

JEAN-MARC RINKEL

**Inverses et propriétés spectrales des matrices
de Toeplitz à symbole singulier**

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6^e série, tome 11,
n° 1 (2002), p. 71-103

http://www.numdam.org/item?id=AFST_2002_6_11_1_71_0

© Université Paul Sabatier, 2002, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

Inverses et propriétés spectrales des matrices de Toeplitz à symbole singulier^(*)

JEAN-MARC RINKEL⁽¹⁾

RÉSUMÉ. — Ce travail concerne le développement asymptotique des valeurs propres extrêmes des matrices de Toeplitz à symbole singulier. Il est fondé sur une géométrie hilbertienne, consistant à interpréter l'opérateur de Toeplitz comme un projecteur : cette idée est développée et appliquée.

ABSTRACT. — This work is about asymptotic expansion of the extremal eigenvalues of Toeplitz matrices. It is based on hilbertian geometry: we interpret Toeplitz operator as a projector. This idea is developed and applied.

1. Introduction

Donnons tout d'abord quelques notations utiles pour la lecture de cette introduction.

- \mathbb{T} désigne le tore de dimension 1.
- On notera χ la fonction complexe $\theta \mapsto e^{i\theta}$ et \mathcal{P}_N le sous-espace de $L^2(\mathbb{T})$ engendré par

$$\{1, \chi, \chi^2, \dots, \chi^N\}.$$

(*) Reçu le 17 avril 2001, accepté le 27 septembre 2002

(1) Université de Paris Sud, bâtiment 425, 91405 Orsay cedex, France.

E-mail : Jean-Marc.Rinkel@math.u-psud.fr

- Pour $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ (à valeurs réelles dans ce travail), on désignera par $T_N(f)$ l'opérateur de Toeplitz tronqué associé au symbole de f et défini pour tout $\varphi \in \mathcal{P}_N$ par

$$T_N(f)(\varphi) = \mathbf{\Pi}_{\mathcal{P}_N}(f\varphi)$$

où $\mathbf{\Pi}_{\mathcal{P}_N}$ est le projecteur orthogonal de $L^2(\mathbb{T})$ dans \mathcal{P}_N .

Le symbole f étant réel, $T_N(f)$ est représentable dans la base canonique de \mathcal{P}_N par la matrice hermitienne : $(\widehat{f}(m-n))_{0 \leq m, n \leq N}$, où $\widehat{f}(k)$ est le k -ième coefficient de Fourier de f , $k \in \mathbb{Z}$.

Dans [2], U. Grenander et G. Szegö citent le résultat suivant : si $f \in L^\infty(\mathbb{T})$, f étant essentiellement bornée par $m = \inf f$ et $M = \sup f$, alors

- Les valeurs propres de $T_N(f)$ sont dans l'intervalle $[m, M]$.
- Si $\lambda_0(N) < \lambda_1(N) < \dots < \lambda_N(N)$ sont les valeurs propres de $T_N(f)$, alors $\lim_{N \rightarrow \infty} \lambda_0(N) = m_f$ et $\lim_{N \rightarrow \infty} \lambda_N(N) = M_f$.

Ce résultat a été établi par G. Szegö en 1917. Il est l'initiateur d'une série de travaux sur le comportement asymptotique des valeurs propres extrêmes des matrices de Toeplitz. Je vais tenter d'en décrire un aspect afin de mettre en perspective les méthodes exposées dans ce travail. En fait, cet article a pour origine la lecture de deux articles de H. Widom et S. Parter, cités en [12] et [7]. S. Parter, dans son article, énonce un théorème donnant une évaluation asymptotique des valeurs propres extrêmes d'un opérateur de Toeplitz $T_N(f)$ associé à un symbole f vérifiant les hypothèses

$$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ est une fonction réelle, continue de période } 2\pi \text{ dont le minimum } m \\ \text{est atteint au seul point } 0; \\ \text{la dérivée } f^{(2\alpha)}(0) = \sigma^2 \text{ est la première dérivée non nulle, } \alpha \geq 1. \end{array} \right. \quad (1)$$

Sous ces hypothèses, on a :

THÉORÈME 1 (S. PARTER). — *Considérons les hypothèses (1) avec $\alpha = 2$. Alors si $\lambda_k(N)$ est la k -ième plus petite valeur propre de $T_N(f)$, on a :*

$$\lambda_k(N) = m + \frac{\sigma^2}{4} \left(\frac{(2k+1)\pi + E_k}{2(N+3)} \right)^4 + o\left(\frac{1}{N^4}\right).$$

E_k est déterminé par

$$\tan\left(\frac{(2k+1)\pi + E_k}{4}\right) = (-1)^k \tanh\left(\frac{(2k+1)\pi + E_k}{4}\right) \text{ et } |E_k| < \pi.$$

On peut considérer que les idées aboutissant à la méthode mise en œuvre par S. Parter remontent à l'article de M. Kac, W. L. Murdock et G. Szegő [4], datant de 1953.

Ces auteurs traitent le cas où $\alpha = 1$ et démontrent qu'avec les hypothèses (1) on obtient l'équivalence

$$\lambda_k(N) - m \simeq \frac{\sigma^2 \pi^2}{2} \frac{k^2}{N^2}, \text{ pour } N \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Dans tous ces travaux, l'idée qui permet d'aboutir aux résultats précédemment rappelés est la suivante : on démontre la propriété pour une classe de symboles plus restreinte (par exemple les polynômes trigonométriques de degré 1 ainsi que les inverses de ces polynômes, chez M. Kac, W.L. Murdock et G. Szegő) et on conclut en utilisant un argument de Courant-Weyl. Rappelons précisément le principe de cette extension de classe. Le théorème de Courant-Weyl fournit l'estimation suivante des valeurs propres d'une matrice hermitienne T_n d'ordre n : si $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ sont les valeurs propres de T_n , alors :

$$\lambda_\nu = \min_{\{Y_1, \dots, Y_{\nu-1}\}} \max_{\substack{X \in \text{vect}\{Y_1, \dots, Y_{\nu-1}\}^\perp \\ \|X\|=1}} \langle TX | X \rangle$$

où $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est le produit hermitien standard de \mathbb{C}^n . De ce théorème on déduit que si les 3 symboles f, f_1, f_2 vérifient $f_1 \leq f \leq f_2$, les k -ièmes plus petites valeurs propres correspondantes de respectivement $T_N(f_1), T_N(f), T_N(f_2)$ vérifient : $(\lambda_1)_k(N) \leq (\lambda)_k(N) \leq (\lambda_2)_k(N)$. Lorsque dans cet encadrement, les deux valeurs propres extrêmes sont du même ordre, on en déduit un développement asymptotique de la valeur encadrée.

Remarquons que le problème de l'évaluation asymptotique des petites valeurs propres est équivalent à celui des grandes valeurs propres, quitte à changer le signe de f . En 1958, H. Widom dans [12] améliore, pour les grandes valeurs propres, l'approximation (2) en renforçant légèrement l'hypothèse (1). Celle-ci, en termes de petites valeurs propres, est remplacée par (3) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet f \text{ est une fonction réelle, continue de période } 2\pi \\ \bullet f(0) = m \text{ est l'unique valeur où le minimum de } f \text{ est atteint} \\ \bullet f(\theta) \text{ est paire et dérivable jusqu'à l'ordre 4 avec } \sigma^2 = f''(0) \neq 0. \end{array} \right. \quad (3)$$

Alors, si k est fixé, on a

$$\lambda_k(N) - m = \frac{\sigma^2 \pi^2 k^2}{2(N+1)^2} \left(1 + \frac{a}{N+1} \right) + o\left(\frac{1}{N^3}\right), \quad (4)$$

où a est une constante dépendant de f que l'on peut calculer (cf. [12]).

H. Widom reprend de [4] l'idée qu'il suffit de montrer (4) pour une classe particulière de symboles, en l'occurrence pour les polynômes trigonométriques f vérifiant (3) et dont les zéros complexes (non réels) de $f(\theta) - m$ sont simples. Par des encadrements de fonctions vérifiant (3) au moyen des polynômes précédents, et avec l'argument de Courant-Weyl, il en déduit (4) pour la classe de symboles vérifiant (3).

Mais l'idée nouvelle de H. Widom est de remarquer que les valeurs propres $\lambda_k(N)$ de $T_N(f)$ vérifient

$$\lambda_k(N) = f(\theta_k)$$

où $\theta_k \in [m, M]$ et puis de caractériser les θ_k pour lesquels $f(\theta_k)$ est valeur propre. Précisons rapidement ce point.

Si f est un polynôme trigonométrique vérifiant (3)

$$f(\theta) = \sum_{n=-k}^k c_n e^{in\theta} \text{ avec } c_n = c_{-n},$$

on forme le polynôme caractéristique

$$P(z, \lambda) = z^k \left(\sum_{n=-k}^k c_n z^n - \lambda \right).$$

Alors il existe $\delta > 0$ tel que pour $\lambda \in]m, m + \delta[$, les racines $\theta_j, j \in \{1, \dots, 2k\}$, de $f(\theta) - \lambda$ et les racines correspondantes $\rho_j = e^{i\theta_j}$ de $P(z, \lambda)$ sont simples. De plus λ est une valeur propre de $T_N(f)$ si, et seulement, si les ρ_j satisfont à

$$\begin{aligned} D(\rho_1, \dots, \rho_{2k}) &= 0 \text{ avec } D(X_1, \dots, X_{2k}) \\ &= \sum_{X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_k}} \frac{(X_{i_1} \cdots X_{i_k})^{k+N+1}}{P'(X_{i_1}) \cdots P'(X_{i_k})} \prod_{s < t} (X_s - X_t)^2, \end{aligned}$$

où la sommation est étendue à toutes les parties à k éléments de $\{X_1, \dots, X_{2k}\}$.

En améliorant la condition $D = 0$ de H. Widom, S. Parter donne une équation aux valeurs propres valable pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$ et dont l'exploitation permet le développement asymptotique des petites valeurs propres pour $\alpha = 2$, donné par le théorème 1 énoncé au début de ce chapitre.

Nous proposons dans cet article un point de vue radicalement différent basé sur une idée géométrique. Cette idée est que l'on peut interpréter $T_N(f)$, sous certaines hypothèses de régularité de f , comme un projecteur d'un espace de Hilbert (à un facteur multiplicatif près). Elle conduit à une formule géométrique d'inversion de $T_N(f)$. Des formules d'inversion des opérateurs de Toeplitz apparaissent dans [8], [6] ou [13]. La formule d'inversion établie dans cet article, en section 2, permet l'estimation asymptotique des valeurs propres extrêmes et l'on retrouve ainsi, en section 3, le théorème de S. Parter. Les hypothèses que doit vérifier le symbole dans la formule d'inversion concernent sa factorisation. Elles permettent, non seulement de retrouver le théorème de S. Parter, mais également de s'affranchir d'une hypothèse que mettent en avant tous les auteurs cités précédemment à savoir l'unicité du point réalisant le minimum du symbole. Ce que nous illustrerons, en section 4, par un théorème donnant les petites valeurs propres de l'opérateur $T_N(|1 - \chi^2|^2)$. Ce théorème est lui même une conséquence de théorèmes de structure concernant le symbole plus général $1 - \cos p\theta$, ($p \in \mathbb{N}$). Nous montrons, pour finir cet exposé, comment cette géométrie est adaptée au calcul des perturbations : l'exemple, traité en section 5, est celui du symbole $\frac{|1-\chi|^2}{|1-\beta\chi|^2}$, $|\beta| \leq 1$, qui est en quelque sorte le symbole $|1 - \chi|^2$ perturbé par le facteur multiplicatif $\frac{1}{|1-\beta\chi|^2}$. L'idée est que la mesure de la perturbation des opérateurs intervenant dans l'inversion (opérateurs de Hankel) permet d'estimer la perturbation des valeurs propres de $|1 - \chi^2|$.

