ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

BRAHIM HAJOUJ
MONIQUE MADAUNE-TORT

Perturbations singulières pour une équation hyperbolique dégénérée

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 10, nº 2 (2001), p. 313-345

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_2001_6_10_2_313_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. X, n° 2, 2001
pp. 313–345

Perturbations singulières pour une équation hyperbolique dégénérée (*)

Brahim Hajouj et Monique Madaune-Tort (1)

Résumé. — On s'intéresse au comportement asymptotique, quand $\varepsilon \to 0_+$, de la solution d'une équation hyperbolique du second ordre associée à l'opérateur dégénéré

$$L_\varepsilon v = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\left[k(v)\frac{\partial v}{\partial t}\right] - \vartheta_\varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + h(\frac{\partial v}{\partial t}, v) - f.$$

Deux situations sont examinées selon que $\vartheta_\varepsilon = \vartheta > 0$ est indépendant de ε ou égal à ε.

Abstract. — The behavior, when $\varepsilon \to 0_+$, of the solution of an hyperbolic variational equality relative to the degenerate operator

$$L_\varepsilon v = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\left[k(v)\frac{\partial v}{\partial t}\right] - \vartheta_\varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + h(\frac{\partial v}{\partial t}, v) - f$$

is considered. Two different situations are examined, a first one when $\vartheta_\varepsilon = \vartheta > 0$ is independent of ε, a second one when $\vartheta_\varepsilon = \varepsilon$.

1. Introduction

Dans ce papier on considère un problème d'élasto-plasticité (G. Duvaut et J.L. Lions [2], chap. 5) gouverné par l'équation hyperbolique $L_\varepsilon v = 0$ présentant des non linéarités dans les termes relatifs aux dérivées partielles

(*) Reçu le 13 octobre 2000, accepté le 14 juin 2001
(1) Département de Mathématiques, Ecole Normale Supérieure, Marrakech, B.P. S/41, Maroc
e-mail: bhajouj@ensma.ac.ma
Laboratoire de Mathématiques Appliquées, ERS 2055, Université de PAU et des Pays de l'Adour, 64000 Pau, France,
e-mail: monique.madaune-tort@univ-pau.fr, fax: 05 59 92 30 66

par rapport au temps t et pouvant dégénérer en une équation parabolique dans toute partie du domaine où v s'annule.

Dans un premier temps on s'intéresse au problème de l'existence et de l'unicité pour l'équation dégénérée en temps $L_\varepsilon v = 0$, puis on étudie le comportement quand $\varepsilon \to 0_+$ de la solution de ce problème dans le cas où $\vartheta_\varepsilon = \vartheta > 0$ est indépendant de ε et dans le cas où ϑ_ε vaut ε.

Divers auteurs ont étudié des problèmes similaires soit d'existence et d'unicité, soit de perturbations singulières mais relatifs à des équations non dégénérées; citons par exemple J. L. Lions and W.A. Strauss [12], J. L. Lions [9], A. Benaouda et M. Madaune-Tort [1], G.C. Hsiao and R. J. Weinacht [7], N.A. Lar'kin [8], B. Hajouj [5], [6], A. Milani [13], V. Georgiev and G. Todorova [4], E. Feireisl [3].

La situation où l'équation $L_\varepsilon v = 0$ peut dégénérer n'a pas été, à notre connaissance, encore examinée ni du point de vue existence et unicité ni du point de vue perturbations singulières, hormis lorsque la fonction v est soumise à une contrainte (B. Hajouj [6]). L'objet de cet article est d'apporter des éléments de réponse lorsque les conditions initiales vérifient certaines conditions de compatibilité assurant l'existence d'une solution forte et par conséquent l'unicité de cette solution.

On désigne par Ω l'intervalle ouvert $]a, b[$ de $\mathbb{R}$, $a < b$, par T un réel donné, $T > 0$ et par Q le pavé ouvert $\Omega \times]0, T[$. On note $(.\ ,\ .)$ le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$ et les produits de dualité entre les espaces $H^{-1}(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$ d'une part et les espaces $L^q(\Omega)$ et $L^{q'}(\Omega)$ avec $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ d'autre part. Les dérivées de u par rapport au temps t, au sens des distributions vectorielles, sont représentées par $u', u'', u''', \ldots$ et $a(u, v)$ désigne la forme bilinéaire définie sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ par $\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} dx$. Enfin les notations L^q et H_0^1 utilisées pour alléger l'écriture des normes représentent les espaces $L^q(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, on considère le problème variationnel hyperbolique P_ε d'inconnue u_ε:

$$P_\varepsilon \begin{cases} u_\varepsilon \in L^\infty(0, T;\ H_0^1(\Omega)),\ \ u_\varepsilon' \in L^\infty(0, T;\ H_0^1(\Omega)), \\ \forall v \in H_0^1(\Omega),\ \text{p.p.}t \in]0, T[\,, \\ (\varepsilon \dfrac{\partial}{\partial t}\left[k(u_\varepsilon) u_\varepsilon'\right], v) + \vartheta_\varepsilon\, a(u_\varepsilon, v) + (h(u_\varepsilon', u_\varepsilon), v) = (f, v), \\ u_\varepsilon(x, 0) = u_0(x),\ \ u_\varepsilon'(x, 0) = u_1(x),\ \ \text{p.p.}x \in \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

où les données vérifient les hypothèses suivantes:

$$H \left\{ \begin{array}{l} k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \text{ est une fonction de classe } C^2 \text{ telle que } k(0) = 0, \\ \vartheta_\varepsilon \in \mathbb{R} \text{ et soit: } \vartheta_\varepsilon = \varepsilon, \text{ soit: } \exists \vartheta \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \vartheta_\varepsilon = \vartheta, \\ h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ vérifie } h\,(z,v) = h_1\,(z) + h_2\,(v) + h_3\,(z,v) \text{ où} \\ h_1(z) = \alpha z + \gamma\,|z|^\rho\, z,\ \ h_2(v) = \beta v + \lambda\,|v|^\mu\, v,\ \ h_3(z,v) = c\,|v|^\omega\, z, \\ \alpha > 0,\ \gamma > 0,\ \beta \geqslant 0,\ \ \lambda \geqslant 0,\ c \geqslant 0,\ \ \rho \geqslant 2,\ \ \mu > 0,\ \omega > 1, \\ f \in L^2(0,T;\ L^2(\Omega)) \text{ telle que } f' \in L^2(0,T;\ L^2(\Omega)), \\ u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega),\ u_1 \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right.$$

En outre, on supposera que la fonction k vérifie l'une des deux hypothèses suivantes

$$H_\ell \left\{ \begin{array}{l} \exists \ell \in \mathbb{R}, 1 \leqslant \ell \leqslant \rho, \\ C_0\,|v|^\ell \leqslant k(v),\ \ |k'(v)| \leqslant C_1\,|v|^{\ell-1},\ C_0 > 0,\ C_1 > 0 \end{array} \right. \tag{2}$$

ou

$$H_b \qquad k,\ k' \text{ et } k'' \text{ sont bornées sur } \mathbb{R}.$$

Les conditions initiales sont telles que:

$$H_1 \left\{ \begin{array}{l} \text{Soit } \Phi_\varepsilon \text{ définie par } \Phi_\varepsilon = f(x,0) - \varepsilon\, k'(u_0)u_1^2 + \vartheta_\varepsilon \Delta u_0 - h(u_1,u_0), \\ \exists g \in L^2(\Omega), \forall \varepsilon \in \,]0,1[, |\Phi_\varepsilon(x)| \leqslant |g(x)|\,\sqrt{k(u_0(x))}\ \ p.p.x \in \Omega. \end{array} \right. \tag{3}$$

Des exemples de situations où la condition (3) est satisfaite sont donnés au § 4.

Enfin l'étude du comportement quand $\varepsilon \to 0_+$, dans le cas où $\vartheta_\varepsilon = \varepsilon$, est menée sous la condition supplémentaire

$$H_2 \quad f \in C([0,T]\,;\, H_0^1(\Omega)),\ c \neq 0 \text{ et } 2\mu \leqslant \omega \leqslant \tfrac{2\rho}{\rho+2}.$$

Sous les hypothèses H, H_ℓ ou H_b et H_1, on établit au § 2, l'existence et l'unicité de la solution de P_ε. Au § 3, on analyse le comportement de u_ε, solution du problème P_ε, lorsque le paramètre $\varepsilon \to 0_+$. En particulier, on donne des estimations des normes de $u_\varepsilon - u$ et $u'_\varepsilon - u'$ dans certains espaces de Sobolev, u désignant la solution d'un problème gouverné par l'équation (1) où ε est remplacé par 0, que ϑ_ε soit indépendant ou non de ε.

