ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

CHRISTIAN EVEN

Degrés de liberté des moyennes de convolution préservant la réalité

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 13, nº 3 (2004), p. 377-420

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_2004_6_13_3_377_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. XIII, n° 3, 2004
pp. 377–420

Degrés de liberté des moyennes de convolution préservant la réalité [*]

CHRISTIAN EVEN[1]

RÉSUMÉ. — Lorsque la transformée de Borel d'une série divergente constitue un germe qui présente des singularités sur $\mathbb{R}_+$, l'intégrale de Laplace qui en permet la resommation ne peut porter directement sur cette fonction, dans ce cas multiforme, mais seulement sur une fonction uniforme, obtenue comme une moyenne des différents prolongements. La resommation ne sera satisfaisante que notamment si cette moyenne est un morphisme d'algèbres de convolution et préserve la réalité.

Dans le cas où les singularités sont sur $\mathbb{N}$, de telles moyennes correspondent à la donnée de poids $\boldsymbol{m}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_s}$, avec $\varepsilon_i = \pm 1$, vérifiant des conditions du type.

$$\boldsymbol{m}^a \boldsymbol{m}^b = \sum T_c^{a,b} \boldsymbol{m}^c$$

où $T_c^{a,b}$ est un tenseur d'une certaine algèbre POST. Nous montrons que le nombre minimal de poids homogènes qui déterminent entièrement une moyenne est déterminé par des formules analogues aux formules de Witt.

ABSTRACT. — When the Borel transform of a divergent power series gives rise to a germ which offers singularities on the real axis, its resummation by the Laplace integral transform can not be performed directly on this multivalued function, but only on a single-valued one, obtained by averaging its different analytic continuations. This resummation will be satisfactory only if this average yields a morphism of convolution algebras which also preserves realness.

When the singularities belong to $\mathbb{N}$, such averages are defined by their weights $\boldsymbol{m}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_s}$, with $\varepsilon_i = \pm 1$, verifying infinitely many conditions of the form :

$$\boldsymbol{m}^a \boldsymbol{m}^b = \sum T_c^{a,b} \boldsymbol{m}^c$$

(*) Reçu le 2 octobre 2003, accepté le 29 avril 2004

(1) LAMA (UMR 8100 du CNRS), Département de Mathématiques, Bâtiment Fermat, Université de Versailles-S^{t}Quentin-en-Yvelines, 45, avenue des États-Unis, 78035 Versailles.
E-mail : even@math.uvsq.fr

where $T_c^{a,b}$ is the structure tensor of a certain algebra named POST. We show that the minimal number of homogeneous weights which completely determine such an average is expressed by formulas analogous to Witt's.

1. Introduction : les moyennes de convolution et leurs « bonnes » propriétés

Le schéma de la resommation :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\varphi}(z) & \dashrightarrow & \varphi(z) \\ \text{transformation de } \mathcal{B}\text{orel} \downarrow & & \uparrow \text{transformation de } \mathcal{L}\text{aplace} \\ \hat{\varphi}(\zeta) \text{ local} & \longrightarrow & \hat{\varphi}(\zeta) \text{ global} \end{array}$$

doit se compliquer dès lors que le germe $\hat{\varphi}$ est multiforme au-dessus de $\mathbb{R}_+$, même si les singularités sont toutes intégrables et contournables tant à droite qu'à gauche. En ce cas l'intégrale de Laplace ne saurait porter sur la fonction multiforme $\hat{\varphi}$, mais seulement sur une moyenne uniforme $\boldsymbol{m}\hat{\varphi}$ judicieusement choisie :

$$\begin{array}{lll} \tilde{\varphi}(z) & \dashrightarrow & \varphi(z) \\ \mathcal{B}\downarrow & & \uparrow \mathcal{L} \\ \hat{\varphi}(\zeta) \text{ local} & \longrightarrow \hat{\varphi}(\zeta) \text{ global multiforme} \longrightarrow & \boldsymbol{m}\hat{\varphi}(\zeta) \text{ global uniforme} \end{array}$$

La resommation ne sera évidemment satisfaisante que si :

($\boldsymbol{P}_1$) $\widetilde{\varphi_1}(z)\widetilde{\varphi_2}(z) \longrightarrow \varphi_1(z)\varphi_2(z)$, ce qui impose $\boldsymbol{m}(\hat{\varphi}_1 * \hat{\varphi}_2) = \boldsymbol{m}(\hat{\varphi}_1) * \boldsymbol{m}(\hat{\varphi}_2)$, et $\boldsymbol{m}$ sera alors dite une *moyenne de convolution.*

($\boldsymbol{P}_2$) $\tilde{\varphi}(z)$ réelle $\longrightarrow \varphi(z)$ réelle, et alors sera $\boldsymbol{m}$ dite *préserver la réalité.*

($\boldsymbol{P}_3$) Nous ne nous appesantirons pas ici sur cette propriété pourtant capitale et qui concentre tout le travail d'analyse : elle consiste à prendre en compte la tendance des fonctions résurgentes d'origine naturelle à croître surexponentiellement sur les chemins qui traversent l'axe réel une infinité de fois. J. Ecalle a montré qu'il n'y a pas à cette égard de moyennes « magiques », i.e. dont les poids sur ces chemins sinueux auraient une décroissance surexponentielle. Le seul moyen pour pallier cette difficulté est de recourir à des moyennes qui, par un jeu subtil de compensation entre les différentes déterminations, livre une somme uniformisée $\boldsymbol{m}(\hat{\varphi})$ à croissance exponentielle, et donc susceptible de subir la transformation de Laplace. Pour cet aspect, on pourra utilement se référer à [10, 18, 19].

Nous allons dans un premier temps retracer rapidement le cheminement en plusieurs étapes suivi par J. Ecalle pour montrer que les moyennes sont simplement des éléments d'une certaine algèbre, étroitement reliée à l'algèbre des opérateurs étrangers. Ces résultats sont à paraître dans [5], mais l'essentiel de ceux auxquels nous nous référons se trouvent déjà dans [4, 6, 9, 10, 18].

Les dérivations étrangères agissent sur des algèbres de fonctions résurgentes, cette action étant la même dans plusieurs algèbres convolutives de fonctions, mais aussi de distributions. On peut ainsi définir des diracs « ramifiés » qui permettent de décrire exactement et simplement l'action des opérateurs étrangers relativement à la convolution, et l'algèbre des moyennes de convolutions.

Il s'avère que les opérateurs étrangers forment une algèbre libre, déjà connue dans d'autres approches lorsque l'on se limite à des singularités aux points entiers. Nous présentons ensuite le formalisme dit « moulien », qui s'avère ici extrêmement efficace pour retrouver les formules fondamentales de ces structures algébriques.

Munis ces outils et nous les appliquons à notre problème pour calculer les degrés de liberté des moyennes de convolution préservant la réalité. Voici le plan de l'article :

Table des matières

1.1. L'approche algébrique du problème

Les fonctions «résurgentes» que nous aurons à considérer seront caractérisées par leur mineur $\hat{\varphi}$. Il ne s'agit là que d'une hypothèse simplificatrice sur les $\hat{\varphi}$. J. Ecalle considère en effet des classes plus générales (*cf.* [7, 8, 9]) que nous n'aurons pas à aborder ici.

Que le présent lecteur sache simplement ici que ce mineur correspond à la donnée d'un germe de fonction analytique sur un intervalle $]0,\ldots[$ dont les prolongements n'admettent que des singularités isolées sur l'axe réel (du moins au voisinage de celui-ci), pouvant ainsi être contournées tant à droite qu'à gauche. On suppose également que tous ces prolongements sont localement intégrables sur $\mathbb{R}_+$.

Si une telle fonction $\hat{\varphi}$ admet toutes ses singularités dans un ensemble discret $\Omega = \{\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots\}$, nous noterons $\omega_1 = \eta_1, \omega_2 = \eta_2 - \eta_1, \omega_3 = \eta_3 - \eta_2$, les différences (ou *incréments*) entre ces singularités. Les valeurs prises par les différents prolongements de $\widehat{\varphi}$ sur les segments $]\eta_i, \eta_{i+1}[$ de l'axe réel dépendent donc des contournements successifs en $\eta_1, \ldots, \eta_i$ que nous pourrons désigner par une séquence de signes $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_i)$ avec $\varepsilon_k = +$ si le contournement se fait par la droite (c'est-à-dire par au-dessous, ou encore dans le sens trigonométrique), et $\varepsilon_k = -$ si le contournement se fait par la gauche (*cf.* fig. 1).

Ces fonctions forment ainsi une algèbre $\mathrm{RESUR}(\mathbb{R}_+//\Omega, \mathrm{int.})$ munie d'une convolution localement définie en 0 par :

$$(\widehat{\varphi_1} * \widehat{\varphi_2})(\zeta) = \int_0^\zeta \widehat{\varphi_1}(\zeta_1)\widehat{\varphi_2}(\zeta - \zeta_1)d\zeta_1$$

La stabilité de $\mathrm{RESUR}(\mathbb{R}_+//\Omega, \mathrm{int.})$ par cette convolution n'est pas évidente. Nous renvoyons aux travaux de J. Ecalle (*cf.* [7, 8, 9]) pour les définitions et propriétés de ces différentes algèbres de fonctions résurgentes. Il s'avère en effet que la structure algébrique des opérateurs étrangers que nous allons définir et qui agissent sur ces fonctions est la même que dans les classes les plus générales[1].

Chacune des fonctions $\widehat{\varphi_1}$,$\widehat{\varphi_2}$,$\widehat{\varphi_1} * \widehat{\varphi_2}$ est ainsi un germe de fonction dans un voisinage proche de 0, qui est susceptible d'admettre des singularités sur l'axe réel et des prolongements multiformes, selon les contournements effectués. L'application de moyenne $\boldsymbol{m}$ à un germe multiforme doit donc fournir une fonction uniformisée $\boldsymbol{m}(\hat{\varphi})$, définie et localement intégrable sur $\mathbb{R}$.

Dans la condition $\boldsymbol{m}(\hat{\varphi}_1 * \hat{\varphi}_2) = \boldsymbol{m}(\hat{\varphi}_1) * \boldsymbol{m}(\hat{\varphi}_2)$ que doivent vérifier les moyennes de convolution, il y a donc a priori une convolution locale prolongée analytiquement dans le terme de gauche et une convolution globale dans le terme de droite. Tout le début de cette investigation consiste donc à montrer que cette convolution locale peut de fait se définir comme une convolution globale, mais sur des fonctions *ramifiées* ou *multiformes.*

Une fonction résurgente multiforme permet de définir une fonction sur la *droite ramifiée* $\mathbb{R}_+//\Omega$. Cette dernière consiste dans l'espace topologique connexe formé d'un segment $[0, \eta_1[$, de deux segments $]\eta_1, \eta_2[$, de 2^k segments $]\eta_k, \eta_{k+1}[$, etc... Chacun de ces segments est repéré et distingué par une adresse $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k)$. On peut représenter $\mathbb{R}_+//\Omega$ comme un arbre

[1] Pour les lecteurs avertis de ces difficultés, rappelons que les algèbres d'opérateurs étrangers (dérivations étrangères, automorphismes étrangers, etc...) sont exactement les mêmes :

i. pour l'algèbre de toutes les fonctions résurgentes au-dessus de $\mathbb{R}_+$ et à singularités au-dessus d'un monoïde additif Ω (e.g. $\mathbb{N}$).

ii. pour la sous-algèbre des fonctions résurgentes « intégrables » au-dessus de $\mathbb{R}_+$ et à singularités au-dessus de Ω , qui est la plus grande algèbre dont les éléments, ainsi que leurs dérivées étrangères successives, sont caractérisées par les seuls mineurs.

iii. pour des sous-algèbres encore plus petites et plus faciles à définir, caractérisées par un comportement k-régulier, i.e. de type $\varphi(\zeta) = o((\zeta - \omega)^k)$ ou $= O((\zeta - \omega)^k)$ au voisinage de tout $\omega \in \Omega$, pour un $k > 0$ donné fixé (entier ou non).

La raison est que, pour une topologie adéquate (rendant les opérateurs étrangers continus), ces sous-algèbres (ii) et (iii) sont toutes denses dans la grande algèbre (i). On peut donc raisonner sur les algèbres de type (iii), plus faciles à définir que (ii).

dont les nœuds sont les singularités η_k et les arêtes les segments $]\eta_k, \eta_{k+1}[$. Dans la figure 1.1, nous avons préféré représenter ces arêtes par des segments horizontaux.

Chaque point $\boldsymbol{\zeta} = \zeta \,{}^{\begin{smallmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \dots & \varepsilon_k\\ \omega_1 & \omega_2 & \dots & \omega_k\end{smallmatrix}}{}_{\xi}$ de $\mathbb{R}_+//\Omega$ se projette sur $\mathbb{R}_+$ en un point $\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \omega_1 + \ldots + \omega_k + \xi = \eta_k + \xi$, pour $\xi \in]0, \omega_{k+1}[$, comme cela s'illustre dans la figure 1.1.

Les fonctions, non plus analytiques, mais seulement localement intégrables et définies sur $\mathbb{R}_+//\Omega$ forment l'espace $\mathrm{RAMIF}(\mathbb{R}_+//\Omega, \mathrm{int.})$. Il s'avère que $\mathrm{RESUR}(\mathbb{R}_+//\Omega, \mathrm{int.})$ est dense dans $\mathrm{RAMIF}(\mathbb{R}_+//\Omega, \mathrm{int.})$ relativement à un système adapté de semi-normes définies sur une suite croissante de compacts de $\mathbb{R}_+//\Omega$.

D'autre part, si $\Omega_1 \subset \Omega_2$, il existe une projection canonique de $\mathbb{R}_+//\Omega_2$ dans $\mathbb{R}_+//\Omega_1$ (du plus ramifié dans le moins ramifié, qui permet de considérer le cas où les singularités deΩ_2 qui ne sont pas dans Ω_1 sont fictives ou des fausses singularités).

Il existe par conséquent une injection canonique de $\mathrm{RAMIF}(\mathbb{R}_+//\Omega_1, \mathrm{int.})$ dans $\mathrm{RAMIF}(\mathbb{R}_+//\Omega_2, \mathrm{int.})$. On peut ainsi définir l'espace $\mathrm{RAMIF}(\mathbb{R}_+, \mathrm{int.})$ comme la limite inductive des espaces $\mathrm{RAMIF}(\mathbb{R}_+//\Omega, \mathrm{int.})$. Ceci signifie qu'il suffit de se placer dans un espace suffisamment ramifié pour que toutes les notions prennent un sens non ambigu. En particulier, il s'avérera très utile de supposer que Ω soit un monoïde.

Nous n'insisterons pas ici sur tous les détails qui permettent de définir les objets que nous considérons dans cette limite inductive (non plus sur les « notions duales » qui vivent dans une limite projective) et nous renvoyons aux travaux de J. Ecalle et à la thèse de F. Menous [5, 6, 10, 18]. Comme nous l'avons dit, nous nous bornons ici à retracer dans ses grandes lignes la démarche qui conduit au traitement algébrique du problème que nous souhaitons résoudre.

Cette représentation se prête ainsi à une extension par densité de la convolution des fonctions résurgentes aux fonctions définies sur la droite ramifiée $\mathbb{R}_+//\Omega$, c'est-à-dire à $\mathrm{RAMIF}(\mathbb{R}_+//\Omega, \mathrm{int.})$, qui s'avère plus facilement manipulable. En effet, la convolution des germes est définie au voisinage de 0 par l'intégrale :

$$(\hat{\varphi}_1 * \hat{\varphi}_2)(\zeta) = \int_{\zeta_1+\zeta_2=\zeta} \hat{\varphi}_1(\zeta_1)\hat{\varphi}_2(\zeta_2)\mathrm{d}\zeta_1$$

où ζ_1 varie dans un segment qui joint 0 à ζ. C'est aussi le cas de ζ_2, mais il varie de façon symétrique à ζ_1 par rapport au milieu de ce segment. Ceci reste vrai tant que ce segment ne rencontre pas les singularités de $\hat{\varphi}_1$ et de $\hat{\varphi}_2$ (on les suppose toutes appartenir à un sous-ensemble de $\Omega = \{\omega_1, \omega_1 + \omega_2, \omega_1 + \omega_2 + \omega_3, \ldots\}$).