2. Structure géométrique : une formule d'inversion

2.1. Notations générales et hypothèses fondamentales

Afin de mettre en œuvre la structure géométrique annoncée, il est nécessaire de préciser quelques notations. On pose :

- $H^+ = \left\{ h \in L^2(\mathbb{T}); \widehat{h}(s) = 0 \text{ pour } s < 0 \right\}$.
- H^- désigne le supplémentaire orthogonal de H^+ dans $L^2(\mathbb{T})$.
- π_+ et π_- désignent les projecteurs orthogonaux de $L^2(\mathbb{T})$ respectivement sur H^+ et H^- .
- $H^\infty = H^+ \cap L^\infty(\mathbb{T})$

- Pour $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ on définit l'espace $L_f^2(\mathbb{T}) = \{h \text{ Borel-mesurable; } \int_{\mathbb{T}} |h|^2 f d\theta < \infty\}$.

Dans ce qui suit le symbole f a la propriété suivante :

Il existe deux fonctions g_1 et \bar{g}_2 de H^∞ tel que $f = g_1 \bar{g}_2$. De plus g_1 et \bar{g}_2 ne s'annulent en aucun point et g_1^{-1} et \bar{g}_2^{-1} appartiennent aussi à H^∞ .

Sous les hypothèses précédentes, poursuivons la liste des définitions et notations.

-

$$\Phi_N = \frac{g_1}{g_2} \chi^{N+1} \text{ et } \tilde{\Phi}_N = \frac{g_2}{g_1} \bar{\chi}^{N+1}.$$

- Les opérateurs de Hankel H_{Φ_N} et $H_{\tilde{\Phi}_N}$ sont définis par :

$$\begin{cases} \forall \psi \in H^+ & H_{\Phi_N}(\psi) = \pi_-(\Phi_N \psi) \\ \forall \varphi \in H^- & H_{\tilde{\Phi}_N}(\varphi) = \pi_+(\tilde{\Phi}_N \varphi) \end{cases} \quad (5)$$

Sous les hypothèses précédentes, on a selon ([10]) l'inégalité : $\|H_{\Phi_N} H_{\tilde{\Phi}_N}\| < 1$ et le théorème suivant.

THÉORÈME 2. — $T_N(f)$ est inversible et $\forall \varphi \in \mathcal{P}_N$, on a :

$$\begin{aligned} T_N(f)^{-1}(\varphi) &= \frac{1}{g_1} \pi_+ \left(\frac{\varphi}{g_2} \right) \\ &\quad - \frac{1}{g_1} \pi_+ \left(\Phi_N (I - H_{\tilde{\Phi}_N} H_{\Phi_N})^{-1} \pi_+ \left(\tilde{\Phi}_N \pi_+ \left(\frac{\varphi}{g_2} \right) \right) \right). \end{aligned}$$

COROLLAIRE 1. — Soit $[T_N(f)^{-1}]_{k,l}$ l'élément d'indice (k, l) de la matrice $T_N(f)^{-1}$, alors :

$$\begin{aligned} [T_N(f)^{-1}]_{k,l} &= \left\langle \pi_+ \left(\frac{\chi^k}{g_2} \right), \pi_+ \left(\frac{\chi^l}{g_1} \right) \right\rangle \\ &\quad - \left\langle (I - H_{\tilde{\Phi}_N} H_{\Phi_N})^{-1} \pi_+ \left(\tilde{\Phi}_N \pi_+ \left(\frac{\chi^k}{g_2} \right) \right), \right. \\ &\quad \left. \pi_+ \left(\tilde{\Phi}_N \pi_+ \left(\frac{\chi^l}{g_1} \right) \right) \right\rangle. \end{aligned}$$

où \langle , \rangle désigne le produit scalaire de $L^2(\mathbb{T})$. Cette géométrie de l'inverse a déjà été développée, en dimension 2, dans [5]. Nous en donnons ici une

version adaptée au calcul spectral, en dimension 1. La démonstration du théorème nécessite les deux lemmes techniques suivants, dont on trouvera la démonstration dans [9] :

LEMME 1. — Posons $K_N = f\mathcal{P}_N$ (de sorte que $K_N \subset L^2_{1/f}(\mathbb{T})$) et $\mathbf{\Pi}_{K_N}$ le projecteur orthogonal de $L^2_{1/f}(\mathbb{T})$ sur K_N pour $\varphi \in \mathcal{P}_N$, il existe $\mu_0 \in \mathcal{P}_N$ tel que

$$\mathbf{\Pi}_{K_N}(\varphi) = f\mu_0.$$

De plus

(i) $T_N(f)$ est inversible ;

(ii) $\mu_0 = T_N(f)^{-1}(\varphi)$ et $T_N(f)^{-1} = \frac{1}{f}\mathbf{\Pi}_{K_N}$.

LEMME 2. — Pour toute fonction φ de \mathcal{P}_N , on a :

$$\mathbf{\Pi}_{K_N}(\varphi) = \varphi - \theta_1 - \chi^{N+1}\theta_2$$

où $\theta_1 \in H^-$ et $\theta_2 \in H^+$ sont déterminés par le système :

$$\begin{cases} \frac{\theta_1}{g_2} + \pi_- \left(\frac{\chi^{N+1}}{g_2} \theta_2 \right) = \pi_- \left(\frac{\varphi}{g_2} \right) \\ \pi_+ \left(\frac{1}{\chi^{N+1}g_1} \theta_1 \right) + \frac{\theta_2}{g_1} = \pi_+ \left(\frac{\varphi}{\chi^{N+1}g_1} \right) \end{cases}.$$

Démonstration du théorème 2. — D'après le lemme 2, on a

$$\theta_1 = -g_2\pi_- \left(\frac{\chi^{N+1}}{g_2} \theta_2 \right) + g_2\pi_- \left(\frac{\varphi}{g_2} \right),$$

ce qui permet d'avoir l'expression de θ_2 à partir de l'autre égalité du système donné dans le lemme 2 :

$$\begin{aligned} \frac{\theta_2}{g_1} &= -\pi_+ \left(\frac{1}{\chi^{N+1}g_1} \theta_1 \right) + \pi_+ \left(\frac{\varphi}{\chi^{N+1}g_1} \right) \\ &= \pi_+ \left(\tilde{\Phi}_N \pi_- \left(\frac{\chi^{N+1}}{g_2} \theta_2 \right) \right) - \pi_+ \left(\tilde{\Phi}_N \pi_- \left(\frac{\varphi}{g_2} \right) \right) + \pi_+ \left(\frac{1}{\chi^{N+1}g_1} \varphi \right). \end{aligned}$$

Par calcul direct on a :

$$\pi_+ \left(\tilde{\Phi}_N \pi_- \left(\frac{\chi^{N+1}}{g_2} \theta_2 \right) \right) = H_{\tilde{\Phi}_N} H_{\Phi_N} \left(\frac{\theta_2}{g_1} \right)$$

d'où

$$\begin{aligned} (I - H_{\tilde{\Phi}_N} H_{\Phi_N}) \left(\frac{\theta_2}{g_1} \right) &= \pi_+ \left(\frac{\chi^{N+1}}{g_1} \varphi - \tilde{\Phi}_N \pi_- \left(\frac{\varphi}{g_2} \right) \right) \\ &= \pi_+ \left(\tilde{\Phi}_N \pi_+ \left(\frac{\varphi}{g_2} \right) \right). \end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$\theta_2 = g_1 (I - H_{\tilde{\Phi}_N} H_{\Phi_N})^{-1} \pi_+ \left(\tilde{\Phi}_N \pi_+ \left(\frac{\varphi}{g_2} \right) \right).$$

Posons $H_N = (I - H_{\tilde{\Phi}_N} H_{\Phi_N})^{-1}$ et $X = \pi_+ \tilde{\Phi}_N \pi_+ \left(\frac{\varphi}{g_2} \right)$; en réutilisant les lemmes 2 et 1, on obtient

$$g_1 g_2 T_N^{-1}(f)(\varphi) = \varphi + g_2 \pi_- (\Phi_N H_N X) - g_2 \pi_- \left(\frac{\varphi}{g_2} \right) - \chi^{N+1} g_1 H_N X$$

soit

$$T_N(f)^{-1}(\varphi) = \frac{1}{g_1} \left(\frac{\varphi}{g_2} - \pi_- \left(\frac{\varphi}{g_2} \right) \right) + \frac{1}{g_1} \pi_- (\Phi_N H_N X) - \frac{\chi^{N+1}}{g_2} H_N X$$

que l'on peut écrire encore sous la forme

$$T_N(f)^{-1}(\varphi) = \frac{1}{g_1} \pi_+ \left(\frac{\varphi}{g_2} \right) - \frac{1}{g_1} \pi_+ (\Phi_N H_N X)$$

qui est la formule annoncée. \square

Démonstration du corollaire 1. — Elle est immédiate si l'on remarque que

$$[T_N(f)^{-1}]_{k,l} = \langle T_N^{-1}(f)(\chi^k), \chi^l \rangle.$$

\square

Remarque : Estelle Basor m'a communiqué une démonstration générale qui permet de retrouver la formule d'inversion utilisée dans ce travail à partir d'une formule due à Kozak [1, proposition 7.15].

3. Un théorème de S. Parter

Nous allons démontrer le théorème 1 de la section 1.

Rapelons que $f(\theta)$ désigne une fonction réelle, continue de période 2π dont le minimum m est atteint au seul point $0 \pmod{2\pi}$. On suppose f de classe $C^{2\alpha}$ sur un voisinage de 0 et $f^{(2\alpha)}(0) = \sigma^2 > 0$ est la première dérivée non nulle en 0.

En reprenant à notre compte l'argumentation de S. Parter, basée sur le principe de Courant-Weyl rappelé dans l'introduction, il suffit de considérer le symbole $f(\theta) = 4(1 - \cos \theta)^2 = |1 - \chi|^4$. D'après un théorème de G. Szegö [2, paragraphe 5-2], si λ désigne une valeur propre de $T_N(|1 - \chi|^4)$, alors $\lambda \in \left[\min_{\mathbb{T}} |1 - \chi|^4, \max_{\mathbb{T}} |1 - \chi|^4 \right] = [0, 16]$. Le but de ce qui suit consiste donc à évaluer le polynôme caractéristique de $T_N(|1 - \chi|^4 - \lambda)$ pour $\lambda \in [0, 4^2]$.

3.1. Factorisation du symbole

PROPOSITION 1. — Soit $\lambda \in [0, 4^2]$.

1. On a $|1 - \chi|^4 - \lambda = \bar{\chi}^2 \left(\chi^2 - (2 - \sqrt{\lambda})\chi + 1 \right) \left(\chi^2 - (2 + \sqrt{\lambda})\chi + 1 \right)$.
2. La fonction $|1 - \chi|^4 - \lambda$ admet les racines $\{\chi_0, \bar{\chi}_0, a, \frac{1}{a}\}$ où $\chi_0 \in \mathbb{T}$ et $a \in]0, 1[$ vérifient

$$\begin{cases} \chi_0 = \frac{1}{2} \left(2 - \sqrt{\lambda} + i\lambda^{\frac{1}{4}} \sqrt{4 - \sqrt{\lambda}} \right) = e^{i\theta_0} \\ a = \frac{1}{2} \left(2 + \sqrt{\lambda} + \lambda^{\frac{1}{4}} \sqrt{4 + \sqrt{\lambda}} \right) = e^{\theta_1} \end{cases} .$$

3. On a $|1 - \chi|^4 - \lambda = g_1 g_2$ où

$$\begin{cases} g_1 = \frac{1}{a}(\chi_0 - \chi)(1 - a\chi) \\ g_2 = \bar{\chi}_0(\chi_0 - \bar{\chi})(1 - a\bar{\chi}) \end{cases} .$$

Démonstration de la proposition 1. — On a $(X^2 - \mu^2) = (X - \mu)(X + \mu)$. En remplaçant X par $|1 - \chi|^2$ et μ par $\sqrt{\lambda}$, on obtient

$$\begin{aligned} |1 - \chi|^4 - \lambda &= (2 - \sqrt{\lambda} - \chi - \bar{\chi})(2 + \sqrt{\lambda} - \chi - \bar{\chi}) \\ &= \bar{\chi}^2 \left(\chi^2 - (2 - \sqrt{\lambda})\chi + 1 \right) \left(\chi^2 - (2 + \sqrt{\lambda})\chi + 1 \right) . \end{aligned}$$

Les deux derniers points sont tout aussi immédiats. □

On remarque que g_1 et g_2 ne vérifient pas l'hypothèse du théorème d'inversion. C'est pourquoi nous appliquerons dans les calculs le théorème d'inversion avec le symbole régularisé : $f_{\lambda,r} = g_{1,r} g_{2,r}$, où $0 < r < 1$, et où

$$\begin{cases} g_{1,r} = \frac{1}{a}(\chi_0 - r\chi)(1 - a\chi) \\ g_{2,r} = \bar{\chi}_0(\chi_0 - r\bar{\chi})(1 - a\bar{\chi}) \end{cases} .$$

On vérifie que $g_{1,r}$, $\bar{g}_{2,r}$, $\frac{1}{g_{1,r}}$ et $\frac{1}{\bar{g}_{2,r}}$ appartiennent à H^∞ . Pour alléger, on écrira f_λ au lieu de $f_{\lambda,r}$.