2. Existence et unicité de la solution de P_ε

Le but de cette partie est de justifier l'existence et l'unicité de u_ε solution du problème P_ε, lorsque $\varepsilon \neq 0$, pour ensuite, au § 3, étudier le comportement du u_ε lorsque le paramètre ε tend vers 0_+. Aussi, on s'intéresse à la situation où ε est dans un voisinage de 0 et l'objet de ce paragraphe est d'établir le

THÉORÈME 2.1.— *Sous les hypothèses H, H_ℓ ou H_b et H_1, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$, le problème P_ε admet une solution et une seule u_ε vérifiant:*

$$\sqrt{k(u_\varepsilon)}u_\varepsilon'' \in L^\infty(0,T;\ L^2(\Omega)),\quad u_\varepsilon'' \in L^2(Q),\quad u_\varepsilon \in L^\infty(0,T;\ H^2(\Omega)). \tag{2.0}$$

La preuve de ce théorème est développée dans les deux sous-paragraphes de cette section. Au § 2.1, on construit une solution par approximation. La propriété d'unicité est établie au § 2.2.

2.1. Existence

Pour prouver l'existence de u_ε, on utilise une méthode de régularisation qui consiste à approcher le problème dégénéré P_ε par une suite de problèmes non dégénérés $(P_{\varepsilon,\delta})_{\delta>0}$ obtenus en approchant la fonction k par la suite de fonctions $k_\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définies par $k_\delta(x) = k(x) + \delta$ avec δ réel, $\delta > 0$. Pour chaque $\delta > 0$, la fonction k_δ est minorée par δ sur $\mathbb{R}$. En conséquence, d'après B. Hajouj [5] et N.A. Lar'kin [8], le problème

$$P_{\varepsilon,\delta}\begin{cases} u_\delta \in L^\infty(0,T;\ H_0^1(\Omega)),\ u_\delta' \in L^\infty(0,T;\ H_0^1(\Omega)),\\ \forall v \in H_0^1(\Omega),\ \text{p.p. } t \in]0,T[\,,\\ (\varepsilon\dfrac{\partial}{\partial t}\left[k_\delta(u_\delta)u_\delta'\right], v) + \vartheta_\varepsilon\, a(u_\delta, v) + (h(u_\delta', u_\delta), v) = (f, v),\\ u_\delta(x,0) = u_0(x),\ u_\delta'(x,0) = u_1(x),\ \text{p.p. } x \in \Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

admet pour tout $\delta > 0$ une unique solution u_δ telle que:

$$u_\delta'' \in L^\infty(0,T;\ L^2(\Omega)),\quad u_\delta \in L^\infty(0,T;\ H^2(\Omega)). \tag{2.2}$$

Le principe est alors de montrer qu'une suite extraite de la suite $(u_\delta)_{\delta>0}$ converge vers une fonction qui a la propriété d'être solution du problème P_ε. Pour cela, on établit des estimations a priori sur la solution u_δ du problème $P_{\varepsilon,\delta}$ et sur ses dérivées, indépendantes du paramètre δ. Ces estimations doivent être suffisantes pour justifier au moyen de résultats de compacité une convergence forte des suites $(u_\delta)_{\delta>0}$ et $(u_\delta')_{\delta>0}$ autorisant un passage à la limite en δ dans les termes non linéaires de (2.1). A cet égard, on s'intéresse aux normes de u_δ et u_δ' dans $L^\infty(0,T;\ H_0^1(\Omega)) \cap W\left(0,T; L^2(\Omega)\right)$ avec $W\left(0,T; L^2(\Omega)\right) = \left\{v;\ v \in L^2(0,T;\ L^2(\Omega)),\ v' \in L^2(0,T;\ L^2(\Omega))\right\}$. En effet l'injection de cet espace dans $L^2(0,T;\ C(\overline{\Omega}))$ est compacte. Les estimations de normes sont obtenues au § 2.1.1 (lemme 2.2), puis utilisées au § 2.1.2 pour, par compacité, montrer l'existence d'une solution u_ε de P_ε.

2.1.1 Estimations a priori sur u_δ

Dans l'étude d'estimations a priori sur u_δ présentée dans ce paragraphe, l'objectif va au delà de la recherche d'estimations indépendantes de δ. En effet, le but de cet article est finalement d'étudier pour le problème P_ε, une fois le résultat d'existence et d'unicité obtenu, le comportement quand $\varepsilon \to 0_+$ de sa solution. La construction de u_ε, solution du problème P_ε, effectuée au § 2.1.2 repose seulement sur les estimations de normes dans $L^\infty(0,T;\ H_0^1(\Omega)) \cap\ W\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$ données par les résultats *i)* et i_ε) du lemme 2.2 énoncé ci-dessous. Les autres résultats de ce sous-paragraphe précisent, pour les mêmes normes, leur dépendance en ε afin de mettre en évidence des estimations sur u_δ indépendantes de plus du paramètre ε. Ainsi au § 3 on en déduira des estimations sur u_ε qui permettront, toujours au moyen de techniques de compacité, d'analyser le comportement asymptotique de u_ε quand $\varepsilon \to 0_+$.

On convient, dans toute la suite de ce paragraphe, de désigner par C (resp. $C\,(\varepsilon)$) toute constante positive indépendante des paramètres ε et δ (resp. indépendante du paramètre δ).

LEMME 2.2. — *Sous les hypothèses du théorème* 2.1, *il existe* $\varepsilon_1 \in \,]0,1[$, *une constante* $C > 0$ *et une constante* $C(\varepsilon) > 0$ *tels que, pour tous* $\delta \in \,]0,1[$ *et* $\varepsilon \in \,]0,\varepsilon_1[$:

$$i)\sqrt{\varepsilon}\left\|\sqrt{k_\delta(u_\delta)}\,u'_\delta\right\|_{L^\infty(0,T;\,L^2)} + \sqrt{\vartheta_\varepsilon}\,\|u_\delta\|_{L^\infty(0,T;\,H_0^1)} + \|u'_\delta\|_{L^{\rho+2}(Q)} + \|u_\delta\|_{L^\infty(0,T;\,L^{\rho+2})} \leqslant C,$$

$$i_\varepsilon)\left\|\sqrt{k_\delta(u_\delta)}u''_\delta\right\|_{L^\infty(0,T;\,L^2)} + \|u'_\delta\|_{L^\infty(0,T;\,H_0^1)} + \|u''_\delta\|_{L^2(Q)} \leqslant C(\varepsilon).$$

Sous les mêmes conditions et en supposant de plus lorsque $\vartheta_\varepsilon = \varepsilon$ *les hypothèses* H_b *et* H_2,

$$ii)\varepsilon\left\|\sqrt{k_\delta(u_\delta)}u''_\delta\right\|_{L^\infty(0,T;\,L^2)} + \sqrt{\varepsilon}\sqrt{\vartheta_\varepsilon}\,\|u'_\delta\|_{L^\infty(0,T;H_0^1)} + \sqrt{\varepsilon}\,\|u''_\delta\|_{L^2(Q)} + \sqrt{c}\sqrt{\varepsilon}\left\||u_\delta|^{\frac{\omega}{2}}\,u''_\delta\right\|_{L^2(Q)} + \sqrt{\varepsilon}\left\||u'_\delta|^{\frac{\varrho}{2}}\,u''_\delta\right\|_{L^2(Q)} \leqslant C,$$

$$iii)\sqrt{\vartheta_\varepsilon}\,\|u'_\delta\|_{L^2(0,T;\,H_0^1)} + \|u'_\delta\|_{L^\infty(0,T;\,L^{\rho+2})} \leqslant C,$$

$$iv)\sqrt{\varepsilon}\left\|\sqrt{t\,k_\delta(u_\delta)}\,u''_\varepsilon\right\|_{L^\infty(0,T;\,L^2)}+\sqrt{\vartheta_\varepsilon}\left\|\sqrt{t}\,u'_\delta\right\|_{L^\infty(0,T;H_0^1)}$$

$$+\left\|\sqrt{t}\,u''_\delta\right\|_{L^2(Q)}+\sqrt{c}\left\|\sqrt{t}\,|u_\delta|^{\frac{\omega}{2}}\,u''_\delta\right\|_{L^2(Q)}+\left\|\sqrt{t}\,|u'_\delta|^{\frac{\ell}{2}}\,u''_\delta\right\|_{L^2(Q)}\leqslant C.$$

Démonstration.

i) On considère l'équation (2.1) du problème $P_{\varepsilon,\delta}$ dans laquelle on choisit $v=2u'_\delta$ puis on intègre la relation obtenue de 0 à $t\in\,]0,T[$. Des intégrations par parties par rapport à la variable t, conduisent à l'égalité:

$$\varepsilon\int_\Omega k_\delta(u_\delta)u'^2_\delta dx+\vartheta_\varepsilon\left\|\frac{\partial u_\delta}{\partial x}\right\|^2_{L^2}+2\alpha\int_0^t\left\|u'_\delta\right\|^2_{L^2}d\tau \tag{2.3}$$

$$+2\gamma\int_0^t\left\|u'_\delta\right\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}}d\tau+2c\int_0^t\int_\Omega|u_\delta|^\omega\,u'^2_\delta dxd\tau+\beta\left\|u_\delta\right\|^2_{L^2}$$

$$+\tfrac{2\lambda}{\mu+2}\left\|u_\delta\right\|^{\mu+2}_{L^{\mu+2}}=A(t)-\varepsilon\int_0^t\int_\Omega k'_\delta(u_\delta)u'^3_\delta dxd\tau$$

avec

$$A(t)=2\int_0^t(f,u'_\delta)d\tau+\vartheta_\varepsilon\left\|\frac{\partial u_0}{\partial x}\right\|^2_{L^2}+\beta\left\|u_0\right\|^2_{L^2}$$

$$+\tfrac{2\lambda}{\mu+2}\left\|u_0\right\|^{\mu+2}_{L^{\mu+2}}+\varepsilon\int_\Omega k_\delta(u_0)u_1^2dx.$$