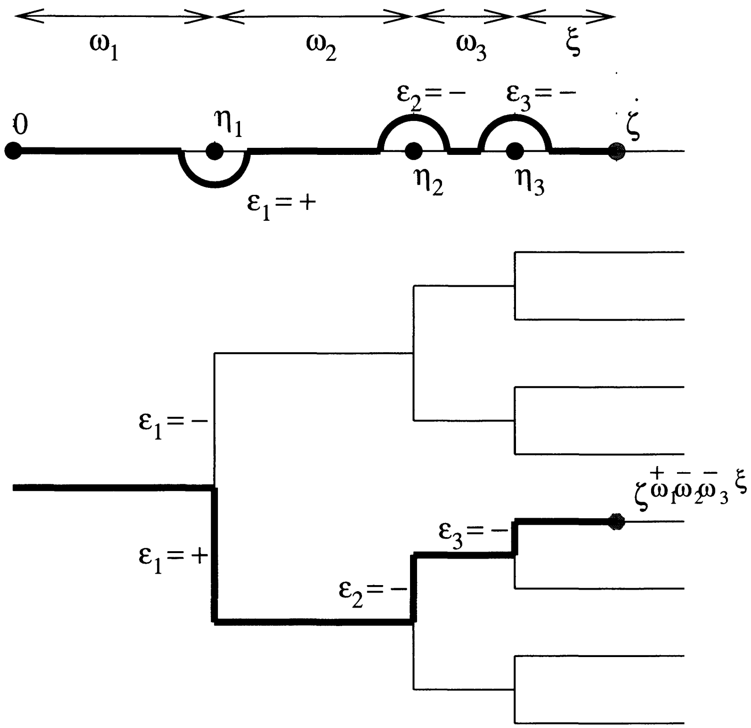


Figure 1. — Correspondance entre la valeur du prolongement (le long du chemin représenté) de $\widehat{\varphi}$ au point ζ et sa valeur sur la droite ramifiée $\mathbb{R}_+//\{\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots\}$.

Il est possible d'exprimer directement les différentes déterminations de la fonction convolée, en la représentant par des intégrales sur des chemins particuliers dits SSSS (*shortest self-symmetrically shrinkable*), qui sont symétriques par rapport à leur milieu. Le principe de leur construction est illustré dans la figure 2.

Dans notre exemple, l'intégrale $\int_\gamma \hat{\varphi}_1(\zeta_1)\hat{\varphi}_2(\zeta_2)d\zeta_1$ représente ainsi la valeur prise en ζ par le prolongement de $\hat{\varphi}_1 * \hat{\varphi}_2$ après le contournement de η_1 par au-dessous (dans le sens trigonométrique +), de η_2 par au-dessus (−)

et de η_3 par au-dessous $(+)$. Conformément aux notations précédemment introduites, nous noterons cette valeur de deux façons différentes :

$$(\hat{\varphi}_1 * \hat{\varphi}_2)\;\overset{+}{\omega_1}\;\overset{-}{\omega_2}\;\overset{+}{\omega_3}\;(\xi) \text{ ou encore : } (\hat{\varphi}_1 * \hat{\varphi}_2)\begin{pmatrix} & + & - & + & \xi \\ \zeta & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

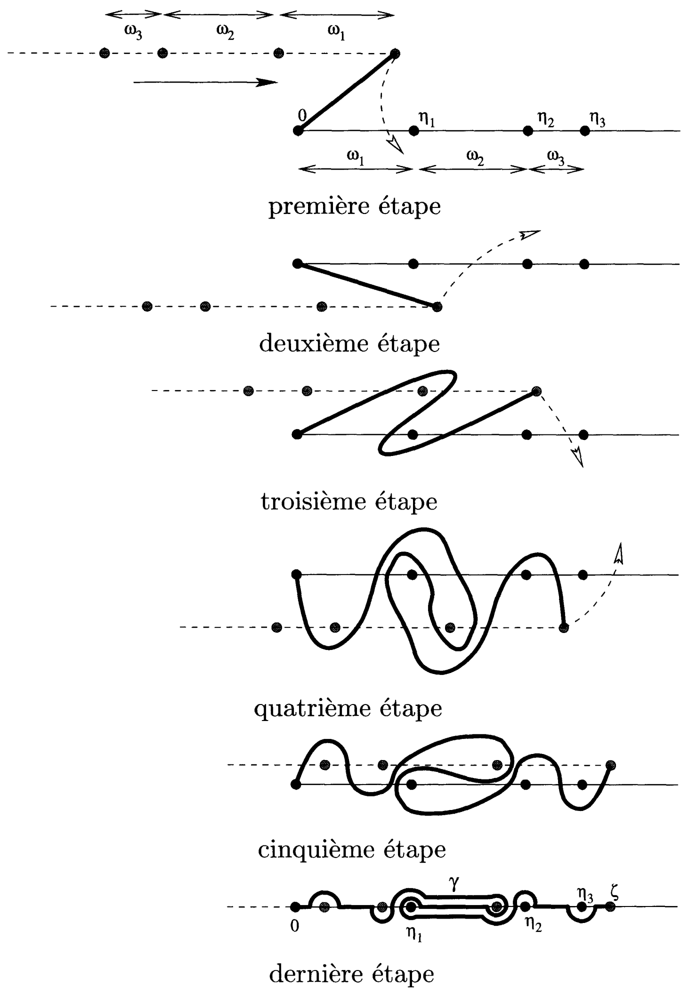


Figure 2. — L'engendrement du chemin SSSS par les règles cloutées : l'une est fixe (en trait plein) et l'autre mobile (en pointillés). Les clous fixes et mobiles entraînent la corde tendue entre les origines des deux règles. Le chemin ainsi engendré est symétrique par rapport à son milieu.

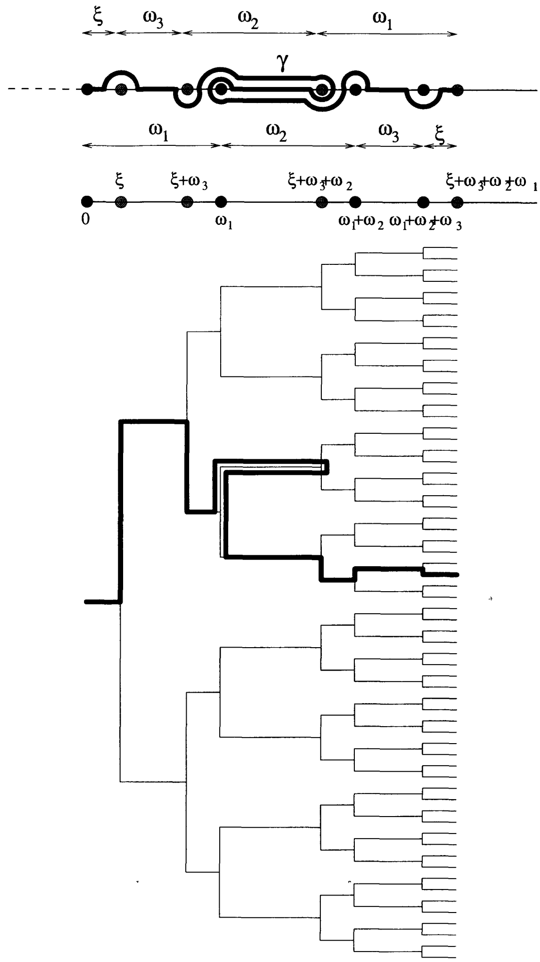


Figure 3. — Le relèvement du chemin γ sur la droite ramifiée $\mathbb{R}_+//\Omega$ pour ζ_1 (ζ_2 le parcourt symétriquement)

Il ressort précisément de la définition des fonctions résurgentes intégrables que les intégrales sur les petits arcs de cercles sont négligeables. Ainsi la convolution se ramène-t-elle à l'intégration sur les segments horizontaux orientés de $\mathbb{R}_+//\Omega$ (avec $\Omega = \{\xi, \xi+\omega_3, \omega_1, \xi+\omega_3+\omega_2, \omega_1+\omega_2, \omega_1+\omega_2+\omega_3, \omega_1+\omega_2+\omega_3+\xi\}$) tels qu'il sont représentés dans la figure 2.

Cette intégrale de convolution peut ainsi totalement s'expliciter :

$$\int_0^{\xi} \hat{\varphi}_1(\xi_1)\hat{\varphi}_2^{\overset{-}{\xi}\ \overset{+}{\omega_3}\ \overset{-}{\omega_1-\xi-\omega_3}\ \overset{-}{\xi+\omega_3+\omega_2-\omega_1}\ \overset{+}{\omega_1-\xi-\omega_3}\ \overset{-}{\omega_3}}(\xi_2)d\xi_1$$

$$+\int_0^{\omega_3} \hat{\varphi}_1^{\overset{-}{\xi}}(\xi_1)\hat{\varphi}_2^{\overset{-}{\xi}\ \overset{+}{\omega_3}\ \overset{-}{\omega_1-\xi-\omega_3}\ \overset{-}{\xi+\omega_3+\omega_2-\omega_1}\ \overset{+}{\omega_1-\xi-\omega_3}}(\xi_2)d\xi_1$$

$$+\int_0^{\omega_3-\omega_1-\xi} \hat{\varphi}_1^{\overset{-}{\xi}\ \overset{+}{\omega_3}}(\xi_1)\hat{\varphi}_2^{\overset{-}{\xi}\ \overset{+}{\omega_3}\ \overset{-}{\omega_1-\xi-\omega_3}\ \overset{-}{\xi+\omega_3+\omega_2-\omega_1}}(\xi_2)d\xi_1$$

$$+\int_0^{\xi+\omega_3+\omega_2-\omega_1} \hat{\varphi}_1^{\overset{-}{\xi}\ \overset{+}{\omega_3}\ \overset{+}{\omega_1-\xi-\omega_3}}(\xi_1)\hat{\varphi}_2^{\overset{-}{\xi}\ \overset{+}{\omega_3}\ \overset{-}{\omega_1-\xi-\omega_3}}(\xi_2)d\xi_1$$

$$-\int_0^{\xi+\omega_3+\omega_2-\omega_1} \hat{\varphi}_1^{\overset{-}{\xi}\ \overset{+}{\omega_3}\ \overset{+}{\omega_1-\xi-\omega_3}}(\xi_1)\hat{\varphi}_2^{\overset{-}{\xi}\ \overset{+}{\omega_3}\ \overset{+}{\omega_1-\xi-\omega_3}}(\xi_2)d\xi_1$$

$$+\int_0^{\xi+\omega_3+\omega_2-\omega_1} \hat{\varphi}_1^{\overset{-}{\xi}\ \overset{+}{\omega_3}\ \overset{-}{\omega_1-\xi-\omega_3}}(\xi_1)\hat{\varphi}_2^{\overset{-}{\xi}\ \overset{+}{\omega_3}\ \overset{+}{\omega_1-\xi-\omega_3}}(\xi_2)d\xi_1$$

$$+\int_0^{\omega_3-\omega_1-\xi} \hat{\varphi}_1^{\overset{-}{\xi}\ \overset{+}{\omega_3}\ \overset{-}{\omega_1-\xi-\omega_3}\ \overset{-}{\xi+\omega_3+\omega_2-\omega_1}}(\xi_1)\hat{\varphi}_2^{\overset{-}{\xi}\ \overset{+}{\omega_3}}(\xi_2)d\xi_1$$

$$+\int_0^{\omega_3} \hat{\varphi}_1^{\overset{-}{\xi}\ \overset{+}{\omega_3}\ \overset{-}{\omega_1-\xi-\omega_3}\ \overset{-}{\xi+\omega_3+\omega_2-\omega_1}\ \overset{+}{\omega_1-\xi-\omega_3}}(\xi_1)\hat{\varphi}_2^{\overset{-}{\xi}}(\xi_1)d\xi_1$$

$$+\int_0^{\xi} \hat{\varphi}_1^{\overset{-}{\xi}\ \overset{+}{\omega_3}\ \overset{-}{\omega_1-\xi-\omega_3}\ \overset{-}{\xi+\omega_3+\omega_2-\omega_1}\ \overset{+}{\omega_1-\xi-\omega_3}\ \overset{-}{\omega_3}}(\xi_1)\hat{\varphi}_2(\xi_2)d\xi_1.$$

où pour chaque intégrale de la forme $\int_0^a$, on a $\xi_1+\xi_2=a$.

Cette convolution se ré-exprimera plus commodément par :

$$(\hat{\varphi}_1 * \hat{\varphi}_2)(\boldsymbol{\zeta}) = \int C_{\boldsymbol{\zeta}}^{\boldsymbol{\zeta_1},\boldsymbol{\zeta_2}}\hat{\varphi}_1(\boldsymbol{\zeta_1})\hat{\varphi}_2(\boldsymbol{\zeta_2})\mathrm{d}\boldsymbol{\zeta_1} \tag{1.1}$$

avec $\boldsymbol{\zeta}_1,\boldsymbol{\zeta}_2,\boldsymbol{\zeta}\in\mathbb{R}_+//\Omega, \dot{\boldsymbol{\zeta_1}}+\dot{\boldsymbol{\zeta_2}}=\dot{\boldsymbol{\zeta}}, 0<\dot{\boldsymbol{\zeta_1}}<\dot{\boldsymbol{\zeta}}, 0<\dot{\boldsymbol{\zeta_2}}<\dot{\boldsymbol{\zeta}}$, et $C_{\boldsymbol{\zeta}}^{\boldsymbol{\zeta_1},\boldsymbol{\zeta_2}}$ un tenseur de structure à valeurs dans $\mathbb{Z}$, constant lorsque $\boldsymbol{\zeta}_1,\boldsymbol{\zeta}_2$ varient chacun sur un segment orienté de $\mathbb{R}_+//\Omega$, Ω étant un monoïde de la limite inductive assez ramifié pour contenir toutes ces singularités. L'addition ramifiée (non commutative) $\dot{\boldsymbol{\zeta}}_1 + \dot{\boldsymbol{\zeta}}_2 = \dot{\boldsymbol{\zeta}}$ étant définie par :

$$\zeta\begin{smallmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_r \\ \omega_1 & \omega_2 & \cdots & \omega_r\end{smallmatrix}\,\xi + \zeta\begin{smallmatrix}\varepsilon'_1 & \varepsilon'_2 & \cdots & \varepsilon'_s \\ \omega'_1 & \omega'_2 & \cdots & \omega'_s\end{smallmatrix}\,\xi' = \zeta\begin{smallmatrix}\varepsilon_1 & \cdots & \varepsilon_r & \varepsilon'_1 & \cdots & \varepsilon'_s \\ \omega_1 & \cdots & \omega_r & \xi+\omega'_1 & \cdots & \omega'_s\end{smallmatrix}\,\xi'$$

La formule 1.1 permet ainsi d'étendre la convolution à $\mathrm{RAMIF}(\mathbb{R}_+//\Omega, \mathrm{int.})$.

C'est aussi en considérant ces chemins, qu'on peut constater qu'il y a des opérateurs Δ^+ et Δ^- (Δ^+_η et Δ^-_η) sur les fonctions résurgentes qui constituent des automorphismes pour la convolution (et qui permettent de définir les dérivations étrangères) (*cf.* [1, 2]). Il s'étendent sur $\mathrm{RAMIF}(\mathbb{R}_+//\Omega, \mathrm{int.})$ par des opérateurs notés $\boldsymbol{Lur}_\eta$ et $\boldsymbol{Rul}_\eta$.

Si nous définissons les opérateurs de translation ramifiée par :

$$T\begin{smallmatrix}\varepsilon_1 & \cdots & \varepsilon_k \\ \omega_1 & \cdots & \omega_k\end{smallmatrix}(\hat{\varphi})(\xi) = \hat{\varphi}\begin{smallmatrix}\varepsilon_1 & \cdots & \varepsilon_k \\ \omega_1 & \cdots & \omega_k\end{smallmatrix}(\xi) = \hat{\varphi}\left(\zeta\begin{smallmatrix}\varepsilon_1 & \cdots & \varepsilon_k \\ \omega_1 & \cdots & \omega_k\end{smallmatrix}\,\xi\right)$$

$\boldsymbol{Lur}_\eta$ se définit à partir des translations ramifiées par :

$$\boldsymbol{Lur}_\eta(\hat{\varphi})(\xi) = T\begin{smallmatrix}+ & \cdots & + & + \\ \omega_1 & \cdots & \omega_{k-1} & \omega_k\end{smallmatrix}(\hat{\varphi})(\xi) - T\begin{smallmatrix}+ & \cdots & + & - \\ \omega_1 & \cdots & \omega_{k-1} & \omega_k\end{smallmatrix}(\hat{\varphi})(\xi)$$

si $\eta_k = \eta$ et 0 sinon.

Soit encore :

$$\boldsymbol{Lur}_\eta(\hat{\varphi})(\xi) = \hat{\varphi}\begin{smallmatrix}+ & \cdots & + & + \\ \omega_1 & \cdots & \omega_{k-1} & \omega_k\end{smallmatrix}(\xi) - \hat{\varphi}\begin{smallmatrix}+ & \cdots & + & - \\ \omega_1 & \cdots & \omega_{k-1} & \omega_k\end{smallmatrix}(\xi)$$

si $\eta_k = \eta$ et 0 sinon.