3.2. Équation caractéristique de $T_N(f_\lambda)$

La formule d'inversion nécessite dans sa mise en œuvre le calcul de l'opérateur $(I - H_{\bar{\Phi}_N} H_{\Phi_N})^{-1}$. Nous allons pour cela faire plusieurs remarques, énoncées sous forme de propositions.

PROPOSITION 2. — On a $\tilde{X}_0 = \pi_+ \left(\tilde{\Phi}_N \pi_+ \left(\frac{1}{g_2} \right) \right) \in \text{vect} \{ \varepsilon_0, \varepsilon_1 \}$ où $\varepsilon_0 = \frac{1}{\chi_0 - r\chi}$ et $\varepsilon_1 = \frac{1}{1 - a\chi}$.

De même $X_0 = \pi_+ \left(\bar{\Phi}_N \pi_+ \left(\frac{1}{\bar{g}_1} \right) \right) \in \text{vect} \{ \varepsilon_2, \varepsilon_1 \}$ où $\varepsilon_2 = \frac{1}{\bar{\chi}_0 - r\chi}$.

Cette proposition est une conséquence du lemme suivant.

LEMME 3. — Soit $P(X)$ le polynôme complexe défini par $P(X) = \sum_{j=0}^d a_j X^j$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(i) \quad \pi_+ \left(\frac{\bar{\chi}^n P(\bar{\chi})}{g_1} \right) = \frac{a}{r - a\chi_0} \left(r^{n+1} \bar{\chi}_0^n P(r\bar{\chi}_0) \varepsilon_0 - a^{n+1} P(a) \varepsilon_1 \right).$$

$$(ii) \quad \pi_+ \left(\frac{\bar{\chi}^n P(\bar{\chi})}{\bar{g}_2} \right) = \frac{a\bar{\chi}_0}{r - a\bar{\chi}_0} \left(r^{n+1} \chi_0^n P(r\chi_0) \varepsilon_2 - a^{n+1} P(a) \varepsilon_1 \right).$$

Démonstration du lemme 3 :

(i) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\pi_+ \left(\frac{\bar{\chi}^n}{g_1} \right) = \frac{a}{r - a\chi_0} \left(r\pi_+ \left(\frac{\bar{\chi}^n}{\chi_0 - r\chi} \right) - a\pi_+ \left(\frac{\bar{\chi}^n}{1 - a\chi} \right) \right),$$

or

$$\pi_+ \left(\frac{\bar{\chi}^n}{\chi_0 - r\chi} \right) = \frac{(r\bar{\chi}_0)^n}{\chi_0 - r\chi} \quad \text{et} \quad \pi_+ \left(\frac{\bar{\chi}^n}{1 - a\chi} \right) = \frac{a^n}{1 - a\chi}.$$

D'où

$$\pi_+ \left(\frac{\bar{\chi}^n}{g_1} \right) = \frac{a}{r - a\chi_0} \left(\frac{r^{n+1} \bar{\chi}_0^n}{\chi_0 - r\chi} - \frac{a^{n+1}}{1 - a\chi} \right).$$

Comme $\bar{\chi}^n P(\bar{\chi}) = \sum_{j=0}^d a_j \bar{\chi}^{n+j}$, la formule associée résulte de la linéarité de la projection.

(ii) se démontre de la même manière. □

Démonstration de la proposition 2. — On a :

$$\tilde{X}_0 = \pi_+ \left(\tilde{\Phi}_N \pi_+ \left(\frac{1}{g_2} \right) \right) \text{ avec } \tilde{\Phi}_N = \frac{g_2}{g_1} \bar{\chi}^{N+1},$$

or

$$\begin{aligned} \pi_+ \left(\frac{1}{g_2} \right) &= \chi_0 \pi_+ \left(\frac{1}{(\chi_0 - r\bar{\chi})(1 - a\bar{\chi})} \right) \\ &= \frac{\chi_0}{r - \chi_0 a} \left(\pi_+ \left(\frac{r}{(\chi_0 - r\bar{\chi})} \right) - \pi_+ \left(\frac{a}{(1 - a\bar{\chi})} \right) \right) \\ &= \frac{\chi_0}{r - \chi_0 a} (r\bar{\chi}_0 - a) \\ &= 1. \end{aligned}$$

D'où

$$\tilde{X}_0 = \pi_+ \left(\frac{g_2}{g_1} \bar{\chi}^{N+1} \right).$$

On applique la formule (i) avec $P(\chi) = \bar{\chi}_0(\chi_0 - r\chi)(1 - a\chi)$. En effet $g_2 = P(\bar{\chi})$. On obtient pour $n = N + 1$

$$\begin{aligned} \tilde{X}_0 &= \frac{a}{r - a\chi_0} (r^{n+1} \bar{\chi}_0^{n+1} (\chi_0 - r^2 \bar{\chi}_0) (1 - ar\bar{\chi}_0) \varepsilon_0 \\ &\quad - a^{n+1} \bar{\chi}_0 (\chi_0 - ra) (1 - a^2) \varepsilon_1). \end{aligned}$$

De la même manière, $X_0 = \pi_+ \left(\tilde{\Phi}_N \pi_+ \left(\frac{1}{g_1} \right) \right)$, se récrit :

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{a}{r - a\bar{\chi}_0} (r^{n+1} \bar{\chi}_0^{n+1} (1 - r^2 \chi_0^2) (1 - ar\chi_0) \varepsilon_2 \\ &\quad - a^{n+1} \bar{\chi}_0 (\bar{\chi}_0 - ra) (1 - a^2) \varepsilon_1). \end{aligned}$$

□

PROPOSITION 3. — *Le plan complexe $\mathcal{P} = \text{vect} \{ \varepsilon_0, \varepsilon_1 \}$ est stable par $I - H_{\tilde{\Phi}_N} H_{\Phi_N}$. Ainsi $(I - H_{\tilde{\Phi}_N} H_{\Phi_N}) \Big|_{\mathcal{P}}$ est un endomorphisme de \mathcal{P} , et se représente dans $\{ \varepsilon_0, \varepsilon_1 \}$ par la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 - (\lambda\alpha + \mu\gamma) & -(\nu\alpha + \sigma\gamma) \\ -(\lambda\beta + \mu\delta) & 1 - (\nu\beta + \sigma\delta) \end{pmatrix} \quad (6)$$

où

$$\begin{aligned} \alpha &= ar^{N+3} \frac{1 - ar\bar{\chi}_0}{r - a\chi_0} \bar{\chi}_0^{N+3} & \beta &= -a^{N+4} \bar{\chi}_0 \frac{1 - a^2}{r - a\chi_0} \\ \gamma &= r^{N+3} a \bar{\chi}_0^{N+3} \frac{\chi_0 - r\bar{\chi}_0}{r - a\chi_0} & \delta &= -a^{N+4} \bar{\chi}_0 \frac{\chi_0 - ar}{r - a\chi_0} \\ \lambda &= \frac{r^{N+3}}{a} \frac{1 - ar\bar{\chi}_0}{r - a\chi_0} \bar{\chi}_0^{N+1} & \mu &= -a^{N+2} \chi_0 \frac{1 - a^2}{r - a\chi_0} \\ \nu &= \frac{r^{N+3}}{a} \frac{\chi_0 - r^2 \bar{\chi}_0}{r - a\chi_0} \bar{\chi}_0^{N+1} & \sigma &= -a^{N+2} \chi_0 \frac{\chi_0 - ar}{r - a\chi_0}. \end{aligned}$$

Démonstration de la proposition 3 :

Elle nécessite le lemme suivant.

LEMME 4. — Soit $P(X) = \sum_{j=0}^d a_j X^j$ un polynôme complexe; alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\pi_- \left(\frac{\chi^n P(\chi)}{g_2} \right) = \frac{\chi_0}{r - a\chi_0} (r^{n+2} \bar{\chi}_0^{n+1} P(r\bar{\chi}_0) e_0 - a^{n+2} P(a) e_1),$$

où

$$e_0 = \frac{\bar{\chi}}{\chi_0 - r\bar{\chi}} \quad \text{et} \quad e_1 = \frac{\bar{\chi}}{1 - a\bar{\chi}}$$

Démonstration. — La démonstration est analogue à celle du lemme 3. \square

Evaluons $H_{\Phi_N}(\varepsilon_0)$ et $H_{\Phi_N}(\varepsilon_1)$, on a :

$$\begin{aligned} H_{\Phi_N}(\varepsilon_0) &= \pi_- \left(\frac{g_1}{g_2} \chi^{N+1} \varepsilon_0 \right) \\ &= \pi_- \left(\frac{1}{a\bar{\chi}_0} \frac{(\chi_0 - r\chi)(1 - a\chi)}{(\chi_0 - r\bar{\chi})(1 - a\bar{\chi})} \frac{\chi^{N+1}}{\chi_0 - r\chi} \right) \\ &= \frac{1}{a} \pi_- \left(\frac{1}{\bar{\chi}_0} \frac{(1 - a\chi)\chi^{N+1}}{(\chi_0 - r\bar{\chi})(1 - a\bar{\chi})} \right) \\ &= \frac{1}{a} \pi_- \left(\frac{1}{\bar{\chi}_0} \frac{(1 - a\chi)\chi^{N+1}}{g_2} \right) \\ &= \frac{1}{a} \frac{\chi_0}{r - a\chi_0} (r^{N+3} \bar{\chi}_0^{N+2} (1 - ar\bar{\chi}_0) e_0 - a^{N+3} (1 - a^2) e_1), \end{aligned}$$

d'après le lemme 4 et donc

$$H_{\Phi_N}(\varepsilon_0) = \lambda e_0 + \mu e_1,$$

avec

$$\lambda = \frac{r^{N+3}}{a} \frac{1 - ar\bar{\chi}_0}{r - a\chi_0} \bar{\chi}_0^{N+1} \quad \text{et} \quad \mu = -a^{N+2} \chi_0 \frac{1 - a^2}{r - a\chi_0}.$$