Soit $\delta\in\,]0,1[$ et $\varepsilon\in\,]0,1[$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz entraîne

$$|A(t)|\leqslant C+\alpha\int_0^t\left\|u'_\delta\right\|^2_{L^2}d\tau.$$

De plus, si k vérifie l'hypothèse H_ℓ avec $\ell>1$, l'utilisation de l'inégalité de Hölder-Young relative au triplet $(\frac{(\rho+2)\ell}{\rho-\ell},\frac{\ell}{\ell-1},\frac{(\rho+2)\ell}{\ell+2})$ et de l'inégalité $\left|k'_\delta(u_\delta)u'^3_\delta\right|\leqslant C_1(|u_\delta|^{\ell-1}\,|u'_\delta|^{\frac{2(\ell-1)}{\ell}})\,|u'_\delta|^{\frac{\ell+2}{\ell}}$ entraîne

$$\left|\varepsilon \int_0^t \int_\Omega k'_\delta(u_\delta) u'^3_\delta \, dx d\tau\right| \leqslant C + C\varepsilon \int_0^t \int_\Omega k_\delta(u_\delta) u'^2_\delta \, dx d\tau + \gamma \int_0^t \|u'_\delta\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}} \, d\tau$$

et lorsque k vérifie soit l'hypothèse H_ℓ avec $\ell = 1$ soit l'hypothèse H_b, l'inégalité de Young relative à $q = \frac{\rho+2}{3}$; $q' = \frac{\rho+2}{\rho-1}$ entraîne

$$\left|\varepsilon \int_0^t \int_\Omega k'_\delta(u_\delta) u'^3_\delta \, dx d\tau\right| \leqslant C + \gamma \int_0^t \|u'_\delta\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}} \, d\tau.$$

L'estimation i) découle ainsi de (2.3) grâce à ces trois majorations, au lemme de Gronwall et à l'inégalité de Poincaré.

ii) Pour établir les estimations ii) sur u_δ, $\delta \in]0,1[$ étant fixé, on introduit une suite de fonctions "régulières" approchant u_δ. Pour cela, on considère dans l'espace $\left[H^1_0(\Omega) \cap H^4(\Omega)\right] \times D(\Omega) \times C^\infty(\overline{Q})$ une suite de triplets $(u_{0,n}, u_{1,n}, f_n)$ telle que

$$(u_{0,n}, u_{1,n}, f_n) \to (u_0, u_1, f) \text{ dans } \left[H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega)\right] \times H^1_0(\Omega) \times W(0,T) \quad (2.4)$$

où $W(0,T) = \left\{v \in L^2(0,T;\, L^2(\Omega)); v' \in L^2(0,T;\, L^2(\Omega))\right\}$ muni de la norme du graphe [11].

Il résulte de (2.4) et de l'inclusion topologique $H^1_0(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$, que la fonction $\Phi_{\varepsilon,n}$ définie dans l'hypothèse H_1 à partir du triplet $(u_{0,n}, u_{1,n}, f_n)$ vérifie

$$\Phi_{\varepsilon,n} \to \Phi_\varepsilon \text{ dans } L^2(\Omega). \qquad (2.5)$$

On désigne par $P_{\varepsilon,\delta,n}$ le problème similaire au problème $P_{\varepsilon,\delta}$ dans lequel le triplet $(u_{0,n}, u_{1,n}, f_n)$ prend la place du triplet (u_0, u_1, f). Donc d'après [5] et [8], le problème $P_{\varepsilon,\delta,n}$ admet pour tout $n \in \mathbb{N}$ une solution unique notée u_n telle que

$$u''_n \in L^\infty(0,T;\; L^2(\Omega)) \text{ et } u_n \in L^\infty(0,T;\, H^2(\Omega)).$$

Il suffit alors d'établir les estimations ii) sur u_n et de justifier la convergence de la suite (u_n) vers la solution u_δ de $P_{\varepsilon,\delta}$ pour, par passage à la limite en n, en déduire les estimations ii) sur u_δ. Dans cette partie, on note C toute constante positive indépendante de n, $\delta \in]0,1[$ et de $\varepsilon \in]0,1[$.

On remarque tout de suite qu'à partir de l'égalité (2.3) vérifiée aussi par u_n, il vient grâce à (2.4) l'estimation

$$\sqrt{\vartheta_\varepsilon}\, \|u_n\|_{L^\infty(0,T;\, H_0^1)} + \|u_n'\|_{L^{\rho+2}(Q)} + \|u_n\|_{L^\infty(0,T;\, L^{\rho+2})} \leqslant C. \tag{2.6}$$

Il résulte de l'estimation (2.6), de l'inclusion topologique $H_0^1(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$ et de la C^2-régularité de k_δ que, lorsque $\vartheta_\varepsilon = \vartheta$, les fonctions $k_\delta(u_n)$, $k_\delta'(u_n)$ et $k_\delta''(u_n)$ sont bornées dans $L^\infty(Q)$ indépendamment de ε, δ et n. Lorsque $\vartheta_\varepsilon = \varepsilon$, ces mêmes fonctions sont bornées dans $L^\infty(Q)$ indépendamment de ε, δ et n, puisque dans ce cas l'hypothèse H_b est vérifiée.

Maintenant, pour obtenir les estimations ii) sur la suite (u_n), on utilise une méthode de quotient différentiel. Soit $\theta \in \,]0,T[$ destiné à tendre vers 0. On introduit les prolongements suivants des fonctions u_n et f_n à $[-\theta, 0]$:

$$\left\{\begin{array}{l} u_n(x,t) = u_{0,n}(x) + t u_{1,n}(x) + \dfrac{t^2}{2} \dfrac{\Phi_{\varepsilon,n}(x)}{\varepsilon k_\delta(u_{0,n})}, \\ f_n(x,t) = k_\delta(u_n) \dfrac{\Phi_{\varepsilon,n}}{k_\delta(u_{0,n})} - \vartheta_\varepsilon \Delta u_n + h(u_n', u_n) + \varepsilon k'(u_n) u_n'^2. \end{array}\right. \tag{2.7}$$

On considère l'équation du problème $P_{\varepsilon,\delta,n}$ satisfaite par u_n aux instants τ et $\tau+\theta$ où τ est un réel de $]-\theta, T-\theta[$ et on choisit la fonction test égale à $v = \dfrac{\varepsilon(u_n'(\tau+\theta) - u_n'(\tau))}{\theta^2}$. On soustrait les deux égalités obtenues. Alors, si pour chaque fonction $w : Q \to \mathbb{R}$ on pose $w_\theta(\tau) = \dfrac{1}{\theta}(w(\tau+\theta) - w(\tau))$, on obtient p.p. $t \in \,]-\theta, T-\theta[$:

$$\varepsilon^2((\frac{\partial}{\partial t}\,[k_\delta(u_n)u_n'])_\theta, u_{n,\theta}') + \varepsilon\vartheta_\varepsilon a(u_{n,\theta}, u_{n,\theta}')$$
$$+\varepsilon((h(u_n', u_n))_\theta, u_{n,\theta}') = \varepsilon(f_{n,\theta}, u_{n,\theta}'). \tag{2.8}$$

On intègre (2.8) de $-\theta$ à $t \in \,]0, T-\theta[$; on obtient après une transformation simple du premier terme, deux intégrations par parties par rapport à t et multiplication par 2

$$\varepsilon^2 \int_\Omega k_\delta(u_n)(u_{n,\theta}')^2 dx + \varepsilon\vartheta_\varepsilon \left\|\frac{\partial u_{n,\theta}}{\partial x}\right\|_{L^2}^2 + 2\varepsilon \int_{-\theta}^{t} ((h(u_n', u_n))_\theta, u_{n,\theta}') d\tau$$

$$= 2\varepsilon \int_{-\theta}^{t} (f_{n,\theta}, u_{n,\theta}') d\tau + \varepsilon^2 \int_\Omega k_\delta(u_n(-\theta)) \left(u_{n,\theta}'(-\theta)\right)^2 dx$$

$$-2\varepsilon^2 \int_{-\theta}^{t} \int_\Omega (k_\delta(u_n))_\theta u_n''(\tau+\theta) u_{n,\theta}' dx d\tau - 2\varepsilon^2 \int_{-\theta}^{t} \int_\Omega (k_\delta'(u_n) u_n'^2)_\theta u_{n,\theta}' dx d\tau$$

$$+\varepsilon^2 \int_{-\theta}^{t} \int_{\Omega} k'_\delta(u_n) u'_n u'^2_{n,\theta} dx d\tau + \varepsilon \vartheta_\varepsilon \left\| \frac{\partial}{\partial x} u_{n,\theta}(-\theta) \right\|^2_{L^2}.$$

