FRANCK BARTHE

Autour de l'inégalité de Brunn-Minkowski

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 12, nº 2 (2003), p. 127-178

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_2003_6_12_2_127_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. XII, n° 2, 2003
pp. 127–178

Autour de l'inégalité de Brunn-Minkowski (*)

FRANCK BARTHE [(1)]

RÉSUMÉ. — Ces notes sont un résumé de notre mémoire d'habilitation. Elles présentent nos travaux dans leur contexte. Nous y étudions des inégalités fonctionnelles de convolution (souvent établies par transport des mesures), des questions extrémales métriques ou volumiques en géométrie des convexes, des problèmes isopérimétriques et de concentration pour des mesures de probabilité et enfin la production d'entropie dans le théorème de la limite centrale. Ces sujets, éloignés en apparence, ont tous été marqués par le célèbre théorème de Brunn-Minkowski sur les sommes d'ensembles.

ABSTRACT. — Theses notes form a summary of our habilitation dissertation. They present our works in perspective. We study convolution functional inequalities (often proved by measure transportation), metric or volumic extremal questions in convex geometry, isoperimetric problems and concentration of probability measures and entropy production in the central limit theorems. These topics, apparently disjoint, were all strongly influenced by the famous Brunn-Minkowski theorem on sum sets.

Table des matières

(*) Reçu le 15 janvier 2003, accepté le 14 mai 2003
(1) CNRS-Laboratoire d'Analyse et Mathématiques Appliquées- UMR 8050
Universités de Marne la Vallée et de Paris 12-Val-de-Marne, Boulevard Descartes, Cité Descartes, Champs sur Marne, 77454 Marne la Vallée Cedex 2, FRANCE
E-mail : barthe@math.univ-mlv.fr

---

1. Le théorème de Brunn-Minkowski

On travaille ici dans l'espace $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique. On notera $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et $|\cdot|$ le produit scalaire et la norme associée.

1.1. L'énoncé

La somme de Minkowski de deux ensembles $A, B \subset \mathbb{R}^n$ est par définition

$$A + B := \{a + b;\ (a, b) \in A \times B\}.$$

Dans ce qui suit nous noterons $|S|_n$ le volume n-dimensionnel d'un ensemble $S \subset \mathbb{R}^n$ et même $|S|$ quand il n'y aura pas d'ambiguité.

THÉORÈME 1.1.— *Soient A, B des sous-ensembles compacts non-vides de $\mathbb{R}^n$, alors*

$$|A + B|^{\frac{1}{n}} \geqslant |A|^{\frac{1}{n}} + |B|^{\frac{1}{n}}. \tag{1.1}$$

Si A et B sont des convexes homothétiques, il y a égalité. Le théorème a plusieurs formulations équivalentes. Celle qui suit met l'accent non sur la somme d'ensembles mais sur les combinaisons convexes : si $t \in (0,1)$ et si C, D sont des compacts non-vides quelconques de $\mathbb{R}^n$ on obtient en appliquant ce qui précède à $A = tC, B = (1-t)D$ et en utilisant l'homogénéité du volume :

$$|tC + (1-t)D| \geqslant \left(t|C|^{\frac{1}{n}} + (1-t)|D|^{\frac{1}{n}}\right)^n$$

que l'on peut résumer en disant que la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ est $1/n$-concave (sa puissance $1/n$ est concave). Cet énoncé peut être affaibli en utilisant l'inégalité arithmetico-géométrique. On obtient que pour tous C, D

$$|tC + (1-t)D| \geqslant |C|^t |D|^{1-t} ;$$

c'est la forme multiplicative du théorème, elle ne dépend plus de la dimension, et assure seulement la log-concavité de la mesure de Lebesgue. Une version encore plus faible (quasi-concavité) serait que

$$|tC + (1-t)D| \geqslant \min(|C|, |D|).$$

Cette version, formellement plus faible que les précédentes, leur est équivalente (si l'on inclut la quantification «quels que soient les ensembles»). En effet si A, B sont non-vides et de volumes non-nuls (sinon le résultat est évident), en appliquant la dernière inégalité avec $C = A/|A|^{1/n}$, $D = B/|B|^{1/n}$ et $t = |A|^{1/n}/(|A|^{1/n} + |B|^{1/n})$ on retrouve le résultat (1.1).

1.2. Remarques historiques

Nous ne présentons ici que les grandes lignes. Le lecteur trouvera plus de détails et de références dans l'article de synthèse [63].

L'inégalité (1.1) fut découverte en 1887 par Brunn, en dimension 3 et pour des corps convexes (i.e. convexes compacts d'intérieurs non vides). Minkowski donna le résultat en dimension arbitraire. Par la suite, les hypothèses sur les ensembles furent améliorées. Lusternik, Hadwiger et Ohmann, et Henstock et Macbeath ont démontré que l'inégalité de Brunn-Minkowski est vérifiée dès que A, B et $A + B$ sont Lebesgue mesurables. (Il est à noter que si A, B sont Lebesgue mesurables, il se peut que leur somme de Minkowski ne le soit pas). Le résultat le plus général, vrai sans autre hypothèse que la mesurabilité de A et B fait intervenir la somme essentielle

$$A +_e B := \{x;\ |A \cap (x - B)| > 0\}$$

qui est toujours mesurable et est contenue dans $A + B = \{x;\ A \cap (x - B) \neq \emptyset\}$.

Le théorème de Brunn-Minkowski fut inspiré par des questions tournant autour de l'inégalité isopérimétrique dans $\mathbb{R}^n$, et il permet de la retrouver. En effet si A est un compact de bord assez régulier, la mesure $(n-1)$-dimensionnelle de son bord est

$$|\partial A|_{n-1} := \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{|A + \varepsilon B_2^n| - |A|}{\varepsilon} \;;$$

or, par Brunn-Minkowski

$$|A + \varepsilon B_2^n| \geqslant \left(|A|^{\frac{1}{n}} + \varepsilon |B_2^n|^{\frac{1}{n}} \right)^{\frac{1}{n}},$$

donc

$$|\partial A|_{n-1} \geqslant n |B_2^n|^{\frac{1}{n}} |A|^{\frac{n-1}{n}}$$

qui n'est autre que

$$\frac{|\partial A|^{\frac{1}{n-1}}}{|A|^{\frac{1}{n}}} \geqslant \frac{|\partial B_2^n|^{\frac{1}{n-1}}}{|B_2^n|^{\frac{1}{n}}}.$$

Avec la relation de Steiner, qui assure que pour des corps convexes C, D de $\mathbb{R}^n$, le volume de $C + tD$ est un polynôme en $t \geqslant 0$ de degré n, et fut étendue par Minkowski à un nombre arbitraire de convexes, le théorème de Brunn-Minkowski est à l'origine de la théorie des volumes mixtes des corps convexes, toujours active (voir par exemple [113]). Il fut aussi très utilisé depuis les années 1970 dans la théorie asymptotique des corps convexes, motivée par la théorie locale des espaces de Banach.

Enfin, parmi les nombreuses preuves de l'inégalité de Brunn-Minkowski, signalons celle donnée par Henstock et Macbeath en 1953. Elle repose sur une version fonctionnelle de l'inégalité, démontrée par un astucieux paramétrage. Leur énoncé fonctionnel, maintenant connu sous le nom d'inégalité de type Prékopa-Leindler, offre une souplesse d'utilisation qui n'a été remarquée que vingt ans plus tard. En effet les énoncés fonctionnels permettent d'obtenir des résultats analogues aux inégalités de Brunn-Minkowski mais pour des mesures plus générales que la mesure de Lebesgue. On retiendra les travaux de Borell, Prékopa et Rinott liés à la caractérisation des mesures sur $\mathbb{R}^n$ qui sont α-concaves. Plus récemment, l'inégalité de Prékopa fut utilisée pour démontrer des inégalités de concentration de la mesure (voir les travaux de Maurey, poursuivis par Bobkov et Ledoux). La forme fonctionnelle a permis d'obtenir des résultats analogues à l'inégalité isopérimétrique, qui répondaient à des questions importantes en théorie des probabilités.

Le reste de ce résumé est divisé en quatre parties. La première présente les inégalités fonctionnelles qui généralisent l'inégalité de Prékopa-Leindler, la seconde est consacrée à nos travaux en géométrie des convexes, la troisième s'intéresse aux problèmes isopérimétriques et de concentration de la mesure, ces trois thèmes sont clairement dans la lignée du théorème de Brunn-Minkowski. La quatrième présente des résultats sur la production d'entropie dans le processus du théorème de la limite centrale ; l'outil principal y est une forme locale et précisée d'une application de l'inégalité de Prékopa-Leindler, sur les mesures log-concaves.

2. Inégalités fonctionnelles

Nous commençons par énoncer l'inégalité de Prékopa-Leindler.

2.1. Prékopa-Leindler

THÉORÈME 2.1 (Prékopa-Leindler). — *Soient f, g, h trois fonctions mesurables et positives sur $\mathbb{R}^d$ et soit $\lambda \in [0,1]$. Supposons que f et g sont intégrables et que quels que soient x et y dans $\mathbb{R}^d$,*

$$h(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant f^\lambda(x) g^{1-\lambda}(y),$$

alors on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} h \geqslant \left(\int_{\mathbb{R}^d} f\right)^\lambda \left(\int_{\mathbb{R}^d} g\right)^{1-\lambda}.$$

Preuve. — On commence par le cas $d = 1$. En utilisant les résultats classiques d'intégration on voit que l'on peut se restreindre au cas où f et g sont continues et partout strictement positives. On définit alors les applications x et y qui vérifient pour $t \in [0,1]$

$$\int_{-\infty}^{x(t)} f = t \int f \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{y(t)} g = t \int g.$$

Les versions différentielles de ces propriétés sont comme suit : pour tout $t \in [0,1]$,

$$x'(t) f(x(t)) = \int f \quad \text{et} \quad y'(t) g(y(t)) = \int g.$$

On remarque que x et y sont strictement croissantes et donc injectives et l'on définit l'application z sur $[0,1]$ par

$$z(t) = \lambda x(t) + (1-\lambda) y(t).$$

Elle est aussi strictement croissante ; par l'inégalité arithmético-géométrique on a une minoration de sa dérivée :

$$z'(t) = \lambda x'(t) + (1-\lambda) y'(t) \geqslant (x'(t))^\lambda (y'(t))^{1-\lambda}.$$

Enfin, pour estimer l'intégrale de h, on utilise le changement de variable par z ainsi que la minoration précédente et les propriétés différentielles de x et y.

$$\begin{aligned}\int h &\geqslant \int_0^1 h(z(t))z'(t)dt \\ &\geqslant \int_0^1 h(\lambda x(t)+(1-\lambda)y(t))(x'(t))^\lambda(y'(t))^{1-\lambda}dt \\ &\geqslant \int_0^1 f^\lambda(x(t))g^{1-\lambda}(y(t))\left(\frac{\int f}{f(x(t))}\right)^\lambda\left(\frac{\int g}{g(y(t))}\right)^{1-\lambda}dt \\ &= \left(\int f\right)^\lambda\left(\int g\right)^{1-\lambda}.\end{aligned}$$

Ceci prouve l'inégalité pour des fonctions d'une variable. On peut alors conclure par récurrence sur la dimension d. □

Remarque.— On déduit directement de ce qui précède que lorsqu'une fonction $w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ est log-concave alors la fonction $x \mapsto \int w(x,y)\,dy$ l'est aussi (en choisissant $h(.) = w(\lambda a+(1-\lambda)b), .)$, $f(.) = w(a, .)$ et $g(.) = w(b, .)$ dans le théorème). De même l'inégalité de Prékopa est essentielle pour établir l'équivalence suivante : une mesure absolument continue sur $\mathbb{R}^k$ est log-concave si et seulement si sa densité l'est.

Avant de poursuivre, nous posons des notations pour des moyennes plus générales que la moyenne géométrique.

DÉFINITION 2.2.— *Si $\lambda \in [0,1]$, si $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ on appelle moyenne d'ordre α et de coefficient λ de deux réels positifs a et b, la quantité*

$$M_\alpha^\lambda(a,b) = \begin{cases} 0 & si \quad a.b = 0 \\ (\lambda a^\alpha + (1-\lambda)b^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} & sinon \end{cases}$$

De plus $M_0^\lambda(a,b) = a^\lambda b^{1-\lambda}$ est la moyenne géométrique, $M_{-\infty}^\lambda(a,b) = \min(a,b)$ et $M_\infty^\lambda(a,b) = \max(a,b)$ si $ab \neq 0$ et 0 sinon.

Nous exposons maintenant une généralisation due à Borell [44] et Brascamp-Lieb [49]. (Pour des valeurs $\alpha > 0$ on retrouve le résultat de Henstock et McBeath [73], alors que $\alpha = 0$ correspond à Prékopa-Leindler [102],[85]. Voir aussi [119]).

THÉORÈME 2.3.— *Soient f, g, h trois fonctions mesurables et positives sur $\mathbb{R}^d$ et soit $\lambda \in [0,1]$, $\alpha \geqslant -1/d$. Supposons que f et g sont intégrables* *et que quels que soient x et y dans $\mathbb{R}^d$,*

$$h(\lambda x+(1-\lambda)y)\geqslant M_\alpha^\lambda(f(x),g(y)),$$

alors on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} h \geqslant M^\lambda_{\frac{\alpha}{1+d\alpha}}\left(\int_{\mathbb{R}^d} f, \int_{\mathbb{R}^d} g\right).$$

La démonstration suit celle de l'inégalité de Prékopa-Leindler mais il convient d'utiliser la proposition suivante en lieu et place de l'inégalité arithmético-géométrique.

PROPOSITION 2.4.— *Soit $\lambda\in[0,1]$, soient a,b,c,d des réels positifs et soient α,β,γ des réels tels que $\alpha+\beta\geqslant 0$ et $1/\alpha+1/\beta=1/\gamma$, alors*

$$M_\alpha^\lambda(a,b)\cdot M_\beta^\lambda(c,d)\geqslant M_\gamma^\lambda(ac,bd).$$

Remarques.— Si l'on applique l'inégalité de Prékopa-Leindler aux fonctions $f=\mathbf{1}_A$, $g=\mathbf{1}_B$, $h=\mathbf{1}_{\lambda A+(1-\lambda)B}$ pour des ensembles A,B tels que $\lambda A+(1-\lambda)B$ soit mesurable, on obtient la forme multiplicative de l'inégalité de Brunn-Minkowski. Pour obtenir directement la forme forte, il faut appliquer le théorème précédent aux mêmes fonctions et à $\alpha=\infty$.

La définition des applications x,y dans la preuve qui précède ressemble beaucoup à l'argument qui apparaît dans la preuve de Brunn-Minkowski donnée par Hadwiger et Ohmann [70] : ils considèrent deux ensembles A,B qui sont des unions finies de parallélépipèdes disjoints d'arêtes parallèles aux axes, puis coupent A par un hyperplan $x_1=a$ tel qu'il sépare deux « boîtes ». Il sépare A en deux sous-ensembles A_+ at A_-. Ensuite ils considèrent un hyperplan parallèle qui coupe B en deux parties dont le rapport des volumes coincide avec le rapport $|A_+|/|A_-|$. Cette construction est utilisée afin de travailler par récurrence sur le nombre de parallélépipèdes. Dans ce qui suit nous présentons la notion de transport de mesures, qui permet de mieux comprendre le rôle des ces découpages.

2.2. Transport de mesures

On considère des mesures boréliennes finies sur $\mathbb{R}^d$. On rappelle tout d'abord la notion de mesure image.

DÉFINITION 2.5.— *Soit μ une mesure sur $\mathbb{R}^d$ et soit T une application mesurable de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$, définie μ-presque partout. On notera $T\mu$ la mesure image de μ par T, qui à tout borélien $M\subset\mathbb{R}^d$ associe*

$$T\mu(M)=\mu(T^{-1}(M)).$$

Si l'on note $\nu = T\mu$, on dit que T transporte μ sur ν et l'on dispose d'un version fonctionnelle de la définition : pour toute fonction b réelle, borélienne et bornée sur $\mathbb{R}^d$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} b(y)d\nu(y) = \int_{\mathbb{R}^d} b(T(x))d\mu(x).$$

Si l'on suppose que μ et ν sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue, de densités f et g, de supports suffisamment réguliers et si la fonction T est une bijection différentiable entre ces supports, on a par le changement de variables $y = T(x)$

$$\int_{\mathrm{supp}\mu} b(T(x))|\det dT(x)|g(Tx)dx = \int_{\mathrm{supp}\mu} b(T(x))f(x)dx.$$

Comme l'égalité précédente est vraie quelle que soit la fonction b, on obtient la version infinitésimale du changement de variables, vérifiée μ-presque sûrement :

$$|\det dT(x)|g(Tx) = f(x).$$

La question qui nous intéresse est la suivante : étant données deux mesures μ et ν sur $\mathbb{R}^d$, existe-t-il une application qui transporte μ sur ν et peut-elle avoir des propriétés de monotonie ? Il y a bien sûr des conditions nécessaires à la propriété de transport : les deux mesures doivent avoir même masse totale, si μ a des atomes ν doit en avoir au moins un. Pour simplifier nous considèrerons toujours deux mesures de probabilités absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue, de densités f et g.