De même,

$$\begin{aligned} H_{\Phi_N}(\varepsilon_1) &= \pi_- \left(\frac{g_1}{g_2} \chi^{N+1} \varepsilon_1 \right) \\ &= \pi_- \left(\frac{1}{a\bar{\chi}_0} \frac{(\chi_0 - r\chi)(1 - a\chi)}{(\chi_0 - r\bar{\chi})(1 - a\bar{\chi})} \frac{\chi^{N+1}}{1 - a\chi} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{a} \pi_- \left(\frac{1}{\bar{\chi}_0} \frac{(\chi_0 - r\chi) \chi^{N+1}}{(\chi_0 - r\bar{\chi})(1 - a\bar{\chi})} \right) \\
 &= \frac{1}{a} \pi_- \left(\frac{1}{\bar{\chi}_0} \frac{(\chi_0 - r\chi) \chi^{N+1}}{g_2} \right) \\
 &= \frac{1}{a} \frac{\chi_0}{r - a\chi_0} (r^{N+3} \bar{\chi}_0^{N+2} (\chi_0 - r^2 \bar{\chi}_0) e_0 - a^{N+3} (\chi_0 - ra) e_1),
 \end{aligned}$$

d'après le lemme 4. Ainsi

$$H_{\Phi_N}(\varepsilon_1) = \nu e_0 + \sigma e_1$$

avec

$$\nu = \frac{r^{N+3}}{a} \frac{\chi_0 - r^2 \bar{\chi}_0}{r - a\chi_0} \bar{\chi}_0^{-N+1} \quad \sigma = -a^{N+2} \chi_0 \frac{\chi_0 - ar}{r - a\chi_0}.$$

De même évaluons $H_{\tilde{\Phi}_N}(e_0)$ et $H_{\tilde{\Phi}_N}(e_1)$, on a :

$$\begin{aligned}
 H_{\tilde{\Phi}_N}(e_0) &= \pi_+ \left(\frac{g_2}{g_1} \bar{\chi}^{N+1} e_0 \right) \\
 &= \pi_+ \left(\frac{\bar{\chi}_0 (\chi_0 - r\bar{\chi})(1 - a\bar{\chi})}{g_1} \frac{\bar{\chi}^{N+2}}{\chi_0 - r\bar{\chi}} \right) \\
 &= \bar{\chi}_0 \pi_+ \left(\frac{(1 - a\bar{\chi})}{g_1} \bar{\chi}^{N+2} \right) \\
 &= \frac{a\bar{\chi}_0}{r - a\chi_0} (r^{N+3} \bar{\chi}_0^{N+2} (1 - ar\bar{\chi}_0) \varepsilon_0 - a^{N+3} (1 - a^2) \varepsilon_1),
 \end{aligned}$$

d'où

$$H_{\tilde{\Phi}_N}(e_0) = \alpha \varepsilon_0 + \beta \varepsilon_1$$

avec

$$\alpha = ar^{N+3} \frac{1 - ar\bar{\chi}_0}{r - a\chi_0} \bar{\chi}_0^{-N+3} \quad \beta = -a^{N+4} \bar{\chi}_0 \frac{1 - a^2}{r - a\chi_0}.$$

Par un calcul analogue, on obtient :

$$H_{\tilde{\Phi}_N}(e_1) = \gamma \varepsilon_0 + \delta \varepsilon_1$$

avec

$$\gamma = r^{N+3} a \bar{\chi}_0^{-N+3} \frac{\chi_0 - r\bar{\chi}_0}{r - a\chi_0}, \quad \delta = -a^{N+4} \bar{\chi}_0 \frac{\chi_0 - ar}{r - a\chi_0}.$$

Des deux points précédents, on déduit immédiatement que

$$\begin{cases} (I - H_{\tilde{\Phi}_N} H_{\Phi_N}) \varepsilon_0 = (1 - (\lambda\alpha + \mu\gamma)) \varepsilon_0 - (\lambda\beta + \mu\delta) \varepsilon_1 \\ (I - H_{\tilde{\Phi}_N} H_{\Phi_N}) \varepsilon_0 = -(\alpha\nu + \sigma\gamma) \varepsilon_0 - (\beta\nu + \delta\sigma) \varepsilon_1 \end{cases}.$$

□

Rappelons que A est la matrice définie par l'équation (6).

PROPOSITION 4. — *Le polynôme caractéristique de $T_N(f)$ est $\det(A)$.*

Démonstration de la proposition 4 :

Notons par $T_{1,1}$ le terme $[T_N(f_\lambda)^{-1}]_{1,1}$. On a d'une part

$$\begin{aligned} T_{1,1} &= \frac{\text{cof } [T_N(f_\lambda)]_{1,1}}{\det(T_N(f_\lambda))} \\ &= \frac{\det(T_{N-1}(f_\lambda))}{\det(T_N(f_\lambda))} \end{aligned} \quad (7)$$

Par ailleurs, d'après le corollaire 1, $T_{1,1}$ est de la forme

$$T_{1,1} = T_1 - \frac{1}{\det(A)} \langle \tilde{A}\tilde{X}_0, X_0 \rangle \quad (8)$$

où \tilde{A} est la transposée de la comatrice de A . Par conséquent, $\det(T_N(f_\lambda))$ et $\det(T_{N-1}(f_\lambda))$ n'ayant pas de racines communes, l'équation caractéristique $\det(T_N(f_\lambda)) = 0$ équivaut à $\frac{1}{T_{1,1}} = 0$, ce qui revient d'après (8) à $\det(A) = 0$. \square

COROLLAIRE 2. — *Avec les notations de la proposition 1, le polynôme caractéristique de $T_N(f_\lambda)$ s'annule si, et seulement si, l'une ou l'autre des deux conditions suivantes est vérifiée :*

$$\begin{aligned} (i) \quad \bar{\chi}_0^{N+2} &= \frac{\chi_0 - a}{\bar{\chi}_0 - a} \frac{\bar{\chi}_0^{N+3} - a^{N+3}}{\chi_0^{N+3} - a^{N+3}} \\ (ii) \quad \bar{\chi}_0^{N+2} &= -\frac{\chi_0 - a}{\bar{\chi}_0 - a} \frac{\bar{\chi}_0^{N+3} - a^{N+3}}{\chi_0^{N+3} - a^{N+3}}. \end{aligned}$$

Démonstration du corollaire 2. — Par un calcul immédiat, avec les notations de la proposition 3, on a

$$\det(A) = 1 - \nu\beta - \sigma\delta - \lambda\alpha - \mu\gamma + (\alpha\delta - \beta\gamma)(\lambda\sigma - \mu\nu) \quad (9)$$

Par un argument de continuité, en faisant tendre r vers 1, on obtient l'équation caractéristique recherchée ; un calcul direct montre qu'elle s'écrit

$$\begin{aligned} 1 + a^{2(N+3)}\bar{\chi}_0^{2(N+3)} - \chi_0^2 \left(\frac{1 - a\bar{\chi}_0}{1 - a\chi_0} \right)^2 \left(a^{2(N+3)} + \bar{\chi}_0^{2(N+3)} \right) \\ + 2a^{N+3}\bar{\chi}_0^{(N+1)} \frac{(1 - a^2)(1 - \bar{\chi}_0^2)}{(1 - a\chi_0)^2} = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

On remarque alors l'identité :

$$\frac{(1 - a^2)(1 - \bar{\chi}_0^2)}{(1 - a\chi_0)^2} = \left(\frac{1 - a\bar{\chi}_0}{1 - a\chi_0} \right)^2 - \bar{\chi}_0^2$$

à partir de laquelle on obtient pour (10) la forme

$$(1 - (a\bar{\chi}_0)^{N+3})^2 - \left(\bar{\chi}_0 \left(\frac{1 - a\bar{\chi}_0}{1 - a\chi_0} \right) (a^{N+3} - \bar{\chi}_0^{N+3}) \right)^2 = 0. \quad (11)$$

qui aboutit aux équations annoncées. \square

3.3. Démonstration du théorème de Parter

D'après l'équation (i) du corollaire 2, on obtient pour la partie réelle :

$$\begin{aligned} & \cos(N+2)\theta_0 \left[(\cos\theta_0 - e^{\theta_1}) \sin(N+3)\theta_0 - (\cos(N+3)\theta_0 - e^{(N+3)\theta_1}) \sin\theta_0 \right] \\ & - \sin(N+2)\theta_0 \left[(\cos\theta_0 - e^{\theta_1}) (\cos(N+3)\theta_0 - e^{(N+3)\theta_1}) \sin\theta_0 \sin(N+3)\theta_0 \right] \\ & = -(\cos\theta_0 - e^{\theta_1}) \sin(N+3)\theta_0 + \sin\theta_0 (\cos(N+3)\theta_0 - e^{(N+3)\theta_1}). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} & \cos(N+2)\theta_0 \left(\sin(N+2)\theta_0 - e^{\theta_1} \sin(N+3)\theta_0 + e^{(N+3)\theta_1} \sin\theta_0 \right) \\ & - \sin(N+2)\theta_0 \left(\cos(N+2)\theta_0 - e^{\theta_1} \cos(N+3)\theta_0 \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. - e^{(N+3)\theta_1} \cos\theta_0 + e^{(N+4)\theta_1} \right) \\ & = -\sin(N+2)\theta_0 + e^{\theta_1} \sin(N+3)\theta_0 - e^{(N+3)\theta_1} \sin\theta_0. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} & \sin(N+2)\theta_0 \left(1 - e^{(N+4)\theta_1} \right) - 2e^{\theta_1} \sin\left(\frac{N+4}{2}\right)\theta_0 \cos\left(\frac{N+2}{2}\right)\theta_0 \\ & + 2e^{(N+3)\theta_1} \sin\left(\frac{N+4}{2}\right)\theta_0 \cos\left(\frac{N+2}{2}\right)\theta_0 = 0. \end{aligned}$$

De cette dernière égalité on déduit :

$$(i') \left[\sin\left(\frac{N+3}{2}\right)\theta_0 \cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \right] \sinh\frac{\theta_1}{2} \cosh\left(\frac{N+3}{2}\theta_1\right) - \cos\left(\frac{N+3}{2}\right)\theta_0 \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \cosh\frac{\theta_1}{2} \sinh\left(\frac{N+3}{2}\theta_1\right) = 0.$$

De la même manière, on obtient pour la partie imaginaire :

$$(i'') \left[\cos\left(\frac{N+3}{2}\right)\theta_0 \cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \right] \sinh\frac{\theta_1}{2} \sinh\left(\frac{N+3}{2}\theta_1\right) + \sin\left(\frac{N+3}{2}\right)\theta_0 \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \cosh\frac{\theta_1}{2} \cosh\left(\frac{N+3}{2}\theta_1\right) = 0.$$

S. Parter obtient les formules (i') et (i''). Le reste de la démonstration est alors détaillé dans [7, pages 166 à 168)]. Donnons-en le principe :

- De (i') et (i'') on déduit que $\theta_0 = \frac{x}{N+3}$ où $x = O(1)$
- Il en résulte que (i') et (i'') sont asymptotiquement équivalentes à

$$\begin{cases} \tan \frac{N+3}{2}\theta_0 = \tanh \frac{N+3}{2}\theta_0 \\ \tan \frac{N+3}{2}\theta_0 = -\tanh \frac{N+3}{2}\theta_0 \end{cases} \quad (12)$$

- Or les solutions non nulles de $\tan(y) = \pm \tanh(y)$ forment un ensemble discret entièrement déterminé par les relations

$$\tan\left(\frac{(2k+1)\pi + E_k}{4}\right) = (-1)^k \tanh\left(\frac{(2k+1)\pi + E_k}{4}\right)$$

où $k \in \mathbb{N}^*$ et où les E_k sont des constantes (petites).

- Un développement asymptotique de $\cos(\theta_0) = \frac{2-\sqrt{\lambda}}{2}$ (voir proposition 1) donne alors le développement asymptotique annoncé de $\lambda_k(N)$.

4. Spectre d'un opérateur de Toeplitz à minima multiples

4.1. Deux théorèmes de structure

LEMME 5. — Soit $\lambda \in [0, 4]$, $\chi = e^{i\theta}$, $p \in \mathbb{N}$ alors il existe $\chi_0 \in \mathbb{T}$ tel que :

$$|1 - \chi^p|^2 - \lambda = \bar{\chi}_0^p g_1 g_2$$

où

$$\begin{cases} g_1 = \prod_{u \in U_p} (u\chi_0 - \chi) \\ g_2 = \prod_{u \in U_p} (u\chi_0 - \bar{\chi}) \end{cases}$$

U_p désigne le groupe des racines p -ièmes de l'unité dans \mathbb{C} .