De même, on peut définir un opérateur qui étend Δ^-_μ :

$$\boldsymbol{Rul}_\eta(\hat{\varphi})(\xi) = \hat{\varphi}\begin{smallmatrix}- & \cdots & - & - \\ \omega_1 & \cdots & \omega_{k-1} & \omega_k\end{smallmatrix}(\xi) - \hat{\varphi}\begin{smallmatrix}- & \cdots & - & + \\ \omega_1 & \cdots & \omega_{k-1} & \omega_k\end{smallmatrix}(\xi)$$

si $\eta_k = \eta$ et 0 sinon.

Ils sont en fait définis indépendamment du monoïde des singularités, puisque seul le contournement de la singularité η intervient.

Proposition 1.1. — $\boldsymbol{Lur}_\eta$ *vérifie :*

$$\boldsymbol{Lur}_\eta(\hat\varphi * \hat\psi) = \hat\varphi * \boldsymbol{Lur}_\eta(\hat\psi) + \sum_{\eta_1+\eta_2=\eta} \boldsymbol{Lur}_{\eta_1}(\hat\varphi) * \boldsymbol{Lur}_{\eta_2}(\hat\psi) + \boldsymbol{Lur}_\eta(\hat\varphi) * \hat\psi$$

Démonstration. — La figure suivante permet de se convaincre rapidement du résultat.

Ainsi dans la différence, les contributions de presque tous les segments horizontaux se compensent, sauf deux à chaque extrémité et quatre entre les points noirs et les points gris. L'expression explicite devient :

$$\int_0^\xi \hat\varphi(\xi_1)\left(\hat\psi^{\overset{+}{\omega_1}\ \overset{\cdots}{\cdots}\ \overset{+}{\omega_{k-1}}\ \overset{+}{\omega_k}} - \hat\psi^{\overset{+}{\omega_1}\ \overset{\cdots}{\cdots}\ \overset{+}{\omega_{k-1}}\ \overset{-}{\omega_k}}\right)(\xi_2)d\xi_1$$

$$+\sum_{i=1}^{k-1}\int_0^\xi \left(\hat\varphi^{\overset{+..++}{\omega_1\ldots\omega_i}} - \hat\varphi^{\overset{+..+-}{\omega_1\ldots\omega_i}}\right)(\xi_1)\left(\hat\psi^{\overset{+..++}{\omega_1..\omega_{k-i}}} - \hat\psi^{\overset{+..+-}{\omega_1..\omega_{k-i}}}\right)(\xi_2)d\xi_1$$

$$\int_0^\xi \left(\hat\varphi^{\overset{+}{\omega_1}\ \overset{\cdots}{\cdots}\ \overset{+}{\omega_{k-1}}\ \overset{+}{\omega_k}} - \hat\varphi^{\overset{+}{\omega_1}\ \overset{\cdots}{\cdots}\ \overset{+}{\omega_{k-1}}\ \overset{-}{\omega_k}}\right)(\xi_1)\hat\varphi(\xi_2)d\xi_1$$

□

Néanmoins la considération des chemins SSSS devient extrêmement rapidement peu pratiquable, notamment elle ne fournit pas de moyen très simple pour connaître le tenseur $C_\zeta^{\zeta_1,\zeta_2}$. Elle permet néanmoins de constater que la convolution des fonctions multiformes peut s'exprimer globalement sur la droite ramifiée $\mathbb{R}_+//\Omega$.

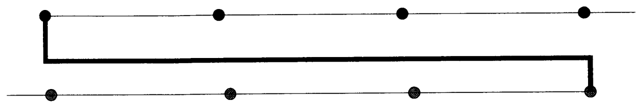
1.2. Définition des moyennes

Une fonction sera dite non-ramifiée si $\hat\varphi(\zeta)$ ne dépend que de $\dot\zeta$ et elle définit alors une fonction uniforme sur $\mathbb{R}_+$.

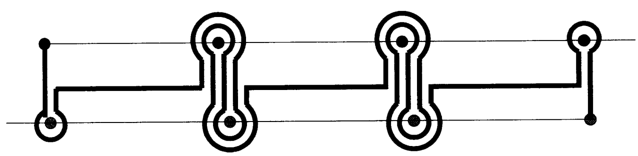
Une moyenne peut être ainsi définie en toute généralité comme une projection des fonctions ramifiées vers les fonctions non ramifiées. Elle est définie par ses poids $\boldsymbol{m}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_k}$

si $\zeta \in [\eta_k, \eta_{k+1}]$, on aura :

$$\boldsymbol{m}\hat{\varphi}(\dot{\zeta}) = \boldsymbol{m}\hat{\varphi}(\zeta) = \sum_{\varepsilon_i = \pm} \boldsymbol{m}^{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k} \hat{\varphi}(\zeta^{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k})$$



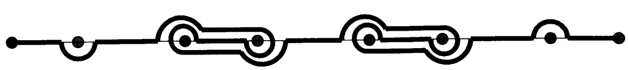
chemin SSSS correspondant à $(\hat{\varphi} * \hat{\psi})\begin{pmatrix} & + & \cdots & + & + & \xi \\ \zeta & \omega_1 & \cdots & \omega_{k-1} & \omega_k & \end{pmatrix}$.



chemin SSSS correspondant à $(\hat{\varphi} * \hat{\psi})\begin{pmatrix} & + & \cdots & + & - & \xi \\ \zeta & \omega_1 & \cdots & \omega_{k-1} & \omega_k & \end{pmatrix}$

évidence des segments horizontaux

et des contournements pour $(\hat{\varphi} * \hat{\psi})\begin{pmatrix} & + & \cdots & + & + & \xi \\ \zeta & \omega_1 & \cdots & \omega_{k-1} & \omega_k & \end{pmatrix}$.



idem pour $(\hat{\varphi} * \hat{\psi})\begin{pmatrix} & + & \cdots & + & - & \xi \\ \zeta & \omega_1 & \cdots & \omega_{k-1} & \omega_k & \end{pmatrix}$

Figure 4. —

1.3. Les algèbres de diracs ramifiés

Nous allons voir que les moyennes agissent très simplement sur les diracs ramifiés. D'autre part nous verrons également que la convolution de ces diracs est facile à décrire.

On peut étendre par densité la précédente convolution aux mesures de diracs qui ne sont pas situées en un point de ramification et exprimer celle-ci par un tenseur qui se déduit de $C_{\zeta}^{\zeta_1,\zeta_2}$:

$$\delta^a * \delta^b = \sum T_c^{a,b}\delta^c$$

$\delta^a, \delta^b, \delta^c$ étant de la forme $\delta^{\begin{array}{cccc}\varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \dots & \varepsilon_k \\ \omega_1 & \omega_2 & \dots & \omega_k\end{array}\ \omega_{k+1}}$.

Toutes ces expressions auront un sens si $\omega_1, \omega_1+\omega_2, \omega_1+\omega_2+\omega_3$, sont des points de ramification, mais aussi pour un monoïde Ω' plus ramifié ($\Omega \subset \Omega'$), ce qui les astreint à vérifier les relations dites d'*autocohérence* :

$$\sum_{\varepsilon_i=\pm} \delta^{\begin{array}{ccccccc}\varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \dots & \varepsilon_i & \dots & \varepsilon_r \\ \omega_1 & \omega_2 & \dots & \omega_i & \dots & \omega_r\end{array}\ \omega_{r+1}} = \delta^{\begin{array}{ccccccc}\varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \dots & \varepsilon_{i+1} & \dots & \varepsilon_r \\ \omega_1 & \omega_2 & \dots & \omega_i+\omega_{i+1} & \dots & \omega_r\end{array}\ \omega_{r+1}}$$

Ainsi

$$\sum_{\varepsilon_j=\pm, j=1\dots r} \delta^{\begin{array}{ccccccc}\varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \dots & \varepsilon_i & \dots & \varepsilon_r \\ \omega_1 & \omega_2 & \dots & \omega_i & \dots & \omega_r\end{array}\ \omega_{r+1}} = \delta^{\omega_1+\omega_2+\dots+\omega_{r+1}} \tag{1.2}$$

aura un sens indépendamment du monoïde des singularités.

Lorsque $\dot{\eta}$ est un point de ramification, on peut considérer un dirac situé juste après la ramification, ce qui correspond à des éléments de la forme $\delta^{\begin{array}{c}\varepsilon_1\dots\varepsilon_k \\ \omega_1\dots\omega_k\end{array}}$.

Par densité, ces éléments forment eux aussi une algèbre convolutive (mais plutôt notée multiplicativement) POST. Comme nous le verrons une moyenne de convolution s'avère n'être autre qu'une représentation de cette algèbre.

Comme nous l'avons vu, les opérateurs Δ_{ω}^{+} et Δ_{ω}^{-} se prolongent en des opérateurs $\boldsymbol{Lur}_{\omega}$ et $\boldsymbol{Rul}_{\omega}$ qui agissent sur les fonctions ramifiées. Ils engendrent une algèbre unitaire d'opérateurs graduée ALIEN. Un opérateur de la composante homogène de poids ω y est représentable comme une somme :

$$\boldsymbol{op}_\omega = \sum_{1\leqslant r} \sum_{0<\omega_i} a^{\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_r} \boldsymbol{Lur}_{\omega_r} \dots \boldsymbol{Lur}_{\omega_2} \boldsymbol{Lur}_{\omega_1}$$

ou aussi bien avec une relation analogue avec $\boldsymbol{Rul}$.

Si l'on pose :

$$\boldsymbol{Lur} = 1 + \sum_{0<\omega} \boldsymbol{Lur}_\omega \quad \text{et} \quad \boldsymbol{Rul} = 1 + \sum_{0<\omega} \boldsymbol{Rul}_\omega$$

Alors cet algèbre est naturellement munie d'une coloi σ telle

$$\sigma(\boldsymbol{Lur}) = \boldsymbol{Lur} \otimes \boldsymbol{Lur} \quad \text{et} \quad \sigma(\boldsymbol{Rul}) = \boldsymbol{Rul} \otimes \boldsymbol{Rul}$$

traduisant le fait que

$$\sigma(\boldsymbol{Lur}_\omega) = 1 \otimes \boldsymbol{Lur}_\omega + \sum_{\omega_1+\omega_2=\omega} \boldsymbol{Lur}_{\omega_1} \otimes \boldsymbol{Lur}_{\omega_2} + \boldsymbol{Lur}_\omega \otimes 1$$

puisque :

$$\boldsymbol{Lur}_\omega(\hat\varphi_1 * \hat\varphi_2) =$$
$$\hat\varphi_1 * \boldsymbol{Lur}_\omega(\hat\varphi_2) + \sum_{\omega_1+\omega_2=\omega} \boldsymbol{Lur}_{\omega_1}(\hat\varphi_1) * \boldsymbol{Lur}_{\omega_2}(\hat\varphi_2) + \boldsymbol{Lur}_\omega(\hat\varphi_1) * \hat\varphi_2$$

Ces opérateurs agissent sur les diracs de la façon suivante :

$$\boldsymbol{op}\left(\delta \begin{array}{ccccc} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \dots & \varepsilon_r & \\ \omega_1 & \omega_2 & \dots & \omega_r & \omega_{r+1} \end{array}\right) = \sum_{j=0}^{r} \boldsymbol{op} \begin{array}{cccc} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \dots & \varepsilon_j \\ \omega_1 & \omega_2 & \dots & \omega_j \end{array} \delta \begin{array}{ccccc} \varepsilon_{j+1} & \dots & \varepsilon_r & \\ \omega_{j+1} & \dots & \omega_r & \omega_{r+1} \end{array}$$

On peut leur associer d'autres opérateurs dits *stationnaires* qui vont respecter la graduation, définis par les mêmes poids[2], en convolant chaque composante d'indice j dans la somme précédente par un dirac non-ramifié $\delta^{\omega_1+\omega_2+\dots+\omega_j}$, ce qui rétablit la préservation de la graduation. Ces opérateurs

(2) Ils résultent de la même opération qui fait préférer aux dérivées étrangères usuelles Δ_η, les dérivées étrangères pointées : $\dot\Delta_\eta = e^{-z\eta}\Delta_\eta$. Seules ces dernières commutent avec la dérivation ordinaire dans le modèle multiplicatif, cette dernière s'exprimant dans le modèle convolutif sur les mineurs par $\hat\varphi(\zeta) \mapsto -\zeta\hat\varphi(\zeta)$. À la multiplication par $e^{-z\eta}$ dans le modèle multiplicatif correspond, par transformée de Borel, la convolution par δ_η dans le modèle convolutif, qui se traduit donc par une translation sur les fonctions. De même qu'une convolution par δ_η correspond à une translation de η, la convolution par un dirac δ^η non-ramifié définie par la formule 1.2, correspondra à une translation ramifiée, dont l'action sur les fonctions n'est par contre pas simple à définir (*cf.* [18], p 17).

stationnaires permettront de facilement caractériser les moyennes de convolution par des conditions sur leurs poids (*cf.* ci-après, section 3).

Les opérateurs stationnaires ont ainsi la définition suivante :

$$\boldsymbol{op}\left(\delta\ \begin{matrix}\varepsilon_1 & \dots & \varepsilon_r \\ \omega_1 & \dots & \omega_r\end{matrix}\ {}^{\omega_{r+1}}\right) = \sum_{j=0}^{r} \boldsymbol{op}\ \begin{matrix}\varepsilon_1 & \dots & \varepsilon_j \\ \omega_1 & \dots & \omega_j\end{matrix}\ \delta^{\omega_1+\ldots+\omega_j}\delta\ \begin{matrix}\varepsilon_{j+1} & \dots & \varepsilon_r \\ \omega_{j+1} & \dots & \omega_r\end{matrix}\ {}^{\omega_{r+1}}$$

Nous interrompons ici l'étude de ces algèbres pour faire une présentation rapide des moules et des algèbres associées, objets introduits par J. Ecalle et indispensables pour la suite.

2. Algèbres libres associées à un monoïde discret

Soit Ω un monoïde commutatif, dont la loi sera notée additivement (éventuellement, on peut le supposer totalement ordonné, par exemple c'est le cas si c'est un sous-monoïde de $\mathbb{R}_+$).

Ω sera de plus supposé *discret*, i.e. chaque élément ω de Ω ne peut s'écrire sous la forme $\omega = \omega_1 + \ldots + \omega_s$ que d'un nombre fini de façon distinctes.

Ici, nous ne considérerons de toutes façons que le cas $\Omega = \mathbb{N}$, mais le même problème que celui que nous traitons serait à envisager par exemple pour $\Omega = \log(\mathbb{N}\setminus\{0,1\})$), ou tout autre sous-monoïde discret[3] de $\mathbb{R}_+$. Il s'avère que précisément dans ce cas $\Omega = \mathbb{N}$, l'algèbre de résurgence que nous présentons est déjà connue, puisqu'elle est isomorphe à l'algèbre des descentes de Solomon, elle-même isomorphe à l'algèbre des fonctions symétriques non-commutatives et à l'algèbre duale des fonctions quasi-symétriques introduite par Gessel. Nous préciserons brièvement ces liens et nous efforcerons par la suite de démontrer l'efficacité du formalisme « moulien » et notamment de l'opération dite de « composition des moules » dans ce cadre et dans le traitement de notre problème.

Ω^* est le monoïde libre engendré par Ω. Considérons $\mathbb{B}$ l'opposée[4] de l'algèbre associative libre engendré par l'ensemble Ω sur $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. C'est l'algèbre du monoïde $\Omega^{*\mathrm{op}}$.

---

(3) La généralisation naturelle nécessitée par le schéma de la resommation (rappelons que Ω doit contenir l'ensemble des singularités du germe à resommer) et considérée par J. Ecalle est de prendre la limite inductive des sous-monoïdes discrets de $\mathbb{R}_+$ pour l'inclusion (on a $\mathbb{k}[\Omega_1] \subset \mathbb{k}[\Omega_2]$ si $\Omega_1 \subset \Omega_2$), les algèbres duales devenant alors des limites projectives.

(4) Nous ne prenons ici la loi de concaténation opposée que pour suivre les notations usuellement adoptées par J. Ecalle, et ce afin que le lecteur se retrouve dans les références que nous donnons à ses textes, et à ceux de F.Menous. Bien sûr, l'isomorphisme $\boldsymbol{rev}$ permet d'établir la correspondance avec les notations usuellement adoptées.

$\mathbb{B}$ admet pour base les éléments $\boldsymbol{b}_\varpi$, les éléments qui s'identifient ainsi à $\boldsymbol{b}_{\omega_s}\boldsymbol{b}_{\omega_{s-1}}\dots\boldsymbol{b}_{\omega_1}$. (On notera $\mathbb{B}_+$ l'algèbre sans unité : $\mathbb{B}=\mathbb{k}1\oplus\mathbb{B}_+$ et $b_\varnothing$ s'identifie à 1). Ce renversement de l'ordre correspond au choix de la loi opposée à la concaténation, qui est la convention adoptée dans les travaux de J. Ecalle. L'algèbre sera unitaire avec $1=\boldsymbol{b}_\varnothing$.