Dans le cas des mesures sur la droite réelle on peut toujours trouver une application T croissante qui transporte la mesure de densité f sur celle de densité g. On la définit en imposant la propriété suivante pour tout réel x :

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{T(x)} g(t)dt.$$

Ceci détermine T sur le support de f et la croissance permet de trouver des valeurs en dehors du support. Remarquons que trouver T revient à déterminer une fonction croissante réciproque de la fonction de répartition $R_g(x) = \int_{-\infty}^{x} g$ qui est croissante. Signalons enfin le cas le plus simple auquel on se ramènera facilement dans les applications : si f et g sont continues et strictement positives alors T est de classe C^1 et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$T'(x)g(T(x)) = f(x)\cdot$$

Il convient de noter que les application x, y qui apparaissaient dans la preuve de l'inégalité de Prékopa-Leindler sont des transports de mesures : x transporte la mesure de Lebesgue restreinte à $[0,1]$ sur la mesure de densité $f/\int f$.

Il ne semble pas y avoir d'application de transport canonique en dimension supérieure à 1. Nous allons exposer deux exemples ; le premier, dû à Knothe [75], est triangulaire et le second, dû à Brenier [50] [51], est le gradient d'une fonction convexe. Ces deux constructions peuvent être considérées comme des généralisations de l'application de transport croissante en dimension 1.

2.2.1. L'application de Knothe

Si $x \in \mathbb{R}^d$ on note $x_i, i = 1, \ldots, d$, ses coordonnées.

THÉORÈME 2.6 (Knothe).— *Soient f, g des fonctions positives sur $\mathbb{R}^d$, d'intégrale 1. Il existe une application T qui transporte la mesure de densité f sur celle de densité g telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,*

$$T(x) = (T_1(x_1), \ldots, T_k(x_1, \ldots, x_k), \ldots, T_d(x_1, \ldots, x_d)),$$

où chaque application T_k est fonction croissante de x_k pour $x_1, \ldots, x_{k-1}$ fixées.

Preuve.— La construction de T se fait en itérant le processus de transport croissant vu en dimension 1. On commence par transporter par le transport croissant les mesures marginales obtenues en projetant sur la première coordonnée, ceci donne l'application $T_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ensuite pour tout $x \in \mathbb{R}$ on transporte la mesure conditionnelle de f en x sur la mesure conditionnelle de g en $T_1(x)$ par un transport de Knothe en dimension $d-1$. $\square$

2.2.2. L'application de Brenier

Le résultat suivant fut démontré par Brenier [50] [51] moyennant des hypothèses sur les moments des mesures. Ensuite McCann [92] a établi en toute généralité le

THÉORÈME 2.7 (Brenier-McCann).— *Soient μ et ν des mesures de probabilité sur $\mathbb{R}^d$. Si μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, alors il existe une application convexe ψ de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ telle que $(\nabla\psi)\mu = \nu$. De plus le gradient de ψ est uniquement déterminé μ-presque partout.*

La démonstration initiale de Brenier utilisait des méthodes analytiques pour résoudre le problème de transport de Monge-Kantorovich avec coût quadratique : étant données deux mesures μ et ν sur $\mathbb{R}^d$, peut-on trouver une mesure γ sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ de marginales μ et ν telle que le coût quadratique

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |x-y|^2 d\gamma(x,y)$$

soit minimal ? Remarquons ici que la mesure $d\gamma(x,y)$ correspond physiquement à la masse transportée de x vers y. Dans ce modèle la masse en x peut être divisée et répartie sur tout l'espace. Ceci donne plus de possibilités que le transport par une application T, comme nous l'avons défini précédemment, où toute la masse se trouvant en x est transportée vers $T(x)$. Cependant, sous quelques hypothèses d'intégrabilité, Brenier résout ce problème d'optimisation convexe et prouve que la meilleure stratégie de transport est donnée par une application T, qui de plus est le gradient d'une application convexe.

Si l'on considère sur $\mathbb{R}^d$ deux mesures de probabilités $d\mu(x) = f(x)\,dx$ et $d\nu(x) = g(x)\,dx$, on dispose donc de deux applications de transport, dues à Knothe et Brenier. On peut se demander quelles conditions de régularité sur les données assurent que l'expression infinitésimale du transport

$$f(x) = g(T(x)) \det(dT(x)) \tag{2.1}$$

est valable, au moins presque partout. (Notons que si T est le transport de Knothe, $dT(x)$ a une matrice triangulaire inférieure à diagonale positive et si T est le transport de Brenier $dT(x)$ est symétrique positive, comme Hessienne d'une application convexe. Dans tous les cas $\det dT(x) \geqslant 0$ quand il existe). Cette question de régularité est facile pour le transport de Knothe, elle est plus délicate pour le transport de Brenier. Caffarelli [54] a obtenu des résultats difficiles de régularité forte et McCann [92] a obtenu un résultat de régularité faible très pratique (sans aucune hypothèse, (2.1) est vrai $f\,dx$-presque partout si $dT(x) = \mathrm{Hess}_x \phi$ est la Hessienne au sens d'Alexandrov du potentiel convexe dont dérive T). Ces résultats suffisent en pratique à garantir (2.1) et rendent la méthode du transport facile à appliquer pour prouver des inégalités fonctionnelles, car on peut souvent se restreindre à des fonctions très régulières.

Remarques. — Le transport de Knothe dépend de la base choisie. Le transport de Brenier paraît plus intrinsèque, au premier abord seulement ! Il dépend de la structure euclidienne choisie, qui intervient dans l'identification entre différentielle et gradient (et dans le coût quadratique que l'on minimise). Brenier a observé que le transport de Knothe est un cas limite de son transport pour une structure euclidienne qui dégénère. On peut s'en convaincre de multiples façons. Voici un argument heuristique simple : choisissons le transport de Brenier correspondant à un produit scalaire de matrice D dans la base canonique. Comme $dT(x)$ est une application linéaire symétrique, sa matrice A dans la base canonique vérifie ${}^tAD = DA$. Si $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$ est diagonale, la relation devient en termes de coefficients : $a_{i,j} = a_{j,i}\lambda_i/\lambda_j$. Si l'on choisit $\lambda_k = \varepsilon^{k-1}$, $k = 1, \ldots, d$ avec ε très petit on arrive à $a_{i,j} = a_{j,i}\varepsilon^{j-i}$. Pour ε tendant vers zero, les coefficients du dessus de la diagonale ($i > j$) sont négligeables devant les autres. La matrice devient triangulaire.

En utilisant ces transports on peut écrire la preuve de Prékopa-Leindler directement en dimension d en choisissant pour x, y les applications de Knothe (resp. de Brenier) qui envoient la mesure de Lebesgue restreinte à $[0,1]^d$ sur les mesures de densités $f/\int f, g/\int g$. On devra utiliser l'inégalité arithmético-géométrique pour les matrices triangulaires inférieures à diagonale positive (resp. symétriques positives) :

$$\det(\lambda A + (1-\lambda)B) \geqslant (\det A)^\lambda (\det B)^{1-\lambda}. \tag{2.2}$$

Dans [93] McCann donne un argument très semblable basé sur la notion de convexité de déplacement.

2.3. Inégalités plus générales, obtenues par transport

2.3.1. Inégalités de Brascamp-Lieb et forme inverse

Dans les articles [14], [17] nous démontrons en utilisant le transport de Brenier une extension des inégalités de Prékopa-Leindler, qui avait été conjecturée par K. Ball, avec pour objectif des applications en convexité (voir section suivante). L'argument utilisé fournit en même temps une preuve plus simple que l'originale des inégalités de Brascamp-Lieb [48]. Ces dernières peuvent être vues comme une généralisation puissante de l'inégalité de Hölder. Elles ont d'abord été démontrées par des méthodes de symétrisation en grandes dimensions. Ensuite Lieb [88] a donné une preuve de l'inégalité pour des fonctions de plusieurs variables par des méthodes plus simples et très générales de tensorisation. Les inégalités de Brascamp-Lieb disent que pour calculer la norme de certains opérateurs multilinéaires sur un produit d'espaces L_p, il suffit de considérer leur action sur les fonctions gaussiennes centrées, ce qui ramène un problème d'optimisation sur un produit d'espaces L_p à un problème d'optimisation sur $\mathbb{R}^n$.

Précisons que l'on appelle fonction gaussienne centrée sur $\mathbb{R}^d$ tout multiple de l'exponentielle d'une forme quadratique définie négative. On note $L_1^+(\mathbb{R}^d)$ les fonctions intégrables sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs positives.

THÉORÈME 2.8 (Lieb). — *Soient m, n des entiers. Soient $(c_i)_{i=1}^m$ des réels strictement positifs et $(n_i)_{i=1}^m$ des entiers inférieurs ou égaux à n tels que*

$$\sum_{i=1}^m c_i n_i = n.$$

Pour $i = 1, \ldots, m$ soit B_i une surjection linéaire de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^{n_i}$. Supposons de plus

$$\cap_{i\leqslant m} \ker B_i = \{0\}.$$

On définit l'application J sur $L_1^+(\mathbb{R}^{n_1}) \times \cdots \times L_1^+(\mathbb{R}^{n_m})$ comme suit : si $f_i \in L_1^+(\mathbb{R}^{n_i})$, $i = 1, \ldots, m$ alors

$$J((f_i)_{i=1}^m) = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^m f_i^{c_i}(B_i x)dx.$$

Soit F le plus petit nombre réel tel que pour tout $(f_i)_{i=1}^m$,

$$J((f_i)_{i=1}^m) \leqslant F \prod_{i=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}^{n_i}} f_i \right)^{c_i}. \tag{2.3}$$

Alors F se calcule en considérant seulement les fonctions gaussiennes centrées, i.e.

$$F = \sup \left\{ \frac{J((g_i)_{i=1}^m)}{\prod_{i=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}^{n_i}} g_i\right)^{c_i}};\ g_i \text{ gaussienne centrée sur } \mathbb{R}^{n_i}, i = 1, \ldots, m \right\}.$$

Notons $S^+(\mathbb{R}^k)$ l'ensemble des matrices $k \times k$ symétriques définies positives. Soit D le plus grand nombre réel tel que

$$\det\left(\sum_{i=1}^m c_i B_i^* A_i B_i\right) \geqslant D \prod_{i=1}^m (\det A_i)^{c_i},$$

pour tous $A_i \in \mathcal{S}^+(\mathbb{R}^{n_i}), i = 1, \ldots, m$, alors

$$F = \frac{1}{\sqrt{D}}.$$

Voici les inégalités que nous obtenons dans [17]. Elles apparaissent comme une forme inverse des inégalités de Brascamp-Lieb. On vérifie aisément que pour $m = 2$, $n_1 = n_2 = n$, $c_1 = 1 - c_2 = \lambda \in (0,1)$, $B_1 = B_2 = I_n$, la constante D vaut 1 par (2.2) et (2.3) et (2.4) redonnent respectivement l'inégalité de Hölder et celle, inverse, de Prékopa-Leindler.

THÉORÈME 2.9. — *Avec les mêmes notations que dans le théorème précédent, on définit l'application I sur $L_1^+(\mathbb{R}^{n_1}) \times \cdots \times L_1^+(\mathbb{R}^{n_m})$ comme suit : si $f_i \in L_1^+(\mathbb{R}^{n_i})$, $i = 1, \ldots, m$ alors*

$$I((f_i)_{i=1}^m) = \int_{\mathbb{R}^n}^* \sup \left\{ \prod_{i=1}^m f_i^{c_i}(y_i);\ \sum_{i=1}^m c_i B_i^* y_i = x \text{ et } y_i \in \mathbb{R}^{n_i} \right\} dx.$$

Soit E le plus grand nombre tel que pour tout $(f_i)_{i=1}^m$,

$$I((f_i)_{i=1}^m) \geqslant E \prod_{i=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}^{n_i}} f_i \right)^{c_i}. \tag{2.4}$$

Alors E se calcule en considérant seulement les fonctions gaussiennes centrées, i.e.

$$E = \inf \left\{ \frac{I((g_i)_{i=1}^m)}{\prod_{i=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}^{n_i}} g_i\right)^{c_i}};\ g_i \text{ gaussienne centrée sur } \mathbb{R}^{n_i}, i = 1, \ldots, m \right\},$$

De plus,

$$E = \sqrt{D}.$$

La démonstration est fondée sur le lemme suivant dont la preuve utilise, pour chaque valeur de i, l'application de Brenier qui transporte la mesure de densité h_i sur celle de densité f_i :

LEMME 2.10. — *Pour $i = 1 \ldots m$, soient f_i et h_i des fonctions de $L_1^+(\mathbb{R}^{n_i})$ telles que $\int_{\mathbb{R}^{n_i}} f_i = \int_{\mathbb{R}^{n_i}} h_i$. Alors*

$$I(f_1, \ldots, f_m) \geqslant D \cdot J(h_1, \ldots, h_m).$$

La méthode utilisée permet une étude détaillée des cas d'égalité, au moins pour des fonctions d'une variable. Les techniques antérieures reposaient sur des passages à la limite et ne permettaient pas de les caractériser.

2.3.2. Inégalités de Young optimale et forme inverse

La constante optimale dans les inégalités de convolution de Young a été déterminée indépendamment par Beckner [31] et Brascamp-Lieb [48]. Ces derniers l'ont déduite de leur inégalité exposée dans le paragraphe précédent. En effet la meilleure constante est

$$D_{p,q} \quad := \quad \sup_{f \in L_p(\mathbb{R}^n), g \in L_q(\mathbb{R}^n)} \frac{\|f * g\|_r}{\|f\|_p \|g\|_q}$$

$$= \sup_{f\in L_p(\mathbb{R}^n),g\in L_q(\mathbb{R}^n),h\in L_{r'}(\mathbb{R}^n)} \frac{\int_{\mathbb{R}^n}(f*g)(x)h(x)dx}{\|f\|_p\|g\|_q\|h\|_{r'}}$$
$$= \sup_{f\in L_p(\mathbb{R}^n),g\in L_q(\mathbb{R}^n),h\in L_{r'}(\mathbb{R}^n)} \frac{\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)h(x)dxdy}{\|f\|_p\|g\|_q\|h\|_{r'}}.$$

Donc elle se calcule en considérant seulement les fonctions gaussiennes centrées (cette optimisation est facile). De plus Brascamp et Lieb ont démontré, par des méthodes similaires, toujours assez complexes, une inégalité inverse optimale, qui améliorait celle donnée par Leindler dans [85]. Le théorème qui suit résume les deux résultats :

THÉORÈME 2.11.— *Soient $p, q, r > 0$ tels que $1/p+1/q = 1+1/r$. Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^N)$ des fonctions à valeurs positives.*

Si $p, q, r \geqslant 1$ alors

$$\|f*g\|_r \leqslant \left(\frac{C_pC_q}{C_r}\right)^N \|f\|_p\|g\|_q.$$

Si $p, q, r \leqslant 1$ alors

$$\|f*g\|_r \geqslant \left(\frac{C_pC_q}{C_r}\right)^N \|f\|_p\|g\|_q,$$

où, pour t strictement positif, C_t est défini par

$$C_t = \sqrt{t^{\frac{1}{t}}/|t'|^{\frac{1}{t'}}},$$

et t' par $1/t+1/t' = 1$.

Guidés par une observation Brascamp et Lieb, qui retrouvaient Prékopa-Leindler comme un cas limite de leur inégalité inverse-Young optimale quand les coefficients p, q tendent vers zero, nous avons tenté de démontrer ces dernières par transport. Ceci est fait dans [18]. L'argument donne une preuve unifiée de l'inégalité de Young optimale et de la forme inverse.

Remarque .— Le fait que l'on déduise l'inégalité de Young optimale à partir de celle de Brascamp-Lieb est trompeur. Il ne semble pas possible de déduire Young-inverse d'inverse Brascamp-Lieb. C'est l'opposé qui se produit : dans [15] nous donnons une extension des inégalités de Young (et inverse) qui contient comme un cas limite la forme géométrique de Brascamp-Lieb (et inverse).

2.3.3. Inégalité de Prékopa-Leindler restreinte

Szarek et Voiculescu [117] ont établi une inégalité de Brunn-Minkowski pour les sommes incomplètes ou « restreintes » d'ensembles. Si $A, B \subset \mathbb{R}^n$ et $\Theta \subset \mathbb{R}^{2n}$, par définition $A +_\Theta B = \{a + b,\ (a, b) \in (A \times B) \cap \Theta\}$. Nous énonçons leur résultat

THÉORÈME 2.12.— *Soit $\rho \in (0, 1)$, $n \in \mathbb{N}$ et $A, B \subset \mathbb{R}^n$ tels que $\rho^n \leqslant |A|/|B| \leqslant \rho^{-n}$ et soit $\Theta \subset \mathbb{R}^{2n}$ tel que*

$$|\Theta| \geqslant (1 - c \min\{\rho\sqrt{n}, 1\})\, |A|\, |B|,$$

Alors

$$|A +_\Theta B|^{\frac{2}{n}} \geqslant |A|^{\frac{2}{n}} + |B|^{\frac{2}{n}}.$$

Dans ce qui précède $c > 0$ est une constante universelle.

C'est un résultat important qui leur a permis d'établir un analogue de l'inégalité exponentielle entropique de Shannon en théorie des probabilités libres [117], et de la redémontrer dans le cas classique [118]. Rappelons que si X est une variable aléatoire réelle dont la loi a pour densité f, son entropie est

$$\mathrm{Ent}(X) = -\int f \log f.$$

L'inégalité de Shannon donne une borne inférieure à l'entropie d'une somme de variables indépendantes X et Y :

$$e^{2\mathrm{Ent}(X+Y)} \geqslant e^{2\mathrm{Ent}(X)} + e^{2\mathrm{Ent}(Y)}. \tag{2.5}$$

Il convient de mentionner que Lieb [87] l'a déduite en « dérivant » l'inégalité de Young optimale en son cas d'égalité pour $p = q = 1$. La nouvelle preuve de Szarek et Voiculescu a beau être plus longue que les précédentes, c'est la plus naturelle puisqu'elle s'appuie sur les suites typiques qui justifient la notion d'entropie [114]. Si X et Y sont indépendantes, les sommes de suites typiques de X et de Y ne sont pas nécessairement typiques pour $X+Y$, mais elles le sont très souvent, ce qui peut se traduire en termes de sommes restreintes. Convenablement appliquée l'inégalité de Brunn-Minkowski restreinte donne les résultat.

