

FRANÇOIS WAMON

**Espaces de Sobolev et équations hyperboliques  
sur des variétés riemanniennes**

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6<sup>e</sup> série*, tome 10,  
n<sup>o</sup> 3 (2001), p. 547-585

[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_2001\\_6\\_10\\_3\\_547\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_2001_6_10_3_547_0)

© Université Paul Sabatier, 2001, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## Espaces de Sobolev et équations hyperboliques sur des variétés riemanniennes (\*)

FRANÇOIS WAMON <sup>(1)</sup>

---

**RÉSUMÉ.** — On étudie quelques espaces de Sobolev sur des variétés riemanniennes et on démontre des inégalités de Sobolev pour les fonctions et les champs de tenseurs dans ces espaces. On démontre ensuite, pour des variétés riemanniennes de la forme  $V = \mathbb{R} \times S$ , des théorèmes d'existence et d'unicité de solutions du problème de Cauchy pour les équations hyperboliques linéaires et pour les équations quasi-linéaires d'ordre quelconque  $n \geq 2$ .

**ABSTRACT.** — We study some Sobolev spaces on riemannian manifolds and we prove some Sobolev inequalities for functions and tensor fields on these spaces. We next prove, for riemannian manifolds of the form  $V = \mathbb{R} \times S$ , existence and uniqueness theorems for the Cauchy's problem for linear and quasi-linear hyperbolic equations of any order  $n \geq 2$ .

---

### 0. Introduction

Ce travail a pour but l'étude du problème de Cauchy pour les équations hyperboliques linéaires et quasi-linéaires d'ordre quelconque sur des variétés riemanniennes.

L'étude des équations hyperboliques d'ordre quelconque dans les espaces euclidiens a fait l'objet de plusieurs travaux dont ceux de P.A. Dionne [3]. Ce sont ces travaux que nous généralisons ici sur des variétés riemanniennes. F. Cagnac et Y. Choquet Bruhat ont étudié dans [9] les équations hyperboliques d'ordre deux sur des variétés hyperboliques. Nous cherchons

---

(\*) Reçu le 15 décembre 1999, accepté le 14 juin 2001

(1) Université de Yaoundé I, Faculté des Sciences, Département de Mathématiques, B.P. 812, Yaoundé (Cameroun).

à obtenir, pour des équations d'ordre quelconque sur des variétés riemanniennes, des résultats d'une précision comparable à ceux obtenus dans [3] pour les espaces euclidiens et dans [9] pour les équations d'ordre deux sur des variétés.

Le cadre géométrique de ce travail est une variété riemannienne  $C^\infty$  de dimension  $n$ , de métrique  $g$   $C^\infty$ , de la forme  $V = \mathbb{R} \times S$ , où  $S$  est une variété de dimension  $n - 1$ . Les variétés  $S_t = \{t\} \times S$  seront munies de la métrique  $\bar{g}_t$  induite par  $g$  sur  $S_t$  et  $S$  sera munie de la métrique  $\bar{g}_0$ .

Une équation linéaire d'ordre  $m + 1$  sur  $V$  se met sous la forme  $\sum_{k \leq m+1} a_k \cdot \nabla^k u = v$  où les  $a_k$  sont des champs de tenseurs d'ordre  $k$  sur  $V$ ,  $v$  une fonction donnée sur  $V$  et  $u$  la fonction inconnue. Les espaces fonctionnels utilisés dans l'étude d'une telle équation sont les espaces de Sobolev  $W_m^p$  et  $V_m^p$  qui sont les complétés des espaces de champs de tenseurs  $C^\infty$  sur  $V$  (d'ordre fixé) pour les normes respectives :

$$\|Z\|_{W_m^p} = \left\| \sum_{\ell=0}^m |\nabla^\ell Z| \right\|_{L^p} \quad \text{et} \quad \|Z\|_{V_m^p} = \|Z\|_{L^\infty} + \left\| \sum_{\ell=1}^m |\nabla^\ell Z| \right\|_{L^p}$$

A ces normes sont associées les quasi-normes:

$$\|Z\|_{W_m^p(S_t, V)} = \left\| \sum_{\ell=0}^m |\nabla^\ell Z| \right\|_{L^p(S_t)}$$

$$\text{et} \quad \|Z\|_{V_m^p(S_t, V)} = \|Z\|_{L^\infty(S_t)} + \left\| \sum_{\ell=1}^m |\nabla^\ell Z| \right\|_{L^p(S_t)}$$

On démontre des inégalités de Sobolev pour les champs de tenseurs dans les espaces  $W_m^p$  et  $V_m^p$ , pour les normes et les quasi-normes. Il s'agit d'une généralisation des inégalités de Sobolev démontrées dans [2] pour les fonctions dans les espaces  $W_m^p$ .

Pour les équations quasi-linéaires  $\sum_{k \leq m+1} a_k(x, u, \nabla u, \dots, \nabla^m u) \cdot \nabla^k u = b(x, u, \nabla u, \dots, \nabla^m u)$ , les espaces fonctionnels utilisés sont des espaces de Sobolev  $W_m^{p, \infty}$  et  $V_m^{p, \infty}$  qui sont définis de la manière suivante :

Soit  $T_k(V)$  l'espace des tenseurs covariants d'ordre  $k$  sur  $V$  et  $T_a^b(V)$  l'espace des tenseurs mixtes,  $a$  fois covariant,  $b$  fois contravariant sur  $V$ ,  $\Omega$  un ouvert de  $E = \mathbb{R} \times_V T_1(V) \times_V \dots \times_V T_m(V)$  et  $\tau$  une application  $C^\infty$  de  $\Omega$  dans  $T_a^b(V)$ . L'étude des dérivées covariantes successives de l'application

$x \rightarrow \tau(x, Z_0(x), \dots, Z_m(x))$  conduit à définir des applications  $D_x^\ell D_{Z_0}^{\ell_0} \dots D_{Z_m}^{\ell_m} \tau$  de  $\Omega$  dans  $T_{a+\ell}^{b+\ell_1+2\ell_2+\dots+s\ell_s}(V)$ . On note  $W_m^{p,\infty}(\Omega)$  (resp.  $V_m^{p,\infty}(\Omega)$ ) le complété de l'espace des applications  $\tau$ ,  $C^\infty$  de  $\Omega$  dans  $T_a^b(V)$  pour la norme

$$\|\tau\|_{W_m^{p,\infty}(\Omega)} = \left\| \sum_{i=0}^m \text{Sup}_{\substack{(Z_0, \dots, Z_m) \in \Omega_x \\ \ell + \ell_0 + \dots + \ell_s = i}} |D_x^\ell D_{Z_0}^{\ell_0} \dots D_{Z_m}^{\ell_m} \tau(x, Z_0, \dots, Z_m)| \right\|_{L^p}$$

(resp.  $\|\tau\|_{V_m^{p,\infty}(\Omega)} = \|\tau(x, Z_0, \dots, Z_s)\|_{L^\infty}$

$$+ \left\| \sum_{i=1}^m \text{Sup}_{\substack{(Z_0, \dots, Z_m) \in \Omega_x \\ \ell + \ell_0 + \dots + \ell_s = i}} |D_x^\ell D_{Z_0}^{\ell_0} \dots D_{Z_m}^{\ell_m} \tau(x, Z_0, \dots, Z_m)| \right\|_{L^p} )$$

où  $\Omega_x = \Omega \cap (\{x\} \times E_x)$ ,  $E_x$  étant la fibre de  $E$  au-dessus du point  $x$ .

On démontre des inégalités de Sobolev pour ces espaces et un théorème de substitution, fondamental dans l'étude du problème quasi-linéaire, où l'on détermine des conditions pour que, étant donnée une application  $\tau \in W_m^{p,\infty}(\Omega)$ , en substituant  $Z_i(x)$  à  $Z_i$  dans  $\tau(x, Z_0, \dots, Z_m)$ , on obtient une application appartenant à  $W_m^p$ .

Le problème linéaire considéré ici s'écrit :

$$(1) \quad \begin{cases} au = \sum_{k \leq m+1} a_k \cdot \nabla^k u = v \text{ sur } V_T = ]-T, T[ \times S \\ u = \varphi_0, \partial_t u = \varphi_1, \dots, \partial_t^{(m)} u = \varphi_m \text{ sur } S_0 \end{cases}$$

où  $a_{m+1} \in V_1^\infty \cap V_\mu^{q_{m+1}}$  et  $a_k \in W_\mu^{q_k}$  pour  $k \leq m$ , avec  $2 \leq q_0 \leq \dots \leq q_{m+1} \leq +\infty$ .

On généralise les inégalités démontrées pour les espaces euclidiens par Dionne dans [3] à des opérateurs hyperboliques  $a$  sur  $V$  sous des hypothèses convenables sur  $a$ , les variétés  $S_t$  et  $V$ . On montre ensuite que, sous ces hypothèses, si  $v \in W_\mu^2$  et si les données de Cauchy  $(\varphi_0, \dots, \varphi_m)$  sont prises dans des espaces convenables  $\mathcal{K}_{m+\mu}(S_0)$ , alors, toute solution  $u \in W_{m+\mu+1}^2(V_T)$  de (1) vérifie l'inégalité :

$$(2) \quad \begin{aligned} & \|u\|_{w_{m+\mu}^2(S_t, V)} \\ & \leq C \left[ \int_0^t \|v\|_{w_\mu^2(S_\tau, V)} d\tau + \|v\|_{w_{\mu-1}^2(S_0, V)} + \|(\varphi_0, \dots, \varphi_m)\|_{\mathcal{K}_{m+\mu}(S_0)} \right] \end{aligned}$$

On utilise alors (2) et le théorème d'existence  $C^\infty$  de J. Leray pour montrer que (1) possède une solution et une seule  $u \in W_{m+\mu}^2(V_T)$  et que cette solution vérifie (2).

Pour l'étude du problème quasi-linéaire

$$(3) \quad \begin{cases} au = \sum_{k \leq m+1} a_k(x, u, \nabla u, \dots, \nabla^m u) \cdot \nabla^k u = b(x, u, \nabla u, \dots, \nabla^m u) \\ \text{sur } V_T = ] - T, T[ \times S \\ u = \varphi_0, \partial_1 u = \varphi_1, \dots, \partial_t^{(m)} u = \varphi_m \text{ sur } S_0 \end{cases}$$

où  $a_{m+1} \in V_1^{\infty, \infty} \cap V_\mu^{2, \infty}$ ,  $a_k \in W_\mu^{2, \infty}$  pour  $k \leq m$  et  $b \in W_\mu^{2, \infty}$ , on utilise comme dans [3] la méthode des approximations successives, à partir du problème de Cauchy linéaire. Cette méthode permet de montrer l'existence d'un réel  $T_\infty > 0$ , et d'une solution  $u \in W_{m+\mu}^2(V_{T_\infty})$ . On peut alors utiliser la méthode qui consiste à reposer le problème en faisant porter les données de Cauchy par les hypersurfaces  $S_{-T_\infty+\varepsilon}$  et  $S_{T_\infty-\varepsilon}$  et continuer ainsi pour montrer l'existence d'une solution globale  $u \in W_{m+\mu}^2(V_T)$  à condition que le réel  $T_\infty$ , qui dépend de la norme de la solution, ne décroisse pas trop vite.

## 1. Espaces de Sobolev sur V

### 1.1. Définitions - Hypothèses - Notations

Soit  $V$  une variété riemannienne  $C^\infty$  de dimension  $n$ , de métrique  $g \in C^\infty$ . On note  $\nabla$  la dérivation covariante dans  $V$ .

Pour  $s \in \mathbb{N}$ , on désigne par  $T_s(V)$  (resp.  $T^s(V)$ ) l'espace des tenseurs sur  $V$ ,  $s$  fois covariant (resp. contravariant) et pour  $a, b \in \mathbb{N}$ ,  $T_a^b(V)$  est l'espace des tenseurs mixtes,  $a$  fois covariant,  $b$  fois contravariant. Un élément de  $T_a^b(V)$  sera appelé un  $(b, a)$ -tenseur.

Soit  $Z_k \in T_k(V)$  (resp.  $Z^k \in T^k(V)$ ) ; on note  $Z_{k,I}$  (resp.  $Z^{k,I}$ ),  $I = (i_1, \dots, i_k)$ , ses composantes dans un système de coordonnées locales de  $V$  et  $Z_{k,I^v}$  (resp.  $Z^{k,I^v}$ ) la composante définie par :

$$Z_{k,I^v} = Z_{i_1 \dots i_{r-1} v i_{r+1} \dots i_k} \quad (\text{resp. } Z^{k,I^v} = Z^{i_1 \dots i_{r-1} v i_{r+1} \dots i_k})$$

DÉFINITION. — Soit  $Z$  un tenseur d'ordre  $k$  sur  $V$  (covariant ou contravariant). La norme de  $Z$  pour la métrique  $g$  est définie par :

$$\begin{aligned} |Z|^2 &= Z_I Z^I = Z_{i_1 \dots i_k} Z^{i_1 \dots i_k} \\ &= g^{i_1 j_1} \dots g^{i_k j_k} Z_{i_1 \dots i_k} Z_{j_1 \dots j_k} = g_{i_1 j_1} \dots g_{i_k j_k} Z^{i_1 \dots i_k} Z^{j_1 \dots j_k}. \end{aligned}$$

Si  $Z$  est un  $(b, a)$ -tenseur  $V$ , on définit la norme de  $Z$  par :

$$|Z|^2 = Z_I^J Z_J^I = Z_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_b} Z_{j_1 \dots j_b}^{i_1 \dots i_a} = g^{i_1 k_1} \dots g^{i_a k_a} g_{j_1 t_1} \dots g_{j_b t_b} Z_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_b} Z_{k_1 \dots k_a}^{t_1 \dots t_b}$$

DÉFINITION. — Soit  $p \in [1, +\infty]$ ,  $Z$  un champ de tenseurs sur  $V$ . On dit que  $Z \in L^p$  si  $|Z| \in L^p$  et on note :  $\|Z\|_{L^p} = \||Z|\|_{L^p}$ .

LEMME 1.1. — Pour tout champ de tenseurs  $Z \in C^\infty$  sur  $V$ , on a :

$$|\nabla|\nabla^r Z|| \leq |\nabla^{r+1} Z|, \quad \forall r \in \mathbb{N}. \quad (1.1)$$

Preuve. — On développe le premier membre de l'inégalité :

$$(\nabla_\nu Z_I \cdot Z_J - Z_I \nabla_\nu Z_J)(\nabla^\nu Z^I \cdot Z^J - Z^I \nabla^\nu Z^J) \geq 0,$$

et on a l'inégalité :

$$|\nabla|Z|| \leq |\nabla Z|. \quad (*)$$

On applique ensuite, pour  $r > 0$ , l'inégalité (\*) aux champs de tenseurs  $\nabla^r Z$  et on a le lemme.

Hypothèse  $\mathcal{H}_m$  ( $m \in \mathbb{N}$ ). — On dira que  $V$  vérifie l'hypothèse  $\mathcal{H}_0$  si  $V$  a un rayon d'injectivité  $d > 0$  et la courbure sectionnelle est bornée sur  $V$ .  $V$  vérifie l'hypothèse  $\mathcal{H}_m$  ( $m > 0$ ) si  $V$  vérifie l'hypothèse  $\mathcal{H}_0$  et si les fonctions  $|\nabla^\ell R|$  sont bornées sur  $V$  pour  $0 \leq \ell \leq m$ ,  $R$  étant le tenseur de courbure de  $V$ .

DÉFINITION. — On dira que  $V$  vérifie la propriété du recouvrement uniformément localement fini, s'il existe un réel  $\delta > 0$ , un entier  $k$  (dépendant éventuellement de  $\delta$ ), et un recouvrement de  $V$  par des boules de rayon inférieur ou égal à  $\delta$ , de telle sorte que tout point de  $V$  appartient à  $k$  boules au plus.

On montre dans [1] que si  $V$  vérifie l'hypothèse  $\mathcal{H}_0$ ,  $V$  est complète et vérifie la propriété du recouvrement uniformément localement fini.

## 1.2. Les espaces de Sobolev

### 1.2.1. Les espaces $W_m^p$ et $V_m^p$

Soit  $m \in \mathbb{N}$  et  $p \in [1, +\infty]$ . Soit  $E_m^p$  (resp.  $E'_m{}^p$ ) l'espace des champs de tenseurs  $Z$  de type  $(a, b)$  fixé,  $C^\infty$  sur  $V$ , tels que  $\nabla^\ell Z \in L^p$  pour  $0 \leq \ell \leq m$  (resp.  $Z \in L^\infty$  et  $\nabla^\ell Z \in L^p$  pour  $1 \leq \ell \leq m$ ).