Si $\varpi=\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_s$, on appellera poids de ϖ et on notera $\|\varpi\|$, l'élément $\omega_1+\omega_2+\ldots+\omega_s$ de Ω, la longueur s de ϖ sera notée $l(\varpi)$. Notons $\boldsymbol{rev}(\varpi)=\omega_s,\omega_{s-1},\dots,\omega_1$, le mot obtenu à partir de ϖ par réversion de l'ordre des lettres.

Cette algèbre peut être graduée par Ω, i.e. par le poids : $\|\varpi\|\in\Omega$ (mais aussi par poids et longueur $\varphi(\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_s)=(\|\varpi\|,l(\varpi))\in\Omega\times\mathbb{N}$).

Le fait que Ω soit discret garantit que chaque composante homogène $\mathbb{B}_\omega$ soit de dimension finie. On pourra donc considérer la série de Poincaré de $\mathbb{B}$:

$$P(\mathbb{B})=\sum_{\omega\in\Omega}\dim(B_\omega)t^\omega$$

Cette algèbre correspond aux polynômes non-commutatifs dans les variables $\omega\in\Omega$.

On peut aussi considérer sa complétée $\hat{\mathbb{B}}$ par rapport à la graduation, qui correspondra ainsi aux séries formelles non-commutatives dans les variables $\omega\in\Omega$. La topologie est alors définie étant définie par la base de voisinage de 0 formé par les $\bigoplus_{\omega'\geqslant\omega}\mathbb{B}_{\omega'}$.

$\mathbb{B}$ s'identifie ainsi aux polynômes non commutatifs $\mathbb{k}\left\langle\boldsymbol{b}_\omega\right\rangle_{\omega\in\Omega}$ dans les indéterminées $(b_\omega)_{\omega\in\Omega}$, tandis que $\hat{\mathbb{B}}$ s'identifie aux séries formelles non commutatives $\mathbb{k}\left\langle\left\langle\boldsymbol{b}_\omega\right\rangle\right\rangle_{\omega\in\Omega}$.

Un élément $\boldsymbol{m}$ de $\hat{\mathbb{B}}$ s'écrit ainsi $\boldsymbol{m}=\sum_{\varpi\in\Omega^*}M^\varpi\boldsymbol{b}_\varpi$, et sa décomposition par composante homogène peut s'écrire $\boldsymbol{m}=\sum_{\omega\in\Omega}\boldsymbol{m}_\omega$, avec $\boldsymbol{m}_\omega=\sum_{\|\varpi\|=\omega}M^\varpi\boldsymbol{b}_\varpi$. La collection des M^ϖ constitue un *moule* $M^\bullet$, tandis que celle des $\boldsymbol{b}_\varpi$ constitue un *comoule* $\boldsymbol{b}_\bullet$.

L'élément $\boldsymbol{m}=\sum_{\varpi\in\Omega^*}M^\varpi\boldsymbol{b}_\varpi$ pourra se noter plus simplement $\boldsymbol{m}=M^\bullet\boldsymbol{b}_\bullet$, c'est-à-dire comme la contraction du moule $M^\bullet$ et du comoule $\boldsymbol{b}_\bullet=(\boldsymbol{b}_\varpi)_{\varpi\in\Omega^*}$. Ici cet élément est, quoiqu'il en soit, bien défini dans l'algèbre complétée (cette opération de contraction est très fréquente dans les travaux de J. Ecalle).

Les moules forment ainsi une algèbre, si $\boldsymbol{m}_1 = \sum_{\varpi_1 \in \Omega^*} M_1^{\varpi_1} \boldsymbol{b}_{\varpi_1}$ et $\boldsymbol{m}_2 = \sum_{\varpi_2 \in \Omega^*} M_2^{\varpi_2} \boldsymbol{b}_{\varpi_2}$, on a :

$$\boldsymbol{m}_1 \boldsymbol{m}_2 = \sum_{\varpi \in \Omega^*} \left(\sum_{\varpi_2 . \varpi_1 = \varpi} M_1^{\varpi_1} M_2^{\varpi_2} \right) \boldsymbol{b}_{\varpi}$$

et donc le produit des moules se définit par $(M_1 \times M_2)^{\varpi} = \sum_{\varpi_2 . \varpi_1 = \varpi} M_1^{\varpi_1} M_2^{\varpi_2}$.

Si $\boldsymbol{n} = \sum_{\omega \in \Omega} \boldsymbol{n}_\omega = \sum_{\varpi \in \Omega^*} N^{\varpi} \boldsymbol{b}_{\varpi}$, nous pouvons considérer la sous-algèbre $\mathbb{k} \langle \boldsymbol{n}_\omega \rangle_{\omega \in \Omega}$ de $\mathbb{B}$ engendrée par les $\boldsymbol{n}_\omega$. Que celle-ci soit isomorphe à celle engendrée par les $\boldsymbol{b}_\omega$ (et donc soit libre) va s'exprimer, comme nous allons le voir, par une condition très simple sur le moule $N^\bullet$. Dans ce cas le comoule $\boldsymbol{n}_\bullet = (\boldsymbol{n}_\varpi)_{\varpi \in \Omega^*}$ représentera une nouvelle base de $\mathbb{B}$.

L'opération de changement de base correspond alors à celle de la substitution des polynômes $\boldsymbol{n}_\omega$ aux indéterminées $\boldsymbol{b}_\omega$, qui se traduit sur les coefficients par la composition des moules que nous allons à présent préciser.

2.1. Composition des moules

La composition des moules se définit de la façon suivante :

Soit $\boldsymbol{n} = \sum_{\omega \in \Omega} \boldsymbol{n}_\omega = N^\bullet \boldsymbol{b}_\bullet = \sum_{\varpi \in \Omega^*} N^{\varpi} \boldsymbol{b}_{\varpi}$ avec $N^{\varnothing} = 0$ $(\boldsymbol{n} \in \mathbb{B}_+)$ et $\boldsymbol{n}_\omega = \sum_{\|\varpi\| = \omega} N^{\varpi} \boldsymbol{b}_{\varpi}$.

Soit $\varphi_{\boldsymbol{n}}$ l'endomorphisme d'algèbre graduée qui à $\boldsymbol{b}_\omega$ associe $\boldsymbol{n}_\omega$, alors si $\boldsymbol{m} = \sum_{\varpi \in \Omega^*} M^{\varpi} \boldsymbol{b}_{\varpi}$, par définition le moule $M \circ N$ sera défini par :

$$\varphi_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{m}) = \sum_{\varpi \in \Omega^*} M^{\varpi} \boldsymbol{n}_{\varpi} = \sum_{\varpi \in \Omega^*} (M \circ N)^{\varpi} \boldsymbol{b}_{\varpi}.$$

Comme $\varphi_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{b}_{\varpi}) = \boldsymbol{n}_{\omega_s} \dots \boldsymbol{n}_{\omega_1} = \boldsymbol{n}_{\varpi}$, on aura $\varphi_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{m}) = \sum_{\varpi \in \Omega^*} M^{\varpi} \boldsymbol{n}_{\varpi}$.

D'où :

$$(M \circ N)^{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s} = \sum_{\varpi_1 . \varpi_2 \dots \varpi_r = \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s} M^{\|\varpi_1\|, \|\varpi_2\|, \dots, \|\varpi_r\|} N^{\varpi_1} N^{\varpi_s} \dots N^{\varpi_r}$$

Le moule identité Id est l'élément neutre de la composition des moules, est défini par $\mathrm{Id}^{\varpi} = 1$,si $l(\varpi) = 1$ et 0 sinon. On a ainsi simplement :

$$\boldsymbol{b} = \mathrm{Id}^{\bullet} b_{\bullet} = \sum_{\varpi \in \Omega^*} \mathrm{Id}^{\varpi} b_{\varpi} = \sum_{\omega \in \Omega} b_{\omega}$$

Si l'on définit le comoule $\boldsymbol{n}_{\bullet}$ par $\boldsymbol{n}_{\varpi} = \boldsymbol{n}_{\omega_s} \boldsymbol{n}_{\omega_{s-1}} \dots \boldsymbol{n}_{\omega_2} \boldsymbol{n}_{\omega_1}$ et $\boldsymbol{n}_{\varnothing} = 1$, alors la relation précédente montre que si on a la relation $\boldsymbol{n} = N^{\bullet} \boldsymbol{b}_{\bullet}$ alors $\varphi_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{m}) = M^{\bullet} \boldsymbol{n}_{\bullet} = (M \circ N)^{\bullet} \boldsymbol{b}_{\bullet}$.

PROPOSITION 2.1. — *Soit* $\boldsymbol{n} = N^{\bullet} \boldsymbol{b}_{\bullet}$.

Alors $\varphi_{\boldsymbol{n}}$ *est un isomorphisme si et seulement si* $N^{\bullet}$ *admet un inverse de composition.*

Dans ce cas, le comoule $\boldsymbol{n}_{\bullet}$ *représente une base de* $\mathbb{B}$.

Démonstration. — $(\Rightarrow)$: Soit $\varphi_{\boldsymbol{n}}$ l'endomorphisme d'algèbre qui à $\boldsymbol{b}_{\omega}$ associe $\boldsymbol{n}_{\omega}$. Si celui-ci est un isomorphisme gradué de $\mathbb{k}\left\langle \boldsymbol{b}_{\omega} \right\rangle_{\omega \in \Omega}$ sur $\mathbb{k}\left\langle \boldsymbol{n}_{\omega} \right\rangle_{\omega \in \Omega}$, alors il existe un moule $M^{\bullet}$ tel que $\boldsymbol{b} = M^{\bullet} \boldsymbol{n}_{\bullet} = \sum_{\varpi \in \Omega^*} M^{\varpi} \boldsymbol{n}_{\varpi}$. Les comoules $\boldsymbol{b}_{\bullet}$ et $\boldsymbol{n}_{\bullet}$ représentent alors deux bases et on a :

$$\boldsymbol{b} = M^{\bullet} \boldsymbol{n}_{\bullet} = (M \circ N)^{\bullet} \boldsymbol{b}_{\bullet} = \mathrm{Id}^{\bullet} \boldsymbol{b}_{\bullet} \text{ et } \boldsymbol{n} = N^{\bullet} \boldsymbol{b}_{\bullet} = (N \circ M)^{\bullet} \boldsymbol{n}_{\bullet} = \mathrm{Id}^{\bullet} \boldsymbol{n}_{\bullet}$$

D'où $M \circ N = N \circ M = \mathrm{Id}$.

$(\Leftarrow)$: Si $M^{\bullet}$ est l'inverse de composition de $N^{\bullet}$, alors $\boldsymbol{b} = M^{\bullet} \boldsymbol{n}_{\bullet} = (M \circ N)^{\bullet} \boldsymbol{b}_{\bullet}$. D'où $\boldsymbol{b}_{\omega} = \sum_{\|\varpi\| = \omega} M^{\varpi} \boldsymbol{n}_{\varpi}$.

On a ainsi $\mathbb{k}\left\langle \boldsymbol{b}_{\omega} \right\rangle_{\omega \in \Omega} = \mathbb{k}\left\langle \boldsymbol{n}_{\omega} \right\rangle_{\omega \in \Omega}$, cette dernière algèbre étant ainsi une algèbre libre, le comoule $\boldsymbol{n}_{\bullet}$ représente bien une base de $\mathbb{B}$ et $\varphi_{\boldsymbol{n}}$ est bien un isomorphisme. $\square$

Par ailleurs, on a la propriété suivante :

$$N^{\bullet} \text{ admet un inverse de composition} \Longleftrightarrow \forall \omega \in \Omega, N^{\omega} \neq 0.$$

En effet, si $N^{\bullet}$ admet un inverse de composition, alors $(M \circ N)^{\omega} = M^{\omega} N^{\omega} = 1 = I^{\omega}$, d'où $N^{\omega} \neq 0$. Réciproquement, on peut montrer par récurrence sur $l(\varpi)$ que M^{ϖ} est alors bien défini.

Entre autres propriétés remarquables, la composition des moules est associative, et on a par exemple :

$$a(M_1 \circ N) + b(M_2 \circ N) = (aM_1 + bM_2) \circ N,$$

$$(M_1 \circ N) \times (M_2 \circ N) = (M_1 \times M_2) \circ N.$$

2.2. Moules associés à une série formelle, moules exponentiel et logarithme

Si $A(X) = \sum_{n\geqslant 0} a_n X^n$, alors l'expression :

$$A(\boldsymbol{b}) = \sum_{n\geqslant 0} a_n \boldsymbol{b}^n = \sum_{\varpi\in\Omega^*} A(I)^{\varpi} \boldsymbol{b}_{\varpi}$$

détermine un moule, dont les poids sont donnés par : $A(I)^{\varpi} = a_{l(\varpi)}$.

Si C est une autre série formelle sans terme constant, alors $A(C)(\boldsymbol{b}) = (A \circ C)(\boldsymbol{b})$.

Moules exponentiel et logarithme

Ainsi peut-on définir les moules exponentiels $\log(1+I)$ et $\exp(I)-1$ qui sont des inverses de composition.

Si $\boldsymbol{m} = M^{\bullet}\boldsymbol{b}_{\bullet} = \sum_{\varpi\in\Omega^*} M^{\varpi}\boldsymbol{b}_{\varpi}$ avec $M^{\varnothing} = 0$, alors l'expression

$$\exp(\boldsymbol{m}) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{\boldsymbol{m}^n}{n!} = \sum_{\varpi\in\Omega^*} (\exp(I)\circ M)^{\varpi} \boldsymbol{b}_{\varpi}$$

définit un élément de $\mathbb{B}$, de même pour $\log(1+\boldsymbol{m})$.

2.3. Endomorphismes remarquables de l'algèbre $\mathbb{B}$

Le renversement $\boldsymbol{rev}$ de l'ordre des mots $\boldsymbol{rev}(\boldsymbol{b}_{\omega_1,\dots,\omega_{s-1},\omega_s}) = \boldsymbol{b}_{\omega_s,\omega_{s-1},\dots,\omega_1}$ se prolonge en un antimorphisme de l'algèbre $\mathbb{B}$.

Si $\boldsymbol{m} = \sum_{\varpi\in\Omega^*} M^{\varpi} b_{\varpi}$, alors :

$$\boldsymbol{rev}(\boldsymbol{m}) = \sum_{\varpi\in\Omega^*} M^{\varpi} b_{\boldsymbol{rev}(\varpi)} = \sum_{\varpi\in\Omega^*} M^{\boldsymbol{rev}(\varpi)} b_{\varpi}.$$

L'application $\varphi_{-\boldsymbol{i}}$ est un endomorphisme de l'algèbre $\mathbb{B}$ tel que $\varphi_{-\boldsymbol{i}}(b_{\varpi}) = (1)^{l(\varpi)} b_{\varpi}$.

Nous allons munir cette algèbre de deux structures distinctes de $*$-algèbres de Hopf , donnant lieu ainsi aux deux algèbres $\mathbb{A}$ et $\mathbb{E}$.

2.4. Définition de l'algèbre $\mathbb{A}$

Rebaptisons $\mathbb{A}$ l'algèbre de la section 2. Nous noterons ici la base a_{ϖ} (chaque mot ϖ s'identifie ainsi à a_{ϖ}).

$\mathbb{A}$ et sa complétée par rapport à la graduation peuvent être munies d'une structure de bigèbre cocommutative graduée. Rappelons que dans une bigèbre, le coproduit est la donnée d'un morphisme d'algèbres $\sigma : \mathbb{A} \to \mathbb{A} \otimes \mathbb{A}$, et qu'un élément $\boldsymbol{m}$ est dit *primitif* si $\sigma(\boldsymbol{m}) = 1 \otimes \boldsymbol{m} + \boldsymbol{m} \otimes 1$ et *group-like* si $\sigma(\boldsymbol{m}) = \boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m}$.

$\mathbb{A}$ est ici munie de cette structure de bigèbre en imposant que l'élément $\sum_{\omega \in \Omega} a_\omega = \mathrm{Id}^\bullet a_\bullet$ soit primitif (dans l'algèbre complétée par la graduation), ce qui revient à définir la coloi sur les générateurs par :

$$\sigma(a_\omega) = a_\omega \otimes 1 + 1 \otimes a_\omega$$

$(\mathbb{A}, \mu, i, \sigma, \varepsilon)$ est ainsi une bigèbre cocommutative graduée où l'unité $i : \mathbb{C} \to \mathbb{A}$ est définie par $i(\lambda) = \lambda 1$, la coünité $\varepsilon : \mathbb{A} \to \mathbb{C}$ est définie par :

$$\varepsilon\left(\sum_{\varpi \in \Omega^*} M^\varpi b_\varpi\right) = M^\varnothing.$$

Rappelons qu'une algèbre de Hopf est une bigèbre munie d'un antimorphisme S nommé *antipode* qui doit satisfaire :

$$\mu \circ (S \otimes \mathrm{Id}_\mathbb{A}) \circ \sigma = \mu \circ (\mathrm{Id}_\mathbb{A} \otimes S) \circ \sigma = i \circ \varepsilon \tag{2.1}$$

Remarque 2.2. — Si a est primitif alors $S(a) = -a$ et si a est group-like alors $\varepsilon(a) = 1$ et $S(a) = a^{-1}$.