Dans [19] nous donnons une version restreinte pour l'inégalité de Prékopa-Leindler.

THÉORÈME 2.13.— *Il existe des scalaires strictement positifs c et n_0 tels que pour tout $0 < \varepsilon \leqslant 1/2$, pour tout $\lambda \in [\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ et pour tout $n \geqslant n_0$,* *si f, g sont des fonctions positives de $L_1(\mathbb{R}^n)$ et si Θ est un sous-ensemble mesurable de $\mathbb{R}^{2n}$ tel que*

$$\frac{\int_\Theta f(x)g(y)dxdy}{\left(\int f\right)\left(\int g\right)} \geqslant \frac{1}{2} + \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot \frac{\log n}{\sqrt{n}},$$

alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} K(x)dx \geqslant \left(\int f\right)^\lambda \left(\int g\right)^{1-\lambda},$$

dès que la fonction K vérifie :

$$K(x) \geqslant \sup\{f^\lambda(u)g^{1-\lambda}(v), (u,v) \in \Theta \text{ et } x = \sqrt{\lambda}\, u + \sqrt{1-\lambda}\, v\}.$$

Par un argument classique d'homogénéité, nous en déduisons le théorème de Szarek et Voiculescu [117], avec des conditions légèrement différentes sur les paramètres.

Théorème 2.14. — *Il existe des constantes strictement positives c et n_0 telles que si $n \geqslant n_0$, si A, B sont deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ avec*

$$\rho := \left(\frac{|A|}{|B|}\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant 1,$$

et si $\Theta \subset \mathbb{R}^{2n}$ est tel que

$$\frac{|\Theta \cap (A \times B)|}{|A|.|B|} \geqslant \frac{1}{2} + c\sqrt{\frac{1+\rho^2}{\rho^2}} \cdot \frac{\log n}{\sqrt{n}},$$

alors

$$|A +_\Theta B|^{\frac{2}{n}} \geqslant |A|^{\frac{2}{n}} + |B|^{\frac{2}{n}}.$$

En particulier la constante $1/2$ est optimale comme le montre l'exemple de $B_2^n +_\Theta B_2^n$ où B_2^n est la boule Euclidienne et

$$\Theta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n;\ \langle x, y\rangle \leqslant 0\}.$$

3. Géométrie des convexes

Nous abordons maintenant des problèmes de géométrie des convexes, inspirés par la théorie locale des espaces de Banach. Le lien entre ces deux sujets est simple (les corps convexes de $\mathbb{R}^n$ symétriques par rapport à l'origine sont exactement les boules unités des normes dont on peut le munir). Leur rapprochement permit de nombreux développements, qui sont illustrés dans le livre de Pisier [101]. Citons deux lignes très importantes dans cette théorie : les corps convexes symétriques de $\mathbb{R}^n$ peuvent être rendus très proches d'une boule euclidienne (i.e. d'un ellipsoïde) si l'on s'autorise à passer aux sections (de dimension $\log n$ dans le théorème de Dvoretzky, de dimension proportionnelle à n dans le théorème du quotient de sous-espace de Milman), c'est le point de vue local. D'autre part on peut aussi chercher des transformations affines d'un convexe qui lui confèrent de meilleures propriétés. La théorie a produit de nombreuses « positions » (ou de façon équivalente de nombreux ellipsoïdes) qui sont des outils puissants. On peut citer ainsi l'ellipsoïde de John, de Legendre, de Milman, le ℓ-ellipsoïde...

Nous allons étudier des problèmes extrémaux reliés à des questions volumiques ou métriques de sections, de projections ou d'images affines d'un convexe. Nous chercherons des inégalités exactes, ce qui vient sûrement de l'influence récente de K. Ball sur ce sujet où les résultats à constante près sont déjà très appréciés (pourvu que les constantes ne dépendent pas de la dimension !). Nous commençons par fixer quelques notations. Pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $p > 0$ on pose

$$\|x\|_p := \Big(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{et} \quad \|x\|_\infty := \sup_{i \leqslant n} |x_i|.$$

Les boules unités correspondantes sont $B_p^n := \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\|_p \leqslant 1\}$, elles sont convexes pour $p \geqslant 1$ et $B_\infty^n = [-1,1]^n$. Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un corps convexe contenant l'origine en son intérieur, on définit la fonction d'appui h_K et la fonction radiale ρ_K, pour $x \in \mathbb{R}^n$,

$$h_K(x) = \sup_{y \in K} \langle x, y\rangle \quad \text{et} \quad \rho_K(x) = \sup\{r > 0;\ rx \in K\}\ ;$$

enfin la jauge de K est $\|\cdot\|_K = 1/\rho_K$. On dit qu'un corps convexe est centré s'il est symétrique par rapport à l'origine.

Il existe une notion de dualité pour les corps convexes centrés, qui correspond à la dualité des normes associées. Si K est centré, son polaire K° est le corps convexe centré défini par

$$K^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \langle x, y\rangle \leqslant 1, \text{pour tout}\, y \in K\}.$$

Voici des propriétés immédiates de cette dualité :

PROPOSITION 3.1.— *Soient $K, L \in \mathbb{R}^n$ deux corps convexes centrés, soit T un isomorphisme linéaire de $\mathbb{R}^n$ et soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$,*

- $(K^\circ)^\circ = K$
- $h_{K^\circ} \cdot \rho_K = 1$
- $K \subset L \Longrightarrow L^\circ \subset K^\circ$
- $(TK)^\circ = ({}^tT)^{-1}(K^\circ)$
- $(B_p^n)^\circ = B_{p'}^n$ *si* $p \geqslant 1$ *et* $1/p + 1/p' = 1$
- $(K \cap E)^\circ = P_E(K^\circ)$

où $P_E(K)$ désigne la projection orthogonale de K sur E.

En particulier la dualité relie l'étude des sections des convexes et celle de leur projections, tout comme elle relie l'étude des ellipsoïdes inscrits et celle des ellipsoïdes circonscrits. Cependant il n'y a pas de relation simple entre le volume d'un convexe et celui de son polaire. Pour $K \subset \mathbb{R}^n$ un corps convexe centré, Santaló a défini le produit volumique

$$P(K) = (|K| \cdot |K^\circ|)^{\frac{1}{n}},$$

c'est un invariant affine. Il a montré l'inégalité

$$P(K) \leqslant P(B_2^n) = |B_2^n|^{\frac{2}{n}},$$

avec égalité si et seulement si K est un ellipsoïde. La meilleure minoration connue est due à Bourgain et Milman [47] : il existe une constante universelle $c > 0$ telle que pour tout n et tout K corps convexe centré de $\mathbb{R}^n$

$$c \cdot P(B_2^n) \leqslant P(K).$$

Mahler a formulé la conjecture suivante si $K \subset \mathbb{R}^n$ est convexe et centré

$$P(K) \geqslant P(B_1^n) = P(B_\infty^n) = 4(n!)^{-\frac{1}{n}},$$

qui n'a été démontrée que sous des hypothèses supplémentaires : si K est un zonoïde (Reisner [103] puis Gordon-Meyer-Reisner [66]), si K est une boule inconditionnelle (Saint-Raymond [106]). Cette conjecture difficile permet parfois de deviner des résultats sur les projections à partir de ceux connus sur les sections, pour ne citer qu'un exemple. Dans certains cas nous avons contourné la conjecture et démontré directement les résultats duaux.

3.1. Résultats extrémaux en position de Löwner ou de John

Pour tout corps convexe d'intérieur non-vide, il existe un unique ellipsoïde inclus dans K et de volume maximal, on le note $\mathcal{E}_J(K)$. Il est clair que si T est une bijection affine de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{E}_J(TK) = T(\mathcal{E}_J(K))$. Ainsi, on peut toujours trouver une image affine de K dont l'ellipsoïde de John est la boule euclidienne unité B_2^n. Le théorème de John [74] caractérise cette transformation.

THÉORÈME 3.2 (John) . — *Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un corps convexe tel que $B_2^n \subset K$. Alors $\mathcal{E}_J(K) = B_2^n$ si et seulement s'il existe $m \geqslant n$, des scalaires $c_1, \ldots, c_m > 0$ et des vecteurs $u_1, \ldots, u_m \in \partial K \cap \partial B_2^n$ tels que*

$$\sum_{i=1}^{m} c_i u_i \otimes u_i = I_n \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{m} c_i u_i = 0,$$

où $u_i \otimes u_i$ désigne la projection orthogonale sur $\mathbb{R}u_i$ et I_n l'application identité.

Les $(u_i)_{i=1}^m$ sont des points de contact de K et de B_2^n. Ces vecteurs se comportent presque comme une base orthonormée, en effet pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$x = \sum_{i=1}^{m} c_i \langle x, u_i \rangle u_i \quad \text{et} \quad |x|^2 = \sum_{i=1}^{m} c_i |\langle x, u_i \rangle|^2,$$

remarquons aussi qu'en prenant les traces dans la décomposition de l'identité on obtient que $\sum_{i=1}^m c_i = n$. En examinant les hyperplans d'appui aux points de contact on voit que dans la position décrite par le théorème, K est inclus dans l'ensemble

$$\cap_{i=1}^m \{x \in \mathbb{R}^n;\ \langle x, u_i \rangle \leqslant 1\},$$

et si K est centré il est inclus dans l'intersection de bandes

$$\cap_{i=1}^m \{x \in \mathbb{R}^n;\ |\langle x, u_i \rangle| \leqslant 1\}.$$

Ceci permet de montrer que l'on a toujours l'inclusion $K \subset n\mathcal{E}_J(K)$ et $K \subset \sqrt{n}\mathcal{E}_J(K)$ si K est centré.

Notons enfin que, par dualité, on obtient un résultat analogue au théorème de John pour l'ellipsoïde de volume minimal contenant un corps K (appelé ellipsoïde de Löwner et noté $\mathcal{E}_L(K)$). Si $\mathcal{E}$ est un ellipsoïde, son polaire l'est aussi et $|\mathcal{E}| \cdot |\mathcal{E}^\circ| = |B_2^n|^2$; on en déduit que $\mathcal{E}_L(K)$ est le polaire de $\mathcal{E}_J(K^\circ)$. On obtient en remplaçant dans le théorème de John l'hypothèse $B_2^n \subset K$ par $K \subset B_2^n$ une caractérisation de la position $\mathcal{E}_L(K) = B_2^n$.

K. Ball [7] a mis en évidence une version de l'inégalité de Brascamp-Lieb adaptée au théorème de John :

THÉORÈME 3.3. — *Soit $m \geqslant n$, soient $(u_i)_{i=1}^m$ des vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^n$ et soient $(c_i)_{i=1}^m$ des réels strictement positifs tels que*

$$\sum_{i=1}^m c_i u_i \otimes u_i = I_n.$$

Alors pour toutes fonctions positives $f_i \in L_1(\mathbb{R})$, $i = 1, \ldots, m$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^m f_i^{c_i}(\langle x, u_i \rangle) dx \leqslant \prod_{i=1}^m \left(\int f_i \right)^{c_i}.$$

Il en a déduit des estimations des quotients volumiques des corps convexes

DÉFINITION 3.4. — *Si $K \subset \mathbb{R}^n$ est un corps convexe, son quotient volumique est*

$$\mathrm{vr}(K) = \left(\frac{|K|}{|\mathcal{E}_J(K)|} \right)^{\frac{1}{n}} = \min_{\mathcal{E} \subset K} \left(\frac{|K|}{|\mathcal{E}|} \right)^{\frac{1}{n}}$$

où le minimum porte sur les ellipsoïdes inclus dans K.

C'est un paramètre important en théorie locale dont il est utile d'avoir des bornes supérieures (on pourra consulter [101]). Les inclusions directement déduites du théorème de John donnent des estimations peu satisfaisantes : $\mathrm{vr}(K) \leqslant n$ et $\mathrm{vr}(K) \leqslant \sqrt{n}$ si K est symétrique. Dans ce qui suit Δ_n est un simplexe régulier de $\mathbb{R}^n$ circonscrit à la boule euclidienne B_2^n. En utilisant les inégalités de Brascamp-Lieb, Ball a obtenu les majorations optimales suivantes [7], [8] :

THÉORÈME 3.5. — *Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un corps convexe.*

- *Dans le cas général, on a $\mathrm{vr}(K) \leqslant \mathrm{vr}(\Delta_n)$.*
- *Si K est symétrique, alors $\mathrm{vr}(K) \leqslant \mathrm{vr}(B_\infty^n)$*
- *Si K est la boule unité d'un sous-espace de ℓ_p, $\mathrm{vr}(K) \leqslant \mathrm{vr}(B_p^n)$.*

Nous rapportons la preuve dans le cas symétrique qui est le plus simple. On suppose $\mathcal{E}_J(K) = B_2^n$ et par John, on sait que

$$K \subset S = \cap_{i=1}^m \{x \in \mathbb{R}^n;\ |\langle x, u_i\rangle| \leqslant 1\},$$

donc par l'inégalité de Brascamp-Lieb, on obtient

$$|K| \leqslant |S| = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^m \mathbf{1}_{[-1,1]}(\langle x, u_i\rangle)dx \leqslant \prod_{i=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[-1,1]}\right)^{c_i} = 2^{\sum c_i} = 2^n = |B_\infty^n|.$$

Ceci achève la démonstration puisque B_2^n est l'ellipsoïde de John de B_∞^n. □

Remarque. — Notre étude des cas d'égalité dans Brascamp-Lieb nous a permis de vérifier que les cas extrémaux trouvés par Ball sont les seuls, aux transformations affines près [17].

Il est naturel de poser les questions analogues pour le quotient volumique extérieur :

DÉFINITION 3.6. — *Si $K \subset \mathbb{R}^n$ est un corps convexe, son quotient volumique extérieur est*

$$\mathrm{evr}(K) = \left(\frac{|K|}{|\mathcal{E}_L(K)|}\right)^{\frac{1}{n}} = \max_{K \subset \mathcal{E}} \left(\frac{|K|}{|\mathcal{E}|}\right)^{\frac{1}{n}}$$

où le maximum porte sur les ellipsoïdes contenant K.

C'est la notion duale du quotient volumique. En effet, comme $\mathcal{E}_L(K)^\circ = \mathcal{E}_J(K^\circ)$, on a

$$\mathrm{vr}(K^\circ)\mathrm{evr}(K) = \left(\frac{|K| \cdot |K^\circ|}{|\mathcal{E}_L(K)^\circ| \cdot |\mathcal{E}_L(K)^\circ|}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{P(K)}{P(B_2^n)}.$$

On voit alors que la conjecture de Mahler permettrait de déduire du précédent théorème une minoration optimale du quotient volumique extérieur des corps convexes centrés : elle donnerait

$$\mathrm{vr}(K^\circ)\mathrm{evr}(K) \geqslant \frac{P(B_1^n)}{P(B_2^n)} = \mathrm{vr}(B_\infty^n)\mathrm{evr}(B_1^n),$$

et sachant $\mathrm{vr}(K^\circ) \leqslant \mathrm{vr}(B_\infty^n)$, on en déduirait $\mathrm{evr}(K) \geqslant \mathrm{evr}(B_1^n)$.

Souhaitant montrer ce résultat en dualisant son argument pour les quotients volumiques, Ball avait conjecturé [8] une inégalité fonctionnelle « duale » à utiliser en lieu et place de sa version de l'inégalité de Brascamp-Lieb. Nous l'avons déduite de l'inégalité inverse Brascamp-Lieb précédemment exposée.

THÉORÈME 3.7. — *Soit $m \geqslant n$, soient $(u_i)_{i=1}^m$ des vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^n$ et soient $(c_i)_{i=1}^m$ des réels strictement positifs tels que*

$$\sum_{i=1}^{m} c_i u_i \otimes u_i = I_n.$$

Alors pour toutes fonctions positives $f_i \in L_1(\mathbb{R})$, $i = 1, \dots, m$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^n}^{*} \sup_{x=\sum c_i\theta_i u_i} \prod_{i=1}^{m} f_i^{c_i}(\theta_i)dx \geqslant \prod_{i=1}^{m} \left(\int f_i\right)^{c_i}.$$

On en déduit aisément les estimations optimales pour le quotient volumique extérieur (voir [15]) :

THÉORÈME 3.8. — *Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un corps convexe.*

- *Dans le cas général, on a* $\mathrm{evr}(K) \geqslant \mathrm{evr}(\Delta_n)$
- *Si K est symétrique, alors* $\mathrm{evr}(K) \geqslant \mathrm{evr}(B_1^n)$
- *Si K est la boule unité d'un quotient de ℓ_p,* $\mathrm{evr}(K) \geqslant \mathrm{evr}(B_p^n)$.