L'espace de Sobolev  $W_m^p$  ou  $W_m^p(V)$  (resp.  $V_m^p$  ou  $V_m^p(V)$ ) est le complété de  $E_m^p$  (resp.  $E'_m{}^p$ ) pour la norme :

$$\|Z\|_{W_m^p} = \left\| \sum_{\ell=0}^m |\nabla^\ell Z| \right\|_{L^p} \quad \left( \text{resp. } \|Z\|_{V_m^p} = \|Z\|_{L^\infty} + \left\| \sum_{\ell=1}^m |\nabla^\ell Z| \right\|_{L^p} \right)$$

Dans [1], on montre :

PROPOSITION 1.1. — Si  $V$  vérifie l'hypothèse  $\mathcal{H}_m$ , l'espace  $\mathcal{D}(V)$  des fonctions  $C^\infty$  à support compact dans  $V$  est dense dans  $W_{m+2}^p$ .

**1.2.2. Les espaces  $W_m^{p,\infty}$  et  $V_m^{p,\infty}$**

Soit  $s \in \mathbb{N}^*$ ,  $a, b \in \mathbb{N}$ . On désigne par  $E$  le fibré

$$E = T_0(V) \times_V T_1(V) \times_V \dots \times_V T_s(V) \equiv \mathbb{R} \times_V T_1(V) \times_V \dots \times_V T_s(V).$$

On vérifie qu'on a :

LEMME 1.2. — Si  $\tau : E \longrightarrow T_a^b(V)$  est une application  $C^\infty$ ,  
 $(x, Z_0, \dots, Z_s) \longmapsto (x, Z_0, \dots, Z_s)$

alors,  $\forall r = 0, 1, \dots, s$ , les  $\frac{\partial \tau_I^J}{\partial Z_{r,L}}$  se transforment comme les composantes d'un  $(r + b, a)$ -tenseur.

DÉFINITION. — Pour  $r = 0, 1, \dots, s$ , on désigne par  $D_{Z_r} \tau$  l'application de  $E$  dans  $T_a^{b+r}(V)$  dont les composantes, dans un système de coordonnées locales sont données par :

$$(D_{Z_r} \tau)_I^{L,J} = \frac{\partial \tau_I^J}{\partial Z_{r,L}}.$$

On définit par récurrence  $D_{Z_{r_1}} D_{Z_{r_2}} \dots D_{Z_{r_s}}$  par :

$$D_{Z_{r_1}} D_{Z_{r_2}} \dots D_{Z_{r_s}} \tau = D_{Z_{r_1}} (D_{Z_{r_2}} \dots D_{Z_{r_s}} \tau).$$

On définit ainsi, pour  $\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_s$  entiers,  $D_{Z_0}^{\ell_0} D_{Z_1}^{\ell_1} \dots D_{Z_s}^{\ell_s} \tau$  ; alors,  $D_{Z_0}^{\ell_0} D_{Z_1}^{\ell_1} \dots D_{Z_s}^{\ell_s} \tau$  est une application de  $E$  dans  $T_a^{b+\ell_1+\dots+\ell_s}(V)$  ; c'est l'application qui, dans un système de coordonnées locales de  $V$ , est définie par :

$$D_{Z_0}^{\ell_0} D_{Z_1}^{\ell_1} \dots D_{Z_s}^{\ell_s} \tau = \frac{\partial^{\ell_0+\dots+\ell_s} \tau_I^J}{\partial Z_0^{\ell_0} \partial Z_{1,L_1}^{\ell_1} \dots \partial Z_{s,L_s}^{\ell_s}}$$

LEMME 1.3. — Soient  $\tau : E \longrightarrow T_a^b(V)$  et  
 $(x, Z_0, \dots, Z_s) \longmapsto (x, Z_0, \dots, Z_s)$   
 des applications  $C^\infty$ . On pose  $U = \tau \circ X$ .  
 $X : V \longrightarrow E$   
 $x \longmapsto (x, Z_0(x), \dots, Z_s(x))$

Alors,  $\nabla U$  peut s'écrire :

$$\nabla U = D_x \tau \circ X + \sum_{k=0}^s (D_{Z_k} \tau \circ X) \cdot \nabla Z_k,$$

où  $\cdot$  désigne le produit contracté.  $D_x \tau$  est une application de  $E$  dans  $T_{a+1}^b(V)$  ; c'est l'application telle que, dans tout système de coordonnées locales de  $V$ , les composantes de  $D_x \tau$  au point de coordonnées  $(x^\beta, Z_0, \dots, Z_{s,L})$  sont données par :

$$(D_x \tau)_{\alpha,I}^J = \frac{\partial \tau_I^J}{\partial x^\alpha} + \sum_{k=0}^s \sum_{\mu=1}^k (D_{Z_k} \tau)_I^{L,J} Z_{k,I_\lambda}^\mu \Gamma_{\alpha \ell_\mu}^\lambda(x^\beta) \\ + \sum_{\mu=1}^b \Gamma_{\alpha \lambda}^{j_\mu}(x^\beta) \tau_I^{j_\mu} - \sum_{\mu=1}^a \Gamma_{\alpha i_\mu}^\lambda(x^\beta) \tau_{I_\lambda}^{j_\mu}$$

où les  $\Gamma_{\beta \lambda}^\nu(x^\beta)$  sont les coefficients de connexion au point  $(x^\beta)$ . De plus, on a :

$$D_x(D_{Z_k} \tau) = D_{Z_k}(D_x \tau) \quad \forall k = 0, 1, \dots, s.$$

*Preuve.* — On a :

$$\nabla_\alpha U_I^J = \frac{\partial \tau_I^J}{\partial x^\alpha} \circ X \\ + \sum_{k=0}^s \left[ \sum_{\mu=1}^k Z_{k,L^\mu} \Gamma_{\alpha \ell_\mu}^\lambda \left( \frac{\partial \tau_I^J}{\partial Z_{k,L}} \circ X \right) + \left( \frac{\partial \tau_I^J}{\partial Z_{k,L}} \circ X \right) \cdot \nabla_\alpha Z_{k,L} \right] \\ + \sum_{\mu=1}^b \Gamma_{\alpha \lambda}^{j_\mu}(\tau_I^{j_\mu} \circ X) - \sum_{\mu=1}^a \Gamma_{\alpha i_\mu}^\lambda(\tau_{I_\lambda}^{j_\mu} \circ X)$$

D'après le lemme 1.2, les  $\frac{\partial \tau_I^J}{\partial Z_{k,L}}$  sont les composantes d'un  $(b+k, a)$ -tenseur, d'où les  $\frac{\partial \tau_I^J}{\partial Z_{k,L}} \cdot \nabla_\alpha Z_{k,L}$  sont les composantes d'un  $(b, a+1)$ -tenseur.

Comme les  $\nabla_\alpha U_I^J$  sont les composantes d'un  $(b, a+1)$ -tenseur, la somme des termes restant au second membre forme donc les composantes d'un  $(b, a+1)$ -tenseur,  $D_x \tau$ . On vérifie par calcul que l'on a :

$$(D_x(D_{Z_k} \tau))_{\alpha,I}^{L,J} = (D_{Z_k}(D_x \tau))_{\alpha,I}^{L,J} \quad \forall k = 0, 1, \dots, s.$$

On a ainsi démontré le lemme.



DÉFINITION. — On définit par récurrence  $D_x^\ell D_{Z_0}^{\ell_0} \dots D_{Z_s}^{\ell_s} \tau$ , c'est une application de  $E$  dans  $T_{a+\ell}^{b+\ell_1+\dots+s\ell_s}(V)$ .

NOTATION. — Si  $\lambda$  est une application définie sur l'ensemble des couples  $(\mu, \rho)$   $0 \leq \mu \leq s$ ,  $l \leq \rho \leq \ell_\mu$ , on désigne par  $(D_x^\ell D_{Z_0}^{\ell_0} \dots D_{Z_s}^{\ell_s} \tau \circ X) \otimes_{\mu, \rho} \nabla^{\lambda(\mu, \rho)} Z_\mu$  le produit:

$$(D_x^\ell D_{Z_0}^{\ell_0} \dots D_{Z_s}^{\ell_s} \tau \circ X) \otimes \nabla^{\lambda(0,1)} Z_0 \otimes \dots \otimes \nabla^{\lambda(0, \ell_0)} Z_0 \otimes \dots \otimes \nabla^{\lambda(s,1)} Z_s \otimes \dots \otimes \nabla^{\lambda(s, \ell_s)} Z_s$$

On montre par récurrence sur  $k$ , en utilisant le lemme 1.3 qu'on a :

PROPOSITION 1.2. — Soient  $\tau$ ,  $X$  et  $U$  les applications  $C^\infty$  du lemme 1.3. Alors, pour  $k \in \mathbb{N}$ , les  $\nabla^k U$  sont des sommes de termes de la forme :  $(D_x^\ell D_{Z_0}^{\ell_0} \dots D_{Z_s}^{\ell_s} \tau \circ X) \otimes_{\mu, \rho} \nabla^{\lambda(\mu, \rho)} Z_\mu$ , où  $\mu$  parcourt l'ensemble des indices  $0, 1, \dots, s$  pour lesquels  $\ell_\mu > 0$  et  $\rho$  parcourt l'ensemble des valeurs  $1, \dots, \ell_\mu$ ,  $\lambda(\mu, \rho)$  est une fonction à valeurs entières et on a :

$$1 \leq \lambda(\mu, \rho), \quad \ell + \sum_{\mu, \rho} \lambda(\mu, \rho) = k, \quad \ell + \sum_{i=0}^s \ell_i \leq k.$$

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $E$ . Pour  $x \in V$ , on désigne par  $E_x$  la fibre de  $E$  au-dessus du point  $x$  et on pose  $\Omega_x = \Omega \cap (\{x\} \times E_x)$ . On suppose que  $\forall x \in V$ ,  $(x, 0) \in \Omega_x$ ,  $0$  étant le vecteur nul de  $E$ .

Soit  $a, b \in \mathbb{N}$ ,  $p \in [1, +\infty]$ . Soit  $\tau$  une application  $C^\infty$  de  $\Omega$  dans  $T_a^b(V)$ . Pour  $r \in \mathbb{N}$ , soit  $U^r$  l'application de  $V$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$U^r(x) = \sup_{\substack{(Z_0, \dots, Z_s) \in \Omega_x \\ \ell + \ell_0 + \dots + \ell_s = r}} |D_x^\ell D_{Z_0}^{\ell_0} \dots D_{Z_s}^{\ell_s} \tau(x, Z_0, \dots, Z_s)|.$$

Soit  $E_m^{p, \infty}$  (resp.  $E'_m{}^{p, \infty}$ ) l'espace des applications  $\tau \in C^\infty$  de  $\Omega$  dans  $T_a^b(V)$  telles que

$$\sum_{r=0}^m U^r \in L^p \text{ (resp. } U^0 \in L^\infty \text{ et } \sum_{r=1}^m U^r \in L^p)$$

L'espace  $W_m^{p, \infty}$  ou  $W'_m{}^{p, \infty}(\Omega)$  (resp.  $V_m^{p, \infty}$  ou  $V'_m{}^{p, \infty}(\Omega)$ ) est le complété de  $E_m^{p, \infty}$  (resp.  $E'_m{}^{p, \infty}$ ) pour la norme :

$$\|\tau\|_{W_m^{p, \infty}} = \left\| \sum_{r=0}^m U^r \right\|_{L^p} \quad \left( \text{resp. } \|\tau\|_{V_m^{p, \infty}} = \|U^0\|_{L^\infty} + \left\| \sum_{r=1}^m U^r \right\|_{L^p} \right)$$

### 1.3. Inégalités de Sobolev

#### 1.3.1 Inégalités pour les espaces $W_m^p$ et $V_m^p$

THÉOREME 1.1. — Soit  $V$  une variété riemannienne vérifiant l'hypothèse  $\mathcal{H}_0$ . Si  $p$  et  $q$  sont deux réels tels que  $1 \leq p \leq q$ ,  $m$  et  $\ell$  deux entiers tels que  $0 \leq \ell \leq m$ , alors :

Pour  $\frac{1}{q} \geq \frac{1}{p} - \frac{\ell}{n}$ ,  $n \geq p\ell$ , on a les inégalités :

$$(1-2) \quad \|Z\|_{W_{m-\ell}^q} \leq C \|Z\|_{W_m^p}, \quad \forall Z \in W_m^p$$

$$(1-2)' \quad \|Z\|_{V_{m-\ell}^q} \leq C \|Z\|_{V_m^p}, \quad \forall Z \in V_m^p$$

Pour  $n < q\ell$ , on a les inégalités :

$$(1-3) \quad \|Z\|_{W_{m-\ell}^\infty} \leq C \|Z\|_{W_m^q}, \quad \forall Z \in W_m^q$$

$$(1-3)' \quad \|Z\|_{V_{m-\ell}^\infty} \leq C \|Z\|_{V_m^q}, \quad \forall Z \in V_m^q.$$

Les constantes  $C$  ne dépendant que de  $m$ ,  $n$ ,  $p$ ,  $q$ , du rayon d'injectivité de  $V$  et de la borne de la courbure sectionnelle.

*Preuve.* — Remarquons d'abord que :

– Si  $m = \ell$ , les inégalités (1-2)' et (1-3)' sont évidentes.

– Si  $\ell < m$ , (1-2)' se déduit de (1-2) et (1-3)' se déduit de (1-3). En effet, supposons démontrée (1-2). Soit  $Z \in V_m^p$ , alors  $\nabla Z \in W_{m-1}^p$ . On applique (1-2) à  $\nabla Z$  et on utilise le lemme 1.1 pour montrer (1-2)'.

On montre de même que (1-3) entraîne (1-3)'. Il reste donc à montrer (1-2) et (1-3).

Dans [2], on montre (1-2) et (1-3) pour les fonctions sur  $V$ . On va donc démontrer (1-2) et (1-3) pour les champs de tenseurs sur  $V$ .

*Preuve de (1-2) pour les champs de tenseurs sur  $V$ .*

a) Supposons d'abord  $m = \ell = 1$ .

Pour les fonctions, (1-2) s'écrit :

$$(*) \quad \|f\|_{L^q} \leq C [\|f\|_{L^p} + \|\nabla f\|_{L^p}] \quad \text{pour} \quad \frac{1}{p} \geq \frac{1}{q} - \frac{1}{n}$$

Pour  $Z \in W_1^p$ , appliquant (\*) à la fonction  $|Z|$  et utilisant le lemme 1.1, on a :

$$\|Z\|_{L^q} \leq C [\|Z\|_{L^p} + \|\nabla Z\|_{L^p}]$$

b) Cas général

Soit  $p_k$  le réel défini pour  $k \in \mathbb{N}$  par  $\frac{1}{p_k} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$ , alors :

$$\frac{1}{p_k} = \frac{1}{p_{k-1}} - \frac{1}{n} \text{ et } \frac{1}{q} \geq \frac{1}{p_\ell} = \frac{1}{p_{\ell-1}} - \frac{1}{n}$$

Soit  $Z \in W_m^p$ , alors, pour  $0 \leq r \leq m - \ell$ ,  $\nabla^r Z \in W_1^p$ , d'où d'après a), on a en utilisant le lemme 1.1,  $\forall r$  tel que  $0 \leq r \leq m - \ell$ , on a :

$$\begin{aligned} \|\nabla^r Z\|_{L^{p_k}} &\leq C_k [\|\nabla^r Z\|_{L^{p_{k-1}}} + \|\nabla^{r+1} Z\|_{L^{p_{k-1}}}] \\ &\text{et } \|\nabla^r Z\|_{L^q} \leq C_k [\|\nabla^r Z\|_{L^{p_{\ell-1}}} + \|\nabla^{r+1} Z\|_{L^{p_{\ell-1}}}] \\ \text{d'où : } \sum_{r=0}^{m-\ell} \|\nabla^r Z\|_{L^q} &\leq C \sum_{k=0}^{m-\ell} \|\nabla^k Z\|_{L^p}, \end{aligned}$$

ce qui montre (1-2).

*Preuve de (1-3) pour les champs de tenseurs sur  $V$*

Pour  $m = \ell = 1$ , la preuve de (1-3) est identique à celle de (1-2).

Pour  $m > 1$ , on va distinguer les cas  $q > m$  et  $q \leq n < m - \ell$ .

Si  $q > n$ , soit  $Z \in W_m^q$ , alors,  $\nabla^s Z \in W_1^q$  pour  $0 \leq s \leq m - \ell$ , d'où

$$\|\nabla^s Z\|_{L^\infty} \leq C [\|\nabla^s Z\|_{L^q} + \|\nabla^{s+1} Z\|_{L^q}] \leq C \|Z\|_{W_m^q}.$$

Supposons  $q \leq n < m - \ell$ .