Il est possible de passer à la limite en θ dans l'égalité ci-dessus, grâce aux propriétés de régularité de k_δ et f_n et à la propriété $u'_n \in L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega))$ (resp. $u''_n \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$) qui implique que $\dfrac{\partial u_{n,\theta}}{\partial x}$ (resp. $u'_{n,\theta}$) converge vers $\dfrac{\partial u'_n}{\partial x}$ (resp. u''_n) dans $L^q(0,T;\, L^2(\Omega))$, pour tout $q \in [1,\infty[$. Il vient, p.p. $t \in \,]0,T[$,

$$\varepsilon^2 \int_\Omega k_\delta(u_n(t))(u''_n(t))^2 dx + \varepsilon \vartheta_\varepsilon \left\| \frac{\partial u'_n(t)}{\partial x} \right\|^2_{L^2} + 2\varepsilon\gamma(\rho+1) \int_0^t \int_\Omega |u'_n|^\rho u''^2_n dx d\tau$$

$$+2\varepsilon\alpha \int_0^t \|u''_n\|^2_{L^2} d\tau + 2\varepsilon c \int_0^t \int_\Omega |u_n|^\omega u''^2_n dx d\tau$$

$$= B(t) + \int_\Omega \frac{(\Phi_{\varepsilon,n}(x))^2}{k_\delta(u_{0,n})} dx + \varepsilon \vartheta_\varepsilon \left\| \frac{\partial u_{1,n}}{\partial x} \right\|^2_{L^2} \tag{2.9}$$

avec $B(t) = 2\varepsilon \displaystyle\int_0^t (f'_n - h'_2(u_n)u'_n, u''_n) d\tau - 2\varepsilon c\omega \int_0^t (|u_n|^{\omega-1} sg(u_n) u'^2_n, u''_n) d\tau$

$$-2\varepsilon^2 \int_0^t \int_\Omega k''_\delta(u_n) u'^3_n u''_n dx d\tau - 5\varepsilon^2 \int_0^t \int_\Omega k'_\delta(u_n)\, u'_n\, u''^2_n dx d\tau.$$

Il reste à majorer le second membre de (2.9), les fonctions $k'_\delta(u_n)$ et $k''_\delta(u_n)$ étant bornées dans $L^\infty(Q)$ indépendamment de ε, δ et n.

On remarque que $\quad |\varepsilon\, |u_n|^\mu\, u'_n u''_n| = |u_n|^\mu \,(|u'_n|\, |\varepsilon u''_n|^{\frac{2}{\rho}})\, |\varepsilon u''_n|^{\frac{\rho-2}{\rho}}$,

$|\varepsilon u'^3_n u''_n| = u'^2_n (|u'_n|\, |\varepsilon u''_n|^{\frac{2}{\rho}})\, |\varepsilon u''_n|^{\frac{\rho-2}{\rho}}$, $\quad |\varepsilon^2 u'_n u''^2_n| = (|u'_n|\, |\varepsilon u''_n|^{\frac{2}{\rho}})\, |\varepsilon u''_n|^{\frac{2(\rho-1)}{\rho}}$,

et $\quad \left|\varepsilon\, |u_n|^{\omega-1} sg(u_n) u'^2_n u''_n\right| = |u_n|^{\omega-1} (|u'_n|) \left(|u'_n|\, |\varepsilon u''_n|^{\frac{2}{\rho}}\right) |\varepsilon u''_n|^{\frac{\rho-2}{\rho}}$.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz et (2.4), l'inégalité de Hölder-Young relative soit au triplet $\left(2, \rho, \frac{2\rho}{\rho-2}\right)$, soit au triplet $\left(4, 4, \rho, \frac{2\rho}{\rho-2}\right)$, soit enfin au couple $\left(\rho, \frac{\rho}{\rho-1}\right)$, l'estimation (2.6), les hypothèses H_b et H_2 si $\vartheta_\varepsilon = \varepsilon$, la majoration de (u_n) dans $L^\infty(Q)$ si $\vartheta_\varepsilon = \vartheta > 0$, entraînent la relation

$$|B(t)| \leqslant C(1 + \varepsilon^2 \int_0^t \|u_n''\|_{L^2}^2 \, d\tau + \varepsilon^2 \int_0^t \int_\Omega |u_n'|^\rho \, u_n''^2 dx d\tau).$$

Pour toute la suite on définit ε_1 par

$$\varepsilon_1 = \min\left(1, \tfrac{\alpha}{C}, \tfrac{\gamma(\rho+1)}{C}\right) \tag{2.10}$$

où C est la constante figurant dans la dernière inégalité.

Enfin, il résulte de (2.4), (2.5) et de l'hypothèse $H_1(3)$ que

$$\left| \varepsilon\vartheta_\varepsilon \left\| \frac{\partial u_{1,n}}{\partial x} \right\|_{L^2}^2 + \int_\Omega \frac{(\Phi_{\varepsilon,n}(x))^2}{k_\delta(u_{0,n})} dx \right| \leqslant C.$$

On déduit de (2.9) grâce aux majorations précédentes que, pour tout $\varepsilon \leqslant \varepsilon_1$, on a

$$\varepsilon^2 \int_\Omega k_\delta(u_n(t))(u_n''(t))^2 dx + \varepsilon\vartheta_\varepsilon \left\| \frac{\partial u_n'(t)}{\partial x} \right\|_{L^2}^2 + \varepsilon\gamma(\rho+1) \int_0^t \int_\Omega |u_n'|^\rho \, u_n''^2 dx d\tau$$
$$+\varepsilon\alpha \int_0^t \|u_n''\|_{L^2}^2 \, d\tau + 2\varepsilon c \int_0^t \int_\Omega |u_n|^\omega \, u_n''^2 dx d\tau \leqslant C. \tag{2.11}$$

Il découle de (2.11) l'estimation

$$\varepsilon \left\| \sqrt{k_\delta(u_n)} \, u_n'' \right\|_{L^\infty(0,T;\, L^2)} + \sqrt{\varepsilon}\sqrt{\vartheta_\varepsilon} \, \|u_n'\|_{L^\infty(0,T;\, H_0^1)} + \sqrt{\varepsilon} \, \|u_n''\|_{L^2(Q)}$$
$$+\sqrt{c}\sqrt{\varepsilon} \left\| |u_n|^{\frac{\omega}{2}} \, u_n'' \right\|_{L^2(Q)} + \sqrt{\varepsilon} \left\| |u_n'|^{\frac{\rho}{2}} \, u_n'' \right\|_{L^2(Q)} \leqslant C. \tag{2.12}$$

Il résulte des estimations (2.6) et (2.12) l'existence d'une suite extraite de $(u_n)_n$, notée encore $(u_n)_n$, telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} u_n \rightharpoonup v \quad \textit{dans} \quad L^\infty(0,T;\, H_0^1(\Omega)) \quad \textit{faible}*, \\ u_n' \rightharpoonup v' \quad \textit{dans} \quad L^\infty(0,T;\, H_0^1(\Omega)) \quad \textit{faible}*, \\ u_n'' \rightharpoonup v'' \quad \textit{dans} \quad L^2(Q) \ \textit{faible}. \end{array} \right. \tag{2.13}$$

Pour établir que v est la solution du problème $P_{\varepsilon,\delta}$, on remarque d'abord grâce aux résultats de compacité classiques (ils seront développés au paragraphe 2.1.4) que les propriétés de convergence faible (2.13) entraînent des propriétés de convergence forte qui sont suffisantes pour passer à la limite sur les termes non linéaires de l'équation du problème $P_{\varepsilon,\delta,n}$. Les conditions initiales sont obtenues sans difficulté grâce à (2.4). On déduit alors d'une part l'égalité $v = u_\delta$, où u_δ est la solution de $P_{\varepsilon,\delta}$ et d'autre part, par passage à la limite inférieure sur n dans l'inégalité (2.12), l'estimation ii) du lemme 2.2 sur u_δ.

i$_\varepsilon$) La preuve utilisée au point ii) permet d'établir i$_\varepsilon$) en utilisant les arguments développés dans la situation où $\vartheta_\varepsilon = \vartheta$, puisque l'on peut utiliser sous les seules hypothèses du théorème 2.1 que la suite (u_n) est bornée dans $L^\infty(Q)$ indépendamment de $\delta \in]0,1[$ et de n.

iii) On considère comme dans la preuve de ii) l'équation de $P_{\varepsilon,\delta,n}$ aux instants τ et $\tau+\theta$ mais on choisit ici la même fonction test v aux deux instants τ et $\tau+\theta$ donnée par $v = \dfrac{u_n'(\tau)}{\theta}$. On obtient alors pour p.p. $\tau \in]-\theta, T-\theta[$:

$$\varepsilon\Big(\Big(\frac{\partial}{\partial t}\,[k_\delta(u_n)u_n']\Big)_\theta, u_n'\Big) + \vartheta_\varepsilon a(u_{n,\theta}, u_n') + ((h(u_n', u_n))_\theta, u_n') = (f_{n,\theta}, u_n').$$