Comme nous l'avons vu le résultat de Ball assure que si K est en position de John ($\mathcal{E}_J(K) = B_2^n$), alors $|K| \leqslant |\Delta_n|$. Il a pu en déduire que dans cette position les mesures de surface se comparent aussi :

$$|\partial K|_{n-1} \leqslant |\partial \Delta_n|_{n-1},$$

qui implique une très belle inégalité isopérimétrique inverse [8]. On peut se demander si l'on n'aurait pas un résultat semblable pour les autres volumes intrinsèques $V_i(K)$ (ce qui précède correspond à $i = n$ et $i = n - 1$). Nous avons traité le cas $i = 1$ de l'épaisseur moyenne dans [16]. Rappelons que l'épaisseur moyenne d'un corps $K \subset \mathbb{R}^n$ est

$$W(K) = \int_{S^{n-1}} (h_K(x) + h_K(-x))\, d\sigma(x) = 2 \int_{S^{n-1}} h_K(x) d\sigma(x),$$

où σ est la mesure de probabilité de Haar sur la sphère unité S^{n-1}. L'utilité de cette quantité en théorie locale des espaces de Banach est illustrée dans [101]. Nous avons obtenu comme application de la forme inverse de l'inégalité de Brascamp-Lieb le

THÉORÈME 3.9. — *Soit $K \subset \mathbb{R}^n$, un corps convexe dont l'ellipsoïde de John est la boule euclidienne unité, alors si K est symétrique on a*

$$W(K) \leqslant W(B_\infty^n),$$

alors que dans le cas général on a seulement

$$W(K) \leqslant W(\Delta_n).$$

Ce sont, à isométrie près, les seuls cas d'égalité.

Le cas symétrique avait été observé par Schechtman et Schmuckenschläger [107]. Indépendamment ce dernier a montré un résultat semblable quand $\mathcal{E}_L(K) = B_2^n$ [111].

3.2. Volumes des sections et projections

Commençons par une propriété fondamentale des sections parallèles d'un corps convexe, qui est presque équivalente au théorème de Brunn-Minkowski pour les ensembles convexes :

PROPOSITION 3.10. — *Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un corps convexe. Soit E un sous-espace vectoriel de dimension d de $\mathbb{R}^n$. Soit s la fonction définie sur l'orthogonal $E^\perp$ de E par*

$$s(x) = |(x+E) \cap K|_d.$$

Alors pour tout couple (x, y) d'éléments de $P_{E^\perp}(K)$ et pour tout $\lambda \in [0,1]$, on a

$$s(\lambda x + (1-\lambda)y)^{\frac{1}{d}} \geqslant \lambda s(x)^{\frac{1}{d}} + (1-\lambda)s(y)^{\frac{1}{d}},$$

en particulier, la fonction section s est log-concave.

Démonstration. — On identifie $\mathbb{R}^n$ à $E^\perp \times E$ et pour $x \in E^\perp$, on note $S(x) = (x+E) \cap K$. Soient $x, y \in E^\perp$ et soient $X, Y \in E$ tels que $X \in S(x)$ et $Y \in S(y)$; par convexité, on sait que $\lambda(x, X) + (1-\lambda)(y, Y) = (\lambda x + (1-\lambda)y, \lambda X + (1-\lambda)Y)$ est dans K. On a donc l'inclusion :

$$\lambda S(x) + (1-\lambda)S(y) \subset S(\lambda x + (1-\lambda)y),$$

donc par le théorème de Brunn-Minkowski,

$$s(\lambda x + (1-\lambda)y)^{\frac{1}{d}} \geqslant |\lambda S(x) + (1-\lambda)S(y)|^{\frac{1}{d}} \geqslant \lambda s(x)^{\frac{1}{d}} + (1-\lambda)s(y)^{\frac{1}{d}}.$$

$\square$

Si de plus K est symétrique par rapport à l'origine, la fonction s est paire, log-concave ; il s'ensuit facilement que $s(0) \geqslant s(x)$ pour tout x. Parmi les sections parallèles d'un corps convexe symétrique, la section centrale est donc toujours la plus grande. Citons pour mémoire une autre propriété importante des sections :

THÉORÈME 3.11 (Busemann [52]).— *Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un corps étoilé. Son corps d'intersection IK est défini par la relation suivante : pour $\theta \in S_{n-1}$*

$$\rho_{IK}(\theta) = |\theta^{\perp} \cap K|_{n-1}.$$

Si K est un corps convexe centré alors IK l'est aussi.

3.2.1. Résultats généraux de comparaison

La tomographie géométrique est l'étude des ensembles à partir de propriétés métriques concernant leurs sections ou leurs projections sur des sous-espaces. Étant donné un corps étoilé $K \subset \mathbb{R}^n$ contenant 0 dans son intérieur et $i \leqslant n$, on considère les fonctions définies sur la Grassmannienne $G_{n,i}$ par :

$$s_{K,i}(E) = |K \cap E|_i \quad \text{et} \quad p_{K,i}(E) = |P_E(K)|_i.$$

Si K est étoilé et centré, il est déterminé par une quelconque de ses fonctions s_i, et si K est convexe et centré, il l'est par la donnée d'une des fonctions p_i. Cependant, le cas non symétrique réserve bien des surprises : il existe des corps non sphériques dont toutes les sections hyperplanes passant par un point donné ont la même mesure ! On pourra consulter à ce sujet le livre de Gardner [62]. Ces résultats correspondent à l'injectivité de certains opérateurs sur les fonctions sphériques paires, ils sont souvent démontrés en étudiant leur action sur la base des harmoniques sphériques.

Nous citons maintenant la solution de deux problèmes qui ont stimulé la recherche dans cette branche de la convexité.

Problème de Shephard : *Soient K et L deux corps convexes centrés de $\mathbb{R}^n$, symétriques par rapport à l'origine. Si pour tout hyperplan H, on a*

$$|P_H(K)| \leqslant |P_H(L)|,$$

a-t-on pour autant $|K| \leqslant |L|$?

La théorie des volumes mixtes montre que ce problème est équivalent à la densité des zonoïdes parmi les convexes symétriques de $\mathbb{R}^n$. La réponse est positive si $n \leqslant 2$ et négative sinon (Petty [99] et Schneider [112]).

La question analogue pour les sections a donné plus de fil a retordre.

Problème de Busemann-Petty : *Soient K et L deux corps étoilés de $\mathbb{R}^n$, centrés et contenant 0 dans leur intérieur. Si pour tout hyperplan vectoriel H, on a*

$$|K \cap H| \leqslant |L \cap H|,$$

a-t-on pour autant $|K| \leqslant |L|$?

Grâce aux volumes mixtes duaux, Lutwak [90] et Zhang [121] ont montré que cette question est équivalente à la densité parmi les corps étoilés centrés de $\mathbb{R}^n$ des corps d'intersection. De façon équivalente la réponse est affirmative dans $\mathbb{R}^n$ si et seulement si la fonction radiale de tout corps convexe centré et suffisamment régulier K peut s'écrire comme la transformée de Radon d'une fonction positive f_K définie sur la sphère unité S^{n-1}

$$\rho_K(x) = \int_{S^{n-1} \cap x^{\perp}} f_K(y)\, d\sigma(y),$$

où l'intégrale est définie pour la mesure de Haar sur la sphère $(n-2)$-dimensionnelle dans l'orthogonal de x. La réponse est négative si $n \geqslant 5$ (Gardner [60] et Papadimitrakis [98] après une série de contre-exemples en dimension supérieure [82], [10], [65], [45]). Elle est positive pour $n \leqslant 4$ (Gardner [61] a montré qu'en dimension 3, tout corps est d'intersection ; le cas $n = 4$ a eu une histoire compliquée, qui s'est achevée avec les contributions de Koldobsky et Zhang, voir [76], [78], [122]). D'autre part Gardner, Koldobsky et Schlumprecht [64] ont développé une méthode analytique qui traite à la fois toutes les valeurs de la dimension n. En utilisant le lien entre transformée de Radon et transformée de Fourier découvert par Koldobsky, ils expriment l'image inverse par la transformée de Radon de la fonction radiale d'un corps étoilé. Dans ce qui suit

$$A_\xi(t) = |K \cap (t\xi + \xi^{\perp})|_{n-1}, \quad \xi \in S^{n-1},\ t \in \mathbb{R}$$

est la fonction volume des sections hyperplanes orthogonales au vecteur ξ.

Théorème 3.12 ([64]).— *Soit $n \geqslant 3$ et $K \subset \mathbb{R}^n$ un corps étoilé symétrique par rapport à l'origine, avec une fonction radiale ρ_K de classe C^∞. Si R est la transformation de Radon sphérique, on a*

Si n est pair,

$$(-1)^{(n-2)/2} 2^n \pi^{n-2} \rho_K = R\Big(\xi \mapsto A_\xi^{(n-2)}(0)\Big).$$

Si n est impair,

$$\frac{(-1)^{(n-1)/2}(2\pi)^{n-1}}{(n-2)!}\rho_K = R\Big(\xi \mapsto \int_0^\infty t^{-n+1}\Big(A_\xi(t) - \sum_{k=0}^{(n-3)/2} A_\xi^{(2k)}(0)\frac{t^{2k}}{(2k)!}\Big)\, dt\Big).$$

La raison du changement de réponse au problème entre $n = 4$ et $n = 5$ est alors simple : la fonction radiale est « en gros » reliée la dérivée d'ordre $n - 2$ de la fonction section parallèle en 0. On a vu que la convexité assure que cette fonction est maximale en 0, donc a une dérivée seconde négative, ce qui garantit que $R^{-1}(\rho_K)$ est positive. En revanche le signe des dérivées d'ordre supérieur n'est pas contrôlé par la convexité.

Dans l'article [27] nous donnons une preuve directe et très simple de ces formules. Nous commençons par calculer $R(\xi \mapsto A_\xi(t))$. Nous obtenons un expression simple dont nous calculons ensuite les dérivées.

Enfin, citons les problèmes relaxés correspondants : existe-t-il une constante $c > 0$ indépendante de n, K, L telle que sous les mêmes hypothèses, on ait

$$|K| \leqslant c \cdot |L| \ ?$$

Dans le cas des sections, il s'agit de la « conjecture de l'hyperplan ». Le meilleur résultat connu est $|K| \leqslant cn^{\frac{1}{4}} \log n |L|$ (Bourgain [46]). Dans le cas des projections, on montre facilement que l'on peut conclure

$$|K| \leqslant \frac{3}{2}\sqrt{n}|L|$$

et K. Ball a montré que l'on ne peut espérer mieux en trouvant une constante $\delta > 0$ telle que pour tout n, il existe un convexe symétrique $K \subset \mathbb{R}^n$ tel que pour tout hyperplan H

$$|P_H(K)| \geqslant \delta\sqrt{n}|K|^{\frac{n-1}{n}},$$

ce qui donne un contre-exemple avec K et B_2^n.

3.2.2. Sections et position isotrope

Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un corps convexe symétrique et de volume 1. On dit qu'il est isotrope si son tenseur d'inertie l'est, c'est-à-dire s'il existe une constante $L_K \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $u \in S^{n-1}$ on a

$$\int_K \langle x, u\rangle^2 dx = L_K^2.$$

Par une transformation affine on peut toujours mettre un convexe centré en position isotrope. Les propriétés liées à cette configuration sont étudiées en détail dans [96]. Comme l'a remarqué Hensley [71], [72], la position isotrope est très utile pour l'étude des sections hyperplanes. On peut considérer pour chaque $u \in S^{n-1}$ la fonction section $A_u(t) = |K \cap (tu + u^\perp)|$,

$t \in \mathbb{R}$. Elle est paire et log-concave par le théorème de Brunn-Minkowski. Par ailleurs, elle vérifie pour tout $u \in S^{n-1}$

$$\int_{\mathbb{R}} A_u = |K| = 1 \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} t^2 A_u(t)\, dt = \int_K \langle x, u\rangle^2 dx = L_K^2.$$

On peut alors ne conserver que ces informations, qui lient entre elles les sections dans différentes directions, et étudier les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ paires log-concaves avec $\int_{\mathbb{R}} f = 1$, $\int_{\mathbb{R}} t^2 f(t)\, dt = L_K^2$. Malgré la perte d'information géométrique, ce point de vue est pertinent : Hensley a montré pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ paire et log-concave l'inégalité

$$3f(0)^2 \int_0^\infty t^2 f(t)\, dt \geqslant \left(\int_0^\infty f\right)^3.$$

En appliquant ceci aux fonctions A_u on obtient pour tout corps convexe symétrique isotrope de volume 1 et pour toute direction $u \in S^{n-1}$:

$$|K \cap u^\perp| \geqslant \frac{1}{\sqrt{12}\, L_K}.$$

Cette estimation est précise pour le cube unité $Q_n = [-1/2, 1/2]^n$. En effet, elle redonne le résultat de Hadwiger [69] :

$$|Q_n \cap u^\perp| \geqslant 1 = |Q_n \cap {e_1}^\perp|,$$

i.e. la section canonique a le plus petit volume $(n-1)$-dimensionnel.

Dans l'article [28] nous présentons une extension de ce résultat qui s'applique au volume de l'intersection avec des bandes symétriques :

PROPOSITION 3.13.— *Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction log-concave décroissante et intégrable et soit $h > 0$. Si $\int_0^h f \leqslant \frac{3}{4}\int_0^\infty f$ alors*

$$3\left(\int_0^h f\right)^2 \int_0^\infty t^2 f(t)\, dt \geqslant h^2 \left(\int_0^\infty f\right)^3.$$

Ce résultat contient celui d'Hensley ; en fait il le pousse jusqu'à l'épaisseur maximale. En conséquence nous confirmons partiellement une conjecture de Milman sur les volumes minimaux des intersections du cube avec des bandes symétriques :

THÉORÈME 3.14.— *Si $0 < w \leqslant 3/4$ et $u \in S^{n-1}$ on a*

$$|Q_n \cap \{x \in \mathbb{R}^n;\ |\langle x, u\rangle| \leqslant w/2\}| \geqslant |Q_n \cap \{x \in \mathbb{R}^n;\ |x_1| \leqslant w/2\}|.$$

Il semble cependant que la bande canonique soit minimale tant que son épaisseur reste en dessous de $2\sqrt{2}-2 \sim 0.818$. Il faudrait d'autres méthodes pour le prouver car l'énoncé fonctionnel est lui optimal.

Signalons que Hensley a montré avec des méthodes similaires que si K est isotrope et u est unitaire on a

$$|K \cap u^{\perp}| \leqslant \frac{c}{L_K}$$

où c est une constante absolue, dont la meilleure valeur a été déterminée par Ball [6]. Il en résulte qu'en position isotrope toutes les sections hyperplanes ont un volume de l'ordre de $1/L_K$ et que

$$\max_{u \in S^{n-1}} |K \cap u^{\perp}| \leqslant \sqrt{6} \min_{u \in S^{n-1}} |K \cap u^{\perp}|.$$

Une autre formulation de la conjecture de l'hyperplan est qu'il existerait une constante $c > 0$ telle que pour tout n et tout corps convexe symétrique $K \subset \mathbb{R}^n$, $L_K \leqslant c$. Ainsi un corps isotrope de volume 1 aurait quelle que soit sa dimension toutes ses sections hyperplanes plus grandes qu'une constante universelle.

3.2.3. Sections et projections des boules unités de ℓ_p^n

Dans ce qui précède nous avons étudié les sections du cube par une méthode générale. Ici nous allons présenter plusieurs méthodes développées spécialement pour les ensembles B_p^n, $p \in (0, \infty]$. Le cas du cube ($p = \infty$) est plus facile en raison de la structure produit de l'ensemble. Vaaler [120] étendit le résultat de Hadwiger aux sections d-dimensionnelles du cube, avec des motivations venant de la théorie des nombres. Il montra que pour tout sous-espace vectoriel $E \subset \mathbb{R}^n$ de dimension d on a

$$|E \cap B_\infty^n| \geqslant |B_\infty^d|. \tag{3.1}$$

Pour ce faire il développa une méthode reposant sur l'ordre pointu entre mesures ($\mu \succ \nu$ si et seulement si $\int f(d\mu - d\nu) \geqslant 0$ est vrai pour toutes les fonctions paires et log-concaves). L'inégalité (3.1) vient d'une comparaison entre les mesures sur $\mathbb{R}$ de densités $\mathbf{1}_{[-1/2,1/2]}(t)\, dt$ et $\exp(-\pi t^2)\, dt$, $t \in \mathbb{R}$, qui passe aux mesures produit : $\mathbf{1}_{Q_n}(x)\, dx \succ \exp(-\pi |x|^2)\, dx$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Plus tard, Ball [5], [7] donna des bornes supérieures précises pour les sections du cube

THÉORÈME 3.15. — *Si* $1 \leqslant d \leqslant n-1$ *et si* E *est un sous-espace vectoriel de dimension* d *de* $\mathbb{R}^n$*, alors*

$$\frac{|B_\infty^n \cap E|}{|B_\infty^d|} \leqslant \begin{cases} (\sqrt{2})^{n-d} & \text{si} \quad d \geqslant n/2 \\ \left(\sqrt{\frac{n}{d}}\right)^d & \text{si} \quad d \leqslant n/2. \end{cases}$$

La seconde estimation provient d'une application assez directe de l'inégalité de Brascamp-Lieb, elle n'est optimale que lorsque d divise n. La première est toujours exacte et sa preuve en est plus difficile : l'inégalité de Brascamp-Lieb y est appliquée après usage de la transformation de Fourier et des estimations fines d'intégrales numériques sont nécessaires.

Meyer et Pajor [94] ont pu étudier les boules B_p^n pour $p \in [1, \infty)$ car ils ont réussi à exprimer les volumes de leurs sections en termes d'intégrales de certaines fonctions contre des mesures produit : si E est un sous-espace vectoriel de dimension d et si $u_1, \ldots, u_{n-d}$ est une base orthonormée de son orthogonal, on a

$$\Gamma\left(1 + \frac{d}{n}\right) |B_p^n \cap E| = \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{d-n} \int_{E(\varepsilon)} \prod_{i=1}^n e^{-|x_i|^p} \, dx,$$

où $E(\varepsilon) := \bigcap_{i \leqslant n-d} \{x;\ |\langle x, u_i \rangle| \leqslant \varepsilon/2\}$. Ils ont démontré par la méthode de Vaaler le résultat suivant :

THÉORÈME 3.16. — *Soit* $E \subset \mathbb{R}^n$ *un sous-espace de dimension* d*, alors la fonction*

$$p \mapsto \frac{|E \cap B_p^n|}{|B_p^d|}$$

est croissante en $p \in [1, \infty]$.