Soit  $k$  un entier tel que  $kq \leq n < (k+1)q$

Si  $kq < n$ , on pose  $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{k}{n}$  et de l'inégalité (1-2), on a :

$$\|Z\|_{W_{m-k}^r} \leq C \|Z\|_{W_m^q}; \text{ et comme } r > n \text{ et } k < \ell, \text{ on a donc pour } 0 \leq s \leq m - \ell :$$

$$\|\nabla^s Z\|_{L^\infty} \leq C \|\nabla^s Z\|_{W_1^r} \leq C \|Z\|_{W_{m-k}^r}, \text{ d'où l'inégalité dans ce cas.}$$

Si  $kq = n$ , on choisit  $r > \max(n, q)$  et on a :  $\|Z\|_{W_{m-k}^r} \leq C \|Z\|_{W_m^q}$ . On termine la preuve comme ci-dessus.

On va utiliser le théorème 1.1 pour établir des inégalités pour les produits tensoriels ou contractés de tenseurs sur  $V$ .

THÉORÈME 1.2. — Soient  $q, p \in \overline{\mathbb{R}}$  tels que  $1 \leq p \leq q \leq +\infty$ ,  $m, m', \ell$  et  $\ell'$  des entiers tels que  $\ell \leq m$  et  $\ell' \leq m'$ .

Si on a  $\frac{n}{q} < m + m' - \ell - \ell'$ , alors, on a les inégalités :

$$(1-4) \quad \left\| |\nabla^\ell Y| |\nabla^{\ell'} Z| \right\|_{L^p} \leq C \|Y\|_{W_m^q} \|Z\|_{W_{m'}^p}, \quad \forall (Y, Z) \in W_m^q \times W_{m'}^p.$$

$$(1-5) \quad \left\| |\nabla^\ell Y| |\nabla^{\ell'} Z| \right\|_{L^p} \leq C \|Y\|_{V_m^q} \|Z\|_{W_{m'}^p}, \quad \forall (Y, Z) \in V_m^q \times W_{m'}^p.$$

Si de plus  $\ell' \neq 0$ , alors, on a :

$$(1-6) \quad \left\| |\nabla^\ell Y| |\nabla^{\ell'} Z| \right\|_{L^p} \leq C \|Y\|_{V_m^q} \|Z\|_{V_{m'}^p}, \quad \forall (Y, Z) \in V_m^q \times V_{m'}^p.$$

Les constantes  $C$  ayant les mêmes propriétés que celles du théorème 1.1.

Preuve. — Comme pour le théorème 1.1, (1-5) et (1-6) se déduisent de (1-4).

Preuve de (1-4). — Soient  $\alpha$  et  $\beta$  des réels positifs tels que  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ .

Alors, on a :

$$\left\| |\nabla^\ell Y| |\nabla^{\ell'} Z| \right\|_{L^p} \leq \|\nabla^\ell Y\|_{L^{p\alpha}} \|\nabla^{\ell'} Z\|_{L^{p\beta}}$$

Choisissons  $\alpha$  et  $\beta$  tels que l'on ait

$$(*) \quad \frac{1}{q} \geq \frac{1}{p\alpha} > \frac{1}{q} - \frac{m-\ell}{n} \quad \text{et} \quad \frac{1}{p} \geq \frac{1}{p\beta} > \frac{1}{p} - \frac{m'-\ell'}{n};$$

alors, comme  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ , on a :  $\frac{1}{p\alpha} \leq \frac{m'-\ell'}{n}$  d'où  $\frac{1}{p\alpha} \leq \min\left(\frac{1}{q}, \frac{m'-\ell'}{n}\right)$ , ce qui n'est possible que si on a :

$$(**) \quad \frac{1}{q} - \frac{m-\ell}{n} < \frac{m'-\ell'}{n} \quad \text{ou} \quad \frac{n}{q} < m + m' - \ell - \ell'.$$

Le théorème 1.1 implique, compte tenu de (\*):

$$\|\nabla^\ell Y\|_{L^{p\alpha}} \leq C_1 \|Z\|_{W_m^q} \quad \text{et} \quad \|\nabla^{\ell'} Z\|_{L^{p\beta}} \leq C_2 \|Z\|_{W_{m'}^q},$$

et (\*\*) entraîne qu'on a (1-4).

Du théorème 1.2, on déduit le corollaire suivant :

COROLLAIRE 1.1. — Si on a :  $m \leq m'$ ,  $1 \leq p \leq q \leq +\infty$  et  $n < mq$ , alors on a :

$$\begin{aligned} \|Y \otimes Z\|_{W_m^p} &\leq C \|Y\|_{W_m^q} \|Z\|_{W_{m'}^p}, \quad \forall (Y, Z) \in W_m^q \times W_{m'}^p, \\ \|Y \otimes Z\|_{W_m^p} &\leq C \|Y\|_{V_m^q} \|Z\|_{W_{m'}^p}, \quad \forall (Y, Z) \in V_m^q \times W_{m'}^p, \\ \|Y \otimes Z\|_{W_m^p} &\leq C \|Y\|_{V_m^q} \|Z\|_{V_{m'}^p}, \quad \forall (Y, Z) \in V_m^q \times V_{m'}^p, \end{aligned}$$

### 1.3.2 Inégalités pour les espaces $W_m^{p,\infty}$ et $V_m^{p,\infty}$

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $E = \mathbb{R} \times_V T_1(V) \times_V \dots \times_V T_s(V)$  vérifiant les conditions de 1.2.2. Si  $\tau$  est une application de  $\Omega$  dans  $T_a^b(V)$ , pour simplifier l'écriture, nous noterons  $\tau(x, Z_i(x))$  le tenseur  $\tau(x, Z_o(x), \dots, Z_s(x))$ .

THÉORÈME 1.3. — Soient  $q, p \in \overline{\mathbb{R}}$  tels que  $1 \leq p \leq q \leq +\infty$ ,  $m, m'$  et  $j$  des entiers tels que  $j < m \leq m'$ . Soient  $\tau \in W_m^{p,\infty}(\Omega)$  et  $Z_i \in W_{m'}^p$ ,  $i = 0, 1, \dots, s$  des champs de tenseurs sur  $V$ .

$$\text{Si on a : } \frac{n}{p} < m' - 1 \text{ et } \frac{1}{q} \geq \frac{1}{p} - \frac{m-j}{n},$$

alors, pour toute suite d'entiers  $\ell, \ell_o, \dots, \ell_s$  tels que  $\ell + \ell_o + \dots + \ell_s = j$ , on a l'inégalité :

$$(1-7) \quad \left\| D_x^\ell D_{Z_o}^{\ell_o} \dots D_{Z_s}^{\ell_s} \tau(x, Z_i(x)) \right\|_{L^p} \leq C(m-j, n, p, q) \left\| \sum_{h=j}^m U^h \right\|_{L^p} \left( 1 + \sum_{k=0}^s \|Z_k\|_{W_{m'}^p} \right)^{m-j}$$

*Preuve.* — Supposons d'abord  $m = 1$  et  $j = 0$  ; alors, on a :  $\frac{n}{p} < m' - 1$  et  $\frac{1}{q} \geq \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$ , d'où l'inégalité (1-2) du théorème 1.1 implique qu'on a :

$$\|\tau(x, Z_i(x))\|_{L^q} \leq C [\|\tau(x, Z_i(x))\|_{L^p} + \|\nabla \tau(x, Z_i(x))\|_{L^p}]$$

et on sait du lemme 1.3 que :

$$\nabla \tau(x, Z_i(x)) = D_x \tau(x, Z_i(x)) + \sum_{k=0}^s D_{Z_k} \tau(x, Z_i(x)) \cdot \nabla Z_k$$

et l'inégalité  $\frac{n}{p} < m' - 1$  implique que l'on a  $\|\nabla Z_k\|_{L^\infty} \leq C \|Z_k\|_{W_{m'}^p}$ , d'où on a :

$$(1-7)' \quad \|\tau(x, Z_i(x))\|_{L^q} \\ \leq C \left[ \|\tau(x, Z_i(x))\|_{L^p} + \|D_x \tau(x, Z_i(x))\|_{L^p} + \sum_{k=0}^s \|D_{Z_k} \tau(x, Z_i(x))\|_{L^p} \|Z_k\|_{W_{m'}^p} \right]$$

d'où l'inégalité dans ce cas.

Dans le cas général, pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , posons :  $\frac{1}{q_k} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$  ; alors :

$$\frac{1}{q_k} = \frac{1}{q_{k-1}} - \frac{1}{n} \text{ et } \frac{1}{q} \geq \frac{1}{q_{m-j-1}} - \frac{1}{n}.$$

On applique alors (1-7)' au tenseur  $D_x^\ell D_{Z_0}^{\ell_0} \dots D_{Z_s}^{\ell_s} \tau(x, Z_i(x))$ ,

en prenant  $p = q_{m-j-1}$  et aux tenseurs  $D_x^{\ell+\ell'} D_{Z_0}^{\ell_0+\ell'_0} \dots D_{Z_s}^{\ell_s+\ell'_s} \tau(x, Z_i(x))$  avec  $p = q_{k-1}$  et  $q = q_k$ , successivement pour  $k = m - j - 1, \dots, k = 1$  et on obtient (1-7).

Voici un théorème fondamental qui sera très utile dans l'étude du problème de Cauchy pour les équations quasi-linéaires.

**THÉORÈME 1.4** (théorème de substitution pour les variétés riemanniennes)

Soient  $m$  et  $m'$  deux entiers tels que  $m \leq m'$ ,  $p \in [1, +\infty[$ . Soit

$$\tau \in W_m^{p,\infty}(\Omega) \text{ (resp. } \tau \in V_m^{p,\infty}(\Omega)\text{)}.$$

On suppose :  $\frac{n}{p} < m' - 1$ .

Alors, si  $Z_i \in W_{m'}^p$ ,  $i = 0, 1, \dots, s$ , sont  $s + 1$  champs de tenseurs sur  $V$ , le champs de tenseurs  $\theta$  défini sur  $V$  par  $\theta(x) = \tau(x, Z_i(x))$  vérifie l'inégalité :

$$(1-8) \quad \|\theta\|_{W_m^p} \leq C(m, n, p) \|\tau\|_{W_m^{p,\infty}} \left( 1 + \sum_{k=0}^s \|Z_k\|_{W_{m'}^p} \right)^m \\ \text{(resp. } \|\theta\|_{V_m^p} \leq C(m, n, p) \|\tau\|_{V_m^{p,\infty}} \left( 1 + \sum_{k=0}^s \|Z_k\|_{W_{m'}^p} \right)^m \text{)}$$

*Preuve.* — Avec les théorèmes 1.1, 1.2, et 1.3, la preuve du théorème 1.4 est identique à celle faite dans [3] pour les espaces euclidiens.

COROLLAIRE 1.2. — Avec les notations et les hypothèses du théorème 1.4 :

Si  $Y_i, Z_i \in W_{m'}^p, i = 0, 1, \dots, s$  sont  $2(s+1)$  champs de tenseurs sur  $V$  tels que  $\forall r \in [0, 1], (x, Y_0 + rZ_0, \dots, Y_s + rZ_s) \in \Omega$ , alors on a :

$$(1-9) \quad \|\tau(x, Y_i(x) + Z_i(x)) - \tau(x, Y_i(x))\|_{W_{m-1}^p} \leq C(m, m', p, n) \|\tau\|_{W_m^{p, \infty}} \sum_{k=0}^s \|Z_k\|_{W_{m'-1}^p} \left(1 + \sum_{k=0}^s \|Y_k\|_{W_{m'}^p} + \sum_{k=0}^s \|Z_k\|_{W_{m'}^p}\right)^{m-1}$$

et si  $u \in W_{m'-1}^p$  est une fonction sur  $V$ , alors on a :

$$(1-10) \quad \|(\tau(x, Y_i(x) + Z_i(x)) - \tau(x, Y_i(x)))u\|_{W_{m-1}^p} \leq C(m, m', p, n) \|\tau\|_{W_m^{p, \infty}} \sum_{k=0}^s \|Z_k\|_{W_{m'-1}^p} \|u\|_{W_{m'-1}^p} \left(1 + \sum_{k=0}^s \|Y_k\|_{W_{m'}^p} + \sum_{k=0}^s \|Z_k\|_{W_{m'}^p}\right)^{m-1}$$

*Preuve.* — Soit  $\tau : \Omega \rightarrow T_a^b(V)$ . Soit  $\tau_I^J(x^\lambda, Z_{i,L}(x^\lambda))$  les composantes de  $\tau(x, Z_i(x))$  dans un système de coordonnées géodésiques. Alors :

$$|\tau(x, Z_i(x))|^2 = \tau_I^J(x^\lambda, Z_{i,L}(x^\lambda)) \cdot \tau_J^I(x^\lambda, Z_{i,L}(x^\lambda)).$$

On a :

$$\begin{aligned} & \tau_I^J(x^\lambda, Y_{i,L}(x^\lambda) + Z_{i,L}(x^\lambda)) - \tau_I^J(x^\lambda, Y_{i,L}(x^\lambda)) \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} [\tau_I^J(x^\lambda, Y_{i,L}(x^\lambda) + tZ_{i,L}(x^\lambda))] dt \\ &= \sum_{k=0}^s \int_0^1 Z_{k,L} \frac{\partial \tau_I^J}{\partial Z_{k,L}}(x^\lambda, Y_{i,L}(x^\lambda) + tZ_{i,L}(x^\lambda)) dt \end{aligned}$$

D'où on a :

$$\begin{aligned} & \nabla_{\alpha_1 \dots \alpha_\ell} [\tau_I^J(x^\lambda, Y_{i,L}(x^\lambda) + Z_{i,L}(x^\lambda)) - \tau_I^J(x^\lambda, Y_{i,L}(x^\lambda))] \\ &= \sum_{k=0}^s \int_0^1 \nabla_{\alpha_1 \dots \alpha_\ell} \left[ Z_{k,L} \frac{\partial \tau_I^J}{\partial Z_{k,L}}(x^\lambda, Y_{i,L}(x^\lambda) + tZ_{i,L}(x^\lambda)) \right] dt \end{aligned}$$

Par hypothèse,  $V$  a un rayon d'injectivité  $d > 0$ , et la courbure sectionnelle est bornée sur  $V$ , d'où dans un système de coordonnées géodésiques,

pour tout champ de tenseurs  $T$  sur  $V$ ,  $|T|^2$  et  $\sum_{I,J} |T_I^J|^2$  sont équivalents. On en déduit que :

$$\begin{aligned} & |\nabla^\ell[\tau(x, Y_i(x) + tZ_i(x)) - \tau(x, Y_i(x))]| \\ & \leq C_1 \sum_{k=0}^s \int_0^1 |\nabla^\ell[Z_k D_{Z_k} \tau(x, Y_i(x) + tZ_i(x))]| dt \end{aligned}$$

D'autre part, d'après le théorème 1.2, on a :

$$\begin{aligned} & \|Z_k \cdot D_{Z_k} \tau(x, Y_i(x) + tZ_i(x))\|_{W_{m-1}^p} \\ & \leq C_2 \|Z_k\|_{W_{m'-1}^p} \|D_{Z_k} \tau(x, Y_i(x) + tZ_i(x))\|_{W_{m-1}^p} \end{aligned}$$

et on termine la preuve en utilisant le théorème 1.4.

L'inégalité (1-10) se déduit de (1-9) et du théorème 1.2.

## 2. Equations hyperboliques sur $V$

### 2.1. Propriétés géométriques de la variété $V$

#### *Notations-Définitions-Hypothèses*

Soit  $V$  une variété riemannienne  $C^\infty$  de dimension  $n$ , de métrique  $g$   $C^\infty$ , de la forme  $V = \mathbb{R} \times S$ , où  $S$  est une variété  $C^\infty$  de dimension  $n - 1$ . Pour  $t \in \mathbb{R}$ , on note  $S_t$  la variété  $S_t = \{t\} \times S$ , et pour  $T > 0$ , on pose :  $V_T = ]-T, T[ \times S$ . Les variétés  $S_t$  seront munies de la métrique  $\bar{g}_t$  induite par  $g$  sur  $S_t$  ; La variété  $S$  sera munie de la métrique  $\bar{g}$ .

**DÉFINITION.** — A toute carte  $(U, \varphi)$  de  $S$  correspond une carte  $(\mathbb{R} \times U, \text{Id} \times \varphi)$  de  $V$  appelée carte adaptée de  $V$ . Un système de coordonnées adaptées de  $V$  est un système de coordonnées  $(x^0 = t, x^i)$ , où  $(x^i)$  est un système de coordonnées locales de  $S$ .