On intègre cette dernière inégalité de $-\theta$ à $t \in]0, T-\theta[$. Après une transformation simple du premier terme et une intégration par parties par rapport à t, il vient:

$$\vartheta_\varepsilon \int_{-\theta}^{t} a(u_{n,\theta}, u_n')d\tau + \int_{-\theta}^{t} ((h_1(u_n') + h_2(u_n) + h_3(u_n', u_n))_\theta, u_n')d\tau$$

$$= \varepsilon(k_\delta(u_n(-\theta))u_{n,\theta}'(-\theta), u_n'(-\theta)) + \int_{-\theta}^{t} (f_{n,\theta}, u_n')d\tau - \varepsilon(k_\delta(u_n)u_{n,\theta}', u_n')$$

$$-\varepsilon \int_{-\theta}^{t} ((k_\delta(u_n))_\theta u_n''(\tau+\theta), u_n')d\tau + \varepsilon \int_{-\theta}^{t} (k_\delta(u_n)u_{n,\theta}', u_n'')d\tau$$

$$-\varepsilon \int_{-\theta}^{t} ((k_\delta'(u_n)u_n'^2)_\theta, u_n')d\tau + \varepsilon \int_{-\theta}^{t}\int_\Omega (k_\delta'(u_n)u_n')u_{n,\theta}'u_n'\,dxd\tau.$$

On fait tendre $\theta \to 0_+$. Après trois intégrations par parties, il vient alors p.p. $t \in]0,T[$

$$\vartheta_\varepsilon \int_0^t \left\| \frac{\partial u_n'}{\partial x} \right\|_{L^2}^2 d\tau + \tfrac{\gamma(\rho+1)}{\rho+2} \left\| u_n'(t) \right\|_{L^{\rho+2}}^{\rho+2} + \tfrac{\alpha}{2} \left\| u_n'(t) \right\|_{L^2}^2$$

$$+ \int_0^t (h_2'(u_n)u_n', u_n')d\tau + \frac{c}{2}(|u_n|^\omega u_n', u_n') = T_0 + \int_0^t (f_n', u_n')d\tau$$

$$-\varepsilon(k_\delta(u_n(t))u_n''(t), u_n'(t)) + \varepsilon \int_0^t \int_\Omega k_\delta(u_n)u_n''^2 dx d\tau - \varepsilon \int_0^t \int_\Omega k_\delta''(u_n)u_n'^4 dx d\tau$$

$$-2\varepsilon \int_0^t \int_\Omega k_\delta'(u_n)u_n'^2 u_n'' dx d\tau - \frac{c\omega}{2} \int_0^t \int_\Omega |u_n|^{\omega-1} sg(u_n)u_n'^2 u_n' dx d\tau$$

où, grâce à (2.7), T_0 est donné par

$$(\Phi_{\varepsilon,n}, u_{1,n}) + \tfrac{\gamma(\rho+1)}{\rho+2} \left\| u_{1,n}(t) \right\|_{L^{\rho+2}}^{\rho+2} + \tfrac{\alpha}{2} \left\| u_{1,n}(t) \right\|_{L^2}^2 + \tfrac{\varepsilon}{2}(|u_{0,n}|^\omega u_{1,n}, u_{1,n}).$$

Pour majorer le second membre de cette dernière égalité, on utilise d'abord que les fonctions $k_\delta(u_n)$, $k_\delta'(u_n)$ et $k_\delta''(u_n)$ sont bornées dans $L^\infty(Q)$ par une constante indépendante de ε, δ et n. Ensuite, on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz, les estimations (2.6) et (2.12), la propriété de convergence (2.5) et enfin, on applique l'inégalité de Hölder-Young relative au triplet (4,2,4) au produit $|u_n|^{\omega-1} \left(sg(u_n)u_n'^2\right) u_n'$. On obtient après passage à la limite en n:

$$\vartheta_\varepsilon \int_0^t \left\| \frac{\partial u_\delta'}{\partial x} \right\|_{L^2}^2 d\tau + \gamma \tfrac{\rho+1}{\rho+2} \left\| u_\delta'(t) \right\|_{L^{\rho+2}}^{\rho+2} \leqslant C, \text{p.p. } t \in]0,T[\,, \tag{2.14}$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de $\varepsilon \in]0, \varepsilon_1[\,,\ \delta \in]0,1[$.

L'inégalité de Poincaré nous permet de déduire de (2.14) les estimations iii) du lemme 2.2.

iv) On considère l'égalité (2.8) satisfaite aussi par la solution u_δ du problème $P_{\varepsilon,\delta}$, puis on multiplie par $\dfrac{\tau}{\varepsilon}$ et on intègre de 0 à $t \in]0,T[$. Il vient après une transformation simple du premier terme et des intégrations par parties par rapport à t

$$\varepsilon t(k_\delta(u_\delta)u'_{\delta,\theta}, u'_{\delta,\theta}) + 2\int_0^t \tau((h_1(u'_\delta) + h_2(u_\delta) + h_3(u'_\delta, u_\delta))_\theta, u'_{\delta,\theta})d\tau$$

$$+t\vartheta_\varepsilon \left\| \frac{\partial u_{\delta,\theta}}{\partial x} \right\|^2_{L^2} = -2\varepsilon \int_0^t \int_\Omega \tau(k_\delta(u_\delta))_\theta u''_\delta(\tau+\theta)u'_{\delta,\theta}dxd\tau$$

$$+\varepsilon \int_0^t \int_\Omega (k_\delta(u_\delta) + \tau k'_\delta(u_\delta)u'_\delta)\, u'^2_{\delta,\theta}dxd\tau - 2\varepsilon \int_0^t \int_\Omega \tau(k'_\delta(u_\delta)u'^2_\delta)_\theta u'_{\delta,\theta}dxd\tau$$

$$+2\int_0^t \tau(f_\theta, u'_{\delta,\theta})d\tau + \vartheta_\varepsilon \int_0^t \left\| \frac{\partial u_{\delta,\theta}}{\partial x} \right\|^2_{L^2} d\tau. \qquad (2.15)$$

On fait tendre $\theta \to 0_+$ dans (2.15). Il vient, p.p. $t \in]0, T[$

$$\varepsilon t \int_\Omega k_\delta(u_\delta)u''^2_\delta dx + t\vartheta_\varepsilon \left\| \frac{\partial u'_\delta}{\partial x} \right\|^2_{L^2} + 2\gamma(\rho+1) \int_0^t \int_\Omega \tau \left|u'_\delta\right|^\rho u''^2_\delta dxd\tau$$

$$+2\alpha \int_0^t \tau \left\|u''_\delta\right\|^2_{L^2} d\tau + 2c \int_0^t \int_\Omega \tau \left|u_\delta\right|^\omega u''^2_\delta dxd\tau = T_\delta$$

avec

$$T_\delta = 2\int_0^t \tau(f' - h'_2(u_\delta)u'_\delta, u''_\delta)d\tau - 2c\omega \int_0^t \tau(\left|u_\delta\right|^{\omega-1} sg(u_\delta)u'^2_\delta, u''_\delta)d\tau$$

$$+\vartheta_\varepsilon \int_0^t \left\| \frac{\partial u'_\delta}{\partial x} \right\|^2_{L^2} d\tau + \varepsilon \int_0^t \int_\Omega k_\delta(u_\delta)u''^2_\delta dxd\tau$$

$$-5\varepsilon \int_0^t \int_\Omega \tau k'_\delta(u_\delta)u'_\delta u''^2_\delta dxd\tau - 2\varepsilon \int_0^t \int_\Omega \tau k''_\delta(u_\delta)u'^3_\delta u''_\delta dxd\tau.$$

Une étude analogue à celle faite sur l'égalité (2.9) permet d'obtenir à l'aide des estimations ii) et iii) du lemme 2.2 l'inégalité

$$\varepsilon t \int_\Omega k_\delta(u_\delta)u''^2_\delta dx + t\vartheta_\varepsilon \left\| \frac{\partial u'_\delta}{\partial x} \right\|^2_{L^2} + 2\gamma(\rho+1) \int_0^t \int_\Omega \tau \left|u'_\delta\right|^\rho u''^2_\delta dxd\tau$$

$$+2\alpha \int_0^t \tau \left\| u_\delta'' \right\|_{L^2}^2 d\tau + 2c \int_0^t \int_\Omega \tau \left| u_\delta \right|^\omega u_\delta''^2 dx d\tau \leqslant C$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de $\varepsilon \in]0, \varepsilon_1[$ et de $\delta \in]0,1[$.