Par exemple sur a primitif

$\mu \circ (S \otimes \mathrm{Id}_\mathbb{A}) \circ \sigma(a) = \mu \circ (S \otimes \mathrm{Id}_\mathbb{A})(a \otimes 1 + 1 \otimes a) = \mu \circ (-a \otimes 1 + 1 \otimes a) = a - a = 0$

sur a group-like : $\mu \circ (S \otimes \mathrm{Id}_\mathbb{A}) \circ \sigma(a) = \mu \circ (S \otimes \mathrm{Id}_\mathbb{A})(a \otimes a) = S(a)a = 1$ et de même $aS(a) = 1$.

La réciproque est fausse.

PROPOSITION 2.3. — *$\mathbb{A}$ est une algèbre de Hopf munie de l'antipode S défini par :*

$$S = \boldsymbol{rev} \circ \varphi_{-\boldsymbol{i}} = \varphi_{-\boldsymbol{i}} \circ \boldsymbol{rev}$$

Soit plus explicitement :

$$S\Big(\sum_{\varpi \in \Omega^*} M^\varpi a_\varpi\Big) = \sum_{\varpi \in \Omega^*} (-1)^{l(\varpi)} M^{\boldsymbol{rev}(\varpi)} a_\varpi.$$

Démonstration. — Résulte de ce que $S(a_\omega) = -a_\omega$ et du fait que S est un antimorphisme. $\square$

Un moule sera dit *symétral* [5] si $M^\varnothing = 1$ et si l'élément $\boldsymbol{m} = M^\bullet E_\bullet = \sum M^\varpi E_\varpi$ est *group-like* dans l'algèbre complétée *(une exponentielle de Lie)*, i.e $\sigma(\boldsymbol{m}) = \boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m}$. L'ensemble de ces moules forment un groupe dans l'algèbre complétée. L'inverse multiplicatif de $\boldsymbol{m}$ (resp.M) est alors $s(\boldsymbol{m})$ (fait général dans les algèbres de Hopf pour les éléments group-like et qui résulte immédiatement de l'équation (2.1)).

Un moule D sera dit *alternal* si l'élément $\boldsymbol{d} = D^\bullet E_\bullet = \sum D^\varpi E_\varpi$ est *primitif* dans l'algèbre complétée : $\sigma(\boldsymbol{d}) = 1 \otimes \boldsymbol{d} + \boldsymbol{d} \otimes 1$.

PROPOSITION 2.4. — *Si* $\Bbbk = \mathbb{C}$, $\mathbb{A}$ *est une* $*$*-algèbre de Hopf munie de l'opération* $*$ *définie par :*

$$\boldsymbol{m}^* = \overline{\mathrm{rev}(\boldsymbol{m})}$$

Démonstration. — En termes de moules : si $\boldsymbol{m} = \sum_{\varpi\in\Omega^*} M^\varpi b_\varpi$,

$$\boldsymbol{m}^* = \sum_{\varpi\in\Omega^*} \overline{M^{\boldsymbol{rev}(\varpi)}} b_\varpi$$

La vérification des différents axiomes est immédiate :

$$\begin{aligned}
(\lambda a + \mu b)^* &= \bar\lambda a^* + \bar\mu b^* \\
(ab)^* &= b^* a^* \\
\sigma(a^*) &= \sigma(a)^* \\
\varepsilon(a^*) &= \varepsilon(a)^* \\
S(S(a)^*)^* &= a \qquad \text{(par le fait que } S(a)^* = \overline{\varphi_{-\boldsymbol{i}}(a)} = \varphi_{-\boldsymbol{i}}(\bar a)) \\
a^{**} &= a
\end{aligned}$$

$\square$

Un moule est *hermitien* (resp. *antihermitien*) si $M^* = M$ (resp. $M^* = -M$), i.e. $\overline{\mathrm{rev}(M)} = M$ (resp. $\overline{\mathrm{rev}(M)} = -M$), *unitaire* si $MM^* = 1$.

---

(5) Comme nous le verrons cette terminologie (avec *alternal, symétrel, alternel*), due à J. Ecalle, va notamment de pair avec la composition sur les moules et a de très nombreuses et fructueuses applications. Ainsi le composé de deux moules alternals est alternal, de deux moules symétrels est symétrel, d'un moule alternal par un moule symétral est symétral, etc.. On peut écrire huit formules de cette sorte, et d'autres faisant intervenir le produit des moules. Symétral correspond à ce que l'on appelle ordinairement une exponentielle de Lie, mais cette opération de composition semble n'avoir pas été exploitée en dehors des travaux de J. Ecalle dès [7].

Si le moule est réel et hermitien, alors il sera dit *symétrique.* Il vérifie alors $\mathrm{rev}(M) = M$.

Un moule symétral est *unitaire*, si et seulement si on a $S(\boldsymbol{m}) = \boldsymbol{m}^*$, soit :

$$S(\boldsymbol{m}) = S(\sum_{\varpi\in\Omega^*} M^{\varpi} b_{\varpi}) = \sum_{\varpi\in\Omega^*} (-1)^{l(\varpi)} M^{\boldsymbol{rev}(\varpi)} b_{\varpi} = \sum_{\varpi\in\Omega^*} \overline{M^{\boldsymbol{rev}(\varpi)}} b_{\varpi}$$

Il s'ensuit que c'est vrai si et seulement si M^{ϖ} est imaginaire pur dès que $l(\varpi)$ est impaire, réel si $l(\varpi)$ est paire.

L'ensemble des moules symétrals et unitaires forment ainsi un sous-groupe du groupe des moules symétrals.

Si M est réel (*symétrique*), cela revient donc à dire que M est pair.

De même si un moule alternal est antihermitien.

Cela se traduit par $S(\boldsymbol{d}) = -\boldsymbol{d} = \boldsymbol{d}^*$. Soit sur les coefficients :

$$-D^{\varpi} = (1)^{l(\varpi)} \overline{D^{\varpi}}$$

Il s'ensuit que c'est vrai si et seulement si D^{ϖ} est réel dès que $l(\varpi)$ est impaire, imaginaire pur si $l(\varpi)$ est paire. Ils forment une sous-algèbre de Lie des moules alternals.

2.5. Définition de l'algèbre $\mathbb{E}$

$\mathbb{E}$ reflète la structure de l'algèbre des dérivations étrangères avec les Δ_+.

Rebaptisons ici $\mathbb{E}$ l'algèbre de la section 2. Nous noterons ici la base e_{ϖ} (chaque mot ϖ s'identifie ainsi à e_{ϖ}).

$\mathbb{E}$ et sa complétée par rapport à la graduation sont cette fois munies d'une structure de bigèbre cocommutative en imposant que l'élément :

$$1 + \sum_{\omega\in\Omega} e_{\omega} = (1 + \mathrm{Id})^{\bullet} e_{\bullet}$$

soit *group-like* (dans l'algèbre complétée par la graduation), ce qui revient à définir la coloi sur les générateurs par :

$$\sigma(e_{\omega}) = \sum_{\omega_1+\omega_2=\omega} e_{\omega_1} \otimes e_{\omega_2}$$

ce qui induit sur les mots γ :

$$\sigma(e_\gamma) = \sum_\gamma \mathrm{ctsh}\begin{pmatrix} \gamma \\ \alpha, \beta \end{pmatrix} e_\alpha \otimes e_\beta \tag{2.2}$$

où ctsh $\begin{pmatrix} \gamma \\ \alpha, \beta \end{pmatrix}$ représente[6] le nombre de façons (comptées avec multiplicité) d'obtenir le mot γ en mélangeant les mots α et β, avec la possibilité de fusionner deux lettres adjacentes de chacun de ces mots en une lettre qui en est la somme (pour bien spécifier la multiplicité des battages obtenus : à chaque étape d'un tel mélange, soit on prend une lettre sur un des deux paquets, soit on en prend une de chaque et on les additionne).

Lorsque $\Omega = \mathbb{N}$, le tenseur de structure ctsh $\begin{pmatrix} \gamma \\ \alpha, \beta \end{pmatrix}$ est déjà par ailleurs connu comme celui intervenant dans le quasi-shuffle ou produit de mélange contractant dans le cas de l'algèbre $\mathcal{Q}$ *Sym*, comme nous le rappellerons dans la section 2.6, (*cf.* aussi [22], p 60.).

DÉFINITION 2.5. — *Un moule sera dit symétrel si $M^\varnothing = 1$ et si l'élément $\boldsymbol{m} = M^\bullet \boldsymbol{e}_\bullet = \sum M^\varpi \boldsymbol{e}_\varpi$ est* group-like *dans l'algèbre complétée, i.e $\sigma(\boldsymbol{m}) = \boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m}$.*

L'ensemble de ces moules forment un groupe dans l'algèbre complétée.

Le moule $1 + \mathrm{Id}$ est ainsi symétrel par construction, de même que son inverse que nous noterons J, qui s'identifie donc à $(1 + \mathrm{Id})^{-1} = 1 - \mathrm{Id} + \mathrm{Id}^2 - \mathrm{Id}^3 + \ldots$, d'où $J^{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r} = (1)^r$.

DÉFINITION 2.6. — *Un moule D sera dit alternel si l'élément $\boldsymbol{d} = D^\bullet E_\bullet = \sum D^\varpi E_\varpi$ est primitif dans l'algèbre complétée : $\sigma(\boldsymbol{d}) = 1 \otimes \boldsymbol{d} + \boldsymbol{d} \otimes 1$.*

Remarquons que $M^\bullet D_\bullet \mapsto \mathrm{rev}(M)^\bullet D_\bullet = M^\bullet \mathrm{rev}(D_\bullet)$ est un antimorphisme de l'algèbre (de $\mathbb{A}$ dans $\mathbb{A}^{\mathrm{op}}$, c'est-à-dire de l'algèbre du monoïde $\Omega^{*\mathrm{op}}$ dans celle du monoïde Ω^*, induit par le renversement de l'ordre des lettres), tandis que l'application $\circledcirc J : M \mapsto M$ (voir ci-dessous) est un morphisme de l'algèbre (de $\mathbb{A}$ dans $\mathbb{A}$).

PROPOSITION 2.7. — *$\mathbb{A}$ et $\mathbb{E}$ sont des bigèbres isomorphes.*

---

(6) Ce tenseur de structure ctsh a été utilisé par J. Ecalle pour définir les moules symétrels dés [7], avant d'être retrouvé dans le contexte de $\mathcal{Q}$*Sym* (pour ces points, *cf.* infra) .

Démonstration. — Dans $\mathbb{A}$, posons $\boldsymbol{e}' = \exp(\boldsymbol{a}) - 1$ et dans $\mathbb{E}$ posons $\boldsymbol{a}' = \log(1+\boldsymbol{e})$.

Il s'agit de montrer que $1+\boldsymbol{e}'$ est group-like et $\boldsymbol{a}'$ primitif.

$1+\boldsymbol{e}'$ est group-like, se vérifie directement :

$$\begin{aligned}
\sigma(1+\boldsymbol{e}') &= \sigma(\exp(\boldsymbol{a})) = \sigma\Big(\sum_{n\geqslant 0}\frac{\boldsymbol{a}^n}{n!}\Big)\\
&= \sum_{n\geqslant 0}\frac{\sigma(\boldsymbol{a})^n}{n!} = \sum_{n\geqslant 0}\frac{(a\otimes 1+1\otimes a)^n}{n!}\\
&= \sum_{p,q}\frac{1}{p!q!}a^p\otimes a^q = \sum_p \frac{a^p}{p!}\otimes\sum_q\frac{a^q}{q} = (1+\boldsymbol{e}')\otimes(1+\boldsymbol{e}')
\end{aligned}$$

Que $\boldsymbol{a}'$ soit primitif se montre de la même façon, mais en utilisant le fait que $\log(UV) = \log(U) + \log(V)$, lorsque U et V commutent[7]. □

Définissons $A \circledcirc B = A \circ (B-1)$, $\circ$ étant la composition usuelle des moules. $\circledcirc$ est alors une loi de composition interne sur les moules symétrels (*cf.* la note 7).

PROPOSITION 2.8. — *$\mathbb{E}$ est une algèbre de Hopf[8] munie de l'antipode s défini par :*

si $\boldsymbol{m} = M^\bullet \boldsymbol{e}_\bullet$,

$$s(\boldsymbol{m}) = \operatorname{rev}(M \circledcirc J)^\bullet \boldsymbol{e}_\bullet = (\operatorname{rev}(M)\circledcirc J)^\bullet \boldsymbol{e}_\bullet$$

pour l'algèbre des moules, en identifiant M et $M^\bullet\boldsymbol{e}_\bullet$, cela se traduit par :

$$s(M) = \operatorname{rev}(M)\circledcirc J = \operatorname{rev}(M\circledcirc J),$$

avec $J = (1+\mathrm{Id})^{-1}$ et $A\circledcirc B = A\circ(B-1)$, $\circ$ étant la composition usuelle des moules. La propriété remarquable étant que cette opération $\circledcirc$ est une loi interne sur les moules symétrels.

---

(7) Tout couple de moules $(M^\bullet, N^\bullet)$, où $M^\bullet$ est symétral, et $N^\bullet$ est son inverse pour la composition (et est alors automatiquement alternel) aurait aussi bien fait l'affaire pour décrire un isomorphisme entre $\mathbb{A}$ et $\mathbb{E}$. En effet si $\boldsymbol{a}_\bullet$ est *cosymétral* (i.e. $\boldsymbol{I}\bullet\boldsymbol{a}_\bullet$ est primitif) et $M^\bullet$ symétral (resp. alternal), alors $m = M^\bullet\boldsymbol{a}_\bullet$ est *grouplike* (resp. *primitif*) dans l'algèbre complétée et si $\boldsymbol{e}$ est *cosymétrel* (i.e. $(1+\boldsymbol{I})^\bullet\boldsymbol{e}_\bullet$ est *grouplike*) et $N^\bullet$ alternel (resp. symétrel), alors $n = N^\bullet\boldsymbol{e}_\bullet$ est primitif (resp. grouplike). Les morphismes définis par $\varphi_m(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{e}$ et $\varphi_n(\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{a}$ sont alors inverses.

(8) Nous montrerons les liens que cette algèbre présentent avec des algèbres connues dans la section 2.6. La concision de cette formule qui exprime ici l'antipode par le formalisme des moules facilitera grandement les calculs dans la suite du présent travail.

Démonstration. — Si on pose $\boldsymbol{e} = \sum_{\omega\in\Omega} \boldsymbol{e}_\omega$ et $\boldsymbol{a} = \sum_{\omega\in\Omega} \boldsymbol{a}_\omega$ alors $1+\boldsymbol{e} = \exp(\boldsymbol{a})$, or $s(\boldsymbol{a}) = -\boldsymbol{a}$, ($\boldsymbol{a}$ est primitif) d'où :

$$1 + s(\boldsymbol{e}) = s(\exp(\boldsymbol{a})) = \exp(s(\boldsymbol{a})) = \exp(\boldsymbol{a}) = \frac{1}{1+\boldsymbol{e}}$$

Donc $s(\boldsymbol{e}) = \frac{1}{1+\boldsymbol{e}} - 1 = (J-1)^\bullet \boldsymbol{e}_\bullet = (I \circledcirc J)^\bullet \boldsymbol{e}_\bullet$, on a ainsi :

$$s(\boldsymbol{e}_\omega) = \sum_{\|\varpi\|=\omega} (I \circledcirc J)^\varpi \boldsymbol{e}_\varpi = \sum_{\|\varpi\|=\omega} (-1)^{l(\varpi)} \boldsymbol{e}_\varpi.$$

Comme s est un antimorphisme, $\mathrm{rev}(s(\boldsymbol{e})_\bullet) = (I \circledcirc J)^\bullet \boldsymbol{e}_\bullet$.

Donc si $\boldsymbol{m} = M^\bullet \boldsymbol{e}_\bullet$, $s(\boldsymbol{m}) = M^\bullet s(\boldsymbol{e}_\bullet)$, d'où $\mathrm{rev}(s(\boldsymbol{m})) = M^\bullet (I \circledcirc J)^\bullet \boldsymbol{e}_\bullet = (M \circledcirc J)^\bullet \boldsymbol{e}_\bullet$, par conséquent si $\boldsymbol{m} = M^\bullet \boldsymbol{e}_\bullet$, alors $s(\boldsymbol{m}) = \mathrm{rev}\left((M \circledcirc J)^\bullet \boldsymbol{e}_\bullet\right) = \mathrm{rev}\,(M \circledcirc J)^\bullet \boldsymbol{e}_\bullet = (\mathrm{rev}\,(M) \circledcirc J)^\bullet \boldsymbol{e}_\bullet$.