On désigne par  $\nabla$  la connexion de  $(V, g)$  et  $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$  les coefficients de connexion de  $(V, g)$ , les  $\bar{\nabla}_t$  ou  $\bar{\nabla}_t$  la connexion de  $(S_t, \bar{g}_t)$  et  $\bar{\Gamma}_{ij}^k$  ou  $\bar{\Gamma}_{ij}^k$  les coefficients de connexion de  $(S_t, \bar{g}_t)$ ,  $d\mu$  ou  $d\mu(g)$  l'élément de volume de  $V$  pour la métrique  $g$  et  $d\mu_t$  ou  $d\mu(\bar{g}_t)$  l'élément de volume de  $S_t$  pour la métrique  $\bar{g}_t$ .



Si  $Z$  est un tenseur sur  $V$ , on note  $|Z|$  la norme de  $Z$  pour la métrique  $g$  de  $V$ . Pour un tenseur  $Z$  sur  $S$ ,  $|Z|_{\bar{g}_t}$  désigne la norme de  $Z$  pour la métrique  $\bar{g}_t$  de  $S_t$ .

Dans toute la suite, les indices latins prendront les valeurs  $1, \dots, n-1$  et les indices grecs les valeurs  $0, 1, \dots, n-1$ .

On suppose dans la suite que, dans les cartes adaptées de  $V$ ,  $g_{oi} = 0$ .

Soit  $X$  le champ de vecteurs des vecteurs tangents aux chemins  $t \rightarrow (t, x)$  et  $n$  le champ de vecteurs des normales unitaires aux hypersurfaces  $S_t$ , orientés vers les  $t > 0$ . Dans un système de coordonnées adaptées de  $V$ , on a :

$$X^o = 1, X^i = 0, n_o > 0, n_i = 0, g_{oo} = |X|^2 \text{ et } n_o^2 g^{oo} = 1, X_\alpha = g_{o\alpha} \text{ et } n^\alpha = g^{o\alpha} n_o;$$

on a aussi  $d\mu(g) = n_o dt d\mu(\bar{g}_t)$ , si  $\bar{g}_t^{ij}$  désignent les composantes de la matrice inverse de  $\bar{g}_{ij}$ , on a :  $\bar{g}_t^{ij} = g^{ij}$ .

*Hypothèses sur  $V$  et  $S_t$ .* — Dans la suite, on suppose que les variétés  $V$  et  $S_t$  satisfont les hypothèses suivantes :

- $V$  est orientable, connexe, et vérifie l'hypothèse  $\mathcal{H}_o$ .
- Les variétés  $S_t$  vérifient l'hypothèse  $\mathcal{H}_o$ .
- Les métriques  $\bar{g}_t$  sont uniformément équivalentes à la métrique  $\bar{g}_o$  et il existe des constantes strictement positives  $\delta$  et  $\nu$  telles que :  $0 < \delta \leq n_o$  et  $X_o \leq \nu$ .
- La famille  $(d_t)_{t \in \mathbb{R}}$  des rayons d'injectivité de  $S_t$  est minorée par une constante  $d > 0$ .

*Conséquences.* — Les hypothèses ci-dessus impliquent qu'on a :

1) Dans tout système de coordonnées adaptées de  $V$  :

$$0 < \delta^2 \leq n_o^2 \leq g_{oo} \leq \nu \text{ et } \frac{1}{\nu} \leq g^{oo} \leq \frac{1}{\delta^2},$$

2) La métrique  $g$  est équivalente à la métrique (indépendante du temps)  $\gamma$  définie dans tout système de coordonnées adaptées de  $V$  par :

$$\gamma_{oo} = 1, \gamma_{oi} = 0, \gamma_{ij} = \bar{g}_{ij}.$$

On note  $\tilde{\nabla}$  la connexion de  $(V, \gamma)$  et  $\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\mu$  les coefficients de connexion de  $(V, \gamma)$ ,  $d\tilde{\mu}$  ou  $d\tilde{\mu}(\gamma)$  l'élément de volume de  $(V, \gamma)$ .

## 2.2. Espaces de Sobolev et inégalités de Sobolev

Soient  $p \in [1, +\infty]$  et  $m \in \mathbb{N}$ .

Si  $Z \in W_m^p$  (resp.  $Z \in V_m^p$ ), on note  $\|Z\|_{W_m^p(S_t, V)}$  (resp.  $\|Z\|_{V_m^p(S_t, V)}$ ) la quasi-norme :

$$\begin{aligned} \|Z\|_{W_m^p(S_t, V)} &= \left\| \sum_{\ell=0}^m |\nabla^\ell Z| \right\|_{L^p(S_t)} \quad (\text{resp. } \|Z\|_{V_m^p(S_t, V)}) \\ &= \|Z\|_{L^\infty(S_t)} + \left\| \sum_{\ell=1}^m |\nabla^\ell Z| \right\|_{L^p(S_t)}. \end{aligned}$$

Pour  $1 \leq p < +\infty$   $\|Z\|_{W_m^p}$  est équivalente à  $\left( \int_{-\infty}^{+\infty} \|Z\|_{W_m^p(S_t, V)}^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$ .

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $E = \mathbb{R} \times_V T_1(V) \times_V \dots \times_V T_s(V)$  vérifiant les conditions de 1.2.2. Si  $\tau \in W_m^{p, \infty}(\Omega)$ , (resp.  $\tau \in V_m^{p, \infty}(\Omega)$ ), on note  $\|\tau\|_{W_m^{p, \infty}(S_t, \Omega)}$  (resp.  $\|\tau\|_{V_m^{p, \infty}(S_t, \Omega)}$ ) la quasi-norme:

$$\begin{aligned} \|Z\|_{W_m^{p, \infty}(S_t, \Omega)} &= \left\| \sum_{i=0}^m U^i \right\|_{L^p(S_t)} \quad (\text{resp. } \|Z\|_{V_m^{p, \infty}(S_t, \Omega)}) \\ &= \|U^0\|_{L^\infty(S_t)} + \left\| \sum_{i=1}^m U^i \right\|_{L^p(S_t)} \end{aligned}$$

Les méthodes utilisées pour prouver les théorèmes 1.1, 1.2, 1.3, et 1.4 permettent de montrer que ces théorèmes sont encore vrais pour presque toutes les valeurs de  $t$ , si on remplace les normes de Sobolev par les quasi-norme correspondantes et  $n$  par  $n - 1$  dans les hypothèses.

**THÉORÈME 2.1.** — *On suppose que les variétés  $S_t$  et  $V$  vérifient l'hypothèse  $\mathcal{H}_0$ . Soient  $m, \ell \in \mathbb{N}$  tels que  $\ell \leq m$ ,  $p, q \in \mathbb{R}$  tels que  $1 \leq p \leq q \leq +\infty$ . Si on a :*

$$\frac{n-1}{q} \geq \frac{n}{p} - \ell, \quad n > p\ell,$$

alors, pour toutes les valeurs de  $t$ , on a les inégalités:

$$(2-1) \quad \|Z\|_{W_{m-\ell}^q(S_t, V)} \leq C \|Z\|_{W_m^p(V)}, \quad \forall Z \in W_m^p$$

$$(2-2) \quad \|Z\|_{V_{m-\ell}^q(S_t, V)} \leq C \|Z\|_{V_m^p(V)}, \quad \forall Z \in V_m^p$$

Les constantes  $C$  ne dépendant que de  $m, n, p, q$ , du rayon d'injectivité de  $S_0$  et de la borne de la courbure sectionnelle.

*Preuve.* — En utilisant les inégalités pour les espaces euclidiens et les méthodes exposés dans [1], on montre que si  $p \leq q$  et  $p < n$  et  $\frac{n-1}{q} \geq \frac{n}{p} - 1$ , alors pour toute fonction  $f \in W_1^p(V)$ , on a :

$$\|f\|_{L^q(S_t)} \leq C \|f\|_{W_1^p(V)}.$$

On procède ensuite comme au théorème 1.1 pour démontrer le théorème pour les champs de tenseurs sur  $V$ .

### 2.3. Tenseurs sur $V$ et tenseurs sur $S_t$

Soit  $p, s \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq p \leq s$ . Soit  $Z \in T_s(V)$ . Parmi les composantes de  $Z_{\alpha_1 \dots \alpha_s}$  de  $Z$  dans une carte adaptée de  $V$ , on considère celles qui ont l'indice 0 à  $p$  places fixées  $\pi_1, \dots, \pi_p$ ,  $1 \leq \pi_1 \leq \dots \leq \pi_p \leq s$ , et les indices  $i = 1, \dots, n-1$  aux autres places. Elles constituent les composantes d'un tenseur sur  $S$ ,  $s-p$  fois covariant.

Soit  $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_p)$  un ensemble de places d'indices ; posons  $|\pi| = p$ . On désigne par  $Z_\pi$  le tenseur sur  $S$ , dont les composantes, dans une carte locale de  $S$ , sont les composantes de  $Z$ , dans la carte adaptée correspondante qui ont des indices 0 aux places d'indices  $\pi$ .

On définit de même, pour  $Z$   $s$  fois contravariant,  $Z^{\pi'}$  et pour un  $(q, r)$ -tenseur  $Z$ ,  $Z^{\pi'}$ ,  $|\pi| \leq r$ ,  $|\pi'| \leq q$ .

Dans [4], on démontre les lemmes :

LEMME 2.1. — *Pour toutes places d'indices  $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_p)$   $0 \leq p \leq s$ , on a l'égalité :*

$$\nabla_\pi^s u = \bar{\nabla}^{s-p}(\partial_0^p u) + \sum_{\substack{1 \leq r+q \leq s-1 \\ i}} \bar{\nabla}^r(\partial_0^q u) \cdot A_{rqi}$$

où les  $A_{rqi}$  ne dépendent que de la métrique  $g$ .

LEMME 2.2. — *Les conditions  $|\nabla^k X|$ ,  $|\nabla^k n|$  et  $|\nabla^\ell R|$ ,  $0 \leq k \leq s$ ,  $0 \leq \ell \leq s-2$  sont bornés sur  $V_T$ , entraînent que pour tout champ de*

$(a, b)$ -tenseur  $U$ ,  $C^\infty$  sur  $V$ ,

$$\sum_{k=0}^s |\nabla^k U| \text{ et } \sum_{\substack{0 \leq r+q \leq s \\ \sigma, \sigma'}} |\bar{\nabla}^r \partial_0^q U_\sigma^{\sigma'}|_g \text{ sont équivalents sur } V_T.$$

LEMME 2.3. — Si les fonctions  $|\nabla^k X|$  et  $|\nabla^k n|$  sont bornées sur  $V_T$  pour  $0 \leq k \leq s$  et les  $|\nabla^\ell R|$  sont bornées sur  $V_T$  pour  $0 \leq \ell \leq s - 2$ , alors les quasi-normes de Sobolev :

$$\left( \int_{S_t} \left( \sum_{\ell=0}^s |\nabla^\ell u| \right)^2 d\mu_t \right)^{1/2} \text{ et } \left( \int_{S_t} \left( \sum_{\ell=0}^s |\tilde{\nabla}^\ell u|_\gamma \right)^2 d\tilde{\mu}_t \right)^{1/2}$$

sont uniformément équivalentes sur  $V_T$ .

## 2.4. Opérateurs hyperboliques sur $V$

### 2.4.1 Normes d'opérateurs différentiels

Soient  $m, \mu \in \mathbb{N}^*$ ,  $Q = (q_0, \dots, q_{m+1}) \in \bar{\mathbb{R}}^{m+2}$  tels que  $2 \leq q_0 \leq \dots \leq q_{m+1} \leq +\infty$  et  $p \in [1, +\infty]$  et soit  $\Omega$  un ouvert de  $E = \mathbb{R} \times_V T_1(V) \times_V \dots \times_V T_s(V)$  vérifiant les propriétés de 1.2.2. On désigne par  $\mathcal{V}_\mu^Q(V, m+1)$  (resp.  $\mathcal{V}_\mu^{p,\infty}(\Omega, m+1)$ ) l'espace des opérateurs linéaires d'ordre  $\leq m+1$ ,

$$\begin{aligned} a = a(x, \nabla) &= \sum_{k \leq m+1} a_k \cdot \nabla^k \text{ (resp. } a = a(x, Z_0, \dots, Z_s, \nabla) \\ &= \sum_{k \leq m+1} a_k(x, Z_0, \dots, Z_s) \cdot \nabla^k), \end{aligned}$$

de partie principale  $h = a_{m+1} \cdot \nabla^{m+1}$ , tels que :

$$\begin{aligned} a_{m+1} \in V_1^\infty \cap V_\mu^{q_{m+1}} \text{ et } a_k \in W_\mu^{q_k} \text{ pour } k \leq m \\ \text{(resp. } a_{m+1} \in V_1^{\infty, \infty} \cap V_\mu^{p, \infty} \text{ et } a_k \in W_\mu^{p, \infty} \text{ pour } k \leq m). \end{aligned}$$

$\mathcal{V}_\mu^Q(V, m+1)$  (resp.  $\mathcal{V}_\mu^{p,\infty}(\Omega, m+1)$ ) est un espace de Banach pour la norme :

$$\begin{aligned} \|a\|_{\mathcal{V}_\mu^Q(V, m+1)} &= \|a_{m+1}\|_{V_1^\infty} + \|a_{m+1}\|_{V_\mu^{q_{m+1}}} + \sum_{k \leq m} \|a_k\|_{W_\mu^{q_k}} \\ \text{(resp. } \|a\|_{\mathcal{V}_\mu^{p,\infty}(\Omega, m+1)} &= \|a_{m+1}\|_{V_1^{\infty, \infty}} + \|a_{m+1}\|_{V_\mu^{p, \infty}} + \sum_{k \leq m} \|a_k\|_{W_\mu^{p, \infty}}) \end{aligned}$$

Pour  $a \in \mathcal{V}_\mu^Q(V, m+1)$  (resp.  $a \in \mathcal{V}_\mu^{p,\infty}(\Omega, m+1)$ ), on pose :

$$\|a, V\|_\mu^Q = \|a_{m+1}\|_{V_\mu^{q_{m+1}}} + \sum_{k \leq m} \|a_k\|_{W_\mu^{q_k}}$$

$$\text{(resp. } \|a, \Omega\|_\mu^{p,\infty} = \|a_{m+1}\|_{V_\mu^{p,\infty}} + \sum_{k \leq m} \|a_k\|_{V_\mu^{p,\infty}})$$

et on note  $\|a, S_t, V\|_\mu^Q$  (resp.  $\|a, S_t, \Omega\|_\mu^{p,\infty}$ ) la quasi-norme associée.

Si  $Q = (q_0, \dots, q_{m+1})$  avec  $q_0 = \dots = q_{m+1}$ , on note  $\mathcal{V}_\mu^Q(V, m+1)$  l'espace  $\mathcal{V}_\mu^Q(V, m+1)$ .

On déduit du théorème 1.4 le lemme suivant:

LEMME 2.4. — Soient  $a \in \mathcal{V}_\mu^{p,\infty}(\Omega, m+1)$  et  $Z_i \in W_m^2$ ,  $i = 0, 1, \dots, s$  des champs de tenseurs sur  $V$ . Si on a  $\mu \leq m$  et  $n-1 < 2(m-1)$ , alors l'opérateur  $a'$  défini sur  $V$  par:

$$a'(x, \nabla) = a(x, Z_0(x), \dots, Z_s(x), \nabla)$$

vérifie l'inégalité:

$$\|a', S_t, V\|_\mu^2 \leq C(m, n, \mu) \|a, S_t, \Omega\|_\mu^{2,\infty} \left(1 + \sum_{k=0}^s \|Z_k\|_{W_m^2(S_t, V)}^\mu\right).$$

Et la partie principale  $h'$  de  $a'$  vérifie:

$$\|h', S_t, V\|_1^\infty \leq C(m, n, \mu) \|h, S_t, \Omega\|_1^{\infty,\infty} \left(1 + \sum_{k=0}^s \|Z_k\|_{W_m^2(S_t, V)}\right).$$

Si  $\sum_{k=0}^s \|Z_k\|_{W_m^2(S_t, V)}$  a une borne indépendante de  $t$ , alors  $a' \in \mathcal{V}_\mu^2(V, m+1)$ .