L'estimation iv) découle ainsi de cette dernière inégalité grâce à l'inégalité de Poincaré. □

Quand $\vartheta_\varepsilon = \varepsilon$, les estimations données par le lemme 2.2 ne sont pas suffisantes pour passer à la limite en ε sur les termes non linéaires de l'équation (1). Aussi, on complète les résultats du lemme 2.2 par ceux du:

LEMME 2.3. — *Sous les hypothèses H, H_b, H_1* et H_2, *il existe* $\varepsilon_2 \in]0, \varepsilon_1[, C > 0$ *tels que* $\forall\ \delta \in]0,1[\ , \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_2[$,

$$\sqrt{\vartheta_\varepsilon} \left\| \Delta u_\delta \right\|_{L^\infty(0,T;\, L^2)} + \left\| u_\delta \right\|_{L^\infty(0,T;\, H_0^1)} \leqslant C,$$
$$\left\| u_\delta' \right\|_{L^2(0,T;\, H_0^1)} + \left\| \left| u_\delta' \right|^{\frac{\varrho}{2}} u_\delta' \right\|_{L^2(0,T;\, H_0^1)} \leqslant C.$$

Démonstration. — Soit $\delta > 0$. On construit une nouvelle suite de fonctions "régulières" approchant u_δ par la méthode de Galerkin. On considère l'espace $V = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ la base spéciale de V constituée des vecteurs propres de l'opérateur $-\Delta$ $(-\Delta v_n = \pi_n v_n,\ n \in \mathbb{N}^*,\ \pi_n \in \mathbb{R})$ et pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $V_m = [\{v_n\}_{n=1}^{n=m}]$. On introduit le problème approché

$$P_m \left\{ \begin{array}{l} \textit{trouver}\ \ u_m \in\ V_m\ \ \textit{telle que}:\ \forall p = 1, ..., m, \\ (\varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\left[k_\delta(u_m) u_m'\right], v_p) + \vartheta_\varepsilon a(u_m, v_p) + (h(u_m', u_m), v_p) = (f, v_p), \\ u_m(x,0) = \varphi_m(x), \quad u_m'(x,0) = \psi_m(x), \end{array} \right. \tag{2.16}$$

où on a choisi $\varphi_m = \sum\limits_{p=1}^{p=m} \alpha_p v_p$ et $\psi_m = \sum\limits_{p=1}^{p=m} \beta_p v_p$ telles que $\varphi_m \to u_0$ dans V et $\psi_m \to u_1$ dans $H_0^1(\Omega)$.

Il est établi dans [5] et [8] que, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, le problème P_m admet une solution unique u_m dans $C^3([0,T]\,;\, V)$ et que, de plus, une suite extraite de $(u_m)_m$, notée encore $(u_m)_m$, vérifie les propriétés de convergence faible suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_m \rightharpoonup u_\delta \quad \text{dans} \quad L^\infty(0,T;\, H_0^1(\Omega)) \ \ \textit{faible}*, \\ u_m' \rightharpoonup u_\delta' \quad \text{dans} \quad L^\infty(0,T;\, H_0^1(\Omega)) \ \ \textit{faible}*, \\ u_m'' \rightharpoonup u_\delta'' \quad \text{dans} \quad L^2(Q) \ \ \textit{faible}, \\ \Delta u_m \rightharpoonup \Delta u_\delta \quad \text{dans} \quad L^\infty(0,T;\, L^2(\Omega)) \ \ \textit{faible}*. \end{array} \right. \tag{2.17}$$

En outre, le procédé utilisé pour établir les estimations i), ii) et iii) du lemme 2.2, permet de prouver qu'il existe $C > 0$ indépendant de δ, ε et m tel que

$$\forall \varepsilon \in \left]0, \varepsilon_1\right[, \ \|u'_m\|_{L^\infty(0,T;\, L^{\rho+2})} \leqslant C \ , \ \sqrt{\varepsilon}\,\|u''_m\|_{L^2(Q)} \leqslant C. \tag{2.18}$$

On établit d'abord les estimations du lemme 2.3 sur les solutions u_m, puis par passage à la limite en m on en déduira celles sur u_δ.

On considère la décomposition de u_m dans V_m, $u_m = \sum\limits_{p=1}^{p=m} g_{p,m}(t) v_p$. On multiplie l'équation (2.16) par $\pi_p g'_{p,m}(t)$, $p = 1, \ldots, m$, puis on ajoute les m égalités obtenues. On obtient:

$$-\varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial t}\left[k_\delta(u_m)u'_m\right], \Delta u'_m\right) + \vartheta_\varepsilon(\Delta u_m, \Delta u'_m)$$
$$-(h_1(u'_m) + h_2(u_m) + h_3(u'_m, u_m), \Delta u'_m) = -(f, \Delta u'_m).$$

On intègre cette dernière égalité de 0 à $t \in \left]0, T\right[$. Il vient après deux intégrations par parties, utilisation de la formule de Green et multiplication par 2:

$$\vartheta_\varepsilon \|\Delta u_m(t)\|^2_{L^2} + \beta \left\|\frac{\partial u_m(t)}{\partial x}\right\|^2_{L^2} + 2\alpha \int_0^t \int_\Omega \left(\frac{\partial u'_m}{\partial x}\right)^2 dx d\tau \tag{2.19}$$

$$+2\gamma(\rho+1) \int_0^t \int_\Omega |u'_m|^\rho \left(\frac{\partial u'_m}{\partial x}\right)^2 dx d\tau + 2c \int_0^t \int_\Omega |u_m|^\omega \left(\frac{\partial u'_m}{\partial x}\right)^2 dx d\tau$$

$$= 2\int_0^t \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial u'_m}{\partial x} dx d\tau - 2\lambda(\mu+1) \int_0^t \int_\Omega |u_m|^\mu \frac{\partial u_m}{\partial x} \frac{\partial u'_m}{\partial x} dx d\tau + \beta \left\|\frac{\partial \varphi_m}{\partial x}\right\|^2_{L^2}$$

$$+\vartheta_\varepsilon \|\Delta \varphi_m\|^2_{L^2} - 2c\omega \int_0^t \int_\Omega |u_m|^{\omega-1} sg(u_m) u'_m \frac{\partial u_m}{\partial x} \frac{\partial u'_m}{\partial x} dx d\tau$$

$$-2\varepsilon \int_0^t \int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left[k_\delta(u_m)u'_m\right]\right) \frac{\partial u'_m}{\partial x} dx d\tau.$$

On s'intéresse à l'étude des termes du second membre de l'égalité (2.19).

On convient de noter C toute constante positive indépendante de m, ε et δ.

A l'aide des inégalités de Cauchy-Schwarz et Young, on obtient

$$\left| 2\int_0^t \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial u'_m}{\partial x} dxd\tau \right| \leqslant \frac{\alpha}{6}\int_0^t \int_\Omega \left(\frac{\partial u'_m}{\partial x}\right)^2 dxd\tau + \frac{6}{\alpha}\int_0^t \int_\Omega \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 dxd\tau. \quad (2.20)$$

D'après l'hypothèse H_2, $2\mu \leqslant \omega$. L'inégalité de Hölder-Young appliquée au produit $\left[|u_m|^\mu \left(\frac{\partial u'_m}{\partial x}\right)^{\frac{2\mu}{\omega}}\right] \left[\left|\frac{\partial u'_m}{\partial x}\right|^{\frac{\omega-2\mu}{\omega}}\right] \left|\frac{\partial u_m}{\partial x}\right|$ avec le triplet $(\frac{\omega}{\mu}, \frac{2\omega}{\omega-2\mu}, 2)$ donne

$$\left| -2\lambda(\mu+1)\int_0^t \int_\Omega |u_m|^\mu \frac{\partial u_m}{\partial x}\frac{\partial u'_m}{\partial x} dxd\tau \right| \quad (2.21)$$

$$\leqslant c\int_0^t \int_\Omega |u_m|^\omega \left(\frac{\partial u'_m}{\partial x}\right)^2 dxd\tau + \frac{\alpha}{6}\int_0^t \int_\Omega \left(\frac{\partial u'_m}{\partial x}\right)^2 dxd\tau + C\int_0^t \int_\Omega \left(\frac{\partial u_m}{\partial x}\right)^2 dxd\tau.$$

Comme $\omega > 1$ et d'après l'hypothèse H_2, $2\rho - 2\omega - \rho\omega \geqslant 0$, à l'aide de l'inégalité de Hölder-Young relative à $(\frac{\omega}{\omega-1}, \rho, \frac{2\rho\omega}{2\rho-2\omega-\rho\omega}, 2)$ appliquée au produit

$$\left[|u_m|^{\omega-1} \left(\frac{\partial u'_m}{\partial x}\right)^{\frac{2(\omega-1)}{\omega}}\right] \left[|u'_m| \left(\frac{\partial u'_m}{\partial x}\right)^{\frac{2}{\rho}}\right] \left[\left|\frac{\partial u'_m}{\partial x}\right|^{\frac{2\rho-2\omega-\rho\omega}{\rho\omega}}\right] \left|\frac{\partial u_m}{\partial x}\right|$$

on obtient:

$$\left| -2c\omega\int_0^t \int_\Omega |u_m|^{\omega-1} sg(u_m)u'_m \frac{\partial u_m}{\partial x}\frac{\partial u'_m}{\partial x} dxd\tau \right| \leqslant C\int_0^t \int_\Omega \left(\frac{\partial u_m}{\partial x}\right)^2 dxd\tau$$

$$+c\int_0^t \int_\Omega |u_m|^\omega \left(\frac{\partial u'_m}{\partial x}\right)^2 dxd\tau + \frac{\gamma(\rho+1)}{2}\int_0^t \int_\Omega |u'_m|^\rho \left(\frac{\partial u'_m}{\partial x}\right)^2 dxd\tau$$

$$+\frac{\alpha}{6}\int_0^t \int_\Omega \left(\frac{\partial u'_m}{\partial x}\right)^2 dxd\tau. \quad (2.22)$$