Ceci se traduit par la formule :

$$s(\boldsymbol{e}_{\omega_1,\ldots,\omega_s}) = \sum_{\|\varpi^\imath\|=\omega_\imath} (-1)^{l(\varpi^1)} \ldots (-1)^{l(\varpi^s)} \boldsymbol{e}_{\varpi^s \ldots \varpi^1}. \tag{2.3}$$

Par ailleurs rev et $\circledcirc J$ commutent car $\mathrm{rev}(J) = J$. □

Remarquons que les moules sont liés à la base duale : si $\boldsymbol{m} = M^\bullet \boldsymbol{e}_\bullet = \sum M^\varpi \boldsymbol{e}_\varpi$ alors $M^\varpi = \langle \boldsymbol{e}^*_\varpi | \boldsymbol{m} \rangle$.

D'après l'identification M entre $\boldsymbol{m} = M^\bullet \boldsymbol{e}_\bullet$, Mest symétrel (resp. alternel) si $M^\bullet \boldsymbol{e}_\bullet$ est *grouplike* (resp. primitif), d'où $s(\boldsymbol{m}) = \boldsymbol{m}^{-1}$, (resp. $s(\boldsymbol{m}) = -\boldsymbol{m}$), d'où le fait que sur les moules ce sont des formules duales qui interviennent, en effet : $s(M)^\varpi = \langle \boldsymbol{e}^*_\varpi | s(\boldsymbol{m}) \rangle = \langle s^*(\boldsymbol{e}^*_\varpi) | \boldsymbol{m} \rangle$.

COROLLAIRE 2.9. — *Si M est symétrel, son inverse multiplicatif est donné par :*

$$M^{-1} = \mathrm{rev}(M) \circledcirc J = s(M)$$

Ce qui se traduit sur les coefficients par :

$$(M^{-1})^{\omega_1,\ldots,\omega_r} = (1)^r \sum_{\substack{\varpi^1 \ldots \varpi^s = \omega_1,\ldots,\omega_r \\ \varpi^\imath \neq \varnothing, s \geqslant 0}} M^{\|\varpi^s\|,\ldots,\|\varpi^1\|}$$

et si D est alternel, alors :

$$s(D) = D.$$

On en déduit par exemple que :

$$(1 + \mathrm{Id}) = J^{-1} = \mathrm{rev}(J) \circledcirc J = J \circledcirc J$$

et de même :

$$(1 + \mathrm{Id}) \circledcirc J = J^{-1} \circledcirc J = J.$$

2.6. Lien avec les algèbres $\mathcal{Q}Sym$, Sym et Sol_∞ lorsque $\Omega = \mathbb{N}$

Lorsque $\Omega = \mathbb{N}$, les algèbres $\mathbb{A}^{\mathrm{op}}$ et $\mathbb{E}^{\mathrm{op}}$ (où le «op» rétablit ainsi le produit de concaténation usuel) sont isomorphes aux algèbres $\mathcal{Q}Sym^*$, Sym et Sol_∞, à savoir respectivement l'algèbre duale des fonctions quasi-symétriques, l'algèbre duale des fonctions symétriques non-commutatives et l'algèbre des descentes de Solomon.

L'isomorphisme entre $\mathcal{Q}Sym^*$ et Sol_∞ est connu depuis [17] et celui entre **Sym** et les deux autres est connu depuis [15].

2.6.1. L'algèbre des fonctions quasi-symétriques $\mathcal{Q}Sym$

$\mathcal{Q}\,Sym$ a été d'abord définie par Gessel [12] et sa structure d'algèbre de Hopf graduée introduite par Malvenuto dans [16], et étudiée avec C. Reutenauer dans [17], elle est isomorphe à $\mathbb{E}^{\mathrm{op}}$, comme nous allons le voir.

Soit X un ensemble infini (dénombrable) totalement ordonné et $\mathbb{k}[[X]]$ l'anneau des séries formelles *commutatives* associé (ou $\mathbb{k}[X]$, des polynômes), muni de son produit usuel. Il faut en fait prendre la limite inductive des $\mathbb{k}[[X_n]]$ avec $X_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, pour obtenir la notion adéquate de polynômes en une infinité de variables.

$F = \displaystyle\sum_{k, \{x_1, \ldots x_k\} \in \mathcal{P}_k(X)} F^{c_1, \ldots, c_k}_{x_1, \ldots, x_k} x_1^{c_1} \ldots x_k^{c_k} \in \mathbb{Z}[[X]]$ est

- *symétrique* si $F^{c_1, \ldots, c_k}_{x_1, \ldots, x_k} = F^{c_1, \ldots, c_k}_{y_1, \ldots, y_k}$,
- et *quasi-symétrique* si $F^{c_1, \ldots, c_k}_{x_1, \ldots, x_k} = F^{c_1, \ldots, c_k}_{y_1, \ldots, y_k}$ seulement si $x_1 < \ldots < x_k$ et $y_1 < \ldots < y_k$.

Rappelons qu'une composition est un k-uplet $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{N}^{*k}$. La taille ou le poids $\|\alpha\|$ d'une composition $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ est donnée par $\|\alpha\| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_k$. On dit alors simplement que α est une composition de l'entier $\|\alpha\|$.

L'algèbre $\mathcal{Q}Sym = \bigoplus_{n\geqslant 0} \mathcal{Q}Sym_n$ des fonctions quasi-symétriques est une sous-algèbre de $\Bbbk[[X]]$. $\mathcal{Q}Sym_n$ est constitué par les fonctions quasi-symétriques homogènes de poids n, dont une base est formée par les fonctions quasi-monômiales M_α indexées par les compositions de taille n, où :

$$M_\alpha = \sum_{i_1<\ldots<i_k} x_{i_1}^{\alpha_1} x_{i_2}^{\alpha_2} \ldots x_{i_k}^{\alpha_k}$$

Le produit de ces M_α est donnée par le quasi-shuffle (ou produit de battage contractant) des compositions, il est naturellement dual de celui que nous avons défini sur $\mathbb{E}^{\mathrm{op}}$ (formule (2.2)) :

$$M_\alpha . M_\beta = \sum \operatorname{ctsh} \left(\begin{array}{c} \gamma \\ \alpha, \beta \end{array} \right) M_\gamma \tag{2.4}$$

Le coproduit défini par $F(X) \mapsto F(X \sqcup Y)$ (sur l'ensemble totalement ordonné de variables : $X \sqcup Y$, avec $X < Y$) se traduit par $F(x_1, \ldots, x_n) = \sum_i F_1^i(x_1, \ldots, x_i) F_2^i(x_{i+1}, \ldots, x_n)$, ce qui donne :

$$\Delta(F) = \sum_i F_1^i \otimes F_2^i$$

et par suite :

$$\Delta(M_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)}) = \sum_{p=0}^{k} M_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_p)} \otimes M_{(\alpha_{p+1},\ldots,\alpha_k)}$$

Ce coproduit (*outer coproduct*) est dual du produit de concaténation.

Proposition 2.10. — $\mathbb{E}^{\mathrm{op}}$ *est isomorphe à* $\mathcal{Q}Sym$

Démonstration. — Ceci permet de constater que l'algèbre duale graduée est isomorphe à $\mathbb{E}^{\mathrm{op}}$ par la correspondance $e_\alpha \mapsto M^*_{\mathrm{rev}(\alpha)}$, en vertu de la formule (2.4).

On montre que $\mathcal{Q}Sym^*$ est isomorphe à l'algèbre de concaténation engendrée par les $M_n^* = (\sum x^n)^*$ (*cf.* théorème 2.1 de [17]).

Dans $\mathcal{Q}Sym^*$, on a simplement $\Delta^*(M_n^*) = \sum_{k+l=n} M_k^* \otimes M_l^*$.

Si on définit $P_n^* = \sum_{c_1+\ldots+c_k=n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} M_{c_1} \ldots M_{c_n}$, soit avec des notations mouliennes :

$$P_\bullet = \log(1 + M_\bullet)$$

Ceci est une formule de passage de la base $M_\bullet$ à la base $P_\bullet$. De même on a $M_\bullet = \exp(P_\bullet)$ (formule (2.10) p.972 et suivante de [17]).

On retrouve $\Delta^*(P_n^*) = 1 \otimes P_n^* + P_n^* \otimes 1$ (formule (2.9) p.972 et suivante de [17]) et que Q Sym^* est aussi l'algèbre de concaténation engendrée par les P_n^* qui est naturellement isomorphe à notre algèbre $\mathbb{A}^{\mathrm{op}}$. $\mathcal{Q}Sym^*$ est isomorphe à l'algèbre des descentes de Solomon. $\square$

Malvenuto et Ehrenborg (*cf.* [17], section 2) ont donné indépendamment une expression de l'antipode de $\mathcal{Q}Sym$:

$$S(M_\alpha) = (-1)^{l(\alpha)} \sum_{\beta \leqslant \alpha} M_{\mathrm{rev}(\beta)}, \tag{2.5}$$

équivalente par dualité à :

$$S^*(M_\alpha^*) = \sum_{\alpha \leqslant \beta} (-1)^{l(\beta)} M^*_{\mathrm{rev}(\beta)}. \tag{2.6}$$

Dans cette formule, l'ordre sur les compositions se déduit de l'identification d'une composition $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ de n avec les parties de $[n-1] = \{1, \ldots, n-1\}$ par la bijection I :

$$I(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \{\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \ldots, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{k-1}\}$$

et se définit précisément par : $\alpha \leqslant \beta \Leftrightarrow I(\alpha) \subseteq I(\beta)$. Autrement dit $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \leqslant (\beta_1, \ldots, \beta_k) = \beta$ si α se décompose comme la concaténation : $\alpha = \alpha^1.\alpha^2 \ldots \alpha^r$, avec $\|\alpha^i\| = \beta_i$.

Nous pouvons remarquer que lorsque $\Omega = \mathbb{N}$, les mots de Ω^* s'identifient avec les compositions d'entiers. La formule de composition des moules cette fois devient :

$$(M \circ N)^\alpha = \sum_{\beta \leqslant \alpha} M^\beta N^{\alpha^1} N^{\alpha^{s1}} \ldots N^{\alpha^s}$$

et ainsi :

$$s(M) = \mathbf{rev}(M) \circledcirc J = \mathbf{rev}(M \circledcirc J) = (-1)^{l(\alpha)} \sum_{\beta \leqslant \alpha} M^{\mathbf{rev}}(\beta)$$

qui correspond ainsi :

$$s(e_\alpha^*) = (-1)^{l(\alpha)} \sum_{\beta \leqslant \alpha} e^*_{\mathbf{rev}}(\beta)$$

On constate par dualité ainsi l'identité de la formule (2.5) avec celle de notre proposition 2.8.

2.6.2. L'algèbre des fonctions symétriques non-commutatives Sym

Sym correspond à la même notion de fonctions symétriques mais lorsque les variables sont *non-commutatives* (ce que dénote la notation en gras) et son étude poursuivie au long de plusieurs articles a été initiée dans [15].

Dans [15], il a été montré que **Sym** est canoniquement isomorphe à $\mathbf{Sol}_\infty$, que $\mathbf{Sym}^*$ (dual gradué) est isomorphe à $\mathcal{QS}ym$.

Sym est l'algèbre associative $\mathbb{k}\langle \Lambda_1, \Lambda_2, \ldots \rangle$ générée par l'ensemble dénombrable de variables $(\Lambda_k)_{k\geqslant 1}$. Le poids de Λ_k est k. Λ_k peut être réalisée comme une fonction symétrique élémentaire (i.e. $\Lambda_k(X) = \sum_{i_1 > \ldots > i_k} x_{i_1} \ldots x_{i_k}$, avec $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$).

Le coproduit sur **Sym** est défini de façon analogue à celui de $\mathcal{QS}ym$ par $F(X) \mapsto F(X \sqcup Y)$ (sur l'ensemble totalement ordonné de variables : $X \sqcup Y$, avec $X < Y$).

Le théorème fondamental de la théorie des fonctions symétriques dans le cas commutatif montre que l'algèbre des polynômes symétriques n'est autre que l'algèbre des polynômes $\mathbb{k}[\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots]$. Ici, on procède donc par analogie avec le cas commutatif.

La série génératrice des Λ_k est :

$$\lambda(t)1 + \sum_{k\geqslant 1} \Lambda_k t^k = \overleftarrow{\prod_{i\geqslant 1}}(1 + x_i t) = \ldots.(1 + x_3 t)(1 + x_2 t)(1 + x_1 t).$$

Λ_k est donc identifié avec la somme de tous les mots strictement décroissants de longueur n.

$$\Lambda_k = \sum_{i_1 > \ldots > i_k} x_{i_1} \ldots x_{i_k}$$

Les S_k sont identifiés avec la somme de tous les mots croissants au sens large de longueur n

$$S_k = \sum_{i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_k} x_{i_1} \ldots x_{i_k}$$

$$\sigma(t) = \sum_{k\geqslant 0} S_k t^k = \lambda(-t)^{-1}$$

Les sommes de puissance trouvent au moins deux analogues Ψ_k et Φ_k :

$$\Psi(t) = \sum_{k\geqslant 1} t^{k-1} \Psi_k \text{ et } \frac{d}{dt}\sigma(t) = \sigma(t)\Psi(t)$$

et

$$\sigma(t) = \exp(\sum_{k\geqslant 1} t^k \frac{\Phi_k}{k}) \text{ou} \Phi(t) = \sum_{k\geqslant 1} t^k \frac{\Phi_k}{k} = \log(1 + \sum_{k\geqslant 1} S_k t^k) \qquad (2.7)$$

les Λ_k et S_k vérifient :

$$\Delta(\Lambda_k) = \sum_{i=0}^{k} \Lambda_i \otimes \Lambda_{k-i}, \Delta(S_k) = \sum_{i=0}^{k} S_i \otimes S_{k-i}$$

Ce dont on peut déduire :

$$\Delta(\Psi_k) = \Psi_k \otimes 1 + 1 \otimes \Psi_k \text{ et } \Delta(\Phi_k) = \Phi_k \otimes 1 + 1 \otimes \Phi_k$$

On voit donc que la correspondance avec nos résultats et en particulier les isomorphismes avec les algèbres $\mathbb{A}^{\mathrm{op}}$ et $\mathbb{E}^{\mathrm{op}}$ s'obtiennent par exemple en prenant $a_k = \frac{\Phi_k}{k}$ et $e_k = S_k$, puisqu'alors la formule (2.7) montre que la correspondance se fait exactement par les moules que nous avons considérés (voir [15], Prop. 3.8). Les autres correspondances entre ces différentes bases pourraient s'écrire avec des moules non-associés à des séries entières, mais familiers dans la théorie de la resommation.

L'antipode peut se déduire dans notre formalisme en reprenant les termes de [15], Proposition 3.9 p. 18 (*cf.* notre proposition 2.8) par des égalités dans l'algèbre complétée :

On constate aisément que $1 + \sum_{k\geqslant 1} t^k S_k$ est group-like donc :

$$s(1+\sum_{k\geqslant 1} t^k S_k) = 1+\sum_{k\geqslant 1} s(S_k) = \frac{1}{1+\sum_{k\geqslant 1} t^k S_k} = \lambda(-t) = 1+\sum_{k\geqslant 1} \Lambda_k (-1)^k t^k$$

D'où $s(S_k) = (-1)^k \Lambda_k$.

L'isomorphisme de $\mathbb{A}$ et de $\mathbb{E}$ se retrouve par les formules de changement de base ([15] Note 3.5).

2.6.3. L'algèbre des descentes de Solomon Sol_∞

L'isomorphisme de Sol_∞ avec $\mathcal{QSym}^*$ et **Sym** est connu depuis [15, 17]. Il existe une autre base naturelle de l'algèbre des opérateurs étrangers qui permet d'établir directement cette correspondance avec Sol_∞. Nous ne l'aborderons pas ici, mais sans doute dans un prochain article.