Soit  $a = a(x, \nabla) = \sum_{k \leq m+1} a_k \cdot \nabla^k \in \mathcal{V}_\mu^Q(V, m+1)$  un opérateur linéaire d'ordre  $m+1$  sur  $V$ , de partie principale  $h$ . Soit  $x = (t, x') \in V$  et soit  $\xi = (\xi_0, \xi') \in T_x^*(V)$ ; on pose :

$$h(x, \xi) = a_{m+1} \cdot \binom{m+1}{\otimes} \xi.$$

DÉFINITION. — On dit que  $a$  vérifie l'hypothèse de régularité si on a :

$n-1 < (m+\mu-k)q_k$  si  $m+\mu-k > 0$  et  $q_k = +\infty$  si  $m+\mu-k \leq 0$ .

Notons  $a^\circ$  le coefficient de  $\nabla_{\circ \dots \circ}^{m+1}$  dans une carte adaptée de  $V$  ; alors  $a^\circ$  est une fonction sur  $V$  : elle ne dépend pas de la carte adaptée choisie.

DÉFINITION. — On dira que les hypersurfaces  $S_t$  sont régulièrement spatiales de caractère de régularité  $\chi$  si il existe une constante  $\varepsilon > 0$  telle que  $|a^\circ| \geq \varepsilon$ , le polynôme  $h(x, \xi)$  admet la factorisation :

$$h(x, \xi) = a^\circ(x) \prod_{j=1}^{m+1} (\xi_\circ - \xi_{\circ, j}(x, \xi'))$$

où les  $\xi_{\circ, j}(x, \xi')$  sont réels et distincts et si :

$$\forall x \in V, |\xi_{\circ, j}(x, \xi') - \xi_{\circ, i}(x, \xi')| > \chi |\xi'|_{\bar{g}} \text{ pour } i \neq j.$$

### 2.4.2. Inégalités énergétiques pour les opérateurs hyperboliques sur $V$

L'hyperbolicité sera entendue ici au sens de J. Leray .

*Remarque.* — On va généraliser les inégalités de Dionne [3] aux opérateurs hyperboliques sur  $V$ . Pour cela, on a besoin de les démontrer d'abord pour les opérateurs hyperboliques sur  $\mathbb{R} \times U$ , où  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^{n-1}$  ; mais ceci n'est pas vrai en général car, les inégalités de Dionne sont déduites de celles de Gårding [7], qui pour les démontrer, utilise comme outil essentiel la transformée de Fourier par rapport aux variables d'espace. Nous utilisons ici un cas particulier où ces inégalités restent vraies sur  $\mathbb{R} \times U$  ; c'est le cas où les fonctions  $f$  considérées sont telles que  $\text{Supp}(f) \subset \mathbb{R} \times K$ ,  $K$  compact de  $\mathbb{R}^{n-1}$  inclus dans  $U$ .

THÉORÈME 2.2. — Soit  $T > 0$ . Soit  $a \in \mathcal{V}_\mu^Q(V, m+1)$  un opérateur hyperbolique sur  $V$ . On suppose que  $a$  vérifie l'hypothèse de régularité et que les hypersurfaces  $S_t$  sont régulièrement spatiales de caractère de régularité  $\chi$ . On suppose en outre :

Les variétés  $S_t$  vérifient l'hypothèse  $\mathcal{H}_{m+\mu}$ .

Les fonctions  $|\nabla^k X|$ ,  $|\nabla^k n|$  et  $|\nabla^\ell R|$  sont bornées sur  $V_T$  pour  $0 \leq k \leq m + \mu$  et  $0 \leq \ell \leq m + \mu - 2$ .

Alors, pour toute fonction  $u \in W_{m+\mu+1}^2(V_T)$ , on a l'inégalité :

$$(2.3) \quad \|u\|_{W_{m+\mu}^2(S_t, V)} \leq C \left[ \int_0^t \|au\|_{W_\mu^2(S_\tau, V)} d\tau + \|u\|_{W_{m+\mu}^2(S_\circ, V)} \right]$$

où  $C$  est une fonction continue de  $t$ , croissante de  $|t|$ ,  $\varepsilon$ ,  $\chi$ ,  $\|h, V_T\|_1^\infty$ ,  $\|a, V_T\|_\mu^Q$ ,  $\|h, S_o\|_1^\infty$ , dépendant en outre de  $m$ ,  $n$ ,  $Q$ ,  $\mu$ , du rayon d'injectivité de  $S_o$  et de la borne des fonctions  $|\nabla^k X|$ ,  $|\nabla^k n|$  et  $|\nabla^\ell R|$ ,  $0 \leq k \leq m + \mu$  et  $0 \leq \ell \leq m + \mu - 2$ .

*Démonstration.* — Posons :

$$\tilde{a}u = \sum_{k \leq m+1} a_k \cdot \tilde{\nabla}^\ell u \text{ et } \|u\|_{W_s^2(S_t, V_\gamma)} = \left( \int_{S_t} \left( \sum_{\ell=0}^s |\tilde{\nabla}^\ell u| \right)^2 d\tilde{\mu}_t \right)^{1/2}.$$

On montre dans [4] qu'on a :

$$\tilde{a}u = au + \sum_{k \leq m+1} \left( \sum_{\ell=1}^{k-1} a_k \cdot \nabla^\ell u \cdot D_{\ell,i}^k \right)$$

où  $\cdot$  représente des produit tensoriels ou contractés par rapport à divers indices et les  $D_{\ell,i}^k$  ne dépendent que de la métrique  $g$ . Le lemme 2.3 implique que, pour montrer (2-3), il suffit de montrer:

$$(2-4) \quad \|u\|_{W_{m+\mu}^2(S_t, V_\gamma)} \leq C \left[ \int_0^t \|\tilde{a}u\|_{W_\mu^2(S_\tau, V_\gamma)} d\tau + \|u\|_{W_{m+\mu}^2(S_o, V_\gamma)} \right]$$

*Preuve de (2-4).* — Soit  $C_o^\infty(V_T)$  l'espace des restrictions à  $V_T$  des fonctions  $C^\infty$  sur  $V$ , dont le support est inclus dans  $\mathbb{R} \times K$ ,  $K$  compact de  $S$ ;  $C_o^\infty(V_T)$  est dense dans  $W_{m+\mu+1}^2(V_T)$ , d'où il suffit de faire la preuve pour  $\text{Supp}(u) \subset ]-T, T[ \times K$ ,  $K$  compact de  $S$ .

Soit  $d$  un minorant ( $d > 0$ ) de la famille  $(d_t)_{t \in ]-T, T[}$  des rayons d'injectivité de  $S_t$  et soit  $(B_i, \varphi_i)_{i \in \mathbb{1}}$  un atlas de  $S$  où les  $B_i = B(x_i, d)$  forment un recouvrement uniformément localement fini de  $S$ ; alors tout point de  $S$  appartient à  $p$  boules  $B_i$  au plus. Posons  $\Omega_i = ]-T, T[ \times B_i$  et  $\psi_i = \text{Id} \times \varphi_i$ , alors  $(\Omega_i, \psi_i)_{i \in \mathbb{1}}$  est un atlas de  $V_T$  formé de cartes adaptées.

Soit  $(h_i)_{i \in \mathbb{1}}$  une partition  $C^\infty$  de l'unité subordonnée au recouvrement  $(B_i)$  de  $S$  telle que pour  $k \leq m + \mu + 1$ , les  $\tilde{\nabla}^k h_i^{1/2}$  soient uniformément bornés (l'existence d'une telle partition est prouvée dans [1]). Posons :

$$\alpha_i(t, x) = h_i(x) \text{ et } H = \sup_{\substack{(t,x) \in V_T \\ k,i}} |\nabla^k \alpha_i^{1/2}(t, x)|$$

Soit  $(x^1, \dots, x^{n-1})$  un système de coordonnées géodésiques dans  $B_i$  et

soit  $a'$  l'expression locale de la restriction à  $\Omega_i$  de  $\tilde{a}$ , alors on a :

$$a'(u \circ \psi_i^{-1}) = \tilde{a}u \circ \psi_i^{-1} = \sum_{|\alpha| \leq m+1} a'_\alpha(x^\lambda) D^\alpha (u \circ \psi_i^{-1})$$

où pour  $|\alpha| = m + 1$ ,  $a'_\alpha$  est une composante  $a_{m+1}^{\alpha_1 \dots \alpha_{m+1}}$  de  $a_{m+1}$  et pour  $|\alpha| = \ell \leq m$ ;  $a'_\alpha$  est une somme  $a'_\alpha = a_\ell^{\alpha_1 \dots \alpha_\ell} + \lambda$  où  $\lambda$  est une somme de produits des composantes de  $a_k$  ( $k > \ell$ ) par les dérivées d'ordre  $\leq \ell - 1$  des  $\gamma_{\alpha\beta}$ . Comme (voir [1] ou [10]) les composantes du tenseur métrique  $\gamma$  et leurs dérivées d'ordre  $\leq m + \mu$  sont bornées dans  $\Omega_i$  par des constantes intrinsèques,  $a' \in \mathcal{V}_\mu^Q(\psi_i(\Omega_i), m + 1)$  et la partie principale  $h'$  de  $a'$  s'écrit:  $h'g = \sum_{|\alpha|=m+1} a'_\alpha D^\alpha g$ , où  $a'_\alpha$  est une composante de  $a_{m+1}$ , d'où  $a'$  est régulièrement hyperbolique et les hypersurfaces  $S_t$  sont régulièrement spatiales de caractère de régularité  $\chi$ .

Pour  $u \in W_{m+\mu+1}^2(V_T)$ ,  $\alpha_i^{1/2}u \in W_{m+\mu+1}^2(V_T)$  et  $\text{Supp}(\alpha_i^{1/2}u) \subset \Omega_i$ , d'où

$$\alpha_i^{1/2}u \circ \psi_i^{-1} \in W_{m+\mu+1}^2(X) \text{ et } \text{Supp}(\alpha_i^{1/2}u \circ \psi_i^{-1}) \subset \mathbb{R} \times \varphi_i(K)$$

$$\text{où } X = ] - T, T[ \times \mathbb{R}^{n-1}.$$

On applique le résultat de la Remarque précédente à l'opérateur  $a'$  et à la fonction  $\alpha_i^{1/2}u \circ \psi_i^{-1}$ , et on a, compte tenu du fait que les composantes du tenseur métrique  $\gamma$  et leurs dérivées d'ordre inférieur ou égal à  $m + \mu$  sont bornées dans  $\Omega_i$  :

$$\|\alpha_i^{1/2}u\|_{W_{m+\mu}^2(S_t, V_\gamma)} \leq C \left[ \int_0^t \|\tilde{a}(\alpha_i^{1/2}u)\|_{W_\mu^2(S_\tau, V_\gamma)} d\tau + |\alpha_i^{1/2}u|_{W_{m+\mu}^2(S_0, V_\gamma)} \right]$$

Le théorème 1.2 et les hypothèses du théorème 2.2 permettent de montrer que :

$$\sum_{i \in I} \|\tilde{a}(\alpha_i^{1/2}u)\|_{W_\mu^2(S_t, V_\gamma)} \leq C \left[ \|\tilde{a}u\|_{W_\mu^2(S_t, V_\gamma)} + \|\tilde{a}, S_\tau\|_\mu^Q \|u\|_{W_{m+\mu}^2(S_t, V_\gamma)} \right]$$

et

$$\sum_{i \in I} \|\alpha_i^{1/2}u\|_{W_{m+\mu}^2(S_0, V_\gamma)} \leq C \|u\|_{W_{m+\mu}^2(S_0, V_\gamma)}$$

Enfin, un raisonnement par récurrence sur  $q$  permet de montrer que pour  $0 \leq q \leq m + \mu$ , on a :

$$\int_{S_t} |\tilde{\nabla}^q u|^2 d\tilde{\mu}_t \leq C \sum_{i \in I} \|\alpha_i^{1/2}u\|_{W_q^2(S_t, V_\gamma)}^2$$



d'où on a :

$$\begin{aligned} \|u\|_{W_{m+\mu}^2(S_t, V_\gamma)} &\leq C_1 \int_0^t \|\tilde{a}u\|_{W_\mu^2(S_\tau, V_\gamma)} d\tau \\ &\quad + C_2 \int_0^t \|\tilde{a}, S_\tau\|_\mu^Q \|u\|_{W_{m+\mu}^2(S_\tau, V_\gamma)} d\tau + C_3 \|u\|_{W_{m+\mu}^2(S_0, V_\gamma)}, \end{aligned}$$

et on a le théorème en utilisant le lemme de Gronwall.

## 2.5. Problème de Cauchy pour les équations hyperboliques sur $V$

### 2.5.1 Equations linéaires

Soit  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $q \in \mathbb{N}$ ,  $q \geq m$ . On désigne par  $\mathcal{K}_q(S_t)$  l'espace de  $(m+1)$ -uples  $(\varphi_0, \dots, \varphi_m)$  qui est la complétion de  $\mathcal{D}(S_t) \times \dots \times \mathcal{D}(S_t)$  pour la norme :

$$\|(\varphi_0, \dots, \varphi_m)\|_{\mathcal{K}_q(S_t)} = \left( \int_{S_t} \sum_{k=0}^m \sum_{\ell=0}^{q-k} |\nabla^k \varphi_\ell|_{\frac{2}{g}}^2 d\mu_t \right)^{\frac{1}{2}}$$

LEMME 2.5. — Soit  $T > 0$ . Soit  $a \in \mathcal{V}_\mu^Q(V, m+1)$  un opérateur hyperbolique sur  $V$ ,  $(\varphi_0, \dots, \varphi_m) \in \mathcal{K}_{m+\mu}(S_0)$ . On suppose que  $a$  vérifie l'hypothèse de régularité et que les hypersurfaces  $S_t$  sont régulièrement spatiales de caractère de régularité  $\chi$ . On suppose en outre :

Les variétés  $S_t$  vérifient l'hypothèse  $\mathcal{H}_{m+\mu}$ .

Les fonctions  $|\nabla^k X|$ ,  $|\nabla^k n|$  et  $|\nabla^\ell R|$  sont bornées sur  $V_T$  pour  $0 \leq k \leq m + \mu$  et  $0 \leq \ell \leq m + \mu - 2$ .

Alors, toute solution  $u \in W_{m+\mu+1}^2(V_T)$  du problème de Cauchy

$$\begin{cases} au = v \text{ sur } V_T, \quad v \in W_\mu^2(V_T) \text{ donné} \\ u = \varphi_0, \dots, \partial_t^{(m)} u = \varphi_m \text{ sur } S_0 \end{cases}$$

vérifie l'inégalité:

$$(2-5) \quad \|u\|_{W_{m+\mu}^2(S_t, V)} \leq C \left[ \int_0^t \|v\|_{W_\mu^2(S_\tau, V)} d\tau + \|v\|_{W_{\mu-1}^2(S_0, V)} + \|(\varphi_0, \dots, \varphi_m)\|_{\mathcal{K}_{m+\mu}(S_0)} \right],$$

les constantes  $C$  ayant les mêmes propriétés que celles du théorème 2.2.

*Preuve.* — Les hypothèses du théorème 2.2 étant vérifiées, on a l'inégalité :

$$\|u\|_{w_{m+\mu}^2(S_t, V)} \leq C \left[ \int_0^t \|au\|_{W_\mu^2(S_\tau, V)} d\tau + \|u\|_{W_{m+\mu}^2(S_0, V)} \right].$$

Le lemme 2.3 entraîne donc qu'il suffit de montrer que :

$$\|u\|_{W_{m+\mu}^2(S_0, V_\gamma)} \leq C \left[ \|v\|_{W_{\mu-1}^2(S_0, V)} + \|(\varphi_0, \dots, \varphi_m)\|_{\mathcal{K}_{m+\mu}(S_0)} \right]. \quad (1)$$

Comme sur  $S_0$ ,  $\partial_0^q u = \varphi_q \forall q \leq m$ , on a :

$$|\tilde{\nabla}^r u|^2 = \sum_{p+q=r} |\bar{\nabla}^p \varphi_q|_{\frac{2}{g}}^2 \text{ pour } r \leq m, \text{ et pour } r > m, \text{ on a:}$$

$$|\bar{\nabla}^r u|^2 = \sum_{\substack{p+q=r \\ q \leq m}} |\bar{\nabla}^p \varphi_q|_{\frac{2}{g}}^2 + \sum_{\substack{p+q=r \\ q > m}} |\bar{\nabla}^p \partial_0^q u|_{\frac{2}{g}}^2.$$

Pour montrer le lemme, il suffit donc de montrer que pour  $p+q=r \leq m+\mu$  et  $q > m$ , on a :

$$\|\bar{\nabla}^p \partial_0^q u\|_{L^2(S_0)} \leq C_2 \left[ \|v\|_{W_{\mu-1}^2(S_0, V)} + \|(\varphi_0, \dots, \varphi_m)\|_{\mathcal{K}_{m+\mu}(S_0)} \right]$$

Dans une carte adaptée de  $V$ :

$$\tilde{a}u = a^0 \partial_0^{m+1} u + \sum_{|\sigma| \leq m} a_{m+1}^\sigma \cdot \tilde{\nabla}_\sigma^{m+1} u + \sum_{k \leq m} a_k \cdot \tilde{\nabla}^k u$$

Montrons d'abord que  $\frac{1}{a^0} a_{m+1} \in V_\mu^{q_{m+1}}$  et  $\frac{1}{a^0} a_k \in W_\mu^{q_k}$ .