Il s'ensuit par comparaison avec $p = 2$ que

$$|B_p^n \cap E| \geqslant |B_p^d| \qquad \text{si} \quad 2 \leqslant p \leqslant \infty$$

$$|B_p^n \cap E| \leqslant |B_p^d| \qquad \text{si} \quad 1 < p \leqslant 2.$$

Ce dernier résultat fut étendu à $p \in (0, 1)$ par Caetano [53] en remplaçant les fonctions log-concaves paires par les fonctions unimodales dans la définition de l'ordre pointu. Dans [13] nous avons étendu le théorème de monotonie à $p \in (0, 1]$ et dans [20] nous le généralisons pour les sommes ℓ_p d'espaces normés (Meyer et Pajor avaient traité seulement le cas de sommes ℓ_p d'espaces euclidiens).

Par ailleurs Meyer et Pajor disposent d'une autre «formule produit» pour les volumes des sections, qu'ils obtiennent par transformation de Fourier. Pour les sections hyperplanes de B_1^n elle donne :

$$|B_1^n \cap a^\perp| = c_n \int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^n g_1(a_i t)\, dt$$

où $a \in S^{n-1}$ et g_i est la transformée de Fourier de la fonction $t \mapsto e^{-|t|}$ (qui apparaissait dans la première formule produit). Notant que $t \mapsto \log g_1(\sqrt{t})$ est convexe, Meyer et Pajor ont pu trouver les sections extrémales de B_1^n : pour tout hyperplan vectoriel

$$|B_1^n \cap H_n| \leqslant |B_1^n \cap H| \leqslant |B_1^n \cap H_1|,$$

où $H_k := \{x \in \mathbb{R}^n;\ x_1 + \cdots + x_k = 0\}$. Ils ont conjecturé un résultat anologue pour $p \in (1,2)$ (pour les sections et pour les transformées de Fourier de $\exp(-|t|^p)$) et Koldobsky l'a démontré même pour $p \in (0,2)$ [77].

Nous nous sommes intéressés au problème (dual) des projections des boules unités de ℓ_p^n, où très peu était connu. En utilisant l'inégalité inverse Brascamp-Lieb nous avons obtenu [20] le pendant de l'estimation «facile» de Ball pour les sections

THÉORÈME 3.17.— *Soit $p \in (0,2]$ et soit E un sous-espace vectoriel de dimension d de $\mathbb{R}^n$, alors*

$$\frac{|P_E(B_p^n)|}{|B_p^d|} \geqslant \left(\frac{d}{n}\right)^{d(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}.$$

Cette minoration est optimale quand d divise n et $p > 1$.

On retrouve aussi par cette méthode que $|P_E(B_p^n)| \geqslant |B_p^d|$ pour $p \geqslant 2$ mais ceci découlait déjà du résultat de Meyer et Pajor sur les sections.

Dans l'article [30] nous démontrons pour les projections hyperplanes l'analogue de tout ce qui était connu pour les sections hyperplanes (avant, les cas $p = 1, 2, \infty$ étaient connus, et seul $p = 1$ était non trivial [9]). À cet effet, nous démontrons une formule en terme de mesures produit et il en découle une seconde formule en termes de transformées de Fourier : si $a \in S^{n-1}$, on a

$$\begin{aligned} \frac{|P_{a^\perp}(B_p^n)|}{|B_p^{n-1}|} &= \frac{\mathbb{E}\,|\sum_{i=1}^n a_i X_i|}{\mathbb{E}|X_1|} \\ &= d_p \int_0^\infty \frac{1 - \prod_{k=1}^n f_p(ta_k)}{t^2} dt, \end{aligned}$$

où $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires i.i.d. de loi $c_p|t|^{\frac{2-p}{p-1}} e^{-|t|^{\frac{p}{p-1}}}$, $t \in \mathbb{R}$, et où $f_p(t) = \mathbb{E}e^{itX_1}$. Par une méthode analogue à celle de Vaaler, mais utilisant l'ordre de Choquet à la place de l'ordre pointu nous obtenons le

THÉORÈME 3.18. — *Soit H un hyperplan de $\mathbb{R}^n$, alors la fonction*

$$p \mapsto \frac{|P_H(B_p^n)|}{|B_p^{n-1}|}$$

est croissante en $p \in [1, \infty]$.

Par ailleurs les techniques de Koldobsky nous permettent de montrer que pour $p \geqslant 2$ la fonction $t \mapsto \log f_p(\sqrt{t})$ est convexe et de déterminer les projections extrémales.

THÉORÈME 3.19. — *Soit $p \geqslant 2$ et H un hyperplan de $\mathbb{R}^n$, on a*

$$|P_{H_1}(B_p^n)| \leqslant |P_H(B_p^n)| \leqslant |P_{H_n}(B_p^n)|.$$

Nos résultats pour les projections correspondent exactement à ceux pour les sections. Une analogie entre les arguments de preuve existe aussi, mais elle n'est pas aussi évidente.

3.2.4. Convexes et probabilités

Nous présentons ici deux études d'inspiration plus probabiliste. D'abord, insistons sur le fait suivant : les « formules produit » utilisées pour estimer les volumes des sections et projections des boules B_p^n reposent ultimement sur la relation évidente

$$e^{-\|x\|_p^p} = \prod_{i=1}^{n} e^{-|x_i|^p}, \ x \in \mathbb{R}^n.$$

Ce qui compte vraiment ici, c'est que l'on dispose d'une mesure finie qui est produit cartésien en coordonnées ($x = (x_1, \ldots, x_n)$) et en même temps produit dans le système de coordonnées polaires associées à B_p^n ($x = r\omega$ avec $r > 0$, $\|\omega\|_p = 1$) :

$$\prod_{i \leqslant n} \left(e^{-|x_i|^p}\, dx_i\right) = n|B_p^n| r^{n-1} e^{-r^p} \mathbf{1}_{\{r>0\}}\, dr\, d\mu_{B_p^n}(\omega)$$

où μ_p^n est la mesure conique normalisée sur la surface ∂B_p^n, définie pour $A \subset \partial B_p^n$ par

$$\mu_p^n(A) = \frac{|[0,1]\cdot A|}{|B_p^n|}.$$

Dans [26] nous cherchons à classifier les mesures finies qui sont ainsi doublement produit. En d'autre termes, on cherche les corps étoilés $K \subset \mathbb{R}^n$ contenant l'origine dans leur intérieur et les vecteurs aléatoires $X = (X_1, \ldots, X_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tels que $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendants et de plus $\|X\|_K \in \mathbb{R}$ et $X/\|X\|_K \in \partial K$ sont indépendants. Cette étude est dans la lignée des caractérisations de la mesure gaussienne comme produit en coordonnées cartésiennes et en coordonnées polaires sphériques. Nous obtenons une classification complète pour les variables X dont la loi admet une densité e^{-V} avec V localement intégrable. En résumé si une telle mesure existe, alors le corps étoilé K doit être B_p^n pour un $p > 0$ (à quelques transformations élémentaires près) et les mesures sont essentiellement celles que nous avons présentées auparavant avec éventuellement des puissances en plus. Ce résultat positif dit hélas qu'il y a peu d'espoir d'étendre les résultats sur les sections et les projections à d'autres ensembles, comme les boules d'Orlicz. Pour K convexe, nous obtenons aussi une classification des mesures finies purement atomiques qui sont doublement produit ; elle réserve quelques surprises.

Pour finir revenons à l'article [28] où nous étudions le volume de l'intersection du cube avec des bandes symétriques larges par une méthode inspirée des grandes déviations : l'inégalité de Markov exponentielle donne pour des variables aléatoires (X_i) i.i.d. et $\lambda > 0$

$$P\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i \geqslant t\Big) \leqslant e^{-\lambda t} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E} e^{\lambda a_i X_i}.$$

Afin de trouver de bonnes estimations indépendantes de la direction $(a_1, \ldots, a_n) \in S^{n-1}$ nous sommes amenés, guidés par ce que nous avons vu sur les transformées de Fourier dans l'étude précédente, à faire de même avec les transformées de Laplace. Nous donnons plusieurs critères sur une v.a. réelle Y pour que

$$t \mapsto \log \mathbb{E} e^{\sqrt{t}\, Y}$$

soit convexe ou concave sur $\mathbb{R}^+$, ce qui nous permet d'améliorer dans de nombreux cas les inégalités sous-gaussiennes, de Hoeffding, de Chernov... et d'obtenir la vitesse exponentielle optimale dans les estimations de $P\Big(\sum_{i=1}^n a_i X_i \geqslant t\Big)$. Pour des X_i indépendants et uniformes sur $[-1/2, 1/2]$ nous obtenons des bornes sur $|Q_n \cap \{x;\ |\langle x, a\rangle| \leqslant t\}|$ qui confirment l'intuition que pour t grand, ceci est minimal si $a = (1/\sqrt{n}, \ldots, 1/\sqrt{n})$. Nous obtenons des inégalités semblables pour B_p^n, $p \geqslant 2$ qui montrent en particulier que ces ensembles ont la propriété ψ_2.

4. Isopérimétrie et concentration de la mesure

Parmi les sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ de mesure donnée, les boules euclidiennes ont la plus petite surface. Cette observation très ancienne (pour $n = 2$) est devenue un théorème à la fin du dix-neuvième et au début du vingtième siècle. Son étude s'est développée dans des cadres plus généraux et avec l'apport considérable des outils de théorie de la mesure géométrique et de géométrie différentielle. Le sujet est très actif de nos jours et les méthodes variationnelles ont donné de très beaux résultats (voir par exemple [105]). Si les techniques de géométrie différentielle permettent d'étudier les « points critiques » (surface de courbure moyenne constante), l'étude de leur stabilité est délicate, particulièrement en dimension supérieure à 3. Ceci explique pourquoi les exemples totalement résolus sont peu nombreux, les plus célèbres étant $\mathbb{R}^n, S^n, \mathbb{H}^n, B_2^n$. On peut noter que le problème isopérimétrique dans le cube $[0,1]^3$ n'est pas complètement résolu.

Certains des résultats classiques précédents ont une version intégrée qui se traduit en terme de voisinages et non de bord. Ainsi pour $A \subset \mathbb{R}^n$, si $|A| = |rB_2^n|$ alors $|A_h| \geqslant |(rB_2^n)_h|$ où $A_h = \{x \in \mathbb{R}^n;\ d(x,A) \leqslant h\} = A + hB_2^n$. L'importance de tels énoncés pour les mesures finies fut comprise et mise en avant depuis les années 1970 par Milman sous le nom de concentration de la mesure. L'inégalité isopérimétrique sphérique de Levy [86] et Schmidt [109] pour $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ munie de la mesure de Haar mormalisée σ_n dit que si $\sigma_n(A) = \sigma_n(B)$ où B est une calotte sphérique, alors pour tout $h > 0$ on a $\sigma_n(A_h) \geqslant \sigma_n(B_h)$, les élargissements étant pris pour la distance géodésique. En particulier si $\sigma_n(A) \geqslant 1/2$ on obtient

$$\sigma_n(A_h) \geqslant 1 - \sqrt{\frac{\pi}{8}}e^{-(n-1)h^2/2}.$$

Il suffit d'élargir A d'une distance de l'ordre de $1/\sqrt{n}$ pour capturer presque toute la mesure ! Ainsi en grande dimension la mesure se concentre sur l'équateur (quel qu'il soit !) et les fonctions Lipschitziennes sont proches de leur valeur moyenne avec une très grande probabilité. Avec cet outil Milman a obtenu de nombreux résultats en géométrie des espaces de Banach, à commencer par une nouvelle preuve du théorème de Dvoretzky (voir [95]). Par la suite la concentration de la mesure fut plus systématiquement étudiée, notamment dans le cadre des mesures de probabilités produit par Talagrand puis Ledoux (voir [84]). Étant donné un espace probabilisé muni d'une distance (X, μ, d) on étudie

$$R_{\mu,h}(a) := \inf\{\mu(A_h);\ \mu(A) \geqslant a\}.$$

Il y a concentration de la mesure si par exemple $R_{\mu,h}(1/2)$ augmente vite avec h. Le problème isopérimétrique classique correspond dans ce cadre à $h \to 0$. On peut définir la mesure de bord associée à μ par

$$\mu^+(A) := \liminf_{h \to 0^+} \frac{\mu(A_h) - \mu(A)}{h}$$

et la fonction isopérimétrique par

$$I_\mu(a) := \inf\{\mu^+(A);\ \mu(A) = a\}, \quad a \in [0,1].$$

À première vue isopérimétrie et concentration correspondent à des domaines différents de la variable h d'élargissement. Récemment Bobkov a montré que I_μ peut donner des information pertinentes pour $R_{\mu,h}$ et qu'elle est bien adaptée à une approche fonctionnelle. Nous avons approfondi sa méthode. Nos résultats montrent que même si l'on s'intéresse au problème isopérimétrique géométrique sur des variétés, il est très bénéfique de travailler dans le cadre plus général des mesures de probabilités pour obtenir des résultats approchés ou même exacts. En particulier nous avons pu résoudre le problème isopérimétrique pour volume 1/2 dans les produits de sphères en utilisant les propriétés remarquables de la mesure gaussienne, objet incongru du point de vue des variétés.

4.1. Inégalités gaussiennes

La mesure gaussienne γ_n sur $\mathbb{R}^n$ de densité

$$(2\pi)^{-n/2} \exp(-|x|^2/2)$$

fait partie des rares exemples où le problème isopérimétrique est résolu. Sudakov-Tsirel'son [116] et Borell [43] ont montré que les demi-espaces sont extrémaux : si $\gamma_n(A) = \gamma_n(H)$ avec $H = \{x;\ \langle x, u\rangle \leqslant t\}$ alors on a $\gamma_n(A_h) \geqslant \gamma_n(H_h)$ pour tout $h > 0$. Ils ont déduit ce résultat de l'inégalité sphérique. Ehrhrard l'a ensuite redémontré par symétrisation [59]. Plus récemment Bobkov a relancé le sujet en présentant une forme fonctionnelle de l'inégalité isopérimétrique [33] : pour toute fonction régulière $f : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ on a

$$I\left(\int f\, d\gamma_n\right) \leqslant \int I(f)\, d\gamma_n + \int |\nabla f|\, d\gamma_n$$

où $I := I_{\gamma_n} = \Phi' \circ \Phi^{-1}$ est la fontion isopérimétrique gaussienne (indépendante de n) et $\Phi(t) = \gamma_1((-\infty, t])$, $t \in \mathbb{R}$. Pour $f = \mathbf{1}_A$ l'énoncé précédent redonne $\gamma_n^+(A) \geqslant I(\gamma_n(A))$. Ensuite il a démontré de façon élémentaire mais astucieuse une inégalité à deux points [34] :

$$I\Big(\frac{a+b}{2}\Big) \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{I^2(a)+\Big(\frac{b-a}{2}\Big)^2} + \frac{1}{2}\sqrt{I^2(b)+\Big(\frac{b-a}{2}\Big)^2}, \quad a,b \in [0,1], \tag{4.1}$$

aux remarquables propriétés de tensorisation ; combinée avec le théorème central limite elle permet de démontrer que pour toute fonction régulière $f : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ on a

$$I\left(\int f\, d\gamma_n\right) \leqslant \int \sqrt{I^2(f)+|\nabla f|^2}\, d\gamma_n \tag{4.2}$$

qui redonne l'inégalité isopérimétrique. Cette preuve est dans l'esprit de l'argument de Gross pour l'inégalité de Sobolev logarithmique [68] :

$$\int g^2 \log g^2\, d\gamma_n - \left(\int g^2\, d\gamma_n\right) \log \left(\int g^2\, d\gamma_n\right) \leqslant 2 \int |\nabla g|^2\, d\gamma_n$$

pour $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ régulière. Il y a en fait une hiérarchie entre ces inégalités et l'inégalité de log-Sobolev gaussienne est un cas limite de (4.2). Un autre succès de la méthode fonctionnelle figure dans l'article [3] de Bakry et Ledoux où des inégalités telles que (4.2) sont prouvées par interpolation de long de semi-groupes. Ces auteurs retrouvent le résultat gaussien et bien plus : une inégalité isopérimétrique gaussienne pour des diffusions abstraites avec courbure positive. Capitaine, Hsu et Ledoux donnèrent aussi une approche martingale [55] de (4.2).

Dans l'article [29] nous unifions plusieurs de ces approches par un énoncé plus général sur les martingales qui redonne (4.2) et une extension de (4.1) aux mesures de Bernoulli non symétriques. Par ailleurs nous clarifions les relations entre les différents énoncés d'isopérimétrie sur le modèle gaussien. En particulier, répondant à une question de Bobkov, nous montrons que si une mesure μ (disons sur $\mathbb{R}^d$) est telle que $I_\mu \geqslant I$ alors pour toute fonction f à valeurs dans $[0,1]$ on a

$$I\left(\int f\, d\mu\right) \leqslant \int \sqrt{I^2(f)+|\nabla f|^2}\, d\mu.$$

Par les propriétés de tensorisation de cette dernière inégalité, il vient $I_{\mu^k} \geqslant I$ pour tout $k \geqslant 1$.

L'article [25] étudie le problème du shift, qui a d'étranges similitudes avec l'isopérimétrie. Il consiste à déterminer pour une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^n$ les ensembles dont la mesure change le plus quand on les translate.