3. Les algèbres d'opérateurs stationnaires et les moyennes de convolution préservant la réalité

Le produit de deux opérateurs s'exprime par :

$$(\boldsymbol{op}_1\boldsymbol{op}_2)^{\begin{smallmatrix}\varepsilon_1 & \dots & \varepsilon_r\\ \omega_1 & \dots & \omega_r\end{smallmatrix}} = \sum_{j=0}^{r} \boldsymbol{op}_2^{\begin{smallmatrix}\varepsilon_1 & \dots & \varepsilon_j\\ \omega_1 & \dots & \omega_j\end{smallmatrix}} \boldsymbol{op}_1^{\begin{smallmatrix}\varepsilon_{j+1} & \dots & \varepsilon_r\\ \omega_{j+1} & \dots & \omega_r\end{smallmatrix}}$$

Si $\boldsymbol{op}'$ s'exprime en fonction des composantes homogènes de $\boldsymbol{op}$, on notera :

$$\boldsymbol{op}' = \sum \Big\langle \boldsymbol{op}', \boldsymbol{op} \Big\rangle^{\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_r} \boldsymbol{op}_{\omega_r} \dots \boldsymbol{op}_{\omega_1}$$

Avec la composition des moules $\langle \boldsymbol{op}'', \boldsymbol{op}' \rangle \circ \langle \boldsymbol{op}', \boldsymbol{op} \rangle = \langle \boldsymbol{op}'', \boldsymbol{op} \rangle$.

lur et **rul**, étant des automorphismes, il s'ensuit que (*cf.* [6], section A2) :

$\boldsymbol{op}$ est un automorphisme

$$\Leftrightarrow \quad \langle \boldsymbol{op}, \mathbf{lur} \rangle^{\omega_1,\dots,\omega_r} = \boldsymbol{Rop}^{\omega_1,\dots,\omega_r} = (-1)^r \boldsymbol{op}_2^{\begin{smallmatrix}+ & \dots & +\\ \omega_1 & \dots & \omega_r\end{smallmatrix}} \quad \text{est symétrel}$$

$$\Leftrightarrow \quad \langle \boldsymbol{op}, \mathbf{rul} \rangle^{\omega_1,\dots,\omega_r} = \boldsymbol{Lop}^{\omega_1,\dots,\omega_r} = (-1)^r \boldsymbol{op}_2^{\begin{smallmatrix}- & \dots & -\\ \omega_1 & \dots & \omega_r\end{smallmatrix}} \quad \text{est symétrel}$$

Une moyenne agit sur les diracs de la façon suivante :

$$\boldsymbol{m}\left(\delta^{\begin{smallmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \dots & \varepsilon_r\\ \omega_1 & \omega_2 & \dots & \omega_r\end{smallmatrix}\ \omega_{r+1}} \right) = \boldsymbol{m}^{\begin{smallmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \dots & \varepsilon_j\\ \omega_1 & \omega_2 & \dots & \omega_j\end{smallmatrix}} \delta^{\omega_1+\omega_2+\dots+\omega_{r+1}}$$

Il s'avère alors que deux moyennes $\boldsymbol{m}_1$ et $\boldsymbol{m}_2$ sont toujours connectées par un opérateur stationnaire :

$$\boldsymbol{m}_1 = \boldsymbol{m}_2 \begin{pmatrix} \boldsymbol{m}_1 \\ \boldsymbol{m}_2 \end{pmatrix}$$

Et les deux moyennes latérales **mul** et **mur** sont des moyennes de convolution précisément connectées par $\mathbf{lur} = \begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix}$ et $\mathbf{rul} = \begin{pmatrix} \mathbf{mur} \\ \mathbf{mul} \end{pmatrix}$, on est conduit au fait que :

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{m} \text{ est une moyenne de convolution}\\
\Leftrightarrow\quad & \boldsymbol{Rm}^{\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_r} = (1)^r \boldsymbol{m}^{\begin{smallmatrix}+ & \cdots & +\\ \omega_1 & \cdots & \omega_r\end{smallmatrix}} \text{ est symétrel}\\
\Leftrightarrow\quad & \boldsymbol{Lm}^{\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_r} = (1)^r \boldsymbol{m}^{\begin{smallmatrix}+ & \cdots & +\\ \omega_1 & \cdots & \omega_r\end{smallmatrix}} \text{ est symétrel}
\end{aligned}$$

Ceci permet en particulier de calculer le tenseur de POST puisque si $\delta^a * \delta^b = \sum T_c^{a,b}\delta^c$ et $\boldsymbol{m}$ n'importe quelle moyenne de convolution, alors :

$$\boldsymbol{m}^a\boldsymbol{m}^b = \sum T_c^{a,b}\boldsymbol{m}^c$$

Ce dont on déduit que $(1)^r\delta^{\begin{smallmatrix}+ & \cdots & +\\ \omega_1 & \cdots & \omega_r\end{smallmatrix}}$ est symétrel. Cette propriété, associée aux relations d'autocohérence, fournit une caractérisation du tenseur $T_c^{a,b}$, permet son calcul, et du coup permet aussi celui du tenseur $C_{\boldsymbol{\zeta}}^{\boldsymbol{\zeta}_1,\zeta_2}$ que nous avons évoqué précédemment (pour tous ces résultats : *cf.* [6], section A2, et les autres travaux de J. Ecalle déjà cités).

Il est facile de voir qu'une moyenne de convolution préserve la réalité, si

$$\boldsymbol{m}^{\begin{smallmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_j\\ \omega_1 & \omega_2 & \cdots & \omega_j\end{smallmatrix}} = \overline{\boldsymbol{m}^{\begin{smallmatrix}-\varepsilon_1 & -\varepsilon_2 & \cdots & -\varepsilon_j\\ \omega_1 & \omega_2 & \cdots & \omega_j\end{smallmatrix}}}$$

Mais comme tous les poids s'expriment avec les moules latéraux, il suffit que $\overline{\boldsymbol{Lm}^\bullet} = \boldsymbol{Rm}^\bullet$ pour que cela soit vrai.

Comme $\boldsymbol{Rm}^\bullet = \left\langle \begin{pmatrix}\text{mul}\\ m\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\text{mur}\\ \text{mul}\end{pmatrix}\right\rangle, \boldsymbol{Lm}^\bullet = \left\langle \begin{pmatrix}\text{mur}\\ m\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\text{mul}\\ \text{mur}\end{pmatrix}\right\rangle$

On a donc $m = \text{mur}\begin{pmatrix}\text{mur}\\ \text{mul}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{mul}\\ m\end{pmatrix} = \text{mur}\begin{pmatrix}\text{mur}\\ m\end{pmatrix}$, donc $\begin{pmatrix}\text{mur}\\ m\end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix}\text{mur}\\ \text{mul}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{mul}\\ m\end{pmatrix}$.

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{Lm}^\bullet &= \left\langle \begin{pmatrix}\text{mur}\\ m\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\text{mul}\\ \text{mur}\end{pmatrix}\right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}\text{mur}\\ \text{mul}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{mul}\\ m\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\text{mul}\\ \text{mur}\end{pmatrix}\right\rangle\\
&= \left\langle \begin{pmatrix}\text{mul}\\ m\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\text{mul}\\ \text{mur}\end{pmatrix}\right\rangle \left\langle \begin{pmatrix}\text{mur}\\ \text{mul}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\text{mul}\\ \text{mur}\end{pmatrix}\right\rangle
\end{aligned}$$

Or $\left\langle \begin{pmatrix} \text{mur} \\ \text{mul} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \text{mul} \\ \text{mur} \end{pmatrix} \right\rangle = J$ et

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Rm}^\bullet \circledcirc J &= \left\langle \begin{pmatrix} \text{mul} \\ m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \text{mur} \\ \text{mul} \end{pmatrix} \right\rangle \circledcirc \left\langle \begin{pmatrix} \text{mur} \\ \text{mul} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \text{mul} \\ \text{mur} \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} \text{mul} \\ m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \text{mul} \\ \text{mur} \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

Soit :
$$\boldsymbol{Lm}^\bullet = (\boldsymbol{Rm}^\bullet \circledcirc J)J$$

L'opération $\circledcirc$ définie par $A \circledcirc B = A \circ (B-1)$, où $\circ$ est la composition usuelle des moules et $B^\varnothing = 1$, fournit une loi de composition interne sur les moules symétrels $M^\bullet$ (ils sont tels que $M^\varnothing$=1).

On pose $J = (1 + \mathrm{Id})^{-1}$.

Proposition 3.1. — *La transformation f définie par $f(M) = (M \circledcirc J)J$ est une involution.*

Démonstration. — En effet (rappelons que $J \circledcirc J = J^{-1}$ et $J^{-1} = 1 + \mathrm{Id}$) :

$$\begin{aligned} f \circ f(M) &= ([(M \circledcirc J)J] \circledcirc J)\, J \\ &= [(M \circledcirc J) \circledcirc J](J \circledcirc J)J \\ &= [(M \circledcirc J) \circledcirc J]J^{-1}J \\ &= M \circledcirc (J \circledcirc J) \\ &= M \circledcirc J^{-1} \\ &= M \circ \mathrm{Id} = M \end{aligned}$$

□

On montre alors que si $\boldsymbol{m}$ est une moyenne, $f(\boldsymbol{Rm}^\bullet) = \boldsymbol{Lm}^\bullet$, et $f(\boldsymbol{Lm}^\bullet) = \boldsymbol{Rm}^\bullet$, les moules latéraux se correspondent via cette involution.

4. Groupe associé aux moyennes $(\boldsymbol{P_1}), (\boldsymbol{P_2})$

Soit un moule $\boldsymbol{rm}^\bullet$ définissant une moyenne P_2, $\boldsymbol{Rm}$ est inversible et on a donc :

$$f(\boldsymbol{Rm}) = \overline{\boldsymbol{Rm}}$$

Soit un moule A, cherchons à quelle condition nécessaire et suffisante le moule $\boldsymbol{ARm}$ continue d'être un point fixe de cette involution :

$$\begin{aligned} f(A\boldsymbol{Rm}) = A\boldsymbol{Rm} \quad &\Longleftrightarrow \quad (A\boldsymbol{Rm} \circledcirc J)J = \overline{A\boldsymbol{Rm}} \\ &\Longleftrightarrow \quad (A \circledcirc J)(\boldsymbol{Rm} \circledcirc J)J = \bar{A}\overline{\boldsymbol{Rm}} \\ &\Longleftrightarrow \quad (A \circledcirc J)\, f(\boldsymbol{Rm}) = \bar{A}\overline{\boldsymbol{Rm}} \\ &\Longleftrightarrow \quad A \circledcirc J = \bar{A} \ (\overline{\boldsymbol{Rm}} \text{ étant inversible}) \end{aligned}$$

Donc les moyennes discrètes de convolution préservant la réalité peuvent donc se décrire par l'une d'entre elles et les moules latéraux associées aux autres s'obtiennent par produit à gauche par un moule symétrel vérifiant $(A \circledcirc J) = \bar{A}$.

Il s'agit là d'un sous-groupe multiplicatif du groupe symétrel, il contient en particulier l'élément 1, puisque $1 \circledcirc J = 1$.

Et si $\boldsymbol{m}_1$ et $\boldsymbol{m}_2$ sont deux moyennes satisfaisant $(\boldsymbol{P_1})$ et $(\boldsymbol{P_2})$, alors

$$A = \boldsymbol{Rm}_2(\boldsymbol{Rm}_1)^{-1}$$

est un moule qui appartient à ce sous-groupe.

La propriété $A \circledcirc J = A$ se traduit sur les coefficients (comme $J^{\varpi} = (-1)^{l(\varpi)}$) par :

$$\begin{aligned} A^{\varpi} = A^{\omega_1,\ldots,\omega_s} &= \sum_{\omega^1\ldots\omega^r=\omega_1,\ldots,\omega_s} A^{\|\omega^1\|,\ldots,\|\omega^r\|} J^{\omega^1}\ldots J^{\omega^r} \\ &= (-1)^s \sum_{\omega^1\ldots\omega^r=\omega_1,\ldots,\omega_s} A^{\|\omega^1\|,\ldots,\|\omega^r\|} \end{aligned}$$

où les ω^i sont des mots non vides. Cette relation permet de voir que si s est impair, on peut calculer $A^{\omega_1,\ldots,\omega_s}$ en fonction de coefficients de longueurs plus petites.

On peut prendre comme groupe celui constitué par tous les

$$A = \boldsymbol{Rm}_1(\boldsymbol{Rmun})^{-1},$$

où :

$$\boldsymbol{mun}\begin{pmatrix} + & \cdots & + \\ \omega_1 & \cdots & \omega_s \end{pmatrix} = \frac{(2s)!}{4^s(s!)^2}$$

Il s'agit là de la moyenne $\boldsymbol{mun}$ qui est aussi dite *médiane* et qui peut être utile pour définir les dérivées étrangères (*cf.* par exemple [8] p. 73). D'où :

$$\boldsymbol{Rmun}^{\omega_1,\ldots,\omega_s} = (-1)^s \frac{(2s)!}{4^s(s!)^2}$$

Il y a une façon plus concise d'exprimer ce moule $\boldsymbol{rmun}$:

$$\boldsymbol{Rmun} = (1+\mathrm{Id})^{-\frac{1}{2}} = J^{\frac{1}{2}}.$$

analogue à l'identité : $(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{s=0}^{+\infty} (-1)^s \frac{(2s)!}{4^s (s!)^2} x^s$

5. Algèbre associée aux moyennes $(\boldsymbol{P_1}), (\boldsymbol{P_2})$

Il y a une correspondance entre les moyennes $(\boldsymbol{P_1}), (\boldsymbol{P_2})$ et les moules symétrels unitaires, puisque :

$$(A \circledcirc J) = \bar{A} \Longleftrightarrow \mathrm{rev}(A \circledcirc J) = \overline{\mathrm{rev}(A)} \Longleftrightarrow s(A) = A^*$$

Par la correspondance $A = \exp(D), D$ sera un moule alternel vérifiant :

$$s(D) = -D = D^*,$$

c'est-à-dire que D est antihermitien.

Si on identifie les algèbres $\mathbb{A}$ et $\mathbb{E}$, les éléments qui correspondent aux moules A et D dans la base $\boldsymbol{e_\bullet}$ correspondent aux moules $B = A \circ \log(1+I)$ et $E = A \circ \log(1+I)$ dans la base $a_\bullet$ avec B symétral unitaire et E alternal antihermitien.

Or les moules alternals antihermitiens vérifient simplement :

$$s(E) = -E = E^*$$

Ce qui se traduit sur les coefficients par :

$$(-1)^{l(\varpi)} E^{\mathbf{rev}}(\varpi) = \overline{E^{\mathbf{rev}}(\varpi)}$$

Soit encore :

– si $l(\varpi)$ est impair, alors E^{ϖ} est imaginaire pur,

– si $l(\varpi)$ pair, alors E^{ϖ} est réel.

En particulier, si E est réel (antisymétrique), E est simplement pair (toutes ses composantes sur les mots de longueur impaire sont nulles).

Nous sommes simplement ramenés à calculer les dimensions des composantes paires et impaires, qui donnent les degrés de liberté des moyennes $(\boldsymbol{P_1}), (\boldsymbol{P_2})$.

6. Formules de Witt pour l'algèbre $\mathbb{A}$ et calcul des degrés de liberté

6.1. Dimensions des composantes de poids donné

Rappelons que l'algèbre $\mathbb{A}$ est graduée par le poids, celui de Δ_n étant simplement n : $\|\Delta_n\| = n$. Soit A_n la dimension de la composante homogène $\mathbb{A}_n$ de poids n de l'algèbre associative $\mathbb{A}$.

Proposition 6.1. — *La série de Poincaré $P(\mathbb{A})$ de l'algèbre associative est donnée par :*

$$P(\mathbb{A}) = 1 + \sum_{n\geqslant 1} A_n z^n = \frac{1-z}{1-2z} \quad \textit{et donc } A_n = 2^{n-1}.$$

Démonstration. — Soit $\sum \Delta_n = \mathrm{Id}^\bullet \Delta_\bullet$. Cet élément représente la base algébrique canonique de $\mathbb{A}$. Ceci peut se traduire formellement par l'identité suivante dans l'algèbre complétée :

$$\frac{1}{1-\sum\limits_{n\geqslant 1}\Delta_n} = 1 + \sum_{n\geqslant 1}\left(\sum_{n_1+\ldots+n_s=n} \Delta_{n_1}\Delta_{n_2}\ldots\Delta_{n_s}\right) \tag{6.1}$$

Les $\Delta_{n_1}\Delta_{n_2}\ldots\Delta_{n_s}$ formant ainsi une base (vectorielle) de $\mathbb{A}$.

Considérons maintenant le morphisme φ d'algèbres unitaires de $\mathbb{A}$ vers $\mathbb{C}[[z]]$ défini par $\varphi(\Delta_n) = z^{\|\Delta_n\|} = z^n$. On a donc $\varphi(\Delta_{n_1}\ldots\Delta_{n_s}) = z^{n_1+\ldots+n_s}$. L'image par ce morphisme φ de l'identité (6.1) donne ainsi :

$$\frac{1}{1-\sum\limits_{n\geqslant 1} z^n} = 1 + \sum_{n\geqslant 1}\left(\sum_{n_1+\ldots+n_s=n} 1\right) z^n$$

Où $A_n = \sum\limits_{n_1+\ldots+n_s=n} 1$. Il s'ensuit donc que :

$$\frac{1}{1-\sum\limits_{n\geqslant 1} z^n} = \frac{1}{1-\frac{z}{1-z}} = \frac{1-z}{1-2z} = 1 + \sum_{n\geqslant 1} A_n z^n \tag{6.2}$$

Ce dont il résulte que $A_n = 2^{n-1}$. $\square$

Soit maintenant l_n la dimension de la composante $\mathbb{L}_n$ de poids n de l'algèbre de Lie sous-jacente.