Démonstration du lemme 5. — On a :

$$\begin{aligned} |1 - \chi^p|^2 - \lambda &= -\bar{\chi}^p (\chi^{2p} - (2 - \lambda)\chi^p + 1) \\ &= -\bar{\chi}^p (\chi^p - \chi_0^p)(\chi^p - \bar{\chi}_0^p) \end{aligned}$$

et si $\chi_0^p = \frac{(2-\lambda)+i\sqrt{4-(2-\lambda)}}{2}$ alors,

$$\begin{aligned} |1 - \chi^p|^2 - \lambda &= \bar{\chi}_0^p (\chi_0^p - \chi^p)(\chi_0^p - \bar{\chi}^p) \\ &= \bar{\chi}_0^p \quad g_1 \quad g_2. \end{aligned}$$

□

Remarque : On a donc : $\cos p\theta_0 = 1 - \frac{\lambda}{2} = |1 - \chi_0^p|^2$.

En suivant la démarche de H. Widom, nous donnons un théorème de structure permettant, à l'aide de l'équation précédente, de travailler sur les valeurs propres inférieures du spectre de $T_N(1 - \cos p\theta)$, $p \in \mathbb{N}$.

Avec les notations précédentes, on a :

THÉORÈME 3. — Soit $f_{\lambda,r} = g_{1,r}g_{2,r}$, où $r \in [0, 1[$,

$$g_{1,r} = \prod_{u \in U_p} (u\chi_0 - r\chi), \quad g_{2,r} = \prod_{u \in U_p} (u\chi_0 - r\bar{\chi}).$$

$$\text{Posons } \Phi_N = \frac{g_{1,r}}{g_{2,r}} \chi^{N+1} \quad \text{et} \quad \tilde{\Phi}_N = \frac{g_{2,r}}{g_{1,r}} \bar{\chi}^{N+1}.$$

On a alors,

$$(i) \quad E = \text{vect} \left\{ \frac{1}{u\chi_0 - r\chi} \right\}_{u \in U_p} \quad \text{est stable par } (I - H_{\tilde{\Phi}_N} H_{\Phi_N}) \Big|_E.$$

On note A_p la matrice représentant $(I - H_{\tilde{\Phi}_N} H_{\Phi_N}) \Big|_E$ dans la base $\left\{ \frac{1}{u\chi_0 - r\chi} \right\}_{u \in U_p}$ de E .

(ii) Soit $\lambda \in [0, 4]$ tel que $\lambda = |1 - \chi_0^p|^2$, alors λ est une valeur propre de $T_N(|1 - \chi^p|^2)$ si, et seulement si,

$$\chi_0 = e^{i\theta_0} \quad \text{et} \quad \lim_{r \rightarrow 1} \det(A_p) = 0.$$

Démonstration du théorème 3. — On remarque tout d'abord que le symbole $f_{\lambda,r}$ vérifie les hypothèses du théorème d'inversion. Afin de le mettre en application, nous utilisons le lemme suivant.

LEMME 6. — Soit $P(X) = \sum_{j=0}^d a_j X^j$ un polynôme sur \mathbb{C} et $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$(i) \quad \pi_+ \left(\frac{\bar{\chi}^n P(\bar{\chi})}{g_{1,r}} \right) = \sum_{u \in U_p} \frac{\lambda_u}{u\chi_0 - r\chi},$$

$$(ii) \quad \pi_+ \left(\frac{\chi^n P(\chi)}{g_{2,r}} \right) = \sum_{u \in U_p} \mu_u \frac{\bar{\chi}}{u\chi_0 - r\bar{\chi}},$$

où λ_u et μ_u sont des constantes ne dépendant que de P , χ_0 et n .

Démonstration du lemme 6 :

- (i) Il suffit de montrer la formule pour $\pi_+ \left(\frac{\bar{\chi}^s}{g_{1,r}} \right)$, $s \in \mathbb{N}^*$, alors (i) s'en déduit par linéarité. Le calcul est alors analogue à celui du lemme 3.
- (ii) se démontre de la même façon. □

On en déduit pour tout $s \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} H_{\Phi_N}(\chi^s) &= \pi_-(\Phi_N \chi^{N+s+1}) \\ &= \pi_- \left(\frac{g_{1,r}}{g_{2,r}} \chi^{N+s+1} \right) \\ &= \sum_{u \in U_p} \alpha_u \frac{\bar{\chi}}{u\chi_0 - r\bar{\chi}} \text{ d'après (ii).} \end{aligned}$$

$$\text{et } H_{\tilde{\Phi}_N} \left(\frac{\bar{\chi}}{u\chi_0 - r\bar{\chi}} \right) = \pi_+ \left(\frac{g_{2,r}}{g_{1,r}} \bar{\chi}^{N+2} \right) = \sum_{u \in U_p} \beta_u \frac{\bar{\chi}}{u\chi_0 - r\bar{\chi}} \text{ d'après (i).}$$

Notons alors A_p la matrice qui représente l'endomorphisme $I - H_{\tilde{\Phi}_N} H_{\Phi_N} \Big|_E$. Un calcul simple montre que les vecteurs $\tilde{\kappa}_0 = \pi_+ \left(\tilde{\Phi}_N \pi_+ \left(\frac{1}{g_{2,r}} \right) \right)$ et $\kappa_0 = \pi_+ \left(\tilde{\Phi}_N \pi_+ \left(\frac{1}{g_{1,r}} \right) \right)$ appartiennent au sous-espace E . Notons \varkappa_0 et $\tilde{\varkappa}_0$ leur représentation matricielle dans la base $\left\{ \frac{1}{u\chi_0 - \bar{\chi}} \right\}_{u \in U_p}$.

En raisonnant comme dans la proposition 4, la formule d'inversion de la section 2 donne :

$$T_N(f_{\lambda,r})^{-1} = T_1 - \frac{1}{\det(A_p)} \langle \tilde{A}_p \tilde{\varkappa}_0, \varkappa_0 \rangle$$

où \tilde{A}_p est la transposée de la comatrice de A_p . Le même argument montre alors que l'équation caractéristique s'écrit $\det(A_p) = 0$.

Par un argument de continuité, on obtient les valeurs propres de $|1 - \chi^p|^2$ en faisant tendre r vers 1, ce qui achève la démonstration du théorème 3. □

Remarque : On régularise le symbole $|1 - \chi^p|^2 - \lambda$ par $\tilde{f}_{\lambda,r} = \bar{\chi}_0^p g_{1,r} g_{2,r}$. À toute valeur propre $\tilde{\lambda}$ de $T_N(\tilde{f}_{\lambda,r})$ correspond une valeur propre de $T_N(f_{\lambda,r})$, ($\lambda = \chi_0^p \tilde{\lambda}$). De plus, si p est pair, on a alors une factorisation où $\bar{\chi}_0^p$ n'intervient pas.

LEMME 7. — *On a :*

$$|1 - \chi^{2p}|^2 - \lambda = -g_1 g_2$$

où

$$\begin{cases} g_1 = (\chi^p + \chi_0^p)(\bar{\chi}_0^p + \chi^p) \\ g_2 = (\bar{\chi}_0^p - \bar{\chi}^p)(\chi_0^p - \bar{\chi}^p) \end{cases} .$$

Démonstration du lemme 7. — En partant du lemme 5, on a :

$$\begin{aligned} |1 - \chi^{2p}| - \lambda &= -\bar{\chi}^{2p}(\chi^p - \chi_0^p)(\chi^p + \chi_0^p)(\chi^p - \bar{\chi}_0^p)(\chi^p + \bar{\chi}_0^p) \\ &= -(1 - \chi_0^p \bar{\chi}_0^p)(\chi^p + \bar{\chi}_0^p)(1 - \bar{\chi}_0^p \bar{\chi}_0^p)(\chi^p + \bar{\chi}_0^p) \\ &= -(\bar{\chi}_0^p - \bar{\chi}^p)(\chi^p + \chi_0^p)(\chi_0^p - \bar{\chi}^p)(\bar{\chi}_0^p + \chi^p) \\ &= -g_1 g_2. \end{aligned}$$

□

Le théorème de structure utile dans le cas où $f = |1 - \chi^{2p}|^2$ est :

THÉORÈME 4. — Soit $f_{\lambda,r} = g_{1,r} g_{2,r}$ où $r \in [0, 1[$,

$$\begin{cases} g_{1,r} = \prod_{u \in N_p} (u\bar{\chi}_0 - r\chi)(u\chi_0 - r\chi) \\ g_{2,r} = \prod_{u \in U_p} (u\bar{\chi}_0 - r\bar{\chi})(u\chi_0 - r\bar{\chi}) \end{cases} ,$$

où N_p est l'ensemble des racines p -ièmes de -1 et U_p est le groupe des racines p -ièmes de 1 . Posons comme précédemment,

$$\Phi_N = \frac{g_{1,r}}{g_{2,r}} \chi^{N+1} \text{ et } \tilde{\Phi}_N = \frac{g_{2,r}}{g_{1,r}} \bar{\chi}^{N+1}.$$

Alors :

(i) on a

$$F = \text{vect} \left\{ \frac{1}{u\bar{\chi}_0 - r\chi}, \frac{1}{u\chi_0 - r\chi} \right\}_{u \in N_p}$$

est stable par $I - H_{\tilde{\Phi}_N} H_{\Phi_N}$.

(ii) On note A_{2p} la matrice représentant $(I - H_{\tilde{\Phi}_N} H_{\Phi_N})|_F$ dans la base $\left\{ \frac{1}{u\bar{\chi}_0 - r\chi}, \frac{1}{u\chi_0 - r\chi} \right\}_{u \in N_p}$. Un réel $\lambda \in [0, 4]$ tel que $\lambda = |1 - \chi_0^{2p}|^2$ est une valeur propre de $T_N(|1 - \chi^{2p}|^2)$ si et seulement si $\chi_0 = e^{i\theta_0}$ vérifie :

$$\lim_{r \rightarrow 1} \det(A_{2p}) = 0 \text{ et } \lambda = 2(1 - \cos 2p\theta_0).$$

Démonstration du théorème 4. — Elle est identique à celle du théorème 3.

□

Les deux théorèmes de structure permettent de travailler avec les valeurs propres inférieures des opérateurs $T_N(1 - \cos p\theta)$. Pour $p \geq 3$, les calculs sont importants.

Illustrons ces théorèmes pour $p = 2$ en utilisant le théorème 4.

THÉORÈME 5. — Soit $\lambda_k(N)$ la k -ième valeur propre de $T_N(|1 - \chi^2|^2)$, on a :

$$\lambda_k(2N) = \lambda_k(2N - 1) = \left(\frac{k\pi}{N+1}\right)^2 - \frac{1}{12} \left(\frac{k\pi}{N+1}\right)^4 + o\left(\frac{1}{N^5}\right).$$

Nous utilisons le lemme suivant.