Enfin, on considère la transformation

$$2\varepsilon\int_0^t\int_\Omega \tfrac{\partial}{\partial t}\left(\tfrac{\partial}{\partial x}\left[k_\delta(u_m)u'_m\right]\right)\frac{\partial u'_m}{\partial x}dxd\tau=\varepsilon\int_0^t\int_\Omega k_\delta(u_m)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u'_m}{\partial x}\right)^2dxd\tau$$

$$+2T_1+4T_2+2T_3 \qquad (2.23)$$

où on a posé

$$T_1=\varepsilon\int_0^t\int_\Omega k''_\delta(u_m)u'^2_m\frac{\partial u_m}{\partial x}\frac{\partial u'_m}{\partial x}dxd\tau, T_2=\varepsilon\int_0^t\int_\Omega k'_\delta(u_m)u'_m\left(\frac{\partial u'_m}{\partial x}\right)^2dxd\tau,$$

$$T_3=\varepsilon\int_0^t\int_\Omega k'_\delta(u_m)u''_m\frac{\partial u_m}{\partial x}\frac{\partial u'_m}{\partial x}dxd\tau$$

et on utilise l'inégalité

$$\varepsilon\int_0^t\int_\Omega k_\delta(u_m)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u'_m}{\partial x}\right)^2dxd\tau\geqslant-\varepsilon\int_\Omega k_\delta(\varphi_m)\left(\frac{\partial\psi_m}{\partial x}\right)^2dx-T_2.$$

On déduit alors de (2.19), en utilisant les relations (2.20) à (2.23) et les propriétés de la suite (φ_m) que

$$\vartheta_\varepsilon\left\|\Delta u_m(t)\right\|^2_{L^2}+\beta\left\|\frac{\partial u_m(t)}{\partial x}\right\|^2_{L^2}+\frac{3\gamma(\rho+1)}{2}\int_0^t\int_\Omega|u'_m|^\rho\left(\frac{\partial u'_m}{\partial x}\right)^2dxd\tau$$

$$+\frac{3\alpha}{2}\int_0^t\int_\Omega\left(\frac{\partial u'_m}{\partial x}\right)^2dxd\tau\leqslant C+C\int_0^t\left\|\frac{\partial u_m}{\partial x}\right\|^2_{L^2}d\tau-2T_1-3T_2-2T_3. \qquad (2.24)$$

Il résulte de la définition de T_1, la majoration

$$|2T_1|\leqslant C\sqrt{\varepsilon}\int_0^t\left\|\sqrt{\varepsilon}\frac{\partial u_m}{\partial x}\right\|_{L^\infty}\left\|u'_m\right\|^2_{L^4}\left\|\frac{\partial u'_m}{\partial x}\right\|_{L^2}d\tau.$$

Or $H^1(\Omega)\hookrightarrow L^\infty(\Omega)$, $u_m\in C([0,T]\,;H^1_0(\Omega)\cap H^2(\Omega))$ et d'après (2.18) u'_m est uniformément borné dans $L^\infty(0,T;\,L^4(\Omega))$, d'où, comme $\varepsilon<1$,

$$|2T_1|\leqslant\frac{\alpha}{6}\int_0^t\left\|\frac{\partial u'_m}{\partial x}\right\|^2_{L^2}d\tau+C\int_0^t\left\|\sqrt{\varepsilon}\Delta u_m\right\|^2_{L^2}d\tau. \qquad (2.25)$$

Il résulte de la définition de T_2, la majoration

$$|3T_2| \leqslant C\varepsilon \int_0^t \int_\Omega \left| u'_m \left(\frac{\partial u'_m}{\partial x}\right)^{\frac{2}{\rho}} \right| \left|\frac{\partial u'_m}{\partial x}\right|^{\frac{2(\rho-1)}{\rho}} dxd\tau$$

et à l'aide de l'inégalité de Hölder-Young relative à $(\rho, \frac{\rho}{\rho-1})$ on obtient

$$|3T_2| \leqslant C\varepsilon \left(\int_0^t \int_\Omega |u'_m|^\rho \left(\frac{\partial u'_m}{\partial x}\right)^2 dxd\tau + \int_0^t \int_\Omega \left(\frac{\partial u'_m}{\partial x}\right)^2 dxd\tau \right).$$

On pose selon que $\vartheta_\varepsilon = \varepsilon$ ou $\vartheta_\varepsilon = \vartheta$,

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{C} \min \left(\frac{\gamma(\rho+1)}{2}, \frac{\alpha}{6} \right) \text{ ou } \varepsilon_2 = \min \left(\frac{1}{C} \min \left(\frac{\gamma(\rho+1)}{2}, \frac{\alpha}{6} \right), \vartheta \right) \quad (2.26)$$

C étant la constante figurant dans l'inégalité précédente.

Pour $\varepsilon < \varepsilon_2$, il vient

$$|3T_2| \leqslant \frac{\gamma(\rho+1)}{2} \int_0^t \int_\Omega |u'_m|^\rho \left(\frac{\partial u'_m}{\partial x}\right)^2 dxd\tau + \frac{\alpha}{6} \int_0^t \int_\Omega \left(\frac{\partial u'_m}{\partial x}\right)^2 dxd\tau. \quad (2.27)$$

La définition de T_3 et la propriété $u_m \in C([0,T]\,;\, H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$ entraînent grâce à l'inclusion $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$:

$$|2T_3| \leqslant C \int_0^t \left\|\sqrt{\varepsilon}\Delta u_m\right\|_{L^2} \left\|\sqrt{\varepsilon} u''_m\right\|_{L^2} \left\|\frac{\partial u'_m}{\partial x}\right\|_{L^2} d\tau$$

$$\leqslant C \int_0^t \left\|\sqrt{\varepsilon} u''_m\right\|_{L^2}^2 \left\|\sqrt{\varepsilon}\Delta u_m\right\|_{L^2}^2 d\tau + \frac{\alpha}{6} \int_0^t \int_\Omega \left(\frac{\partial u'_m}{\partial x}\right)^2 dxd\tau. \quad (2.28)$$

Enfin, comme β peut être nul, on utilise la relation

$$\int_0^t \left\|\frac{\partial u_m}{\partial x}\right\|_{L^2}^2 d\tau \leqslant C + t^2 \int_0^t \int_\Omega \left(\frac{\partial u'_m}{\partial x}\right)^2 dxd\tau. \quad (2.29)$$

On déduit alors de (2.24) grâce aux relations (2.25) à (2.29)

$$\vartheta_\varepsilon \left\|\Delta u_m(t)\right\|_{L^2}^2 + \beta \left\|\frac{\partial u_m(t)}{\partial x}\right\|_{L^2}^2 + \alpha \int_0^t \int_\Omega \left(\frac{\partial u'_m}{\partial x}\right)^2 dxd\tau$$

$$+\gamma(\rho+1)\int_0^t\int_\Omega |u'_m|^\rho \left(\frac{\partial u'_m}{\partial x}\right)^2 dxd\tau \leqslant C + Ct^2\int_0^t\int_\Omega \left(\frac{\partial u'_m}{\partial x}\right)^2 dxd\tau$$

$$+C\int_0^t \left(1+\|\sqrt{\varepsilon}u''_m\|^2_{L^2}\right)\left\|\sqrt{\vartheta_\varepsilon}\Delta u_m\right\|^2_{L^2} d\tau.$$

Soit $t_o = \sqrt{\alpha/(2C)}$. Il résulte alors de l'estimation (2.18) et du lemme de Gronwall que

$$\sqrt{\vartheta_\varepsilon}\,\|\Delta u_m\|_{L^\infty(0,t_o;\,L^2)} + \|u_m\|_{L^\infty(0,t_o;\,H_0^1)} \leqslant C,$$

$$\|u'_m\|_{L^2(0,t_o;\,H_0^1)} + + \left\||u'_m|^{\frac{\varrho}{2}}\, u'_m\right\|_{L^2(0,t_o;\,H_0^1)} \leqslant C.$$