Proposition 6.2. — *La suite l_n satisfait l'identité suivante :*

$$1+\sum_{n\geqslant 1} A_n z^n = \frac{1-z}{1-2z} = \prod_{n=1}^{\infty}(1-z^n)^{-l_n}.$$

Démonstration. — Soit (d_n) une base vectorielle de l'algèbre de Lie associée, formée d'éléments homogènes de $\mathbb{A}$, de poids $\|d_n\|$.

Si $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s, 0, \ldots, 0, \ldots$ est une suite à support fini d'entiers ($\alpha \in \mathbb{N}_0^{\mathbb{N}}$), posons

$$d^\alpha = d_1^{\alpha_1} d_2^{\alpha_2} \ldots d_s^{\alpha_s}$$

Le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt énonce que les d^α forment une base de l'algèbre associative $\mathbb{A}$, ce qui peut s'écrire formellement comme une identité dans l'algèbre complétée :

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{\mathbb{N}}} d^\alpha = \prod_{i=1}^{+\infty}(1-d_i)^{-1} \tag{6.3}$$

Où le produit infini est ici fait par la gauche :

$$\prod_{n=1}^{+\infty}(1+d_n)^{-1} = (1+d_1)^{-1}(1+d_2)^{-1}(1+d_3)^{-1}\ldots.$$

Les d^α avec $\sum_i \alpha_i \|d_i\| = n$ formant ainsi une base de la composante homogène $\mathbb{A}_n$ de poids n de $\mathbb{A}$. Il s'ensuit que si on applique à (6.3) d_n le morphisme d'algèbres ψ défini par $\psi(d_n) = z^{\|d_n\|}$ (le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt montre qu'il est bien défini), on trouve l'identité :

$$1+\sum_{n\geqslant 1} A_n z^n = \prod_{i=1}^{\infty}(1-z^i)^{-l_i}$$

D'où, moyennant la proposition **6.1** :

$$\frac{1-z}{1-2z} = \prod_{i=1}^{\infty}(1-z^i)^{-l_i}.$$

□

PROPOSITION 6.3. — *L'expression de l_n est donnée*[9] *par :*

$$l_n = \frac{1}{n}\sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right)(2^n - 1) = \frac{1}{n}\sum_{d|n} \mu(d)\,(2^{\frac{n}{d}} - 1)$$

μ étant la fonction de Möbius.

On a donc $l_1 = 1$, et pour $n \geqslant 2$, simplement $l_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{d|n} \mu(d)\, 2^{\frac{n}{d}}$.

Démonstration. — Passant au log dans l'identité de la proposition 6.2, on obtient :

$$\log(1-z) - \log(1-2z) \quad = \quad -\sum_{d \geqslant 1} l_d \log(1 - z^d)$$

$$\text{Soit : } -\sum_{n \geqslant 1} \frac{z^n}{n} + \sum_{n \geqslant 1} \frac{2^n z^n}{n} \quad = \quad \sum_{d \geqslant 1} l_d \sum_{k \geqslant 1} \frac{z^{kd}}{k}$$

En identifiant les termes en z^n pour $n \geqslant 1$, on trouve ainsi :

$$\frac{2^n - 1}{n} = \sum_{kd=n} \frac{l_d}{k}$$

D'où l'identité :

$$\sum_{d|n} d l_d = 2^n - 1 \tag{6.4}$$

L'expression de l_n s'obtient alors par la formule d'inversion de Möbius :

$$l_n = \frac{1}{n}\sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right)(2^n - 1) = \frac{1}{n}\sum_{d|n} \mu(d)\,(2^{\frac{n}{d}} - 1) \tag{6.5}$$

D'ailleurs pour $n \geqslant 2$, on a plus simplement $l_n = \frac{1}{n}\sum_{d|n} \mu(d)\, 2^{\frac{n}{d}}$.

En effet μ est l'inverse de la fonction constante 1 pour la convolution

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right),$$

le dirac en 1, δ_1, étant l'unité de cette convolution : $(\mu * 1)(n) = \displaystyle\sum_{d|n} \mu(d)$ $= \delta_1(n)$.

$$n l_n = \mu(n) * (2^n - 1) = \mu(n) * 2^n + \delta_1(n).$$

□

(9) Ce résultat se ramène au théorème 5.15 de [15].

D'où les valeurs de l_n :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
l_n	1	1	2	3	6	9	18	30	56	99	186	335	630	1161	2182

6.2. Dimensions des composantes de poids donné, de longueur paire et impaire

Comme l'algèbre $\mathbb{A}$ peut être graduée par poids, puis par longueur, on peut également supposer que les d_n sont homogènes par poids et longueur.

Soit P_n et I_n les dimensions respectives des composantes homogènes de longueurs paires et impaires de poids n de l'algèbre associative, et p_n et i_n lorsqu'il s'agit de l'algèbre de Lie. On a donc $P_n + I_n = A_n = 2^{n-1}$ et $p_n + i_n = l_n$.

PROPOSITION 6.4. — *Les dimensions P_n et I_n vérifient :*

$$1 - z = 1 + \sum_{n\geqslant 1}(P_n - I_n)z^n \quad et \quad \frac{1-z}{1-2z} = 1 + \sum_{n\geqslant 1}(P_n + I_n)z^n.$$

Démonstration. — La seconde de ces identités est une conséquence immédiate de la proposition (6.1). La première s'obtient par un argument similaire en considérant le morphisme défini par $\varphi(\Delta_n) = -z^n$. En l'appliquant à l'identité (6.1), on obtient :

$$\frac{1}{1 - \sum_{n\geqslant 1} -z^n} = \frac{1}{1 + \sum_{n\geqslant 1} z^n} = 1 - z = 1 + \sum_{n\geqslant 1}(P_n - I_n)z^n$$

□

PROPOSITION 6.5. —

$$\prod_{i=1}^{n}(1-z^n)^{-p_n-i_n} = \frac{1-z}{1-2z} \text{ et } \prod_{i=1}^{n}(1-z^n)^{-p_n}\prod_{i=1}^{n}(1+z^n)^{-i_n} = 1 - z.$$

Démonstration. — Comme on a vu, si on considère le morphisme qui remplace chaque élément d_n par $z^{\|d_n\|}$, alors celui-ci applique d^α sur $z^{\alpha_1\|d_1\|+\ldots+\alpha_s\|d_s\|}$ et cela donne sur l'identité (6.3) :

$$1 + \sum_{n\geqslant 1}(P_n + I_n)z^n = \prod_{i=1}^{n}(1-z^n)^{-p_n-i_n}$$

Si maintenant, on s'intéresse à distinguer les d^α selon la parité de leur longueur, on peut plutôt considérer le morphisme qui applique chacun des d_n sur $-z^{\|d_n\|}$. d^α sera alors remplacé par :

$$(-1)^{\alpha_1+\ldots+\alpha_s} z^{\alpha_1\|d_1\|+\ldots+\alpha_s\|d_s\|}$$

$(-1)^{\alpha_1+\ldots+\alpha_s}$ étant la parité de d^α. Donc l'identité (6.3) donne cette fois :

$$1+\sum_{n\geqslant 1}(P_n-I_n)z^n=\prod_{i=1}^{n}(1-z^n)^{-p_n}\prod_{i=1}^{n}(1+z^n)^{-i_n}$$

De la considération de ces deux morphismes résultent ainsi les deux identités suivantes :

$$1-z=1+\sum_{n\geqslant 1}(P_n-I_n)\,z^n=\prod_{i=1}^{n}(1-z^n)^{-p_n}\prod_{i=1}^{n}(1+z^n)^{-i_n}$$

$$\frac{1-z}{1-2z}=1+\sum_{n\geqslant 1}(P_n+I_n)\,z^n=\prod_{i=1}^{n}(1-z^n)^{-p_n}\prod_{i=1}^{n}(1-z^n)^{-i_n}.$$

□

PROPOSITION 6.6. — *Les expressions de p_n et i_n sont données par :*

$$p_n=\frac{1}{n}\sum_{\substack{d|n\\ d\text{ impair}}}\mu(d)\,2^{(\frac{n}{d}-1)}-\frac{1}{n}\sum_{\substack{d|n\\ d\text{ pair}\\ n/d\text{ impair}}}\mu\left(\frac{n}{d}\right)2^{\frac{d}{2}}+2\delta_1(n)$$

$$i_n=\frac{1}{n}\sum_{\substack{d|n\\ d\text{ impair}}}\mu(d)\,2^{(\frac{n}{d}-1)}$$

Démonstration. — Posons :

$$p(z)=\prod_{i=1}^{n}(1-z^n)^{-p_n},\quad p^*(z)=\prod_{i=1}^{n}(1+z^n)^{-p_n},$$
$$i(z)=\prod_{i=1}^{n}(1-z^n)^{-i_n},\quad i^*(z)=\prod_{i=1}^{n}(1+z^n)^{-i_n}.$$

D'après ce qui précède, on a les deux équations suivantes :

$$i(z)p(z)=\frac{1-z}{1-2z} \tag{6.6}$$

$$i^{*}(z)p(z) = 1 - z \tag{6.7}$$

On a aussi :

$$p(z)p^*(z) = \prod_{i=1}^{n}(1 - z^{2n})^{-p_n} = p(z^2) \text{ et } i(z)i^*(z) = \prod_{i=1}^{n}(1 - z^{2n})^{-i_n} = i(z^2) \tag{6.8}$$

Donc d'après les équations (6.6) et (6.7) :

$$\frac{i(z)}{i^*(z)} = \frac{i(z)^2}{i(z^2)} = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1-z^n}{1+z^n}\right)^{-i_n} = \frac{1}{1-2z} \tag{6.9}$$

On a d'autre part, en utilisant l'équation (6.6) :

$$\frac{p(z)}{p^*(z)} = \frac{p(z)^2}{p(z^2)} = \left(\frac{1-z}{1-2z}\right)^2 \frac{1-2z^2}{1-z^2}\frac{i(z^2)}{i(z)^2}$$

D'où :

$$\frac{p(z)}{p^*(z)} = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1-z^n}{1+z^n}\right)^{-p_n} = \frac{(1-z)(1-2z^2)}{(1+z)(1-2z)} \tag{6.10}$$

En prenant le log de la formule (6.9), on montre que :

$$(ni_n * \mathrm{impair}(n)) = \sum_{\substack{d|n \\ \frac{n}{d} \text{ impair}}} di_d = 2^{n-1}.$$

Il ne reste plus qu'à inverser cette relation.

On montre ainsi que :

$$i_n = \frac{1}{n}\sum_{\substack{d|n \\ d \text{impair}}} \mu(d)\, 2^{(\frac{n}{d}-1)}$$

D'autre part si on pose $u(n) = 2^{\frac{n}{2}\ \mathrm{pair}(n)}$, alors :

$$\begin{aligned} i_n - p_n &= \frac{1}{n}\sum_{\substack{d|n \\ d \text{ impair}}} \mu(d)\, 2^{\frac{n}{2d}\ \mathrm{pair}(n/d)} = \frac{1}{n}\sum_{\substack{d|n \\ d \text{ impair} \\ n/d \text{ pair}}} \mu(d)\, 2^{\frac{n}{2d}} + 2\delta_1(n) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{\substack{d|n \\ d \text{ pair} \\ n/d \text{ impair}}} \mu\left(\frac{n}{d}\right) 2^{\frac{d}{2}} + 2\delta_1(n) \end{aligned}$$

Soit :

$$p_n = \frac{1}{n} \sum_{\substack{d|n \\ d \text{ impair}}} \mu(d)\, 2^{(\frac{n}{d}-1)} - \frac{1}{n} \sum_{\substack{d|n \\ d \text{ pair} \\ n/d \text{ impair}}} \mu\left(\frac{n}{d}\right) 2^{\frac{d}{2}} + 2\delta_1(n).$$

□

Les degrés de liberté des moyennes réelles se trouvent ainsi résumés dans le tableau suivant :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
i_n	1	1	1	2	3	5	9	16	28	51	93	170	315	585	1091
p_n	0	0	1	1	3	4	9	14	28	48	93	165	315	576	1091
l_n	1	1	2	3	6	9	18	30	56	99	186	335	630	1161	2182

p_n correspond ainsi à la dimension de la composante homogène dans le cas des moyennes réelles et l_n à la dimension comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour le cas complexe, ce qui fournit les degrés de liberté recherchés[10].

Bibliographie

[1] Candelpergher (B.), Nosmas (J.C.), Pham (F.). — *Une approche de la résurgence*, Actualités mathématiques, Hermann (1993).

[2] Candelpergher (B.). — Une introduction à la résurgence, *Gazette des mathématiciens, SMF*, n°42 (1989).

[3] Chari (V.), Pressley (A.). — *A guide to Quantum groups*, Cambridge University Press (1994).

[4] Ecalle (J.). — Recent advances in the analysis of divergence and singularities. *to appear in the Proc. of the July 2003 Montreal Summer School on Singularities and Normal Forms, C. Rousseau, Yu.S. Ilyashenko ed., Kluwer.*

[5] Ecalle (J.). — Well-behaved convolution averages and their applications to real resummation, *to appear.*

[6] Ecalle (J.). — Well-behaved convolution averages and their applications to real resummation : *in [18].*

[7] Ecalle (J.). — Les fonctions résurgentes, vol.1, algèbres de fonctions résurgentes, *Publ. Math. Orsay* (1981).

[8] Ecalle (J.). — *Introduction aux fonctions analysables et preuve constructive de la conjecture de Dulac*, Actual. Math., Hermann, Paris (1992).

[9] Ecalle (J.). — Six lectures on transseries, analysable functions and the constructive proof of Dulac's conjecture, *D.Schlomiuk (ed.), Bifurcations and periodic orbits of vector fields, Kluwer Academic Publishers* (1993).

(10) Ces résultats peuvent se vérifier en constatant que c'est bien le cardinal des bases analogues à celles de Hall et de Lyndon adaptées à cette situation, mais nous n'inclurons pas ici ces développements.

[10] ECALLE (J.), MENOUS (F.). — Well-behaved convolution averages, *The Stokes Phenomenon and Hilbert's 16th Problem, eds B.L.J. Braaksma, G.K. Immink, M. van der Put, World Scient. Publ.* (1995).

[11] EVEN (C.). — Étude d'une fonction remarquable associée aux moyennes de convolution, *Annales de l'Institut Fourier*, **49(2)**, p. 687-705 (1999).

[12] GESSEL (I.M.). — Multipartie P-partitions and inner products of Skew Schur functions, *Combinatorics and Algebra (Boulder, Colo.) (Providence, RI), Amer. Math. Soc.* (1984).

[13] GUICHARDET (A.). — *Groupes quantiques*, InterÉditions/CNRS Éditions (1995).

[14] KASSEL (C.). — *Quantum groups*, Springer-Verlag (1995).

[15] KROB (D.), GELFAND (I.M.), LASCOUX (A.), LECLERC (B.), RETAKH (V.S.), and THIBON (J.-Y.). — Noncommutative symmetric functions, *Advances in Mathematics*, **112(2)**, p. 218-348 (1995).

[16] MALVENUTO (C.). — Produits et coproduits des fonctions quasi-symétriques et de l'algèbre des descentes, *Laboratoire de combinatoire et d'informatique mathématique (LACIM), Université du Québec, Montréal*, **16**, p. 967-982 (1995).

[17] MALVENUTO (C.), REUTENAUER (C.). — Duality between Quasi-Symmetric Functions and the Solomon Descent Algebra, *Journal of Algebra*, **177**, p. 967-982 (1995).

[18] MENOUS (F.). — *Les bonnes moyennes uniformisantes et leurs applications à la resommation réelle*, Thèse de doctorat, Paris XI Orsay (1996).

[19] MENOUS (F.). — Les bonnes moyennes uniformisantes et une application à la resommation réelle, *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, **VIII(4)**, p. 579-628 (1999).

[20] MENOUS (F.). — Well-behaved averages, Random walk on $\mathbb{R}$ with "linear exponential law" and rooted-oriented trees, *Prépublications d'Orsay*, 2000-16 (2000).

[21] MENOUS (F.). — Random walk on $\mathbb{R}$ and ordered trees, *Prépublication* (2001).

[22] RACINET (G.). — *Séries génératrices non commutatives de polyzetas et associateur de Drinfeld*, Thèse de doctorat, Université de Picardie-Jules-Verne, cf. p. 60.

[23] REUTENAUER (C.). — *Free Lie Algebras*, Oxford University Press (1993).