $x \to \pi_1(f_x) = \gamma(x)\pi_1(\gamma_1)$ est annulée par π. Par densité des polynômes trigonométriques (utiliser le Lemme 7) on en déduit que T_1 est nulle sur $L^1_{(\Lambda\times\Lambda_1)^c}(G\times G_1)$, et on obtient en passant au quotient l'application voulue T de Y_2 vers Y_1.

Pour construire l'application inverse U, considérons une sélection de Michael S de Y vers $L^1(G_1)$; pour chaque $g \in L^1(G,Y)$, considérons d'abord la fonction $x \to S(g(x))$, qui est dans $L^1(G, L^1(G_1)) = L^1(G\times G_1)$, puis sa classe $U_1(g) \in Y_2$. La fonction $U_1(g)$ ne dépend pas du relèvement choisi : si S_1 est un autre relèvement, la fonction $h : x \to S_1(g(x)) - S(g(x))$ est dans $L_1(G, L^1_{\Lambda_1^c}(G_1))$, qui est contenu dans $L^1_{(\Lambda\times\Lambda_1)^c}(G\times G_1)$ par Fubini, donc la classe de h dans Y_2 est nulle. Comme pour tout $\varepsilon > 0$, on peut supposer que le relèvement de Michael vérifie $\|S(y)\| \leqslant (1+\varepsilon)\|y\|$ pour tout $y \in Y$, on en déduit que $\|U_1\| \leqslant 1$.

Si g est de la forme $g(x) = \gamma(x)y$, avec $\gamma \notin \Lambda$, on lui a associé g_1 : $x \to S(\gamma(x)y)$; mais $x \to S(\gamma(x)y) - \gamma(x)S(y)$ est dans $L^1(G, L^1_{\Lambda^c}(G_1))$, et $x \to \gamma(x)S(y)$ est dans $L^1_{\Lambda^c}(G, L^1(G_1))$, contenu dans $L^1_{(\Lambda\times\Lambda_1)^c}(G \times G_1)$ par Fubini, donc g_1 projette sur 0 dans Y_2. On en déduit que U_1 passe au quotient, et on vérifie qu'on obtient ainsi l'inverse de T. □

Par un raisonnement analogue à celui du Lemme 21 on montre

PROPOSITION 24. — *Soient X un espace de Banach, $p \in [1, +\infty)$ et T un élément de $VB^p(G, X)$; l'opérateur T est représentable si et seulement si pour tout $\xi \in VB^p(G, X)^*$ l'application $s \to (T_s, \xi)$ est continue.*

PROPOSITION 25. — *Si $C_\Lambda(G, c_0) = L^\infty_\Lambda(G, c_0)$ alors Λ est un ensemble fini.*

Preuve. — Supposons que $C_\Lambda(G, c_0) = L^\infty_\Lambda(G, c_0)$. Si Λ est un ensemble infini, on peut choisir pour tout $n \geqslant 0$ une partie $I_n \subset \Lambda$ de cardinal 4^n ; posons

$$f_n = 4^{-n} \sum_{\gamma \in I_n} \gamma.$$

On a $\|f_n\|_{C(G)} = 1$ (valeur à l'élément neutre), alors que par ailleurs $\|f_n\|_{L^1(G)} \leqslant \|f_n\|_{L^2(G)} = 2^{-n}$. Il en résulte que $f_n \to 0$ presque-partout ; on définit $f : \mathbb{T} \to c_0$ en posant pour presque tout $u \in G$

$$f(u) = (f_0(u), \ldots, f_n(u), \ldots).$$

Il est évident que f est à valeurs dans c_0, d'autre part les f_n sont mesurables et c_0 est séparable, donc f est mesurable et $f \in L^\infty_\Lambda(G, c_0)$. De notre hypothèse on déduit que $f \in C_\Lambda(G, c_0)$; il existe alors un polynôme trigonométrique P à valeurs dans c_0, (c'est-à-dire que $P = \sum_{\gamma\in A} a_\gamma \gamma$, où A est un sous-ensemble fini de Γ, et $a_\gamma = (a_{\gamma,n})_{n\geqslant 0} \in c_0$) tel que

$$\|P - f\|_{C(G,c_0)} < \frac{1}{2}.$$

Posons pour tout n fixé $P_n = \sum_{\gamma\in A} a_{\gamma,n}\gamma \in C(G)$; comme les caractères sont uniformément bornés on voit que $\lim_{n\to+\infty} \|P_n\|_{C(G)} = 0$. D'autre part on a

$$\sup_{n\geqslant 0} \|P_n - f_n\|_{C(G)} = \|P - f\| < \frac{1}{2}$$

et on en déduit que pour n assez grand on a $\|f_n\|_{C(G)} < \frac{1}{2}$, ce qui contredit notre choix initial et montre donc que Λ est un ensemble fini. □