LEMME 8. — Conformément au théorème 4, on pose : $\varepsilon_1 = \frac{1}{\bar{\chi}_0 + r\chi}$, $\varepsilon_2 = \frac{1}{\chi_0 + r\bar{\chi}}$, $e_1 = \frac{\bar{\chi}}{\chi_0 - r\bar{\chi}}$, $e_2 = \frac{\bar{\chi}}{\bar{\chi}_0 - r\bar{\chi}}$. Soit $n \in \mathbb{N}$; on a :

$$(i) \quad \pi_+ \left(\frac{\bar{\chi}^n}{(\chi_0 + r\chi)(\bar{\chi}_0 + r\chi)} \right) = \frac{(-1)^n}{\bar{\chi}_0 - \chi_0} (r\bar{\chi}_0)^u \varepsilon_1 - \frac{(-1)^n}{\bar{\chi}_0 - \chi_0} (r\chi_0)^n \varepsilon_2$$

$$(ii) \quad \pi_- \left(\frac{\bar{\chi}^n}{(\chi - r\bar{\chi})(\bar{\chi}_0 - r\bar{\chi})} \right) = \frac{(r\bar{\chi}_0)^{n+1}}{\bar{\chi}_0 - \chi_0} e_1 - \frac{(r\chi_0)^{n+1}}{\bar{\chi}_0 - \chi_0} e_2$$

Démonstration du lemme 8. — On a pour (i) :

$$\begin{aligned} \pi_+ \left(\frac{\bar{\chi}^n}{(\chi_0 + r\chi)(\bar{\chi}_0 + r\chi)} \right) &= \frac{1}{\bar{\chi}_0 - \chi_0} \left[\pi_+ \left(\frac{\bar{\chi}^n}{\chi_0 + r\chi} \right) - \pi_+ \left(\frac{\bar{\chi}^n}{\bar{\chi}_0 + r\chi} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\bar{\chi}_0 - \chi_0} \left[(-1)^n (r\bar{\chi}_0)^n \frac{1}{\chi_0 + r\chi} \right. \\ &\quad \left. - (-1)^n (r\chi_0)^u \frac{1}{\bar{\chi}_0 + r\chi} \right] \end{aligned}$$

Il en va de même pour (ii). □

PROPOSITION 5. — La matrice A_2 du théorème 4 s'écrit :

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 - (\theta_1\varphi_1 + \mu_1\varphi_2) & \theta_1\psi_1 + \mu_1\psi_2 \\ \theta_2\varphi_1 + \mu_2\varphi_2 & 1 + (\theta_2\psi_1 + \mu_2\psi_2) \end{pmatrix} \quad (13)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_1 = \frac{\bar{\chi}_0}{\bar{\chi}_0 - \chi_0} (r\bar{\chi}_0)^{N+2} (1 + r^2) \\ \varphi_2 = -\frac{\bar{\chi}_0}{\bar{\chi}_0 - \chi_0} (r\chi_0)^{N+2} (1 + r^2\chi_0^2) \\ \psi_1 = \frac{\chi_0}{\bar{\chi}_0 - \chi_0} (r\bar{\chi}_0)^{N+2} (1 + r^2\bar{\chi}_0^2) \\ \psi_2 = -\frac{\chi_0}{\bar{\chi}_0 - \chi_0} (r\chi_0)^{N+2} (1 + r^2) \\ \theta_1 = (-1)^N \frac{\bar{\chi}_0}{\bar{\chi}_0 - \chi_0} (r\bar{\chi}_0)^{N+2} (1 + r^2) \\ \theta_2 = (-1)^N \frac{1}{\bar{\chi}_0 - \chi_0} (r\chi_0)^{N+2} (1 + r^2\chi_0) \\ \mu_1 = (-1)^N \frac{1}{\bar{\chi}_0 - \chi_0} (r\bar{\chi}_0)^{N+2} (1 + r^2\bar{\chi}_0) \\ \mu_2 = (-1)^N \frac{\chi_0}{\bar{\chi}_0 - \chi_0} (r\chi_0)^{N+2} (1 + r^2) \end{array} \right. .$$

Démonstration de la proposition 5 :

(i) On a :

$$\begin{aligned} H_{\Phi_N}(\varepsilon_1) &= \pi_- \left[\frac{(\chi_0 + r\chi)(\bar{\chi}_0 + r\bar{\chi})}{(\chi_0 - r\bar{\chi})(\bar{\chi}_0 - r\bar{\chi})} \frac{\chi^{N+1}}{(\chi_0 + r\chi)} \right] \\ &= \bar{\chi}_0 \pi_- \left[\frac{\chi^{N+1}}{(\chi_0 - r\bar{\chi})(\bar{\chi}_0 - r\bar{\chi})} \right] + r \pi_- \left[\frac{\chi^{N+2}}{(\chi_0 - r\bar{\chi})(\bar{\chi}_0 - r\bar{\chi})} \right] \\ &= \left(\frac{\bar{\chi}_0}{\bar{\chi}_0 - \chi_0} (r\bar{\chi}_0)^{N+2} + r \frac{1}{\bar{\chi}_0 - \chi_0} (r\bar{\chi}_0)^{N+3} \right) e_1 \\ &\quad - \left(\frac{\bar{\chi}_0}{\bar{\chi}_0 - \chi_0} (r\chi_0)^{N+2} + r \frac{1}{\bar{\chi}_0 - \chi_0} (r\chi_0)^{N+3} \right) e_2 \end{aligned}$$

en utilisant le lemme 8. On a donc :

$$H_{\Phi_N}(\varepsilon_1) = \varphi_1 e_1 + \varphi_2 e_2.$$

On a de même :

$$H_{\Phi_N}(\varepsilon_2) = \psi_1 e_1 + \psi_2 e_2, \quad H_{\bar{\Phi}_N}(e_1) = \theta_1 \varepsilon_1 - \theta_2 \varepsilon_2$$

et

$$H_{\bar{\Phi}_N}(e_2) = \mu_1 \varepsilon_1 - \mu_2 \varepsilon_2.$$

(ii) On déduit les formules :

$$\left\{ \begin{array}{l} [I - H_{\bar{\Phi}_N} H_{\Phi_N}](\varepsilon_1) = [1 - (\theta_1 \varphi_1 + \mu_1 \varphi_2)] \varepsilon_1 + [\theta_2 \varphi_1 + \mu_2 \varphi_2] \varepsilon_2 \\ [I - H_{\bar{\Phi}_N} H_{\Phi_N}](\varepsilon_2) = [-(\theta_1 \psi_1 + \mu_1 \psi_2)] \varepsilon_1 + [1 + (\theta_2 \psi_1 + \mu_2 \psi_2)] \varepsilon_2 \end{array} \right. .$$

Ce qui achève la démonstration. \square

PROPOSITION 6. — *L'équation caractéristique de $T_N(|1 - \chi^2|^2)$ est :*

$$(-1)^N \left[2 \left(\chi_0^{2(N+3)} + \bar{\chi}_0^{2(N+3)} \right) + (\bar{\chi}_0 + \chi_0)^2 \right] = (\bar{\chi}_0 - \chi_0)^2 \quad (14)$$

Démonstration de la proposition 6 :

D'après (ii) du théorème 4, l'équation caractéristique s'écrit $\det(A_2) = 0$. Avec les notations de la proposition 5, on obtient :

$$\lim_{r \rightarrow 1} [1 + \psi_1 \theta_2 + \psi_2 \mu_2 - \varphi_1 \theta_1 - \varphi_2 \mu_1 + (\theta_2 \mu_1 - \theta_1 \mu_2)(\varphi_1 \psi_2 + \varphi_2 \psi_1)] = 0.$$

Les formules donnent quand r tend vers 1

$$(-1)^N \left[2 \left(\chi_0^{2(N+3)} - \bar{\chi}_0^{2(N+3)} \right) + (\bar{\chi}_0 + \chi_0)^2 \right] = (\bar{\chi}_0 - \chi_0)^2$$

qui représente l'équation caractéristique de $T_N(|1 - \chi^2|^2)$. □

Démonstration du théorème 5 :

On distingue les cas N pair et N impair.

- Si N est pair, (i) s'écrit :

$$\cos 2(N+3)\theta_0 - \cos^2 \theta_0 = -\sin^2 \theta_0$$

soit

$$\cos 2(N+3)\theta_0 = \cos 2\theta_0. \quad (15)$$

On a que

$$\sin 2\theta_0 = \frac{\sqrt{4 - (2 - \lambda)^2}}{2}$$

est positif, donc pour N grand et θ_0 voisin de 0, ce θ_0 est un nombre positif, ce qui exclut la solution $(N+3)\theta_0 = -\theta_0 + k\pi$, $k \in \mathbb{N}$ (k étant fixé pour $N \rightarrow \infty$ tel que $(N+3)\theta_0 - k\pi > 0$ et $\theta_0 > 0$). On a donc

$$\theta_0 = \frac{k\pi}{N+2}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

On obtient alors :

$$\lambda_k(2N) = 2 \left(1 - \cos \frac{2k\pi}{2N+2} \right).$$

que l'on peut exprimer par le développement asymptotique

$$\lambda_k(2N) = \left(\frac{k\pi}{N+1} \right)^2 - \frac{1}{12} \left(\frac{k\pi}{N+1} \right)^4 + o\left(\frac{1}{N^5} \right).$$

- Si N est impair (i) s'écrit :

$$\cos 2(N+3)\theta_0 = 1$$

d'où

$$\theta_0 = \frac{k\pi}{N+3}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Ainsi

$$\lambda_k(2N+1) = 2 \left(1 - \cos \frac{2k\pi}{2N+4} \right)$$

que l'on exprime par

$$\lambda_k(2N+1) = \left(\frac{k\pi}{N+2} \right)^2 - \frac{1}{12} \left(\frac{k\pi}{N+2} \right)^4 + o\left(\frac{1}{N^5} \right).$$

□

On retrouve le résultat de [4] sans l'hypothèse d'unicité du minimum ([4, Ch. III, p. 785]).

On peut étendre ce résultat au cas d'un symbole positif où le zéro est atteint α fois : on montrerait qu'il correspond à un opérateur de Hankel dont la partie "utile" est une matrice carrée de rang α .

5. Étude spectrale d'une perturbation

Dans ce qui suit nous montrons sur un exemple que la méthode utilisée permet d'évaluer la perturbation des valeurs propres d'un opérateur de Toeplitz associé à un symbole perturbé.

Concrètement, notons $\lambda_k(N)$, pour k fixé, la k -ième valeur propre de la matrice de Toeplitz associée au symbole $|1 - \chi|^2$ (voir [12], [4]).

Le symbole perturbé sera ici : $f = \frac{|1-\chi|^2}{|1-\beta\chi|^2}$, $|\beta| < 1$.

THÉORÈME 6. — *Notons $\lambda_k(N)$ la k -ième plus petite valeur propre de $T_N(|1 - \chi|^2)$ et $\lambda_k^{(\beta)}(N)$ la k -ième plus petite valeur propre de l'opérateur perturbé $T_N\left(\frac{|1-\chi|^2}{|1-\beta\chi|^2}\right)$ où $0 \leq |\beta| < 1$. Alors il existe un réel $\varepsilon \in]0, 1[$ tel que, si $|\beta| < \varepsilon$,*

$$\lambda_k^{(\beta)}(N) = \lambda_k(N)p_k(N, \beta)$$

où

$$p_k(N, \beta) = \frac{1 + \frac{\left(\beta \frac{\alpha(N, k)}{N+2} + o_N(\beta)\right) \sin\left(\frac{k\pi}{N+2} + \xi\right)}{1 - \cos\left(\frac{2k\pi}{N+2}\right)}{1 + \frac{2\beta \left(\beta \frac{\alpha(N, k)}{N+2} + o_N(\beta)\right) \sin\left(\frac{k\pi}{N+2} + \xi\right)}{1 + \beta^2 - 2\beta \cos\left(\frac{k\pi}{N+2}\right)},$$

avec

$$\begin{cases} \alpha(N, 2k) &= (-1)^k 2 \sin\left(k\pi \frac{N+4}{N+2}\right) \\ \alpha(N, 2k+1) &= (-1)^k 2 \cos\left((2k+1)\frac{\pi}{2} \frac{N+4}{N+2}\right) \end{cases},$$

$$|\xi| < \left| \beta \frac{\alpha(N, k)}{N+2} + o_N(\beta) \right| \quad \begin{cases} o_N(\beta) = o(\beta) \text{ à } N \text{ fixé,} \\ o_N(\beta) = o\left(\frac{1}{N}\right) \text{ à } \beta \text{ fixé.} \end{cases}$$

Conformément à ce qui précède, nous allons factoriser le symbole $\frac{|1-\chi|^2}{|1-\beta\chi|^2} - \lambda$, pour $\lambda \in \left[0, \frac{4}{(1+\beta^2)}\right]$, (vu que $\max_{\mathbb{T}} \left(\frac{|1-\chi|^2}{|1-\beta\chi|^2}\right) = \frac{4}{(1+\beta^2)}$).