On sait que  $a^0 \in V_\mu^{q_{m+1}}$ . D'autre part,  $\exists \varepsilon_0 > 0$  tel que  $|a^0| \geq \varepsilon_0$ , d'où  $\frac{1}{a^0} \in L^\infty$ .

Les  $\nabla^k \left( \frac{1}{a^0} \right)$  sont des sommes de termes de la forme :

$$\frac{\nabla^{\ell_1} a^0 \otimes \dots \otimes \nabla^{\ell_s} a^0}{(a^0)^{k+1}} \text{ avec } s \leq k \text{ et } \ell_1 + \dots + \ell_s = k.$$

Un raisonnement par récurrence sur  $s$ , permet de montrer, compte tenu du théorème 1.2 et de l'hypothèse de régularité qui entraîne  $n < \mu q_{m+1}$  que :

$$\|\nabla^{\ell_1} a^0 \otimes \nabla^{\ell_2} a^0 \otimes \dots \otimes \nabla^{\ell_s} a^0\|_{L^{q_{m+1}}} \leq C \|a^0\|_{V^{q_{m+1}}}^s,$$

ce qui montre que  $\frac{1}{a^\circ} \in V_\mu^{q_{m+1}}$  et le théorème 1.2 permet de conclure que

$$\frac{1}{a^\circ} a_{m+1} \in V_\mu^{q_{m+1}} \text{ et } \frac{1}{a^\circ} a_k \in W_\mu^{q_k} \text{ pour } k \leq m.$$

Montrons (1) en raisonnant par récurrence sur  $q > m$ .

*Preuve de (1) pour  $q = m + 1$ .*

Dans [4], on montre qu'on a :

$$\nabla^k u = \tilde{\nabla}^k u + \sum_{\substack{1 \leq \ell \leq k-1 \\ i}} \tilde{\nabla}^\ell u \cdot D_{\ell,i}^k,$$

où les  $D_{\ell,i}^k$  ne dépendent que de  $g$ . On a donc :

$$\tilde{a}u = au - \sum_{k \leq m+1} \sum_{\substack{1 \leq \ell \leq k-1 \\ i}} a_k \cdot \tilde{\nabla}^\ell u \cdot D_{\ell,i}^k,$$

et l'égalité  $au = v$  entraîne que pour  $r \leq \mu - 1$ , on a :

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}^r \partial_0^{(m+1)} u &= \bar{\nabla}^r \left[ \frac{1}{a^\circ} v \right] - \sum_{|\sigma| \leq m} \bar{\nabla}^r \left[ \frac{1}{a^\circ} a_{m+1}^\sigma \cdot \tilde{\nabla}_\sigma^{m+1} u \right] - \sum_{k \leq m} \bar{\nabla}^r \left[ \frac{1}{a^\circ} a_k \cdot \tilde{\nabla}^k u \right] \\ &\quad - \sum_{\substack{1 \leq \ell \leq m \\ i}} \bar{\nabla}^r \left[ \frac{1}{a^\circ} a_{m+1} \cdot \tilde{\nabla}^\ell u \cdot D_{\ell,i}^{m+1} \right] - \sum_{k \leq m} \sum_{\substack{1 \leq \ell \leq k-1 \\ i}} \bar{\nabla}^r \left[ \frac{1}{a^\circ} a_k \cdot \tilde{\nabla}^\ell u \cdot D_{\ell,i}^k \right] \end{aligned}$$

et l'inégalité,  $n - 1 < (\mu - 1)q_{m+1}$  et le théorème 1.2 entraînent :

$$\begin{aligned} \left\| \bar{\nabla}^r \left[ \frac{1}{a^\circ} v \right] \right\|_{L^2(S_o)} &\leq \left\| \frac{1}{a^\circ} v \right\|_{W_{\mu-1}^2(S_o, V_\gamma)} \\ &\leq C \left\| \frac{1}{a^\circ} \right\|_{V_{\mu-1}^{q_{m+1}}(S_o, V_\gamma)} \|v\|_{W_{\mu-1}^2(S_o, V_\gamma)}, \end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned} \left\| \bar{\nabla}^r \left[ \frac{1}{a^\circ} a_{m+1}^\sigma \cdot \tilde{\nabla}_\sigma^{m+1} u \right] \right\|_{L^2(S_o)} &\leq C \left\| \frac{1}{a^\circ} a_{m+1}^\sigma \right\|_{V_{\mu-1}^{q_{m+1}}(S_o, V_\gamma)} \|\tilde{\nabla}_\sigma^{m+1} u\|_{W_{\mu-1}^2(S_o, V_\gamma)}, \end{aligned}$$

mais, sur  $S_o$  :

$$\tilde{\nabla}_\sigma^{m+1} u = \bar{\nabla}^{m+1-|\sigma|} \partial_0^{|\sigma|} u = \bar{\nabla}^{m+1-|\sigma|} \varphi_{|\sigma|},$$

d'où

$$\begin{aligned} \left\| \bar{\nabla}^r \left[ \frac{1}{a^\sigma} a_{m+1}^\sigma \cdot \tilde{\nabla}_\sigma^{m+1} u \right] \right\|_{L^2(S_o)} \\ \leq C \left\| \frac{1}{a^\sigma} a_{m+1}^\sigma \right\|_{V_{\mu-1}^{q_{m+1}}(S_o, V_\gamma)} \|(\varphi_0, \dots, \varphi_m)\|_{\mathcal{K}_{m+\mu}(S_o)} \end{aligned}$$

et on montre de même que:

$$\left\| \bar{\nabla}^r \left[ \frac{1}{a^\sigma} a_k \cdot \tilde{\nabla}^k u \right] \right\|_{L^2(S_o)} \leq C \left\| \frac{1}{a^\sigma} a_k \right\|_{W_{\mu-1}^{q_k}(S_o, V_\gamma)} \|(\varphi_0, \dots, \varphi_m)\|_{\mathcal{K}_{m+\mu}(S_o)}.$$

Dans [4], on montre que les hypothèses sur  $X$ ,  $n$  et  $g$  entraînent que pour  $s \leq \mu - 1$ , les  $\nabla^s D_{\ell,i}^k$  sont bornées sur  $V_T$ , d'où on majore de même les

$$\left\| \bar{\nabla}^r \left[ \frac{1}{a^\sigma} a_{m+1} \cdot \tilde{\nabla}^\ell u \cdot D_{\ell,i}^k \right] \right\|_{L^2(S_o)} \quad \text{et} \quad \left\| \bar{\nabla}^r \left[ \frac{1}{a^\sigma} a_k \cdot \tilde{\nabla}^\ell u \cdot D_{\ell,i}^k \right] \right\|_{L^2(S_o)} \quad \text{pour } k \leq m,$$

ce qui achève la preuve de (1) pour  $q = m + 1$ .

Supposons (1) démontrée pour  $q = m + s$ ,  $1 \leq s \leq \mu - 1$ . L'égalité  $au = v$  entraîne que pour  $r + s \leq \mu - 1$ ,

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}^r \partial_o^{(m+s+1)} u &= \bar{\nabla}^r \partial_o^s \left[ \frac{1}{a^\sigma} v \right] \\ &\quad - \sum_{|\sigma| \leq m} \bar{\nabla}^r \partial_o^s \left[ \frac{1}{a^\sigma} a_{m+1}^\sigma \cdot \tilde{\nabla}_\sigma^{m+1} u \right] - \sum_{k \leq m} \bar{\nabla}^r \partial_o^s \left[ \frac{1}{a^\sigma} a_k \cdot \tilde{\nabla}^k u \right] \\ &\quad - \sum_{\substack{1 \leq \ell \leq m \\ i}} \bar{\nabla}^r \partial_o^s \left[ \frac{1}{a^\sigma} a_{m+1} \cdot \tilde{\nabla}^\ell u \cdot D_{\ell,i}^{m+1} \right] - \sum_{k \leq m} \sum_{\substack{1 \leq \ell \leq k-1 \\ i}} \bar{\nabla}^r \partial_o^s \left[ \frac{1}{a^\sigma} a_k \cdot \tilde{\nabla}^\ell u \cdot D_{\ell,i}^k \right]. \end{aligned}$$

On a  $r + s \leq \mu - 1$ , d'où:

$$\left\| \bar{\nabla}^r \partial_o^s \left[ \frac{1}{a^\sigma} v \right] \right\|_{L^2(S_o)} \leq C \left\| \frac{1}{a^\sigma} v \right\|_{W_{\mu-1}^2(S_o, V_\gamma)}$$

On peut écrire:

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}^r \partial_o^s \left[ \frac{1}{a^\sigma} a_{m+1}^\sigma \cdot \tilde{\nabla}_\sigma^{m+1} u \right] \\ = \sum_{\substack{s'+s''=s \\ r'+r''=r}} C_s C_r \left[ \bar{\nabla}^{r'} \partial_o^{s'} \left( \frac{1}{a^\sigma} a_{m+1}^\sigma \right) \otimes \bar{\nabla}^{r''+m+1-|\sigma|} \partial_o^{s''+|\sigma|} u \right]. \end{aligned}$$

Pour  $s' = 0$ ,

$$\begin{aligned} & \left\| \bar{\nabla}^r \left[ \frac{1}{a^\circ} a_{m+1}^\sigma \right] \otimes \bar{\nabla}^{r''+m+1-|\sigma|} \partial_\circ^{s''+|\sigma|} u \right\|_{L^2(S_\circ)} \\ & \leq C \left\| \frac{1}{a^\circ} a_{m+1} \right\|_{V_{\mu-1}^{q_{m+1}}(S_\circ)} \left\| \partial_\circ^{s+|\sigma|} u \right\|_{W_{m+1+r-|\sigma|}^2(S_\circ)} \end{aligned}$$

et l'hypothèse de récurrence permet de conclure, car  $s + |\sigma| \leq m + s$ .

Pour  $s' > 0$ :

$$\begin{aligned} & \left\| \bar{\nabla}^{r'} \partial_\circ^{s'} \left[ \frac{1}{a^\circ} a_{m+1}^\sigma \right] \otimes \bar{\nabla}^{r''+m+1-|\sigma|} \partial_\circ^{s''+|\sigma|} u \right\|_{L^2(S_\circ)} \\ & \leq C \left\| \partial_\circ^{s'} \left( \frac{1}{a^\circ} a_{m+1} \right) \right\|_{V_{\mu-1}^{q_{m+1}}(S_\circ)} \left\| \partial_\circ^{s''+|\sigma|} u \right\|_{W_{m+1+r'+s'-|\sigma|}^2(S_\circ)} \end{aligned}$$

et comme  $s'' + |\sigma| \leq m + s$ , l'hypothèse de récurrence permet de conclure.

On majore de même les  $\left\| \bar{\nabla}^r \partial_\circ^s \left[ \frac{1}{a^\circ} a_k \cdot \tilde{\nabla}_k u \right] \right\|_{L^2(S_\circ)}$ ,

$$\begin{aligned} & \left\| \bar{\nabla}^r \partial_\circ^s \left[ \frac{1}{a^\circ} a_{m+1} \cdot \tilde{\nabla}^\ell u \cdot D_{\ell,i}^k \right] \right\|_{L^2(S_\circ)} \\ & \text{et } \left\| \bar{\nabla}^r \partial_\circ^s \left[ \frac{1}{a^\circ} a_k \cdot \tilde{\nabla}^\ell u \cdot D_{\ell,i}^k \right] \right\|_{L^2(S_\circ)} \text{ pour } k \leq m \end{aligned}$$

et le lemme est démontré.

LEMME 2.6. — Soient  $(\varphi_{\lambda,j})_{j \in \mathbb{N}}$ ,  $\lambda = 0, 1, \dots, m$ , une suite de fonctions de  $\mathcal{D}(S_\circ)$ ,  $(v_j)$  une suite d'éléments de  $C^\infty(V_T)$  et  $(a_{k,j})$  une suite de champs de tenseurs  $C^\infty$  sur  $V_T$  tels que  $\forall j \in \mathbb{N}$ ,  $a_j = \sum_{k \leq m+1} a_{k,j} \cdot \nabla^k \in \mathcal{V}_\mu^Q(V, m+1)$ , est hyperbolique et les hypersurfaces  $S_t$  régulièrement spatiales de caractère de régularité  $\chi_j$ .

On suppose:

1) La suite  $(\varphi_{0,j}, \dots, \varphi_{m,j})$  converge vers  $(\varphi_0, \dots, \varphi_m)$  dans  $\mathcal{K}_{m+\mu}(S_\circ)$ .

2) Il existe un opérateur  $a = \sum_{k \leq m+1} a_k \cdot \nabla^k \in \mathcal{V}_\mu^Q(V, m+1)$ , hyperbolique et tel que les hypersurfaces  $S_t$  sont régulièrement spatiales de caractère de régularité  $\chi$  et tel que  $(a_j)$  converge vers  $a$  dans  $\mathcal{V}_\mu^Q(V, m+1)$ .

3) La suite  $(v_j)$  converge dans  $W_\mu^2(V_T)$  vers une fonction  $v$  et il existe une suite  $(u_j)$  de fonction de  $W_{m+\mu+1}^2(V_T)$  telle que  $\forall j \in \mathbb{N}$ ,  $u_j$  est solution du problème de Cauchy:

$$(2-6) \quad \begin{cases} a_j u_j = v_j & \text{dans } V_T \\ u_j = \varphi_{0,j}, \dots, \partial_0^m u_j = \varphi_{m,j} & \text{sur } S_0 \end{cases}$$

Alors, le problème de Cauchy:

$$(2-7) \quad \begin{cases} au = v & \text{dans } V_T \\ u = \varphi_0, \dots, \partial_0^m u = \varphi_m & \text{sur } S_0 \end{cases}$$

a une solution et une seule  $u \in W_{m+\mu}^2(V_T)$  et cette solution vérifie l'inégalité:

$$\|u\|_{W_{m+\mu}^2(S_t, V)} \leq C \left[ \int_0^t \|v\|_{W_\mu^2(S_\tau, V)} d\tau + \|v\|_{W_{\mu-1}^2(S_0, V)} + \|(\varphi_0, \dots, \varphi_m)\|_{\mathcal{K}_{m+\mu}(S_0)} \right].$$

*Preuve.* — Par définition, on a:

$$\chi_j = \inf_{x \in V_T, r \neq s} \frac{|\xi_{0,r}^j(x, \xi') - \xi_{0,s}^j(x, \xi')|}{|\xi'|_{\bar{g}}^j},$$

où les  $\xi_{0,r}^j$  sont les racines du polynôme  $h_j(x, \xi)$ ; d'où  $\chi_j$  converge vers  $\chi$ , car par hypothèse  $\|a_{m+1,j} - a_{m+1}\|_{V_1^\infty}$  tend vers 0.