Pour $h > 0$ on cherche les meilleures fonctions S_h, T_h telles que pour tout ensemble A et tout vecteur unitaire $u \in \mathbb{R}^n$

$$S_h(\mu(A)) \leqslant \mu(A + hu) \leqslant T_h(\mu(A)).$$

Pour la mesure gaussienne les ensembles extrémaux sont encore les demi-espaces [79]. Dans [37] Bobkov a donné une formulation fonctionnelle de l'inégalité de shift gaussienne : pour toute fonction $f : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ régulière et à support compact

$$\left| \int \nabla f \, d\gamma_n \right| \leqslant I\left(\int f \, d\gamma_n \right).$$

Il a caractérisé les mesures μ sur $\mathbb{R}^n$ qui vérifient cette inégalité à une constante près, ou de façon équivalente telles pour tout $A \subset \mathbb{R}^n$ et tout vecteur v

$$\mu(A+v) \leqslant \Phi\Big(\Phi^{-1}(\mu(A)) + c|v|\Big) \tag{4.3}$$

pour un $c > 0$ fixé. Il a montré en particulier que si μ vérifie l'inégalité avec constante c alors pour tout $k \geqslant 2$, μ^k la vérifie avec constante $4c$. Dans [25] nous précisons l'étude des inégalités de shift sur le modèle gaussien en la mettant en relation avec une inégalité que nous tenons de Beckner mais qui était implicite dans [3] : pour toute fonction $f : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ régulière et à support compact

$$\sqrt{\left(\int I(f) \, d\gamma_n \right)^2 + \left| \int \nabla f \, d\gamma_n \right|^2} \leqslant I\left(\int f \, d\gamma_n \right). \tag{4.4}$$

En particulier grâce à ses propriétés de tensorisation nous montrons que si μ satisfait (4.3) alors ses puissances aussi. L'inégalité renforcée (4.4) est adaptée à l'interpolation par semi-groupe entre f et $\int f \, d\mu$ (on notera qu'il y a égalité pour les fonctions constantes). Cette méthode nous permet d'établir l'inégalité de shift gaussienne avec constante c pour les mesures de probabilité sur $\mathbb{R}^d$ de densité $\exp(-V)$ où la différentielle seconde de V satisfait $\|V''\|_{\ell_2^d \to \ell_2^d} \leqslant c$. Une application aux grandes déviations est donnée dans [57]. Les versions discrètes de ces inégalités améliorent les estimations connues sur le problème isodiamétral de Ahlswede et Katona pour le cube $\{-1,1\}^n$.

4.2. Nouvelles formes fonctionnelles

La mesure gaussienne est le prototype de mesure de probabilité dont les propriétés ne dépendent pas de la dimension. Du point de vue de l'isopérimétrie au moins, le modèle naturel en dimension égale à n est la sphère, comme le suggère le théorème de Levy-Gromov [67]. Au vu des résultats de Bakry et Ledoux sur les diffusions avec courbure positive il paraissait important de disposer d'une forme fonctionnelle de l'isopérimétrie sphérique, avec de bonnes propriétés. En particulier elle devrait être une égalité pour les fonctions constantes, et redonner les inégalités fonctionnelles de Bobkov quand la dimension tend vers l'infini. Cependant il était facile de voir qu'aucune des formes fonctionnelles gaussiennes connues, convenablement modifiée (avec la fonction isopérimétrique de S^n), n'avait une chance d'être vraie.

En approfondissant les méthodes utilisées par Bobkov et en les combinant avec des propriétés de concavité de la fonction isopérimétrique I_n de la sphère S^n nous avons pu établir une version fonctionnelle du théorème de Levy et Schmidt : pour toute fonction $f : S^n \longrightarrow [0,1]$ régulière, on a [24]

$$I_n\left(\int f\,d\sigma_n\right) \leqslant \left(\int I_n^{n/(n-1)}(f)\,d\sigma_n\right)^{(n-1)/n} + \int |\nabla f|\,d\sigma_n.$$

On obtient aussi une forme fonctionnelle de l'inégalité isopérimétrique de Levy-Gromov pour les variétés de dimension n et de courbure de Ricci minorée par $\rho > 0$. Ces progrès ont permis à Scheffer [108] de donner une inégalité un peu plus fine. Hélas pour l'instant aucune des deux n'a pu être prouvée (ni étendue) par semi-groupes.

Nous avons aussi obtenu des formes fonctionnelles pour les mesures à profil isopérimétrique concave. Elles ne sont pas exactes sur les fonctions constantes mais peuvent tout de même servir dans les méthodes fonctionnelles de tensorisation.

4.3. Isopérimétrie pour les mesures produit

Notre but est d'ébaucher une réponse à la question naturelle suivante : étant donnée une mesure de probabilité μ et son profil isopérimétrique I_μ que peut-on dire sur I_{μ^k} et $I_{\mu^\infty} := \inf_k I_{\mu^k}$?

Tel quel, l'énoncé n'est pas assez précis. Étant donné (X, μ, d) espace probabilisé muni d'une distance, on doit fixer une distance sur (X^n, μ^n). Le choix dicté par la géométrie est

$$d_2^{(n)}\Big((x_i)_{i\leqslant n}, (y_i)_{i\leqslant n}\Big) := \Big(\sum_{i\leqslant n} d(x_i, y_i)^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Du point de vue des applications probabilistes on peut aussi bien considérer d'autres distances, la plus simple étant la distance uniforme

$$d_\infty^{(n)}\Big((x_i)_{i\leqslant n}, (y_i)_{i\leqslant n}\Big) := \sup_{i\leqslant n} d(x_i, y_i).$$

Comme $d_\infty^{(n)} \leqslant d_2^{(n)}$ les énoncés de concentration obtenus pour d_∞ seront plus faibles, mais ils peuvent cependant être utiles (voir par exemple [40] pour des applications au supremum d'un processus). Nous commencerons donc par étudier le cas de la distance uniforme, qui est maintenant bien compris.

4.3.1. Élargissement uniforme

Dans ce qui suit $I_{\mu\otimes\nu}$ s'entend pour la métrique uniforme sur l'espace produit. Remarquons que dans $(\mathbb{R}^n, dx)$ muni de la distance induite par la norme $\|\cdot\|_\infty$ la mesure du bord d'un ensemble serait $\int_{\partial A} \|n_A\|_1$ où n_A est la normale extérieure à A. Les parties du bord non parallèles aux hyperplans de coordonnées sont donc pénalisées, et les solutions du problème isopérimétrique sont les cubes.

Bobkov [35] a déterminé $R_{\mu^\infty,h}$ en fonction de la fonction $R_{\mu,h}$ lorsque cette dernière est concave. La version « $h = 0$ » de ses résultat est comme suit (moyennant quelques conditions de régularité sur l'espace) : si la fonction isopérimétrique I_μ d'un espace métrique probabilisé (X, μ, d) est concave alors la fonction isopérimétrique I_{μ^∞} est la plus grande fonction $J : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ concave, symétrique par rapport à $1/2$ satisfaisant les conditions : $J \leqslant I_\mu$ et pour tous $a, b \in [0,1]$

$$J(ab) \leqslant aJ(b) + bJ(a).$$

Cette étude était menée dans [32] pour les mesures log-concaves sur la droite. Bobkov y montre que si μ est une mesure de probabilité de densité paire et log-concave sur $\mathbb{R}$ alors les demi-droites $(-\infty, t]$ sont solution du problème isopérimétrique (pour la distance usuelle). La fonction isopérimétrique s'exprime donc en fonction de la fonction de répartition $I_\mu = \Phi_\mu' \circ \Phi_\mu^{-1}$ où $\Phi_\mu(t) = \mu((-\infty, t])$. Le théorème principal de [32] affirme l'équivalence des assertions suivantes :

1. $I_{\mu^\infty} = I_\mu$.
2. On a $I_\mu(ab) \leqslant aI_\mu(b) + bI_\mu(a)$ quels que soient $a, b \in [0,1]$.
3. Pour tout $n \geqslant 1$ et tout $A \subset \mathbb{R}^n$ si $\mu^n(A) = \mu((-\infty, t])$ alors pour tout $h > 0$ on a $\mu^n(A + hB_\infty^n) \geqslant \mu((-\infty, t+h])$.

La dernière assertion signifie que indépendamment de la dimension k les demi-espaces de coordonnées sont solution du problème isopérimétrique pour μ^k. Si μ a la propriété précédente et si ν est une autre mesure avec $I_\nu \geqslant I_\mu$ on obtient par le même raisonnement que $I_{\nu^\infty} \geqslant I_\mu$. On dit que I_μ est un profil isopérimétrique infini-dimensionnel. Bobkov et Houdré ont noté que la seconde condition sur I_μ implique pour t petit que $I_\mu(t) \leqslant c_\mu t\log(1/t)$.

Nos contributions permettent de décrire précisément la décroissance de la suite $I_\mu \geqslant I_{\mu^2} \geqslant \cdots \geqslant I_{\mu^n}$. Tout d'abord, sous des conditions naturelles, nous donnons l'expression exacte de $I_{\mu\otimes\nu}$ sachant I_μ et I_ν lorsque ces deux fonctions sont concaves [24] :

$$I_{\mu\otimes\nu} = \inf\Big\{aI_\mu(b) + bI_\nu(a);\ a,b \in [0,1] \quad \text{et} \quad ab \in \{t, 1-t\}\Big\}\ ;$$

cette fonction est encore concave donc on peut itérer le résultat. Ceci nous permet de retrouver le résultat de Bobkov et de calculer I_{μ^n} explicitement dans plusieurs cas, comme la mesure exponentielle ou la mesure de Lebesgue sur le cube (déjà traité par Bollobas et Leader [42]). On voit en particulier que si $I_\mu(t) \sim_0 nt^{1-1/n}$ alors $I_{\mu^2} \sim_0 2nt^{1-1/(2n)}$ et ainsi de suite. On peut parler ici de comportements isopérimétriques de dimension finie (la fonction isopérimétrique de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ pour l'élargissement uniforme est $I_{\mathbb{R}^n}(t) = 2nt^{1-1/n}$) et voir que la dimension isopérimétrique se comporte comme on l'attend lorsque l'on fait des produits. Nous préciserons ces notions dans la suite. Notre résultat décrit bien la décroissance de la suite $(I_{\mu^k})_k$ quand I_μ a un comportement fini-dimensionnel.

Par ailleurs nous complétons dans [23] l'étude des inégalités infini-dimensionnelles. Le critère de Bobkov était complet mais seuls deux exemples explicites étaient connus : la fonction isopérimétrique de la mesure gaussienne $I_\gamma(t) \sim_0 t\sqrt{2\log(1/t)}$ et celle de la mesure logistique (qui est assez proche de la densité exponentielle symétrique) $I_\ell(t) = t(1-t) \sim_0 t$. Nous donnons toute une échelle de fonctions isopérimétriques infini-dimensionnelles $(I_a)_{a\in[0,1]}$ avec $I_a(t) \sim_0 t(\log(1/t))^a$. Seule l'expression de $I_1(t) = t\log(1/t) + (1-t)\log(1/(1-t))$ est très simple. Ceci donne de nouveaux exemples de mesures produits où les demi-espaces de coordonnées sont solution du problème isopérimétrique.

En résumé on peut donner une image assez précise de la décroissance de la suite I_{μ^k} pourvu que I_μ soit minorée par une fonction concave strictement positive sur $(0,1)$: la séparation entre comportements fini et infini-dimensionnels est faite par $I_1 \sim_0 t\log(1/t)$. Si $I_\mu \geqslant cI_1$ alors pour tout k, $I_{\mu^k} \geqslant cI_1$ et I_{μ^∞} est comparable à I_1. Dans ce domaine on dispose d'estimations précises en terme de dimension isopérimétrique. On a ensuite une échelle d'inégalités infini-dimensionnelles [23] : si pour $a \in [0,1]$ on a

$$I_\mu(t) \geqslant c\min(t,1-t)\left(\log\frac{1}{\min(t,1-t)}\right)^a,\ t\in[0,1]$$

alors pour tout $k \geqslant 1$

$$I_{\mu^k}(t) \geqslant \frac{c}{M} \min(t, 1-t) \left(\log \frac{1}{\min(t, 1-t)}\right)^a, \ t \in [0,1]$$

où M est une constante universelle (ceci s'applique aux probabilités de densité $c_p \exp(-|t|^p)$, $p \in [1, \infty)$, dont la fonction isopérimétrique ressemble à $t(\log(1/t))^{1-1/p}$ pour t petit). Ce résultat laisse penser que lorsque I_μ est plus petit que I_1 alors I_{μ^∞} est comparable à I_μ. Nous montrons que la situation n'est pas si simple en exhibant pour $0 < p < q < 1$ des mesures log-concaves paires sur $\mathbb{R}$, $m_{p,q}$ telles que pour $t \in (0, 1/e)$ on a

$$t\Big(\log \frac{1}{t}\Big)^p \leqslant I_{m_{p,q}} \leqslant t\Big(\log \frac{1}{t}\Big)^q$$

et pourtant $\liminf_{t \to 0} I_{m^2_{p,q}}(t)/I_{m_{p,q}}(t) = 0$.

Dans [21] nous nous intéressons à un problème important mais difficile : l'isopérimétrie gaussienne pour les ensembles symétriques par rapport à l'origine. Nous montrons que parmi les ensembles de $\mathbb{R}^n$ symétriques par rapport aux hyperplans de coordonnées et de mesure gaussienne prescrite, ceux qui ont la mesure de bord minimale pour l'élargissement uniforme sont des bandes symétriques de coordonnées ou leur complémentaire.

4.3.2. Élargissement euclidien

La distance sur le produit est ici la combinaison ℓ_2 des distances. Il ne semble pas possible dans ce cas d'exprimer $I_{\mu\otimes\nu}$ en fonction de I_μ, I_ν, mais nous proposons une minoration [24] : si $I_{\mu_i} \geqslant I_{m_i}$ où les m_i sont des probabilités sur la droite réelle de densité paire et log-concave alors

$$I_{\mu_1 \otimes \ldots \mu_k} \geqslant I_{m_1 \otimes \ldots m_k}.$$

Ceci redonne le résultat sur les inégalités gaussiennes de [29]. En pratique si les fonctions I_{μ_i} sont concaves, on commence par choisir les mesures réelles paires log-concaves de mêmes profils isopérimétriques et l'on étudie leur produit sur $\mathbb{R}^k$, qui est géométriquement plus simple. On dira que μ a une dimension isopérimétrique inférieure ou égale à n et une courbure isopérimétrique supérieure à $\lambda > 0$ si $I_\mu \geqslant I_{\frac{1}{\lambda} S^n}$ (en fait on peut considérer $n \in [1, \infty)$). Ce qui précède nous permet de contrôler la décroissance en k de I_{μ^k} pour de telles mesures. En effet le résultat de comparaison assure que si $I_{\mu_i} \geqslant I_{\frac{1}{\lambda_i} S^{n_i}}$ alors $I_{\mu_1 \otimes \ldots \mu_k} \geqslant I_\nu$ où ν a pour densité sur $\mathbb{R}^k$

$$\prod_{i=1}^k \left(\frac{\lambda_i}{c_{n_i}} (\cos(\lambda_i x_i))^{n_i - 1} \mathbf{1}_{[-\frac{\pi}{2\lambda_i}, \frac{\pi}{2\lambda_i}]} \right) dx.$$

Cette mesure a un support borné et une densité α-concave, ce qui nous permet de contrôler sa fonction isopérimétrique. Nous suivons en cela la démarche de Bobkov [36] qui utilisait l'inégalité de Prékopa-Leindler, mais nous utilisons à la place l'inégalité plus forte de Borell-Brascamp-Lieb (Théorème 2.3)). Signalons que Maurey [91] puis Schmuckenschläger [110] et Bobkov et Ledoux [41] ont démontré de nombreux énoncés de concentration en se servant de l'inégalité de Prékopa-Leindler. La méthode présentée donne d'assez bonnes estimations de la dimension et de la courbure isopérimétriques de $\otimes_{i=1}^{k}\mu_i$ en fonction de celles des μ_i. En particulier ceci décrit assez bien la décroissance en k de I_{μ^k} si μ est de dimension finie.

La séparation entre comportements fini et infini-dimensionnels est ici faite par la mesure gaussienne : le théorème central limite assure que pour toute mesure μ sur $\mathbb{R}^n$ on a $I_{\mu^\infty} \leqslant c_\mu I_\gamma$. De plus par [29], $I_\mu \geqslant cI_\gamma$ implique $I_{\mu^\infty} \geqslant cI_\gamma$. Pour l'élargissement euclidien cette propriété est caractéristique de la fonction isopérimétrique gaussienne (en effet si une mesure réelle paire est telle que les demi-espaces sont solutions du problème isopérimétrique pour ses puissances, cette mesure est gaussienne [38], [81], [97]). En dessous du niveau gaussien le seul résultat connu concerne l'inégalité isopérimétrique exponentielle [39] : si $I_\mu(t) \geqslant c\min(t, 1-t)$ alors

$$I_{\mu^\infty}(t) \geqslant \frac{c}{2\sqrt{6}}\min(t, 1-t).$$

Il serait très intéressant de disposer de résultats intermédiaires entre les comportements exponentiels et gaussiens.

Signalons que nous obtenons quelques résultats exacts dans [20] : en utilisant le fait que $I_\mu \geqslant cI_\gamma$ implique $I_{\mu^n} \geqslant cI_\gamma$ et en choisissant la meilleure valeur de c nous montrons $I_{\mu^n}(a) = I_\mu(a)$ pour a tel que $I_\mu(a) = cI_\gamma(a)$. Ceci donne la solution du problème isopérimétrique pour les ensembles de mesure $1/2$ dans des produits de boules, de sphères ou de certaines mesures log-concaves.