Remarque 26. — Si Λ est un ensemble de Rosenthal dans $\mathbb{Z}$, on a

$$L^\infty_\Lambda(\mathbb{T}, \ell^1) = C_\Lambda(\mathbb{T}, \ell^1).$$

Puisque ℓ_1 a la propriété de Schur, le résultat découle du théorème 6 de Watbled [22]. Donnons une autre démonstration, dans l'esprit de ce qui précède. Si $\Lambda_1 \subset \mathbb{T}$ est un ensemble de Hadamard on a $L^\infty_{\Lambda_1}(\mathbb{T}) \simeq \ell^1$ (cf. [14]) ; on en déduit que $L^\infty_\Lambda(\mathbb{T}, \ell^1) \simeq L^\infty_\Lambda(\mathbb{T}, L^\infty_{\Lambda_1}(\mathbb{T}))$; comme $L^\infty_{\Lambda_1}(\mathbb{T}) \simeq \ell_1$ a la propriété de Schur alors $\Lambda \times \Lambda_1$ est un ensemble de Rosenthal (cf. [14]), ce qui entraîne que $L^\infty_\Lambda(\mathbb{T}, \ell^1)$ est séparable donc $L^\infty_\Lambda(\mathbb{T}, \ell^1) = C_\Lambda(\mathbb{T}, \ell^1)$. $\square$

Exemple 27. — Si on sait que $\Lambda - \Lambda = \{m - n : m, n \in \Lambda\}$ est un ensemble de Rosenthal dans $\mathbb{Z}$, on a $L^\infty_\Lambda(\mathbb{T}, \ell^2) = C_\Lambda(\mathbb{T}, \ell^2)$.

Soit d'abord $(h_k)_{k \geqslant 0}$ une suite dans $C_{\mathrm{M}}(\mathbb{T})$, où M est un ensemble de Rosenthal ; pour tout entier $n \geqslant 0$ posons $g_n = \sum_{k=0}^n |h_k|$; si $\sup_{n \geqslant 0} \|g_n\|_{C(\mathbb{T})} < +\infty$, la suite $(g_n)_{n \geqslant 0}$ converge uniformément sur G vers $\sum_{k \geqslant 0} |h_k|$: en effet, si on définit $h : \mathbb{T} \to \ell^1$ en posant pour tout $t \in \mathbb{T}$

$$h(t) = (h_0(t), \ldots, h_k(t), \ldots),$$

on a $h \in L^\infty_{\mathrm{M}}(\mathbb{T}, \ell^1)$, donc $h \in C_{\mathrm{M}}(\mathbb{T}, \ell^1)$ par la remarque précédente ; d'après le théorème de Dini, la suite $(g_n)_{n \geqslant 0}$ converge uniformément vers la fonction continue $\sum_{k \geqslant 0} |h_k|$.

Supposons $\Lambda - \Lambda$ de Rosenthal, ce qui entraîne que Λ est de Rosenthal. Si $f \in L^\infty_\Lambda(\mathbb{T}, \ell^2)$ est représentée par une suite de fonctions $(f_n) \subset C_\Lambda(\mathbb{T})$, la suite des fonctions $h_n = |f_n|^2 = f_n \overline{f}_n$ est à spectre dans $\Lambda - \Lambda$, et définit un élément de $L^\infty_{\Lambda - \Lambda}(\mathbb{T}, \ell_1)$. Le résultat découle des lignes qui précèdent. $\square$

On peut énoncer de manière analogue un résultat pour chaque espace ℓ^p où $p = 2n$ est un entier pair : si l'ensemble formé de toutes les sommes de n éléments de $\Lambda - \Lambda$ est de Rosenthal, alors $L^\infty_\Lambda(\mathbb{T}, \ell^p) = C_\Lambda(\mathbb{T}, \ell^p)$.

Remarque 28. — Soient Λ un ensemble de Rosenthal et $p \in (1, +\infty)$; si l'espace $C_\Lambda(G, \ell^p)$ est faiblement séquentiellement complet, on a

$$L^\infty_\Lambda(G, \ell^p) = C_\Lambda(G, \ell^p).$$

Preuve. — Soit $f = (f_k)_{k \geqslant 0} \in L^\infty_\Lambda(G, \ell^p)$; comme Λ est un ensemble de Rosenthal on peut choisir les fonctions f_k dans $C_\Lambda(G)$; pour tout entier $n \geqslant 0$ posons

$$\psi_n = (f_0, \ldots, f_n, 0, \ldots);$$

montrons que $(\psi_n)_{n\geqslant 0}$ est faiblement de Cauchy dans $C_\Lambda(G,\ell^p)$. Soit $\xi \in C_\Lambda(G,\ell^p)^*$; on sait que ξ définit une mesure μ à valeurs dans ℓ^p à variation bornée ; soit α la mesure de la variation totale de μ ; pour tous $m,n\in\mathbb{N}$ on a