On a:

$$\|u_j\|_{W_{m+\mu}^2(S_t, V)} \leq C \left[ \int_0^t \|v_j\|_{W_\mu^2(S_\tau, V)} d\tau + \|v_j\|_{W_{\mu-1}^2(S_0, V)} + \|(\varphi_{0,j}, \dots, \varphi_{m,j})\|_{\mathcal{K}_{m+\mu}(S_0)} \right]$$

et le théorème 2.1 implique que l'on a:  $\|v_j\|_{W_{\mu-1}^2(S_0, V)} \leq C \|v_j\|_{W_\mu^2(V_T)}$ , d'où

$$(*) \quad \|u_j\|_{W_{m+\mu}^2(S_t, V)} \leq C_1 \left[ \|v_j\|_{W_\mu^2(V_T)} + \|(\varphi_{0,j}, \dots, \varphi_{m,j})\|_{\mathcal{K}_{m+\mu}(S_0)} \right].$$

$\forall i, j \in \mathbb{N}$ ,  $u_i - u_j$  est solution du problème:

$$\begin{cases} a_i(u_i - u_j) = v_i - v_j + (a_i - a_j)u_j & \text{dans } V_T \\ u_i - u_j = \varphi_{0,i} - \varphi_{0,j}, \dots, \partial_0^m(u_i - u_j) = \varphi_{m,i} - \varphi_{m,j} & \text{sur } S_0 \end{cases}$$

d'où le lemme 2.5, l'hypothèse de régularité  $n - 1 < (m + \mu - k)q_k$  si  $m + \mu - k > 0$  et le théorème 1.2 permettent de montrer que:

$$\begin{aligned} & \|u_i - u_j\|_{W_{m+\mu-1}^2(S_t, V)} \\ & \leq C \left[ \int_0^t \|v_i - v_j\|_{W_{\mu-1}^2(S_\tau, V)} d\tau + \int_0^t \|a_i - a_j, S_\tau\|_{\mu-1}^Q \|u_j\|_{W_{m+\mu}^2(S_\tau, V)} d\tau \right] \\ & + C \left[ \|v_i - v_j\|_{W_{\mu-2}^2(S_0, V)} + \|a_i - a_j, s_0\|_{\mu-2}^Q \|u_j\|_{W_{m+\mu}^2(S_0, V)} \right. \\ & \quad \left. + \|(\varphi_{0,i} - \varphi_{0,j}, \dots, \varphi_{m,i} - \varphi_{m,j})\|_{\mathcal{K}_{m+\mu-1}(S_0)} \right] \end{aligned}$$

et les hypothèses du lemme 2.6 impliquent que le second membre converge vers 0, d'où  $\sup_{t \in ]-T, T[} \|u_i - u_j\|_{W_{m+\mu-1}^2(S_t, V)}$  tend vers 0 quand  $i$  et  $j$  tendent

vers  $+\infty$ . La suite  $(u_j)$  converge donc dans  $W_{m+\mu-1}^2(V_T)$  vers une fonction  $u \in W_{m+\mu-1}^2(V_T)$ . D'autre part, d'après (\*) la suite  $\sup_t \|u_j\|_{W_{m+\mu}^2(S_t, V)}$  est bornée. On peut donc extraire de  $(u_j)$  une sous-suite qui converge faiblement dans  $W_{m+\mu}^2(V_T)$ ; cette sous-suite converge nécessairement vers  $u$ , car  $(u_j)$  converge vers  $u$  dans  $W_{m+\mu-1}^2(V_T)$ , ce qui montre que  $u \in W_{m+\mu}^2(V_T)$ .

Montrons que  $u$  est solution du problème de Cauchy (2-7).

Par hypothèse, la suite  $(a_j)$  converge vers  $a$  dans  $\mathcal{V}_\mu^Q(V, m+1)$  et nous avons montré que la suite  $(u_j)$  converge vers  $u$  dans  $W_{m+\mu-1}^2(V_T)$ , d'où, la suite  $(a_j u_j)$  converge vers  $au$  au sens des distributions. Comme la suite  $(v_j)$  converge vers  $v$  dans  $W_\mu^2(V_T)$ , donc converge vers  $v$  au sens des distributions, l'égalité  $a_j u_j = v_j$  implique donc qu'on a  $au = v$ , d'où  $u$  est solution du problème (2-7).

Montrons que  $u$  vérifie l'inégalité (2-5).

On a:

$$\begin{aligned} & \|u_j\|_{W_{m+\mu}^2(S_t, V)} \\ & \leq C \left[ \int_0^t \|v_j\|_{W_\mu^2(S_\tau, V)} d\tau + \|v_j\|_{W_{\mu-1}^2(S_0, V)} + \|(\varphi_{0,j}, \dots, \varphi_{m,j})\|_{\mathcal{K}_{m+\mu}(S_0)} \right]. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \|v_j - v\|_{W_{\mu-1}^2(S_0, V)} & \leq C \|v_j - v\|_{W_\mu^2(V_T)} \\ \text{et } \int_0^t \|v_j - v\|_{W_\mu^2(S_\tau, V)} d\tau & \leq C \|v_j - v\|_{W_\mu^2(V_T)} \end{aligned}$$

Les suites  $\|v_j - v\|_{W_{\mu-1}^2(S_0, V)}$  et  $\int_0^t \|v_j - v\|_{W_\mu^2(S_\tau, V)} d\tau$  convergent donc

vers 0 et aussi, la suite  $(\varphi_{0,j}, \dots, \varphi_{m,j})$  converge vers  $(\varphi_0, \dots, \varphi_m)$  dans  $\mathcal{K}_{m+\mu}(S_0)$ , d'où on a :

$$\|u_j\|_{W_{m+\mu}^2(S_t, V)} \leq C \left[ \int_0^t \|v\|_{W_\mu^2(S_\tau, V)} d\tau + \|v\|_{W_{\mu-1}^2(S_0, V)} + \|(\varphi_0, \dots, \varphi_m)\|_{\mathcal{K}_{m+\mu}(S_0)} \right].$$

Comme la suite  $(u_j)$  converge faiblement vers  $u$  dans  $W_{m+\mu}^2(V_T)$ , on a :

$$\|u\|_{W_{m+\mu}^2(S_t, V)} \leq \liminf_{j \rightarrow +\infty} \|u_j\|_{W_{m+\mu}^2(S_t, V)},$$

ce qui termine la preuve la preuve de (2-5)

**THÉORÈME 2.3.** — Soit  $T > 0$ . Soit  $a \in \mathcal{V}_\mu^Q(V, m+1)$  un opérateur hyperbolique sur  $V$ ,  $(\varphi_0, \dots, \varphi_m) \in \mathcal{K}_{m+\mu}(S_0)$ . On suppose que  $a$  vérifie l'hypothèse de régularité et que les hypersurfaces  $S_t$  sont régulièrement spatiales de caractère de régularité  $\chi$ . On suppose en outre :

*Les variétés  $S_t$  vérifient l'hypothèse  $\mathcal{H}_{m+\mu}$ .*

*Les fonctions  $|\nabla^k X|$ ,  $|\nabla^k n|$  et  $|\nabla^\ell R|$  sont bornées sur  $V_T$  pour  $0 \leq k \leq m + \mu$  et  $0 \leq \ell \leq m + \mu - 2$ .*

*Alors, pour toute fonction  $v \in W_\mu^2(V_T)$ , le problème de Cauchy :*

$$\begin{cases} au = v \text{ sur } V_T, \\ u = \varphi_0, \dots, \partial_t^{(m)} u = \varphi_m \text{ sur } S_0 \end{cases}$$

*a une solution et une seule  $u \in W_{m+\mu}^2(V_T)$  et cette solution vérifie l'inégalité (2-5).*

*Preuve.* — Posons  $a = \sum_{k \leq m+1} a_k \cdot \nabla^k$ . On approche les données  $a_{m+1}$  et

les  $a_k$  dans  $V_\mu^{q_{m+1}}$  et  $W_\mu^{q_k}$  respectivement par des suites  $a_{m+1,j}$  et  $a_{k,j}$  de champs de tenseurs  $C^\infty$  sur  $V_T$ ,  $(\varphi_0, \dots, \varphi_m)$  par une suite  $(\varphi_{0,j}, \dots, \varphi_{m,j})$  de  $\mathcal{D}(S_0) \times \dots \times \mathcal{D}(S_0)$  dans  $\mathcal{K}_{m+\mu}(S_0)$  et  $v$  par une suite  $(v_j)$  d'éléments de  $C_0^\infty(V_T)$ . D'après le théorème d'existence  $C^\infty$  de Leray, le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} a_j u_j = v_j \text{ dans } V_T \\ u_j = \varphi_{0,j}, \dots, \partial_0^m u_j = \varphi_{m,j} \text{ sur } S_0 \end{cases}$$

a une solution et une seule  $u_j \in C_0^\infty(V_T)$ . Le lemme 2.6 permet donc de conclure.



### 2.5.2. Equations quasi-linéaires

#### NOTATIONS ET HYPOTHÈSES

Soient  $m, \mu \in \mathbb{N}^*$ ,  $\Omega$  un ouvert de  $E = \mathbb{R} \times_V T_1(V) \times_V \dots \times_V T_m(V)$ ,  $\Omega_x = \Omega \cap (\{x\} \times E_x)$  et on suppose que  $\forall x \in V, (x, 0) \in \Omega_x$ .

Considérons le problème de Cauchy quasi-linéaire :

$$(2-8) \quad \begin{cases} a(x, u, \dots, \nabla^m u, \nabla)u = b(x, u, \dots, \nabla^m u) \text{ sur } V_T \\ u = \varphi_o, \dots, \partial_t^{(m)} u = \varphi_m \text{ sur } S_o \end{cases}$$

On va résoudre (2-8) par approximations successives à partir du problème de Cauchy linéaire:

$$\begin{cases} a(x, v, \dots, \nabla^m v, \nabla)u = b(x, v, \dots, \nabla^m v) \text{ sur } V_T \\ u = \varphi_o, \dots, \partial_t^{(m)} u = \varphi_m \text{ sur } S_o \end{cases}$$

où  $v$  est une fonction donnée sur  $V_T$  et  $u$  la fonction inconnue.

Si  $u$  est une solution de (2-8), alors le lemme 2.1 implique qu'on a :

$$\nabla_{\pi}^s u = \bar{\nabla}^{s-p} \partial_o^{(p)} u + \sum_{\substack{1 \leq r+q \leq s-1 \\ i}} \bar{\nabla}^r \partial_o^{(q)} u \cdot A_{rqi}, \quad \forall s \in \mathbb{N},$$

pour toute place d'indices  $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_p)$ ,  $p \leq s$ .

Sur  $S_o$ , pour  $s \leq m$ , on a donc :

$$(*) \quad \nabla_{\pi}^s u = \bar{\nabla}^{s-p} \varphi_p + \sum_{\substack{1 \leq r+q \leq s-1 \\ i}} \bar{\nabla}^r \varphi_q \cdot A_{rqi}$$

Les dérivées covariantes de  $u$  sur  $S_o$  sont données par (\*).

Soit  $\psi$  l'application de  $S_o$  dans  $E$  définie par  $\psi(x') = (\psi_o(x'), \dots, \psi_m(x'))$  où les composantes de  $\psi_k$  sont données dans les cartes adaptées de  $V$  par :

$$(\psi_{k,\sigma})_{i_1 \dots i_{k-|\sigma|}} = \bar{\nabla}_{i_1 \dots i_{k-|\sigma|}}^{k-|\sigma|} \varphi_{|\sigma|} + \sum_{\substack{1 \leq r+q \leq s-1 \\ i}} \left( \bar{\nabla}^r \varphi_q \cdot A_{rqi} \right)_{i_1 \dots i_{k-|\sigma|}}$$

pour toutes places d'indices  $\sigma$  tel que  $|\sigma| \leq k$ .

On suppose dans la suite que  $\forall x' \in S_o, \psi(x') \in \Omega_{x'}$ .

HYPOTHÈSES

$$(H_1) : a \in \mathcal{V}_\mu^{2,\infty}(\Omega, m+1), b \in W_\mu^{2,\infty}(\Omega)$$

$a$  est hyperbolique et les hypersurfaces  $S_t$  régulièrement spatiales.

(H<sub>2</sub>) : Les variétés  $S_t$  vérifient l'hypothèse  $\mathcal{H}_{m+\mu}$  et les fonctions  $|\nabla^k X|$ ,  $|\nabla^k n|$  et  $|\nabla^\ell R|$  sont bornées sur  $V_T$  pour  $0 \leq k \leq m+\mu$  et  $0 \leq \ell \leq m+\mu-2$ .

$$(H_3) : n - 1 < 2(\mu - 1)$$

$$(H_4) : (\varphi_0, \dots, \varphi_m) \in \mathcal{K}_{m+\mu}(S_0)$$

(H<sub>5</sub>) :  $\Omega$  est tel que:

Il existe une constante  $C_0 > 0$  telle que si  $(W_0, \dots, W_m) \in E$  et est dans la fibre au-dessus du point  $x = (t, x') \in V$ , si

$$\sum_{|\sigma| \leq k \leq m} |W_{k,\sigma} - \psi_{k,\sigma}(x')|_{\bar{g}} < C_0, \text{ alors } (W_0, \dots, W_m) \in \Omega_x.$$

$W_{k,\sigma}$  est le tenseur sur  $S$ , obtenu en mettant des zéros aux places d'indices  $\sigma$  et les indices  $i = 1, \dots, n-1$  aux autres places.

NOTATION. — Pour simplifier l'écriture, nous noterons dans toute la suite  $a(x, \nabla^i v(x), \nabla)$  l'opérateur  $a(x, v(x), \dots, \nabla^m v(x), \nabla)$  et  $b(x, \nabla^i v(x))$  le tenseur  $b(x, v(x), \dots, \nabla^m v(x))$ .

LEMME 2.7. — Soit  $T_0 \in ]0, T[$ . Supposons donnée sur  $V_{T_0}$  une fonction  $v$  telle que  $\text{Sup}_{|t| < T_0} \|v\|_{W_{m+\mu}^2(S_t, V)} < +\infty$  et telle que

$$(x, v(x), \dots, \nabla^m v(x)) \in \Omega \quad \forall x \in V_{T_0}:$$

Alors,  $\forall (\varphi_0, \dots, \varphi_m) \in \mathcal{K}_{m+\mu}(S_0)$ , le problème de Cauchy

$$(2-9) \quad \begin{cases} a(x, \nabla^i v, \nabla)u = b(x, \nabla^i v) \text{ sur } V_{T_0} \\ u = \varphi_0, \dots, \partial_t^{(m)} u = \varphi_m \text{ sur } S_0 \end{cases}$$

a une solution et une seule  $u \in W_{m+\mu}^2(V_{T_0})$ .

En posant  $M(t) = \text{Sup}_{|\tau| \leq |t|} \|v\|_{W_{m+\mu}^2(S_\tau, V)}$ , la solution  $u$  vérifie l'inégalité:

$$\|u\|_{W_{m+\mu}^2(S_t, V)} \leq F(t, M(t), M(0)),$$

où  $F$  est une fonction continue de  $t$ , croissante de  $|t|$ ,  $M(t)$ ,  $M(0)$  et qui dépend en outre de:

$$\|a\|_{\mathcal{V}_\mu^{2,\infty}(\Omega, m+1)}, \quad \|b\|_{W_\mu^2(\Omega)}, \quad \|(\varphi_0 \dots \varphi_m)\|_{\mathcal{K}_{m+\mu}(S_0)}, \quad \|b\|_{W_\mu^{2,\infty}(S_0, \Omega)}$$

*Preuve.* — Par hypothèse,  $v \in W_{m+\mu}^2(V_{T_0})$ . L'hypothèse  $n - 1 < 2(\mu - 1)$  et le lemme 2.4 entraînent que  $a(x, \nabla^i v(x), \nabla) \in \mathcal{V}_\mu^2(V_{T_0}, m + 1)$ , est hyperbolique et les hypersurfaces  $S_t$  régulièrement spatiales et  $b(x, \nabla^i v(x)) \in W_\mu^2(V_{T_0})$ , d'où d'après le théorème 2.3, le problème (2-9) a une solution et une seule  $u \in W_{m+\mu}^2(V_{T_0})$  et cette solution vérifie l'inégalité (2-5). On utilise ensuite le théorème 1.4 pour conclure.

LEMME 2.8. — *Soit*  $(\varphi_0, \dots, \varphi_m) \in \mathcal{K}_{m+\mu}(S_0)$ . *Alors, il existe une fonction*  $\varphi \in W_{m+\mu}^2(V_T)$  *telle que sur*  $S_0$ ,  $\partial_t^{(\lambda)} \varphi = \varphi_\lambda$ ,  $\forall \lambda = 0, 1, \dots, m$  *et telle que*  $\text{Sup}_{|t| < T} \|\varphi\|_{W_{m+\mu}^2(S_t, V)} < +\infty$ .

*Preuve.* — Prendre pour  $\varphi$  la solution du problème (2-9).

LEMME 2.9. — *Soit*  $v$  *une fonction définie sur*  $V_T$  *telle que*  $\text{Sup}_{|t| < T} \|v\|_{W_{m+\mu}^2(S_t, V)} < +\infty$ . *Posons*  $M(t) = \text{Sup}_{|\tau| \leq |t|} \|v\|_{W_{m+\mu}^2(S_\tau, V)}$ .

*Si sur*  $S_0$ ,  $\partial_t^{(k)} v = \partial_t^{(k)} \varphi$  *pour*  $k \leq m$ , *alors il existe une constante*  $C_0(\varphi)$  *telle que l'inégalité*  $|t|M(t) < C_0(\varphi)$  *entraîne*  $(x, v(x), \nabla v(x), \dots, \nabla^m v(x)) \in \Omega_x$ .