Nous menons une étude analogue pour le problème du shift, que nous étendons aux sous-variétés. Elle nous permet de comprendre différemment les résultats de Meyer et Pajor sur les sections hyperplanes des boules B_p^n.

4.3.3. Remarques finales

Dans [22] nous étendons à $p \in (1,2)$ un résultat de Bobkov pour $p = 1, 2$ [36]. Nous montrons que si μ est une probabilité log-concave de $\mathbb{R}^n$ qui satisfait l'inégalité de décroissance

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n;\ |x| > t\}) \leqslant ce^{-dt^p}$$

pour tout $t > 0$ et pour des constantes $c, d > 0$ données, alors pour tout entier k la mesure μ^k satisfait une inégalité de concentration sur le modèle de $c_p \exp(-|t|^p)$, $t \in \mathbb{R}$. Nous utilisons pour ce faire une inégalité démontrée par Latała et Oleszkiewicz [83] et qui interpole entre les inégalités de Poincaré et de log-Sobolev. Nous en profitons pour mettre en avant un principe général de réarrangement des fonctions, classique mais ignoré ou utilisé implicitement dans le cadre des mesures générales : il implique en particulier que si $I_\mu \geqslant I_\nu$ où ν est une mesure de probabilité log-concave paire sur $\mathbb{R}$ alors toute inégalité fonctionnelle de type Sobolev satisfaite par ν le sera aussi par μ. Il éclaire de nombreux résultats et par exemple celui de Cheeger qui assure que si une variété satisfait $I_M(t) \geqslant c \min(t, 1-t)$ alors elle vérifie une inégalité de trou spectral (ou de Poincaré). Si l'on remarque que $\min(t, 1-t)$ est la fonction isopérimétrique de la mesure exponentielle de densité $e^{-|t|}/2$ sur $\mathbb{R}$ et que cette mesure vérifie une inégalité de trou spectral, on retrouve le résultat par le principe de transfert.

Il apparaît en fait que les techniques classiques utilisant la symétrisation ou le théorème de Brunn-Minkowski peuvent s'adapter bien au delà des exemples classiques. Nous annonçons dans [24] que certains de nos résultats de comparaison obtenus par des méthodes fonctionnelles peuvent l'être en symétrisant mais vers d'autres espaces. Ce fait fut compris aussi par Ros [105] à la suite de nos résultats gaussiens et nous présenterons des extensions dans un travail en cours avec I. Leader. Nous avons aussi remarqué que le théorème de Brunn-Minkowski permet de résoudre le problème isopérimétrique dans les cônes convexes ce qui paraît possible mais délicat par les méthodes variationnelles à cause de la singularité au sommet du cône.

5. Entropie et probabilités

Dans ce qui suit X est une variable aléatoire réelle, de densité $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ et pour fixer les idées telle que $\mathbb{E}X = 0$ et $\mathbb{E}X^2 = 1$. Son entropie de Shannon est par définition

$$\mathrm{Ent}(X) = -\int_{\mathbb{R}} f \log f.$$

Pour de nombreux systèmes aléatoires l'entropie joue un rôle fondamental dans l'étude de la convergence vers un équilibre. Nous nous intéressons dans cette partie aux aspects entropiques du théorème central limite (TCL).

Il est bien connu que parmi les variables de variance fixée les gaussiennes réalisent le maximum d'entropie. En d'autre termes si G est une variable gaussienne standard de densité $g(t) = (2\pi)^{-1} \exp(-|t|^2/2)$, $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathrm{Ent}(X) \leqslant \mathrm{Ent}(G).$$

Par ailleurs la différence de ces deux entropies est une bonne mesure de la distance entre les lois de X et G, qui domine la distance en variation totale comme le montre l'inégalité de Pinsker-Csiszar-Kullback ([100], [58], [80])

$$\frac{1}{2}\left(\int_{\mathbb{R}} |f-g|\right)^2 \leqslant \mathrm{Ent}(G) - \mathrm{Ent}(X).$$

Une formulation équivalente de l'inégalité exponentielle entropique (2.5) connue sous le nom d'inégalité de Shannon-Stam ([114], [115]) assure que si Y et Z sont des variables indépendantes et $\lambda \in (0,1)$

$$\lambda \mathrm{Ent}(Y) + (1-\lambda)\mathrm{Ent}(Z) \leqslant \mathrm{Ent}(\sqrt{\lambda}\, Y + \sqrt{1-\lambda}\, Z).$$

En particulier si $(X_i)_{i\geqslant 1}$ est une suite de copies indépendantes de X on obtient que

$$\mathrm{Ent}(X_1) \leqslant \mathrm{Ent}\left(\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}}\right),$$

et en itérant que

$$\mathrm{Ent}\left(\frac{1}{\sqrt{2^k}}\sum_1^{2^k} X_i\right)$$

est croissante en k (tout en restant inférieure à l'entropie de la gaussienne). Si l'on peut montrer par le théorème central limite que cette suite d'entropies converge vers celle de la limite gaussienne, il est plus intéressant de prendre les choses à l'envers. L'idée d'utiliser l'entropie pour suivre l'évolution dans le TCL revient à Linnik [89] qui parvint ainsi à le redémontrer. Barron [12] fut le premier à montrer le théorème central limite avec convergence en entropie. Le point crucial étant ici que si X_1, X_2 sont des copies indépendantes d'une variable non-gaussienne alors

$$\mathrm{Ent}(X_1) < \mathrm{Ent}\left(\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}}\right). \tag{5.1}$$

Pour obtenir des estimations de la vitesse de la convergence en entropie, il est nécessaire d'avoir des estimations plus fortes que cette inégalité stricte. Carlen et Soffer [56] ont obtenu un résultat dans cette direction, mais il dépend d'un argument de compacité et n'est pas quantitatif. Dans [4] nous développons une technique qui permet de mieux comprendre la production d'entropie. Elle repose sur une nouvelle représentation de l'information de Fisher d'une marginale. L'information de Fisher d'une variable X de densité f est par définition $I(X) = I(f) := \int (f')^2/f$. Cette quantité correspond à la dérivée de l'entropie le long du semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck :

soit G est une gaussienne standard indépendante de X ; posons $X_t := \sqrt{e^{-t}}\,X + \sqrt{1-e^{-t}}\,G$ et f_t sa densité. On a en particulier

$$\mathrm{Ent}(G) - \mathrm{Ent}(X) = \int_0^\infty (I(X_t) - I(G))\,dt.$$

Cette relation classique permet parfois d'intégrer des inégalités sur I pour obtenir des inégalités entropiques.

5.1. Information de Fisher d'une marginale

On considère une densité de probabilité $w(x,y)$ sur $\mathbb{R}^2$ et la densité de sa première marginale

$$h(x) = \int w(x,y)\,dy.$$

Si ces fonctions ont des dérivées suffisamment intégrables on peut remarquer que l'information de Fisher est reliée à $(\log h)''$:

$$I(h) = \int \frac{(h')^2}{h} = \int h'(\log h)' = -\int h(\log h)''.$$

On peut écrire une relation analogue pour w. Il semble alors que les liens entre information de Fisher d'une densité et de sa marginale peuvent être analysés au niveau des différentielles secondes des logarithmes des densités. Nous avons déjà vu un résultat de ce type dans la première partie : l'inégalité de Prékopa-Leindler assure que si $\log w$ est concave alors $\log h$ l'est aussi, mais par un argument global ne faisant pas intervenir de dérivée. Nous avons donc cherché une preuve locale de ce fait. Cette démarche est expliquée dans [4] et donne la relation suivante :

$$h(x)(-\log h)''(x) =$$
$$\int_{\mathbb{R}} w(x,y)\Big[(\partial_y \rho)^2(x,y) + \mathrm{D}^2(-\log w)_{(x,y)}\cdot\begin{pmatrix}1\\ \rho(x,y)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ \rho(x,y)\end{pmatrix}\Big]\,dy$$

où ρ est donné par

$$\rho(x,y) = \frac{1}{w(x,y)}\left(\frac{h'(x)}{h(x)}\int_{-\infty}^{y} w(x,v)\,dv - \int_{-\infty}^{y} \partial_x w(x,v)\,dv\right).$$

On voit sans utiliser l'expression de ρ, que $\mathrm{D}^2(\log w) \leqslant 0$ implique $(\log h)'' \leqslant 0$. En fait nous remarquons que l'application $y \mapsto \rho(x,y)$ ici décrite minimise la forme quadratique du terme de droite. On a donc la représentation

$$h(x)(-\log h)''(x) = \inf_{p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} w(x,\cdot)\Big[(\partial_y p)^2 + \mathrm{D}^2(-\log w)_{(x,\cdot)}\cdot\begin{pmatrix}1\\ p\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ p\end{pmatrix}\Big]\,dy.$$

Remarquons que cette formule rend compte d'un fait analogue sur les marginales de fonctions log-convexes, dont on sait qu'elle sont log-convexes par simple application de l'inégalité de Hölder : il suffit de choisir $p = 0$ pour voir que $\mathrm{D}^2(\log w) \geqslant 0$ implique $(\log h)'' \geqslant 0$.

En intégrant ce qui précède en x on obtient une expression variationnelle de l'information de Fisher de la marginale $h(x) = \int w(x,y)\,dy$:

$$I(h) = \inf_p \int_{\mathbb{R}^2} w\Big[(\partial_y p)^2 + \mathrm{D}^2(-\log w)\cdot \begin{pmatrix}1\\p\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\p\end{pmatrix}\Big]\,dxdy,$$

où l'infimum porte cette fois sur les fonctions $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suffisamment régulières.

Dans les articles suivants [1, 2] nous donnons des formules plus intrinsèques : soit $w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ une densité de probabilité et soit $e \in S^{n-1}$ un vecteur unitaire. On considère la marginale obtenue en projetant sur $\mathbb{R}e$:

$$h(t) = \int_{te+e^\perp} w.$$

Son information de Fisher s'exprime comme un infimum des deux manières suivantes :

$$\begin{aligned} I(h) &= \inf_q \int_{\mathbb{R}^n} w\left(\frac{\mathrm{div}(wq)}{w}\right)^2 \\ &= \inf_q \int_{\mathbb{R}^n} w\left[\mathrm{Tr}(Dq)^2 + D^2(-\log w).q.q\right] \end{aligned}$$

où l'infimum porte sur les applications $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a $\langle q(x), e\rangle = 1$.

Toutes ces formules sont adaptées aux estimation de l'information de Fisher de $(X_1 + \cdots + X_k)/\sqrt{k}$ qui est une marginale de $(X_1, \ldots, X_k)$.

5.2. L'entropie augmente à chaque étape

Dans l'article [1] nous résolvons une ancienne conjecture en montrant que si $(X_n)_{n\geqslant 1}$ sont des copies indépendantes d'une loi X d'entropie finie alors la suite

$$e_k := \mathrm{Ent}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_k}{\sqrt{k}}\right)$$

est croissante. Comme nous l'avons vu il est facile de voir que $e_k \leqslant e_{2k}$. Il est bien plus difficile de voir que $e_k \leqslant e_{k+1}$. Nous le faisons en prouvant l'inégalité analogue, en sens inverse, pour l'information de Fisher :

$$i_{k+1} := I\left(\frac{X_1 + \cdots + X_k}{\sqrt{k+1}}\right) \leqslant I\left(\frac{X_1 + \cdots + X_k}{\sqrt{k}}\right) =: i_k.$$

L'idée de la preuve est que les deux variables en jeu sont des marginales de mesures produit. On utilise alors la meilleure fonction q dans l'expression variationnelle de i_k pour construire une bonne fonction test que l'on injecte dans l'expression variationnelle de i_{k+1} obtenant ainsi une majoration.

5.3. Entropie et trou spectral

Dans [4] nous donnons un renforcement explicite de l'inégalité de Shannon-Stam, sous hypothèse de trou spectral. Si X est une variable aléatoire de densité f, on dit qu'elle vérifie une inégalité de trou spectral avec constante $c > 0$ si pour toute fonction régulière $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on a

$$c\left(\int fs^2 - \left(\int fs\right)^2\right) \leqslant \int f(s')^2. \tag{5.2}$$

THÉORÈME 5.1.— *Soit G une gaussienne standard et X une variable aléatoire de variance 1 et dont la densité f satisfait une égalité de trou spectral avec constante $c > 0$. Soient X_1, X_2 des copies indépendantes de X, alors on a*

$$\mathrm{Ent}\left(\frac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}}\right) - \mathrm{Ent}(X) \geqslant \frac{c}{2+2c}\left(\mathrm{Ent}(G) - \mathrm{Ent}(X)\right).$$

La stratégie de preuve passe par une inégalité analogue pour l'information de Fisher, et par l'expression variationnelle de $I((X_1+X_2)/\sqrt{2})$. Une bonne fonction test est obtenue par des méthodes de calcul des variations.

Il est clair que ce résultat donne une information sur la vitesse de convergence dans le TCL. Nous avons pu affiner l'estimation dans [2] où nous obtenons en particulier sous les mêmes hypothèses sur X que

$$\mathrm{Ent}(G) - \mathrm{Ent}\left(\frac{\sum_{k=1}^n X_k}{\sqrt{n}}\right) \leqslant \frac{1}{1 + \frac{c}{2}(n-1)}\Big(\mathrm{Ent}(G) - \mathrm{Ent}(X)\Big).$$

Ceci donne une convergence beaucoup plus forte que les résultats classiques (Berry-Essen) et améliore considérablement les estimations de Barron et Johnson [11]. Nous déduisons l'inégalité précédente du

THÉORÈME 5.2. — *Soit G une gaussienne standard et X une variable aléatoire de variance 1 et dont la densité f satisfait une égalité de trou spectral avec constante $c > 0$. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des copies indépendantes de X, et soit $a \in S^{n-1}$. On a*

$$\mathrm{Ent}(G) - \mathrm{Ent}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\Big) \leqslant \frac{\alpha(a)}{c + \alpha(a)} \left(\mathrm{Ent}(G) - \mathrm{Ent}(X)\right),$$

où $\alpha(a) = 2 \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^4}{1 - a_i^2}$.

Bibliographie

[1] ARTSTEIN (S.), BALL (K.), BARTHE (F.), NAOR (A.). — Entropy growth for sums of independent random variables. *Submitted*, 2002.

[2] ARTSTEIN (S.), BALL (K.), BARTHE (F.), NAOR (A.). — More on entropy production. *Preprint*, 2002.

[3] BAKRY (D.), LEDOUX (M.). — Lévy-Gromov isoperimetric inequality for an infinite dimensional diffusion generator. *Invent. Math.*, **123**, p. 259-281 (1996).

[4] BALL (K.), BARTHE (F.), NAOR (A.). — Entropy jumps in the presence of a spectral gap. *Duke Math. J.*, **119**, p. 41-63 (2003).

[5] BALL (K.M.). — Cube slicing in $\mathbb{R}^{\ltimes}$. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **97**, p. 465-473 (1986).

[6] BALL (K.M.). — Logarithmically concave functions and sections of convex sets in $\mathbb{R}^{\ltimes}$. *Studia Math.*, **88**, p. 69-84 (1988).

[7] BALL (K.M.). — Volumes of sections of cubes and related problems. In J. Lindenstrauss and V. D. Milman, editors, *Israel seminar on Geometric Aspects of Functional Analysis*, number 1376 in Lectures Notes in Math. Springer-Verlag, 1989.

[8] BALL (K.M.). — Volume ratio and a reverse isoperimetric inequality. *J. London Math. Soc.*, **44(2)**, p. 351-359 (1991).

[9] BALL (K.M.). — Mahler's conjecture and wavelets. *Discrete Comput. Geom.*, **13(3-4)**, p. 271-277 (1995).

[10] BALL (K.M.). — Some remarks on the geometry of convex sets. In *Geometric Aspects of Functional Analysis*, number 1317 in LMN, p. 224-231. Springer (1998).

[11] BARRON (A.), JOHNSON (O.). — Fisher information inequalities and the central limit theorem. *Preprint*, arXiv, math. PR/0111020.

[12] BARRON (A.R.). — Entropy and the central limit theorem. *Ann. Probab.*, **14**, p. 336-342 (1986).

[13] BARTHE (F.). — Mesures unimodales et sections des boules B_p^n. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **321**, p. 865-868 (1995).

[14] BARTHE (F.). — Inégalités de Brascamp-Lieb et convexité. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **324**, p. 885-888 (1997).

[15] BARTHE (F.). — *Inégalités fonctionnelles et géométriques obtenues par transport des mesures.* Thèse de Doctorat, Université de Marne-la-Vallée, 1997.

[16] BARTHE (F.). — An extremal property of the mean width of the simplex. *Math. Ann.*, **310**, p. 685-693 (1998).

[17] BARTHE (F.). — On a reverse form of the Brascamp-Lieb inequality. *Invent. Math.*, **134**, p. 335-361 (1998).

[18] BARTHE (F.). — Optimal Young's inequality and its converse, a simple proof. *Geom. Funct. Anal.*, **8**, p. 234-242 (1998).

[19] BARTHE (F.). — Restricted Prékopa-Leindler inequality. *Pacific J. Math.*, **189**, p. 211-222 (1999).

[20] BARTHE (F.). — Extremal properties of central half-spaces for product measures. *J. Funct. Anal.*, **182**, p. 81-107 (2001).

[21] BARTHE (F.). — An isoperimetric result for the Gaussian measure and unconditional sets. *Bull. London Math. Soc.*, **33**, p. 408-416 (2001).

[22] BARTHE (F.). — Levels of concentration between exponential and Gaussian. *Ann. Fac. Sci. Toulouse*, **10(3)**, p. 393-404 (2001).