5.1. Factorisation du Symbole

PROPOSITION 7. — Pour $\lambda \in \left[0, \frac{4}{(1+\beta^2)}\right]$, il existe $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$f_\lambda = \frac{|1-\chi|^2}{|1-\beta\chi|^2} - \lambda = g_1 g_2 C(\lambda)$$

avec

$$g_1 = \frac{\chi_0 - \chi}{1 - \beta\chi}, \quad g_2 = \frac{\chi_0 - \bar{\chi}}{1 - \beta\bar{\chi}}, \quad \text{et } \chi_0 = e^{i\theta_0}.$$

Remarque : Bien entendu, θ_0 est une fonction de λ .

Démonstration de la proposition 7. — On a

$$\begin{aligned} f_\lambda &= \frac{|1-\chi|^2 - \lambda|1-\beta\chi|^2}{|1-\beta\chi|^2} \\ &= \frac{\bar{\chi}(\lambda\beta - 1)}{|1-\beta\chi|^2} \left(\chi^2 + \frac{2 - \lambda(1+\beta^2)}{(\lambda\beta - 1)} \chi + 1 \right). \end{aligned}$$

La fonction f_λ s'annule sur \mathbb{T} puisque, d'après le théorème de Szegö cité en introduction, $\lambda \in [\min_{\mathbb{T}} f, \max_{\mathbb{T}} f]$. Il en résulte l'existence de $\chi_0 \in \mathbb{T}$, $\chi_0 = e^{i\theta_0}$, tel que

$$\chi^2 + \frac{2 - \lambda(1+\beta^2)}{(\lambda\beta - 1)} \chi + 1 = (\chi - \chi_0)(\chi - \bar{\chi}_0).$$

Ainsi,

$$f_\lambda = \frac{\bar{\chi}_0(\lambda\beta - 1)}{|1 - \beta\chi|^2}(\chi - \chi_0)(\chi_0 - \bar{\chi}).$$

On pose alors :

$$C(\lambda) = \bar{\chi}_0(\lambda\beta - 1), \quad g_1 = \frac{\chi_0 - \chi}{1 - \beta\chi}, \quad g_2 = \frac{\chi_0 - \bar{\chi}}{1 - \beta\bar{\chi}}. \quad \square$$

Afin d'être sous les hypothèses du théorème 2, nous appliquons le théorème d'inversion au symbole régularisé $f_{\lambda,r} = g_{1,r}g_{2,r}$, avec : $g_{1,r} = \frac{\chi_0 - r\chi}{1 - \beta\chi}$, et $g_{2,r} = \frac{\chi_0 - r\bar{\chi}}{1 - \beta\bar{\chi}}$.

Remarques :

- (i) Les valeurs propres de $T_N(f_{\lambda,r}) = T_N(g_{1,r}g_{2,r})$ sont, pour N grand, les mêmes que celles de $T_N(C(\lambda)g_{1,r}g_{2,r})$; c'est pourquoi nous travaillons avec le symbole $f_{\lambda,r}$.
- (ii) Par souci de simplification, dans ce qui suit on écrira g_1 pour $g_{1,r}$ et g_2 pour $g_{2,r}$. De plus on posera :

$$\frac{1 - \beta\bar{\chi}}{1 - \beta\chi} = \sum_{u \geq -1} \gamma_u \chi^u, \quad \gamma_{-1} = -\beta, \quad \gamma_u = \beta^u(1 - \beta^2) \text{ si } u \in \mathbb{N}.$$

Notons maintenant H_{Φ_N} l'opérateur de Hankel pour le symbole $(\chi_0 - r\chi)$ ($\chi_0 - r\bar{\chi}$) et $H_{\Phi_N}^{(\beta)}$ l'opérateur de Hankel pour le symbole $f_{\lambda,r}$ ou encore l'opérateur de Hankel perturbé.

5.2. Évaluation des Opérateurs de Hankel Perturbés

On rappelle que $\chi_0 = e^{i\theta_0}$ où θ_0 est une fonction de λ .

PROPOSITION 8.

$$\forall s \in \mathbb{N}, \quad H_{\Phi_N}^{(\beta)}(\chi^s) = H_{\Phi_N}(\chi^s) \sum_{u \geq -1} \gamma_u (r\bar{\chi}_0)^u.$$

Nous aurons besoin du lemme suivant pour la démonstration de la proposition précédente.

LEMME 9.

$$\forall s \in \mathbb{N}^*, \quad H_{\Phi_N}(\chi^s) = (\chi_0 - r^2\bar{\chi}_0)(r\bar{\chi}_0)^{N+2+s} \frac{\bar{\chi}}{\chi_0 - r\bar{\chi}}.$$

Démonstration du lemme 9 :

$$\begin{aligned}
 \forall s \in \mathbb{N}^*, H_{\Phi_N}(\chi^s) &= \pi_- \left(\frac{\chi_0 - r\chi}{\chi_0 - r\bar{\chi}} \chi^{N+s+1} \right) \\
 &= \pi_- \left((1 - r\bar{\chi}_0\chi) \chi^{N+s+1} \sum_{u \geq 0} (r\bar{\chi}_0)^u \bar{\chi}^u \right) \\
 &= \pi_- \left(\sum_{u \geq 0} (r\bar{\chi}_0)^u \bar{\chi}^{u-(N+s+1)} \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{u \geq 0} (r\bar{\chi}_0)^{u+1} \bar{\chi}^{u-(N+s+2)} \right) \\
 &= (r^{N+s+2} \bar{\chi}_0^{N+s+2} - r^{N+s+4} \bar{\chi}_0^{N+s+4}) \frac{\bar{\chi}}{\chi_0 - r\bar{\chi}}.
 \end{aligned}$$

D'où

$$H_{\Phi_N}(\chi^s) = (\chi_0 - r^2 \bar{\chi}_0)(r\bar{\chi}_0)^{N+2+s} \frac{\bar{\chi}}{\chi_0 - r\bar{\chi}}.$$

□

Démonstration de la proposition 8. — On a

$$\begin{aligned}
 H_{\Phi_N}^{(\beta)}(\chi^s) &= \pi_- \left(\frac{g_1}{g_2} \chi^{N+s+1} \right) \\
 &= \pi_- \left(\frac{\chi_0 - r\chi}{\chi_0 - r\bar{\chi}} \sum_{u \geq -1} \gamma_u \chi^{u+N+s+1} \right) \\
 &= \sum_{u \geq -1} \gamma_u \pi_- \left(\frac{\chi_0 - r\chi}{\chi_0 - r\bar{\chi}} \chi^{u+N+s+1} \right),
 \end{aligned}$$

or

$$\pi_- \left(\frac{\chi^s}{\chi_0 - r\bar{\chi}} \right) = (r\bar{\chi}_0)^{s+1} \frac{\bar{\chi}}{\chi_0 - r\bar{\chi}}.$$

D'où

$$\begin{aligned}
 H_{\Phi_N}^{(\beta)}(\chi^s) &= \sum_{u \geq -1} \gamma_u (\chi_0 (r\bar{\chi}_0)^{N+u+s+2} - r(r\bar{\chi}_0)^{N+u+s+3}) \frac{\bar{\chi}}{\chi_0 - r\bar{\chi}} \\
 &= \sum_{u \geq -1} \gamma_u (r\bar{\chi}_0)^{N+u+s+2} (\chi_0 - r^2 \bar{\chi}_0) \frac{\bar{\chi}}{\chi_0 - r\bar{\chi}} \\
 &= H_{\Phi_N}(\chi^s) \sum_{u \geq -1} \gamma_u (r\bar{\chi}_0)^u.
 \end{aligned}$$

□

Avec une démonstration analogue, on a de même.

PROPOSITION 9.

$$\forall s \in \mathbb{N} \quad H_{\tilde{\Phi}_N}^{(\beta)}(\chi^s) = H_{\tilde{\Phi}_N}(\chi^s) \sum_{u \geq -1} \tilde{\gamma}_u(r\bar{\chi}_0)^u.$$

Remarque : On démontrerait comme pour le lemme précédent que

$$\forall s \in \mathbb{N}, \quad H_{\tilde{\Phi}_N}(\bar{\chi}^s) = (\chi_0 - r^2\bar{\chi}_0)(r\bar{\chi}_0)^{N+2+s} \frac{\bar{\chi}}{\chi_0 - r\chi}.$$

5.2.1. Évaluation de $I - H_{\tilde{\Phi}_N}^{(\beta)} H_{\tilde{\Phi}_N}^{(\beta)}$

PROPOSITION 10. — On a :

$$\tilde{X}_0 = \pi_+ \left(\tilde{\Phi}_N \pi_+ \left(\frac{1}{g_2} \right) \right) \in \text{vect} \left\{ \frac{1}{\chi_0 - r\chi} \right\}.$$

Démonstration de la proposition 10. — On remarque tout d'abord que pour $s \in \mathbb{N}$ et $P = \sum_{j=1}^d a_j \chi^j$, $a_j \in \mathbb{C}$, on a :

$$\pi_+ \left(\frac{\bar{\chi}^u P(\bar{\chi}^u)}{\chi_0 - r\chi} \right) \in \text{vect} \left\{ \frac{1}{\chi_0 - r\chi} \right\}.$$

Par un calcul direct, on a en effet:

$$\pi_+ \left(\frac{\bar{\chi}^u P(\bar{\chi}^u)}{\chi_0 - r\chi} \right) = \frac{(r\bar{\chi}_0)^u P(r\bar{\chi}_0)}{\chi_0 - r\chi}.$$

Par ailleurs, $\pi_+ \left(\frac{1}{g_2} \right) = \pi_+ \left(\frac{1 - \beta\bar{\chi}}{\chi_0 - r\bar{\chi}} \right) = \bar{\chi}_0 \pi_+ \left(\frac{1 - \beta\bar{\chi}}{1 - r\chi_0\chi} \right) = \bar{\chi}_0$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} \tilde{X}_0 &= \bar{\chi}_0 \pi_+ \left(\frac{(\chi_0 - r\bar{\chi})(1 - \beta\chi)}{(\chi_0 - r\chi)(1 - \beta\bar{\chi})} \bar{\chi}^{N+1} \right) \\ &= \bar{\chi}_0 \pi_+ \left(\frac{P_\beta(\bar{\chi})}{(\chi_0 - r\chi)(1 - \beta\bar{\chi})} \right), \text{ avec } P_\beta(\bar{\chi}) = -\beta\chi^N + r\beta\chi_0\chi^{N+1} - r\bar{\chi}_0\chi^{N+2}. \end{aligned}$$

D'où :

$$\tilde{X}_0 = \sum_{s \geq 0} \beta^s \pi_+ \left(\frac{\bar{\chi}^s P_\beta(\bar{\chi})}{\chi_0 - r\chi} \right) = \sum_{s \geq 0} (\beta r \bar{\chi}_0)^s \frac{P_\beta(r\bar{\chi}_0)}{\chi_0 - r\chi} = \frac{P_\beta(r\bar{\chi}_0)}{1 - \beta r \bar{\chi}_0} \frac{1}{\chi_0 - r\chi}.$$

□

PROPOSITION 11. — *On a :*

$$\left[I - H_{\Phi_N}^{(\beta)} H_{\Phi_N}^{(\beta)} \right] \left(\frac{1}{\chi_0 - r\chi} \right) = \Lambda_r \frac{1}{\chi_0 - r\chi}$$

où

$$\Lambda_r = 1 - \left(\frac{1 - \beta r \chi_0}{1 - \beta r \bar{\chi}_0} (r \bar{\chi}_0)^{N+2} \right)^2.$$