*Preuve.* — L'hypothèse  $n - 1 < 2(\mu - 1)$  implique qu'on a:

$$\|v\|_{W_{m+1}^\infty(S_\tau, V)} \leq C \|v\|_{W_{m+\mu}^2(S_\tau, V)},$$

d'où, intégrant sur  $[0, t]$ , on a:

$$\sum_{\ell=0}^{m+1} \int_0^t |\nabla^\ell v(\tau, x')| d\tau \leq C_1 |t| M(t) \quad \forall t \in ]-T, T[$$

et la relation,

$$\partial_0 \bar{\nabla} \partial_0^r v = \bar{\nabla} \partial_0^{r+1} v + \sum_{s+s' \leq r-1} \bar{\nabla}^s (\partial_0 \bar{\Gamma}) \cdot \bar{\nabla}^{s'} \partial_0^r v,$$

où  $\bar{\Gamma}$  désigne les coefficients de connexion de la métrique  $\bar{g}_t$ . On montre dans [4] que l'hypothèse (H<sub>2</sub>) entraîne que

$$\left| \bar{\nabla}^u \partial_0^v \bar{\Gamma} \right|_{\bar{g}_t}, \quad v \geq 1, \quad 1 \leq u + v \leq m + \mu - 1$$

sont bornés sur  $V_T$ .

L'équivalence des normes

$$\sum_{p+q \leq \lambda} \left| \bar{\nabla}^p \partial_0^q v \right|_{\bar{g}} \text{ et } \sum_{\ell=0}^{\lambda} |\nabla^{\ell} v|$$

et l'hypothèse  $\partial_t^{(k)} v = \partial_t^{(k)} \varphi$  sur  $S_0$  entraînent qu'on a :

$$\sum_{k+r \leq m} \left| \bar{\nabla}^k \partial_0^r v(t, x') - \bar{\nabla}^k \varphi_r(x') \right|_{\bar{g}} \leq C_2 |t| M(t) \quad \forall t \in ]-T, T[.$$

D'autre part,

$$\psi_{k,\sigma} = \bar{\nabla}^{k-|\sigma|} \varphi_{|\sigma|} + \sum_{1 \leq r+q \leq k-1} \bar{\nabla}^r \varphi_q \cdot A_{rq i}$$

et

$$\nabla_{\sigma}^k v = \bar{\nabla}^{k-|\sigma|} \partial_0^{|\sigma|} v + \sum_{1 \leq r+q \leq k-1} \bar{\nabla}^r \partial_0^q v \cdot A_{rq i},$$

d'où :

$$\sum_{|\sigma| \leq k \leq m} \left| \nabla_{\sigma}^k v(t, x') - \psi_{k,\sigma}(x') \right|_{\bar{g}} < C_3 |t| M(t),$$

et l'hypothèse (H<sub>5</sub>) entraîne donc que si  $C_3 |t| M(t) < C_0$ , alors  $(x, v(x), \dots, \nabla^m v(x)) \in \Omega$ .

LEMME 2.10. — *Les hypothèses étant celles du lemme 2.7, si  $v_1$  et  $v_2$  sont deux choix de  $v$ ,  $u_1$  et  $u_2$  les solutions respectives du problème (2-9) correspondantes, et si pour  $k \leq m + \mu - 1$ , on a sur  $S_0$ :  $\nabla^k v_1 = \nabla^k v_2$ , alors, on a l'inégalité :*

$$\|u_1 - u_2\|_{W_{m+\mu-1}^2(S_t, V)}^2 \leq C \int_0^t \|v_1 - v_2\|_{W_{m+\mu-1}^2(S_{\tau}, V)}^2 d\tau$$

où  $C$  est une fonction continue de  $t$ , croissante par rapport à  $|t|$  et qui dépend en outre de  $M(T)$ ,  $F(T, M(T), M(0))$ ,  $\|a, \Omega\|_{\mu}^{2, \infty}$  et  $\|b\|_{W_{\mu}^{2, \infty}(\Omega)}$ .

*Preuve.* — De l'hypothèse,  $u_1 - u_2$  est solution de l'équation :

$$a(x, \nabla^i v_2(x), \nabla) u = b(x, \nabla^i v_2(x)) - b(x, \nabla^i v_1(x)) \\ + [a(x, \nabla^i v_1(x), \nabla) - a(x, \nabla^i v_2(x), \nabla)] u_1,$$

avec données de Cauchy nulles sur  $S_0$ .

Compte tenu du fait que  $\nabla^k v_1 = \nabla^k v_2$  sur  $S_o$ , pour  $k \leq m + \mu - 1$ , l'inégalité (2-3) et les théorèmes 1.3 et 1.4 entraînent qu'on a :

$$\|u_1 - u_2\|_{W_{m+\mu-1}^2(S_t, V)} \leq C \int_0^t \|b\|_{W_\mu^{2,\infty}(S_\tau, \Omega)} \|v_1 - v_2\|_{W_{m+\mu-1}^2(S_\tau, V)} d\tau + \\ C \int_0^t \|a, S_\tau; \Omega\|_\mu^{2,\infty} \|v_1 - v_2\|_{W_{m+\mu-1}^2(S_\tau, V)} d\tau$$

et l'inégalité de Schwartz permet de conclure.

### Solution du problème de Cauchy quasi-linéaire

Soit  $(\varphi_o, \dots, \varphi_m) \in \mathcal{K}_{m+\mu}(S_o)$  et soit  $\varphi \in W_{m+\mu}^2(V_T)$  la fonction introduite au lemme 2.8. On prend comme première approximation  $u_o = \varphi$  et  $T_o = T$ . Posons  $M_o(t) = \text{Sup}_{|\tau| \leq |t|} \|u_o\|_{W_{m+\mu}^2(S_\tau, V)}$ . D'après le lemme 2.9, il existe un réel  $T_1 \leq T_o$  tel que si  $|t| < T_1$ , alors  $(x, u_o(x), \dots, \nabla^m u_o(x)) \in \Omega$ , et le lemme 2.7 entraîne que le problème:

$$\begin{cases} a(x, \nabla^i u_o(x), \nabla)u = b(x, \nabla^i u_o(x)) \text{ sur } V_{T_1} \\ u = \varphi_o, \dots, \partial_t^{(m)} u = \varphi_m \text{ sur } S_o \end{cases}$$

a une solution et une seule  $u_1 \in W_{m+\mu}^2(V_{T_1})$  telle que :

$$M_1(t) = \text{Sup}_{|\tau| \leq |t|} \|u_1\|_{W_{m+\mu}^2(S_\tau, V)} < F(t, M_o(t), M_o(0)) < +\infty.$$

On construit ainsi une suite  $(T_k)$  de réels strictement positifs et une suite  $(u_k)$  de fonctions de  $W_{m+\mu}^2(V_{T_k})$  telles que :

$$- M_k(t) = \text{Sup}_{|\tau| \leq |t|} \|u_k\|_{W_{m+\mu}^2(S_\tau, V)} < F(t, M_{k-1}(t), M_{k-1}(0)) < +\infty \text{ pour } |t| < T_k.$$

$$- \partial_o^{(\ell)} u_k = \partial_o^{(\ell)} \varphi \text{ sur } S_o \text{ pour } \ell \leq m.$$

-  $u_k$  est solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} a(x, \nabla^i u_{k-1}(x), \nabla)u = b(x, \nabla^i u_{k-1}(x)) \text{ sur } V_{T_k} \\ u = \varphi_o, \dots, \partial_t^{(m)} u = \varphi_m \text{ sur } S_o \end{cases}$$

$$- |t| < T_{k-1} \text{ et } |t| M_{k-1}(t) < C_o(\varphi) \text{ implique } |t| < T_k.$$

- Si  $\nabla^\lambda u_k = \nabla^\lambda u_{k-1}$  sur  $S_o$  pour  $\lambda \leq m + \mu - 1$ , alors :

$$\|u_{k+1} - u_k\|_{W_{m+\mu-1}^2(S_t, V)}^2 \leq C \int_0^t \|u_k - u_{k-1}\|_{W_{m+\mu-1}^2(S_\tau, V)}^2 d\tau.$$

LEMME 2.11. — Sur  $S_o$ ,  $\nabla^\lambda u_{k+1} = \nabla^\lambda u_k$  pour  $k > \mu$  et  $\lambda \leq m + \mu - 1$ .

*Preuve.* — D'après le théorème 2.3,  $u_{k+1} - u_k$  est solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} a(x, \nabla^i u_k(x), \nabla) u = b(x, \nabla^i u_k(x)) - b(x, \nabla^i u_{k-1}(x)) \\ \quad + [a(x, \nabla^i u_{k-1}(x), \nabla) - a(x, \nabla^i u_k(x), \nabla)] u_k \\ \partial_t^{(\lambda)} u = 0 \text{ sur } S_o \text{ pour } \lambda \leq m \end{cases}$$

Pour  $1 \leq \nu \leq \mu - 1$ , le lemme 2.5 (appliqué pour  $t = 0$ ) entraîne qu'on a :

$$\|u_{k+1} - u_k\|_{W_{m+\nu}^2(S_o, V)} \leq C \left\{ \|b(x, \nabla^i u_k(x)) - b(x, \nabla^i u_{k-1}(x))\|_{W_{\nu-1}^2(S_o, V)} \right. \\ \left. + \|(a(x, \nabla^i u_{k-1}(x), \nabla) - a(x, \nabla^i u_k(x), \nabla)) u_k\|_{W_{\nu-1}^2(S_o, V)} \right\}$$

et le corollaire 1.2 du théorème 1.4 entraîne qu'on a :

$$(*) \quad \|u_{k+1} - u_k\|_{W_{m+\nu}^2(S_o, V)} \\ \leq C \left( \|u_k\|_{W_{m+\mu}^2(S_o, V)}, \|u_{k-1}\|_{W_{m+\mu}^2(S_o, V)} \right) \|u_k - u_{k-1}\|_{W_{m+\nu-1}^2(S_o, V)}$$

pour  $1 \leq \nu \leq \mu - 1$ .

On fait dans (\*)  $k = \nu + 1$  et on donne à  $\nu$  les valeurs successives  $1, \dots, \mu - 1$  et on a  $\nabla^\lambda u_{\mu+1} = \nabla^\lambda u_\mu$  sur  $S_o$ . On fait ensuite dans (\*)  $\nu = \mu - 1$  et on donne à  $k$  les valeurs successives  $\mu + 1, \mu + 2, \dots$  et on a  $\nabla^\lambda u_k = \nabla^\lambda u_{k+1}$  sur  $S_o$  pour  $k > \mu$  et  $\lambda \leq m + \mu - 1$ .

LEMME 2.12. — 1) Il existe deux constantes  $M$  et  $T_\infty$  telles que  $0 < T_\infty \leq \dots \leq T_k \leq \dots \leq T_1 \leq T_o$  et telles que si  $|t| < T_\infty$ , alors  $\|u_k\|_{W_{m+\mu}^2(S_t, V)} \leq M \forall k$ .

2) La suite  $(u_k)$  converge faiblement dans  $W_{m+\mu}^2(V_{T_\infty})$  vers une fonction  $u \in W_{m+\mu}^2(V_{T_\infty})$ , solution du problème quasi-linéaire.

*Preuve.* — 1) D'après le lemme 2.11, pour  $k > \mu$ ,  $M_k(0)$  est indépendant de  $k$ , il existe donc une fonction  $F(t, M)$  continue, croissante de  $|t|$ , et  $M$ , qui ne dépend que du problème de Cauchy posé, telle que :

- $M_{k+1}(t) < F(t, M_k(t)) < +\infty$  pour  $|t| < T_k$  et  $k > \mu$ .
- $F(0, M)$  ne dépend pas de  $M$ .
- Si  $|t| < T_k$  et  $|t|M_k(t) < C_o(\varphi)$ , alors  $|t| < T_{k+1}$ .

On choisit  $M$  suffisamment grand pour que  $F(0, M) < M$  et  $\ell'$  suffisamment petit pour que  $0 < \ell' < T_{\mu+1}$  et  $M_{\mu+1} < M$ . On choisit alors  $\ell$  tel que  $0 < \ell < \ell'$  et  $M\ell < C_o(\varphi)$  et  $F(\ell, M) \leq M$  et on montre par récurrence sur  $k$  que  $\ell \leq T_k$  et  $M_k(\ell) < M \forall k > \mu$ .

La suite  $(T_k)$  est décroissante et minorée par  $\ell > 0$ , elle converge vers  $T_\infty > 0$  et on a  $0 < T_\infty \leq T_k, \forall k$ .

2) Pour  $k > \mu$  les lemmes 2.10 et 2.11 entraînent:

$$\|u_{k+1} - u_k\|_{W_{m+\mu-1}^2(S_t, V)}^2 \leq \frac{4M^2 C^{k-\mu} |t|^{k-\mu}}{(k-\mu)!},$$

d'où la série de terme général  $\|u_{k+1} - u_k\|_{W_{m+\mu-1}^2(S_t, V)}$  est uniformément convergente sur  $[-T_\infty, T_\infty]$  et par conséquent, la suite  $(u_k)$  est de Cauchy dans  $W_{m+\mu-1}^2(V_{T_\infty})$ ; elle converge donc vers  $u \in W_{m+\mu-1}^2(V_{T_\infty})$  et  $\sup_{|t| < T_\infty} \|u_k - u\|_{W_{m+\mu-1}^2(S_t, V)}$  converge vers 0. D'autre part  $\|u_k\|_{W_{m+\mu}^2(V_{T_\infty})}$  est borné, d'où de la suite  $(u_k)$ , on peut extraire une sous-suite qui converge faiblement vers  $u$  dans  $W_{m+\mu}^2(V_{T_\infty})$ , d'où  $u \in W_{m+\mu}^2(V_{T_\infty})$  et  $\|u\|_{W_{m+\mu}^2(S_t, V)}$  est borné par une constante indépendante de  $t$ . Le théorème 1.4 et ses corollaires montrent que  $b(x, \nabla^i u_k(x))$  converge vers  $b(x, \nabla^i u(x))$  et  $a(x, \nabla^i u_k(x), \nabla) u_k$  converge vers  $a(x, \nabla^i u(x), \nabla) u$  dans  $W_{\mu-2}^2(V_{T_\infty})$ ;  $u$  est donc solution du problème de Cauchy (2-8). On utilise ensuite le lemme 2.10 pour montrer l'unicité de la solution  $u$ .

On a ainsi:

**THÉORÈME 5.2.** — Soient  $m, \mu \in \mathbb{N}^*, \Omega$  un ouvert de  $E = \mathbb{R} \times_V T_1(V) \times_V \dots \times_V T_m(V)$ ,  $a \in \mathcal{V}_\mu^{2, \infty}(\Omega, m+1)$  et  $b \in W_\mu^{2, \infty}(\Omega)$ .

Si les hypothèses  $(H_1), (H_2), \dots, (H_5)$  sont satisfaites, alors il existe un réel  $T_\infty \in ]0, T]$  tel que le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} a(x, \nabla^i u(x), \nabla) = b(x, \nabla^i u(x)) \text{ sur } V_T \\ u = \varphi_o, \dots, \partial_o^{(m)} u = \varphi_m \text{ sur } S_o \end{cases}$$

a une solution et une seule  $u \in W_{m+\mu}^2(V_{T_\infty})$ .

## Bibliographie

- [1] AUBIN (T.). — Espaces de Sobolev sur les variétés riemanniennes, Bull. Sci. Math. 2<sup>e</sup> série 100, 1976, 149-173.
- [2] AUBIN (T.). — Non linear Analysis on Manifolds-Monge-Ampère Equations, Springer Verlag New York Heidelberg Berlin 1982.
- [3] DIONNE (P.A.). — Sur les problèmes de Cauchy hyperboliques bien posés. Thèse, Journal d'Analyse Mathématique, Jérusalem, 1962/1963.
- [4] CAGNAC (F.). — Espaces de Sobolev sur les variétés hyperboliques. Annales de la Faculté des Sciences, Nouvelles séries, Yaoundé 1987.
- [5] WAMON (F.). — Problème de Cauchy pour les équations hyperboliques sur une variété riemannienne. C.R. Acad. Sc. Paris, t. 320, série 1, p. 797-802, 1995.
- [6] WAMON (F.). — Théorème de substitution pour les variétés riemanniennes. C.R. Acad. Sc. Paris, t. 320, série 1, p. 953-958, 1995.
- [7] GÄRDING (L.). — Cauchy's problem for hyperbolic equations Lecture notes: University of Chicago, 1957.
- [8] LERAY (J.). — Hyperbolic Differential Equations. The Institute for Advance Study, Princeton, 1953
- [9] CAGNAC (F.) et CHOQUET BRUHAT (Y.). — Solution globale d'une équation non linéaire sur une variété hyperbolique. J. Math. Pures Appl., 63, 1984.
- [10] WAMON (F.). — Lemmes de majoration sur une variété riemannienne C.R. Acad Sc. Paris, t. 296, 25 Janvier 1983.