[23] BARTHE (F.). — Infinite dimensional isoperimetric inequalities in product spaces with the uniform distance. *Submitted*, 2002.

[24] BARTHE (F.). — Log-concave and spherical models in isoperimetry. *Geom. Funct. Anal.*, **12**, p. 32-55 (2002).

[25] BARTHE (F.), CORDERO-ERAUSQUIN (D.), FRADELIZI (M.). — Shift inequalities of Gaussian type and norms of barycenters. *Studia. Math.*, **146(3)**, p. 245-259 (2001).

[26] BARTHE (F.), CSORNYEI (M.), NAOR (A.). — A note on simultaneous polar and Cartesian decomposition. *Geometric Aspects of Functional Analysis, to appear.*

[27] BARTHE (F.), FRADELIZI (M.), MAUREY (B.). — A short solution to the Busemann-Petty problem. *Positivity*, **3**, p. 95-100 (1999).

[28] BARTHE (F.), KOLDOBSKY (A.). — Extremal slabs in the cube and the Laplace transform. *Adv. Math.*, **174**, p. 89-114 (2003).

[29] BARTHE (F.), MAUREY (B.). — Somes remarks on isoperimetry of Gaussian type. *Ann. Inst. H. Poincaré, Probabilités et Statistiques*, **36(4)**, p. 419-434 (2000).

[30] BARTHE (F.), NAOR (A.). — Hyperplane projections of the unit ball of ℓ_p^n. *Discrete Comput. Geom*, **27(2)**, p. 215-226 (2002).

[31] BECKNER (W.). — Inequalities in Fourier analysis. *Ann. of Math.*, **102**, p. 159-182 (1975).

[32] BOBKOV (S.G.). — Extremal properties of half-spaces for log-concave distributions. *Ann. Probab.*, **24(1)**, p. 35-48 (1996).

[33] BOBKOV (S.G.). — A functional form of the isoperimetric inequality for the Gaussian measure. *J. Funct. Anal*, **135**, p. 39-49 (1996).

[34] BOBKOV (S.G.). — An isoperimetric inequality on the discrete cube, and an elementary proof of the isoperimetric inequality in Gauss space. *Ann. Probab.*, **25(1)**, p. 206-214 (1997).

[35] BOBKOV (S.G.). — Isoperimetric problem for uniform enlargement. *Studia Math.*, **123(1)**, p. 81-95 (1997).

[36] BOBKOV (S.G.). — Isoperimetric and analytic inequalities for log-concave probability measures. *Ann. Probab.*, **27(4)**, p. 1903-1921 (1999).

[37] BOBKOV (S.G.). — The size of singular component and shift inequalities. *Ann. Probab.*, **27(1)**, p. 416-431 (1999).

[38] BOBKOV (S.G.), HOUDRÉ (C.). — Characterization of Gaussian measures in terms of the isoperimetric property of half-spaces. *Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI)*, **228**, p. 31-38 (1996). (Russian).

[39] BOBKOV (S.G.), HOUDRÉ (C.). — Isoperimetric constants for product probability measures. *Ann. Probab.*, **25(1)**, p. 184-205 (1997).

[40] BOBKOV (S.G.), HOUDRÉ (C.). — Weak dimension-free concentration of measure. *Bernoulli*, **6(4)**, p. 621-632 (2000).

[41] BOBKOV (S.G.), LEDOUX (M.). — From Brunn-Minkowski to Brascamp-Lieb and to logarithmic Sobolev inequalities. *Geom. Funct. Anal.*, **10(5)**, p. 1028-1052 (2000).

[42] BOLLOBÁS (B.), LEADER (I.). — Edge-isoperimetric inequalities in the grid. *Combinatorica*, **11**, p. 299-314 (1991).

[43] BORELL (C.). — The Brunn-Minkowski inequality in Gauss space. *Invent. Math.*, **30**, p. 207-216 (1975).

[44] BORELL (C.). — Convex functions in *d*-space. *Period. Math. Hungar.*, **6**, p. 111-136 (1975).

[45] BOURGAIN (J.). — On the Busemann-Petty problem for perturbations of the ball. *Geom. Funct. Anal.*, **1**, p. 1-13 (1991).

[46] BOURGAIN (J.). — On the distribution of polynomials on high dimensional convex sets. In *Geometric Aspects of Functional Analysis*, number 1469 in Lecture Notes in Math., p. 127-137. Sringer-Verlag, 1991.

[47] BOURGAIN (J.), MILMAN (V.D.). — New volume ratio properties for convex symmetric bodies in $\mathbb{R}^{K}$. *Invent. Math.*, **88**, p. 319-340 (1987).

[48] BRASCAMP (H.J.), LIEB (E.H.). — Best constants in Young's inequality, its converse and its generalization to more than three functions. *Adv. Math.*, **20**, p. 151-173 (1976).

[49] BRASCAMP (H.J.), LIEB (E.H.). — On extensions of the Brunn-Minkowski and Prékopa-Leindler theorems, including inequalities for log-concave functions, and with applications to the diffusion equation. *J. Funct. Anal.*, **22**, p. 366-389 (1976).

[50] BRENIER (Y.). — Décomposition polaire et réarrangement monotone des champs de vecteurs. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **305**, p. 805-808 (1987).

[51] BRENIER (Y.). — Polar factorization and monotone rearrangement of vector-valued functions. *Comm. Pure Appl. Math*, **44** (1991).

[52] BUSEMANN (H.). — A theorem on convex bodies of Brunn-Minkowski type. *Amer. J. Math.*, **71**, p. 743-762 (1949).

[53] CAETANO (A.M.). — Weyl numbers in sequence spaces and sections of unit balls. *J. Funct. Anal.*, **106**, p. 1-17 (1992).

[54] CAFFARELLI (L.). — The regularity of mappings with a convex potential. *J. Amer. Math. Soc.*, **4**, p. 99-104 (1992).

[55] CAPITAINE (M.), HSU (E.P.), LEDOUX (M.). — Martingale representation and a simple proof of logarithmic Sobolev inequalities on path spaces. *Elect. Comm. in Probab.*, **2** (1997).

[56] CARLEN (E.A.), SOFFER (A.). — Entropy production by block variable summation and central limit theorem. *Commun. Math. Phys.*, **140(2)**, p. 339-371 (1991).

[57] CHAFAÏ (D.), LEDOUX (M.). — Méthodes fonctionnelles pour des grandes déviations quasi-gaussiennes. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **329(6)**, p. 523-526 (1999).

[58] CSISZAR (I.). — Informationstheoretische Konvergenzbegriffe im Raum der Wahrscheinlichkeitsverteilungen. *Publications of the Mathematical Institute, Hungarian Academy of Sciences*, VII, Series A, p. 137-157 (1962).

[59] EHRHARD (A.). — Symétrisation dans l'espace de Gauss. *Math. Scand.*, **53**, p. 281-301 (1983).

[60] GARDNER (R.J.). — Intersection bodies and the Busemann-Petty problem. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **342**, p. 435-445 (1994).

[61] GARDNER (R.J.). — A positive answer to the Busemann-Petty problem in three dimensions. *Ann. of Math.*, **140**, p. 435-447 (1994).

[62] GARDNER (R.J.). — *Geometric Tomography.* Cambridge University Press, New York, 1995.

[63] GARDNER (R.J.). — The Brunn-Minkowski inequality. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **3**, p. 355-405 (2002).

[64] GARDNER (R.J.), KOLDOBSKY (A.), SCHLUMPRECHT (Th.). — An analytic solution to the Busemann-Petty problem on section of convex bodies. *Ann. of Math. (2)*, **149(2)**, p. 691-703 (1999).

[65] GIANNOPOULOS (A.). — A note on a problem of H. Busemann and C. M. Petty concerning sections of symmetric convex bobies. *Mathematika*, **37**, p. 239-244 (1990).

[66] GORDON (Y.), MEYER (M.), REISNER (S.). — Zonoids with minimal volume-product. a new proof. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **104**, p. 273-276 (1988).

[67] GROMOV (M.). — Paul Lévy's isoperimetric inequality. Preprint I.H.E.S., 1980.

[68] GROSS (L.). — Logarithmic Sobolev inequalities. *Amer. J. Math.*, **97**, p. 1061-1083 (1975).

[69] HADWIGER (H.). — Gitterperiodische Punktmengen und Isoperimetrie. *Monatsh. Math.*, **76**, p. 410-418 (1972).

[70] HADWIGER (H.), OHMANN (D.). — Brunn-Minkowskischer Satz und Isoperimetrie. *Math. Zeit.*, **66**, p. 1-8 (1956).

[71] HENSLEY (D.). — Slicing the cube in $\mathbb{R}^n$ and probability. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **73(1)**, p. 95-100 (1979).

[72] HENSLEY (D.). — Slicing convex bodies - bounds for slice area in terms of body's covariance. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **79(4)**, p. 619-625 (1980).

[73] HENSTOCK (R.), MACBEATH (A.H.). — On the measure of sum sets. (I) the theorems of Brunn, Minkowski and Lusternik. *Proc. London Math. Soc.*, **3**, p. 182-194 (1953).

[74] JOHN (F.). — Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions. In *Courant Anniversary Volume*, p. 187-204, New York, 1948. Interscience.

[75] KNOTHE (H.). — Contributions to the theory of convex bodies. *Michigan Math. J.*, **4**, p. 39-52 (1957).

[76] KOLDOBSKY (A.). — Intersection bodies and the Busemann-Petty problem. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **325**, p. 1181-1186 (1997).

[77] KOLDOBSKY (A.). — An application of the Fourier transform to sections of star bodies. *Israel J. Math.*, **106**, p. 157-164 (1998).

[78] KOLDOBSKY (A.). — Intersection bodies in $\mathbb{R}^4$. *Adv. Math.*, **136(1)**, p. 1-14 (1998).

[79] KUELBS (J.), LI (W.V.). — Some shift inequalities for Gaussian measures. In *High dimensional probability (Oberwolfach, 1996)*, Progr. Probab., p. 233-243, Basel, 1998. Birkhäuser.

[80] KULLBACK (S.). — A lower bound for discrimination information in terms of variation. *IEEE Trans. Info. Theory*, **4**, p. 126-127 (1967).

[81] KWAPIEN (S.), PYCIA (M.), SCHACHERMAYER (W.). — A proof of a conjecture of Bobkov and Houdré. *Elect. Comm. in Probab.*, **1**, p. 7-10 (1996).

[82] LARMAN (D.G.), ROGERS (C.A.). — The existence of a centrally symmetric convex body with central sections that are unexpectedly small. *Mathematika*, **22**, p. 164-175 (1975).

[83] LATAŁA (R.), OLESZKIEWICZ (K.). — Between Sobolev and Poincaré. In *Geometric aspects of functional analysis*, number 1745 in Lecture Notes in Math., p. 147-168, Berlin, 2000. Springer.

[84] LEDOUX (M.). — *The concentration of measure phenomenon*, volume 89 of *Mathematical Surveys and Monographs.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[85] LEINDLER (L.). — On a certain converse of Hölder's inequality. II. *Acta Sci. Math. Szeged*, **33**, p. 217-223 (1972).

[86] LÉVY (P.). — *Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle.* Gauthiers-Villars, Paris, 1951.

[87] LIEB (E.H.). — Proof of an entropy conjecture of Wehrl. *Commun. math. Phys.*, **62**, p. 35-41 (1978).

[88] LIEB (E.H.). — Gaussian kernels have only gaussian maximizers. *Invent. Math.*, **102**, p. 179-208 (1990).

[89] LINNIK (Ju.V.). — An information theoretic proof of the central limit theorem with lindeberg conditions. *Theory Probab. Appl.*, **4**, p. 288-299 (1959).

[90] LUTWAK (E.). — Intersection bodies and dual mixed volumes. *Adv. Math.*, **71**, p. 232-261 (1988).

[91] MAUREY (B.). — Some deviation inequalities. *Geom. Funct. Anal.*, **1(2)**, p. 188-197 (1991).

[92] MCCANN (R.J.). — *A Convexity Theory for Interacting Gases and Equilibrium Crystals.* PhD thesis, Princeton University, 1994.

[93] MCCANN (R.J.). — A convexity principle for interacting gases. *Adv. Math.*, **128**, p. 153-179 (1997).

[94] MEYER (M.), PAJOR (A.). — Sections of the unit ball of ℓ_p^n. *J. Funct. Anal.*, **80**, p. 109-123 (1988).

[95] MILMAN (V.), SCHECHTMAN (G.). — *Asymptotic Theory of Finite Dimensional Normed Spaces.* Number 1200 in Lecture Notes in Math. Springer Verlag, 1986.

[96] MILMAN (V.D.), PAJOR (A.). — Isotropic position and inertia ellipsoids and zonoids of the unit ball of a normed n-dimensional space. In *Geometric Aspects of Functional Analysis*, number 1376 in LMN, p. 64-104. Springer, (1989).

[97] OLESZKIEWICZ (K.). — On certain characterization of normal distribution. *Statist. Probab. Lett.*, **33(3)**, p. 277-280 (1997).

[98] PAPADIMITRAKIS (M.). — On the Busemann-Petty problem about convex, centrally symmetric bodies in $\mathbb{R}^n$. *Mathematika*, **39**, p. 258-266 (1992).

[99] PETTY (C.M.). — Projection bodies. In *Proc. Colloquium Convexity*, pages 234-241, Copenhagen, 1965. Kobenhavns Univ. Math. Inst.

[100] PINSKER (M.S̃.). — *Information and information stability of random variables and processes.* Holden-Day, San Francisco, 1964.

[101] PISIER (A.). — *The volume of convex bodies and Banach space geometry*, volume 94 of *Cambridge Tracts in Mathematics.* — Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[102] PRÉKOPA (A.). — On logarithmic concave measures and functions. *Acta Scient. Math.*, **34**, p. 335-343 (1973).

[103] REISNER (S.). — Random polytopes and the volume product of symmetric convex bodies. *Math. Scand.*, **57(2)**, p. 386-392 (1985).

[104] RINOTT (Y.). — On convexity of measures. *Ann. Probab.*, **4**, p. 1020-1026 (1976).

[105] ROS (A.). — The isoperimetric problem.
http, //www.ugr.es/ aros/#Isoperimetric, 2001.

[106] SAINT-RAYMOND (J.). — Sur le volume des corps convexes symétriques. In *Séminaire d'initiation à l'analyse. 80/81. Exp. 11*, Paris, 1981. Publ. Math. Univ. Pierre et Marie Curie, Univ. Paris VI.

[107] SCHECHTMAN (G.), SCHMUCKENSCHLÄGER (M.). — A concentration inequality for harmonic measures on the sphere. In *Geometric aspects of functional analysis (Israel, 1992-1994)*, number 77 in Oper. Theory Adv. Appl., pages 255-273, Basel, 1995. Birkhauser.

[108] SCHEFFER (G.). — Isopérimétrie fonctionnelle dimensionnelle en courbure positive. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math.*, **331**, p. 251-254 (2001).

[109] SCHMIDT (E.). — Die Brunn-Minkowskische Ungleichung und ihr Spiegelbild sowie die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel in der euklidischen und nichteuklidischen Geometrie I, II. *Math. Nachr.*, **1**, p. 81-157 (1948). **2**, p. 171-244 (1949).

[110] SCHMUCKENSCHLÄGER (M.). — A concentration of measure phenomenon on uniformly convex bodies. In *Geometric Aspects of Functional Analysis (Israel 1992-94)*, number 77 in Oper. Theory Adv. Appl., p. 275-287. Birkhäuser, 1995.

[111] SCHMUCKENSCHLÄGER (M.). — An extremal property of the regular simplex. In *Convex geometric analysis (Berkeley, CA, 1996)*, volume 34 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, p. 199-202, Cambridge, 1999. Cambridge Univ. Press.

[112] SCHNEIDER (R.). — Zu einem Problem von Shephard über die Projektionen konvexer Körper. *Math. Z.*, **101**, p. 71-82 (1967).

[113] SCHNEIDER (R.). — *Convex bodies, the Brunn-Minkowski theory*, volume 44 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications.* Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[114] SHANNON (C.E.), WEAVER (W.). — *The mathematical theory of communication.* University of Illinois Press, Urbana, IL, 1949.

[115] STAM (A.J.). — Some inequalities satisfied by the quantities of information of Fisher and Shannon. — *Info. Control*, **2**, p. 101-112 (1959).

[116] SUDAKOV (V.N.), TSIREL'SON (B.S.). — Extremal propreties of half-spaces for spherically invariant measures. *J. Soviet Math.*, 9, 9-18, 1978. Translated from Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Math. Inst. Steklova. **41**, p. 14-24 (1974).

[117] SZAREK (S.), VOICULESCU (D.). — Volumes of restricted Minkowski sums and the free analogue of the entropy power inequality. *Commun. Math. Phys.*, **178(3)**, p. 563-570 (1996).

[118] SZAREK (S.), VOICULESCU (D.). — Shannon's entropy power inequality via restricted Minkowski sums. In *Geometric aspects of functional analysis*, volume 1745 of *Lecture Notes in Math.*, p. 257-262. Springer, 2000.

[119] UHRIN (B.). — Curvilinear extensions of the Brunn-Minkowski-Lusternik inequality. *Adv. Math.*, **109(2)**, p. 288-312 (1994).

[120] VAALER (J.D.). — A geometric inequality with applications to linear forms. *Pacific J. Math.*, **83**, p. 543-553 (1979).

[121] ZHANG (G.). — Centered bodies and dual mixed volumes. *Trans. Amer. Soc.*, **345**, p. 777-801 (1994).

[122] ZHANG (G.). — A positive answer to the Busemann-Petty problem in four dimensions. *Ann. of Math. (2)*, **149(2)**, p. 535-543 (1999).