$$|(\psi_n-\psi_m,\xi)|\leqslant \int_G \|\psi_n(u)-\psi_m(u)\|_{\ell_p}\,d\alpha(u)\,;$$

d'autre part $(\psi_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers f simplement (dans ℓ^p), en appliquant le théorème de Lebesgue on voit que

$$\int_G \|\psi_n(u)-\psi_m(u)\|_{\ell_p}\,d\alpha(u)\to 0 \text{ (lorsque } \ m,n\to\infty)\,;$$

on en déduit que $(\psi_n)_{n\geqslant 0}$ est faiblement de Cauchy dans $C_\Lambda(G,\ell^p)$, donc il existe une fonction $\psi\in C_\Lambda(G,\ell^p)$ telle que $\psi_n\to\psi$ faiblement, et on conclut que $f=\psi$ presque-partout. $\square$

Remerciements. —Je remercie chaleureusement Monsieur le Professeur B. Maurey pour m'avoir donné l'ensemble des moyens nécessaires à la réalisation de ce travail. Ses conseils et suggestions permanents m'ont permis de progresser constamment. Qu'il soit assuré de ma très profonde gratitude. Je remercie également Madame le Professeur F. Lust-Piquard pour le temps qu'elle m'a consacré pour la préparation de ce travail. Je remercie le rapporteur pour ses remarques et ses suggestions, notamment la deuxième preuve du Corollaire 9.

Bibliographie

[1] BACHELIS (G.), EBENSTEIN (S.), On $\Lambda(p)$ sets, Pacific J. Math. 54, p. 35–38 (1974).

[2] BLASCO (O.), Positive p-summing operators on L_p-spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 100, p. 275–280 (1987).

[3] BLASCO (O.), Convolution of operators and applications, Math. Z. 199, p. 109–114 (1988).

[4] BOURBAKI (N.), Éléments de mathématique. Topologie générale, Chapitre 9 : Utilisation des nombres réels en topologie générale, Hermann, Paris.

[5] BUKHVALOV (A.V.), DANILEVICH (A.A.), Boundary properties of analytic and harmonic functions with values in Banach spaces, Math. Notes 31, p. 203–214 (1982); English Translation Math. Notes 31 p. 104–110 (1982).

[6] DAHER (M.), Une remarque sur la propriété de Radon-Nikodym, C. R. Acad. Sci. Paris 313, p. 269–271 (1991).

[7] DIESTEL (J.), UHL (J.J.), Vector measures, Math. Surveys 15 A.M.S (1977).

[8] EDGAR (G.A.), Analytic martingale convergence, J. Funct. Analysis 69, p. 268–280 (1986).

[9] FINET (C.), Lacunary sets for groups and hypergroups, J. Austral. Math. Soc. 54, p. 39–60 (1993).

[10] HEWITT (E.), ROSS (K.A.), Abstract harmonic analysis I, Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York 1963.

[11] HEWITT (E.), ROSS (K.A.), Abstract harmonic analysis II, Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York 1970.

[12] KADEC (M.), PEŁCZYŃSKI (A.), Bases, lacunary sequences and complemented subspaces in the spaces L_p, Studia Math. 21, p. 161–176 (1961/1962).

[13] LUST-PIQUARD (F.), Ensembles de Rosenthal et ensembles de Riesz, C. R. Acad. Sci Paris 282, 833–835 (1976).

[14] LUST-PIQUARD (F.), L'espace des fonctions presque-périodiques dont le spectre est contenu dans un ensemble compact dénombrable a la propriété de Schur, Colloq. Math. 41, p. 273–284 (1979).

[15] LUST-PIQUARD (F.), PISIER (G.), Noncommutative Khintchine and Paley inequalities, Ark. Mat. 29, p. 241–260 (1991).

[16] MICHAEL (E.), Continuous selections I, Annals of Math. 63, p. 361–382 (1956).

[17] ODELL (E.), ROSENTHAL (H.P.), A double-dual characterization of separable Banach spaces containing ℓ^1, Israel J. Math. 20, p. 375–384 (1975).

[18] PALEY (R.E.A.C), On the lacunary coefficients of power series, Ann. Math. 34, p. 615–616 (1933).

[19] PARTHASARATHY (T.), Selection theorems and their applications, Lecture Notes in Math, vol 263, Springer Verlag, Berlin-New York (1972).

[20] PISIER (G.), Les inégalités de Khintchine-Kahane, d'après C. Borell, Séminaire sur la Géométrie des Espaces de Banach (1977–1978), Exp. N° 7, École Polytech., Palaiseau 1(978).

[21] TALAGRAND (M.), Closed convex hull of sets of measurable Riemann-functions, and measurability of translations, Ann. Inst. Fourier 32, p. 39–69 (1982).

[22] WATBLED (F.), Rosenthal sets for Banach-valued functions, Arch. Math. 66, p. 479–489 (1996).