Démonstration de la proposition 11. — On a :

$$\begin{aligned} H_{\Phi_N}^{(\beta)} \left(\frac{1}{\chi_0 - r\chi} \right) &= \pi_- \left(\frac{\chi_0 - r\chi}{\chi_0 - r\bar{\chi}} \sum_{u \geq -1} \gamma_u \chi^{u+N+1} \frac{1}{\chi_0 - r\chi} \right) \\ &= \sum_{u \geq -1} \gamma_u \pi_- \left(\frac{\chi^{u+N+1}}{\chi_0 - r\bar{\chi}} \right) \\ &= \left(\sum_{u \geq -1} \gamma_u (r\bar{\chi}_0)^u \right) (r\bar{\chi}_0)^{N+2} \frac{\bar{\chi}}{\chi_0 - r\bar{\chi}}. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} H_{\Phi_N}^{(\beta)} \left(\frac{\bar{\chi}}{\chi_0 - r\bar{\chi}} \right) &= \pi_+ \left(\left(\sum_{u \geq -1} \gamma_u \bar{\chi}^u \right) \frac{\bar{\chi}^{N+2}}{\chi_0 - r\bar{\chi}} \right), \quad \gamma_u \in \mathbb{R} \\ &= \sum_{u \geq -1} \gamma_u \pi_+ \left(\frac{\bar{\chi}^{u+N+2}}{\chi_0 - r\bar{\chi}} \right) \\ &= \left(\sum_{u \geq -1} \gamma_u (r\bar{\chi}_0)^u \right) (r\bar{\chi}_0)^{N+2} \frac{1}{\chi_0 - r\bar{\chi}}. \end{aligned}$$

La proposition s'en déduit immédiatement. □

Démonstration du théorème 6. — En utilisant la formule d'inversion et l'argument de la proposition 4, l'équation aux valeurs propres s'écrit:

$$\Lambda_r = 0.$$

En utilisant un argument de continuité on obtient alors les valeurs propres de $T_N \left(\frac{|1-\chi|^2}{|1-\beta\chi|^2} \right)$ comme solution de

$$\lim_{r \rightarrow 1} \Lambda_r = 0.$$

Ceci nous conduit aux deux équations :

$$\chi_0^{N+2} = \frac{1 - \beta \bar{\chi}_0}{1 - \beta \chi_0} \quad (16)$$

$$\chi_0^{N+2} = -\frac{1 - \beta \bar{\chi}_0}{1 - \beta \chi_0} \quad (17)$$

En égalant les parties réelles (ou imaginaires) de (16), on obtient :

$$\beta \sin\left(\frac{N+4}{2}\theta_0\right) - \sin\left(\frac{N+2}{2}\theta_0\right) = 0. \quad (18)$$

De même l'équation (17) conduit à :

$$\beta \cos\left(\frac{N+4}{2}\theta_0\right) - \cos\left(\frac{N+2}{2}\theta_0\right) = 0. \quad (19)$$

Etudions l'équation (18). Pour $\beta = 0$ on a :

$$\theta_0 = \frac{2k\pi}{N+2}$$

qui correspond au symbole $|1 - \chi|^2$ non perturbé. Cette valeur de θ_0 conduit pour le symbole non perturbé à la valeur propre (non perturbée)

$$\lambda_{2k}(N) = 2 \left(1 - \cos\left(\frac{2k\pi}{N+2}\right)\right).$$

En effet, la factorisation du symbole entraîne que

$$\chi_0 + \bar{\chi}_0 = -\frac{2 - \lambda(1 + \beta^2)}{\lambda\beta - 1},$$

d'où

$$\lambda = 2 \frac{1 - \cos \theta_0}{1 + \beta^2 - 2\beta \cos \theta_0} \quad (20)$$

et par conséquent pour $\beta = 0$, on obtient $\lambda = 2(1 - \cos \theta_0)$.

On peut écrire l'équation (18) sous la forme

$$F_N(\beta, \theta_0) = 0.$$

On a dans ce cas

$$\frac{\partial F_N}{\partial \theta_0} \left(0, \frac{2k\pi}{N+2}\right) = (-1)^{k+1} \frac{N+2}{2}.$$

L'équation (18) définit donc localement, au voisinage de $\beta = 0$, le réel θ_0 comme une fonction f_N de β et de plus :

$$\frac{df_N}{d\beta}(0) = -\frac{\frac{\partial F_N}{\partial \beta}\left(0, \frac{2k\pi}{N+2}\right)}{\frac{\partial F_N}{\partial \theta_0}\left(0, \frac{2k\pi}{N+2}\right)}.$$

Ceci s'écrit encore :

$$\frac{df_N}{d\beta}(0) = (-1)^k \frac{2}{N+2} \sin\left(k \frac{N+4}{N+2} \pi\right).$$

En notant $f_N = \theta_0^{(\beta)}$ (θ_0 perturbé), on a :

$$\theta_0^{(\beta)} = \theta_0 + \beta \frac{df_N}{d\beta}(0) + o(\beta)$$

Soit :

$$\theta_0^{(\beta)} = \frac{2k\pi}{N+2} + \beta \frac{\varphi(N, k)}{N+2} + o_N(\beta)$$

avec

$$\varphi(N, k) = (-1)^k 2 \sin\left(k \frac{N+4}{N+2} \pi\right).$$

De plus

$$o_N(\beta) = o\left(\frac{1}{N}\right) \text{ à } \beta \text{ fixé, et } o_N(\beta) = o(\beta) \text{ à } N \text{ fixé.}$$

En effet,

- a) à N fixé, $o_N(\beta)$ est le reste d'un développement limité en β ;
- b) à β fixé, $\lim(N+2)\theta_0^{(\beta)} = 2k\pi$. Cela résulte de l'équation (18) que l'on peut écrire asymptotiquement :

$$\beta \sin\left(\frac{N+2}{2}\theta_0\right) = \sin\left(\frac{N+2}{2}\theta_0\right)$$

ce qui montre que $(N+2)\theta_0 \rightarrow 2k\pi$ et $o_N(\beta) = o\left(\frac{1}{N}\right)$

En écrivant $\theta_0 = \frac{2k\pi}{N+2}$, on obtient :

$$\cos \theta_0^{(\beta)} = \cos \theta_0 - \left[\beta \frac{\varphi(N, k)}{N+2} + o_N(\beta) \right] \sin\left(\frac{2k\pi}{N+2} + \xi\right) \quad (21)$$

avec

$$|\xi| < \left| \beta \frac{\varphi(N, k)}{N+2} + o_N(\beta) \right|.$$

En combinant (20) et(21), on obtient une formule de perturbation pour λ_{2k} :

$$\lambda_{2k}^{(\beta)} = \lambda_{2k} p_{2k}(N, \beta)$$

avec

$$p_{2k}(N, \beta) = \frac{1 + \frac{\left[\beta \frac{\varphi(N, k)}{N+2} + o_N(\beta) \right] \sin \left(\frac{2k\pi}{N+2} + \xi \right)}{1 - \cos \left(\frac{2k\pi}{N+2} \right)}{1 + \frac{\left[2\beta \left(\beta \frac{\varphi(N, k)}{N+2} + o(\beta) \right) \sin \left(\frac{2k\pi}{N+2} + \xi \right) \right]}{1 + \beta^2 - 2\beta \cos \left(\frac{k2\pi}{N+2} \right)}}.$$

L'étude est analogue pour l'équation (19).

L'équation de perturbation est remplacée par :

$$\theta_0^{(\beta)} = \frac{2k+1}{N+2} \pi + \beta \frac{\psi(N, k)}{N+2} + o(\beta)$$

avec :

$$\psi(N, k) = (-1)^k 2 \cos \left(\frac{N+4}{N+2} (2k+1) \frac{\pi}{2} \right)$$

et on obtient :

$$\lambda_{2k+1}^{(\beta)} = \lambda_{2k+1} p_{2k+1}(N, \beta)$$

où $p_{2k+1}(N, \beta)$ s'obtient en remplaçant dans $p_{2k}(N, \beta)$, respectivement $\varphi(N, k)$ par $\psi(N, k)$ et $\frac{2k\pi}{N+2}$ par $\frac{(2k+1)\pi}{N+2}$.

En conclusion, on a :

$$\lambda_k^{(\beta)}(N) = \lambda_k(N) p_k(N, \beta)$$

où $p_k(N, \beta)$ est défini par ce qui précède. □

Remarque : Pour N fixé, $p_k(N, \beta)$ tend vers 1 quand β tend vers 0. De plus, pour β fixé, $p_k(N, \beta)$ tend aussi vers 1 quand N tend vers $+\infty$.

6. Conclusion

Dans cet article, une approche géométrique nouvelle (notre formule d'inversion) permet de choisir les classes de symboles différemment de M. Kac, W.L. Murdoch, G. Szegö, H. Widom et S. Parter. Leur choix n'a pas comme origine la compatibilité avec l'application du théorème de Courant-Weyl, mais dépend d'hypothèses de régularité, autorisant une factorisation adéquate (on parlera de classes de factorisation). On retrouve des théorèmes existants (comme le théorème de Parter), mais on traite également certains symboles exclus des classes traditionnelles définies dans ([4], [12], [7]). On montre de plus la souplesse de cette approche géométrique pour une théorie de perturbations des symboles. Pour conclure, signalons que l'exemple de perturbation étudié laisse entrevoir un phénomène intéressant. Quand le symbole est de la forme $|1 - \chi|^{2\alpha} f_1$ ou $|1 - \chi^p|^2 f_1$, avec $f_1 > 0$, $\alpha \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$, c'est une hypothèse de régularité sur f_1 qui déterminera la classe de factorisation. Le choix de f_1 dans une telle classe ne perturbe pas l'ordre du terme principal dans le développement asymptotique des valeurs propres extrêmes : celui-ci ne dépendrait que de l'ordre du zéro en 1.

Bibliographie

- [1] BÖTTCHER (A.) et SILBERMANN (B.). — *Analysis of Toeplitz operators*, Springer Verlag 1990.
- [2] GRENDER (U.) et SZEGÖ (G.). — *Toeplitz forms and their applications*, 2nd ed. Chelsea, New York 1984.
- [3] KAC (M.). — *Random walk and the theory of Brownian motion*, American Mathematical Monthly 54, 369-391 (1947).
- [4] KAC (M.), MURDOCH (W. L.) et SZEGÖ (G.). — *On the eigenvalues of certain hermitian forms*, J. Rational Mech. Anal. 2, 767-800 (1953).
- [5] SEGHIER (A.). — *Matrices de Toeplitz dans le cas d-dimensionnel : développement asymptotique à l'ordre d*, Thèse d'état Orsay (1988).
- [6] KATEB (D.) et SEGHIER (A.). — *Expansion of the inverse of positive definite Toeplitz operators over polytopes*, Asymptotic Analysis 22, 205-234 (2000).
- [7] PARTER (S.). — *Extreme eigenvalues of Toeplitz forms and applications to elliptic difference equations*, Trans. Amer. Math. Soc. 99, 153-192 (1961).
- [8] RAMBOUR (P.), RINKEL (J.-M.) et SEGHIER (A.). — *Inverse asymptotique de la matrice de Toeplitz et noyau de Green*, C. R. Acad. Sci. Paris 331, 857-860 (2000).
- [9] RINKEL (J.-M.). — *Inverses et propriétés spectrales des matrices de Toeplitz à symbole singulier*, Thèse Orsay (2001).
- [10] SEGHIER (A.). — *Inversion asymptotique des matrices de Toeplitz en d-dimension.*, J. of Functional Analysis 67, 380-412 (1986).

- [11] SERRA (S.). — *On the extreme eigenvalues of hermitian Toeplitz matrices*, Linear Algebra and its Applications 270, 109-129 (1998).
- [12] WIDOM (H.). — *On the eigenvalues of certain hermitian operators*, Trans. Amer. Math. Soc. 88, 491-522 (1958).
- [13] WIDOM (H.). — *Toeplitz determinant with singular generating function*, Amer. J. Math. 95, 333-383 (1973).
- [14] WIDOM (H.). — *Extreme eigenvalues of N -dimensional convolution operators*, Trans. Amer. Math. Soc. 106, 391-414 (1963).