En répétant la démonstration précédente sur les intervalles $[pt_o, (p+1)\,t_o]$, $p \in \mathbb{N}^*$, on étend les estimations obtenues ci-dessus à l'intervalle $[0,T]$, puis par passage à la limite inférieure sur m, il vient grâce aux propriétés de convergence (2.17) et aux résultats classiques de compacité (cf. § 2.1.2) l'estimation

$$\sqrt{\vartheta_\varepsilon}\,\|\Delta u_\delta\|_{L^\infty(0,T;\,L^2)} + \|u_\delta\|_{L^\infty(0,T;\,H_0^1)} \leqslant C,$$

$$\|u'_\delta\|_{L^2(0,T;\,H_0^1)} + \left\||u'_\delta|^{\frac{\varrho}{2}}\, u'_\delta\right\|_{L^2(0,T;\,H_0^1)} \leqslant C.$$

Ceci achève la preuve du lemme 2.3. $\square$

2.1.2 *Passage à la limite en δ*

Convergence faible. — On déduit des estimations a priori i) et i$_\varepsilon$) du lemme 2.2 que, pour tout $\varepsilon \in \,]0,\varepsilon_1[$, il existe une suite extraite de $(u_\delta)_{\delta>0}$ notée encore $(u_\delta)_{\delta>0}$ et une fonction u_ε telles que:

$$\begin{cases} u_\delta \rightharpoonup u_\varepsilon & dans \quad L^\infty(0,T;\, H_0^1(\Omega)) \ \ faible*, \\ u'_\delta \rightharpoonup u'_\varepsilon & dans \quad L^\infty(0,T;\, H_0^1(\Omega)) \ \ faible*, \\ u''_\delta \rightharpoonup u''_\varepsilon & dans \quad L^2(Q) \ \ faible. \end{cases} \tag{2.30}$$

Condition initiale satisfaite par u_ε. — Pour tout espace de Hilbert X, l'espace $\{v; v \in L^2(0,T;\, X),\ \ v' \in L^2(0,T;\, X)\}$ muni de la norme du graphe est inclus dans l'espace $C([0,T]\,;\, X)$ et l'application injection est continue. Il découle ainsi de (2.30) que:

$$\begin{cases} \forall t \in [0,T]\,,\ u_\delta(t) \rightharpoonup u_\varepsilon(t) \quad dans\ H_0^1(\Omega)\ faible, \\ \forall t \in [0,T]\,,\ u'_\delta(t) \rightharpoonup u'_\varepsilon(t) \quad dans\ L^2(\Omega)\ faible, \end{cases}$$

d'où les égalités:

$$\text{p.p. } x \in \Omega,\ u_\varepsilon(x,0) = u_0(x) \quad \text{et} \quad u'_\varepsilon(x,0) = u_1(x).$$

Convergence forte. — L'injection de $\{v; v \in L^2(0,T;\, H_0^1(\Omega)),\ v' \in L^2(Q)\}$ doté de la norme du graphe dans $L^2(0,T; C(\overline{\Omega}))$ est compacte (cf. J.L. Lions [9], chap.1, § 5). On déduit donc des résultats (2.30) les propriétés de convergence forte:

$$\begin{cases} u_\delta \to u_\varepsilon \quad \text{dans} \quad L^2(0,T;\, C(\overline{\Omega})), \\ u'_\delta \to u'_\varepsilon \quad \text{dans} \quad L^2(0,T;\, C(\overline{\Omega})). \end{cases} \tag{2.31}$$

En observant que les fonctions k, k', h_1 h_2 et h_3 sont de classe C^1 donc lipschitziennes sur tout borné de $\mathbb{R}$ d'une part et en extrayant d'autre part une nouvelle sous suite notée encore $(u_\delta)_\delta$, en utilisant la continuité des fonctions k, k', h_1 h_2 et h_3 et le théorème de convergence dominée de Lebesgue, il vient: pour tout $q \in [1,\infty[$,

$$\begin{cases} u_\delta \to u_\varepsilon\ ,\ h_2(u_\delta) \to h_2(u_\varepsilon) \quad \text{dans } L^2(0,T;\, C(\overline{\Omega})) \text{ et dans } L^q(Q), \\ u'_\delta \to u'_\varepsilon\ ,\ h_1(u'_\delta) \to h_1(u'_\varepsilon) \quad \text{dans } L^2(0,T;\, C(\overline{\Omega})) \text{ et dans } L^q(Q), \\ h_3(u'_\delta, u_\delta) \to h_3(u'_\varepsilon, u_\varepsilon) \quad \text{dans } L^2(0,T;\, C(\overline{\Omega})) \text{ et dans } L^q(Q), \\ k_\delta(u_\delta) \to k(u_\varepsilon) \quad \text{dans } L^2(0,T;\, C(\overline{\Omega})) \text{ et dans } L^q(Q), \\ k'_\delta(u_\delta) \to k'(u_\varepsilon) \quad \text{dans } L^2(0,T;\, C(\overline{\Omega})) \text{ et dans } L^q(Q). \end{cases} \tag{2.32}$$

De plus, il résulte de l'égalité $\dfrac{\partial}{\partial t}\,[k_\delta(u_\delta)u'_\delta] = k_\delta(u_\delta)u''_\delta + k'_\delta(u_\delta)u'^2_\delta$ et des estimations i) et i$_\varepsilon$) du lemme 2.2 que $\dfrac{\partial}{\partial t}\,[k_\delta(u_\delta)u'_\delta]$ est bornée dans $L^\infty(0,T;\, L^2(\Omega))$ indépendamment de $\delta \in\ ]0,1[$. En outre, la propriété (2.32) et la relation $\langle \dfrac{\partial}{\partial t}\,[k_\delta(u_\delta)u'_\delta]\,, \varphi\rangle = -\langle k_\delta(u_\delta)u'_\delta, \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}\rangle$, vérifiée pour tout $\varphi \in D(Q)$, entraînent la convergence de $\dfrac{\partial}{\partial t}\,[k_\delta(u_\delta)u'_\delta]$ dans $D'(Q)$ vers $\dfrac{\partial}{\partial t}\,[k(u_\varepsilon)u'_\varepsilon]$ et par conséquent:

$$\frac{\partial}{\partial t}\,[k_\delta(u_\delta)u'_\delta] \rightharpoonup \frac{\partial}{\partial t}\,[k(u_\varepsilon)u'_\varepsilon] \text{ dans } L^\infty(0,T; L^2(\Omega)) \text{ faible}*. \tag{2.33}$$

A l'aide des propriétés (2.30) et (2.33), on peut passer à la limite en δ dans l'équation (2.1) du problème $P_{\varepsilon,\delta}$. On déduit alors que u_ε est une solution de P_ε. De plus, l'équation (1) entraîne grâce à la régularité sur u_ε, k et f, la propriété: $u_\varepsilon \in L^\infty(0,T;\, H^2(\Omega))$. Enfin, il résulte de (2.30), (2.32) et de l'estimation i_ε) du lemme 2.2 que $\sqrt{k(u_\varepsilon)}u''_\varepsilon \in L^\infty(0,T;\ L^2(\Omega))$ et

$$\sqrt{k(u_\delta)}u''_\delta \rightharpoonup \sqrt{k(u_\varepsilon)}u''_\varepsilon \text{ dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \text{ faible}*. \tag{2.34}$$

Nous venons de montrer que u_ε est une solution du problème P_ε vérifiant (2.0).

2.2. Unicité de la solution du problème P_ε

Soient u_ε et w_ε deux solutions du problème P_ε vérifiant (2.0) . On choisit $v = w'_\varepsilon - u'_\varepsilon$ (resp. $v = u'_\varepsilon - w'_\varepsilon$) dans l'égalité (1) satisfaite par u_ε (resp. w_ε). On ajoute les deux égalités obtenues. On pose $s_\varepsilon = u_\varepsilon - w_\varepsilon$. Il vient:

$$\varepsilon(\frac{\partial}{\partial t}[k(u_\varepsilon)u'_\varepsilon] - \frac{\partial}{\partial t}[k(w_\varepsilon)w'_\varepsilon],\ s'_\varepsilon) + \vartheta_\varepsilon(\frac{\partial s_\varepsilon}{\partial x}, \frac{\partial s'_\varepsilon}{\partial x}) + (h_1(u'_\varepsilon) - h_1(w'_\varepsilon),\ s'_\varepsilon)$$
$$+(h_2(u_\varepsilon) - h_2(w_\varepsilon),\ s'_\varepsilon) + (h_3(u'_\varepsilon, u_\varepsilon) - h_3(w'_\varepsilon, w_\varepsilon),\ s'_\varepsilon) = 0.$$

On intègre cette égalité de 0 à t. On obtient après une transformation du premier terme, deux intégrations par parties par rapport à t et grâce à la monotonie de l'application $x \longrightarrow |x|^\rho x$:

$$\varepsilon \int_\Omega k(u_\varepsilon)s'^2_\varepsilon dx + \vartheta_\varepsilon \left\| \frac{\partial s_\varepsilon}{\partial x} \right\|^2_{L^2} + 2\alpha \int_0^t \|s'_\varepsilon\|^2_{L^2} d\tau + \beta \|s_\varepsilon\|^2_{L^2} \tag{2.35}$$
$$+2c \int_0^t (|u_\varepsilon|^\omega s'_\varepsilon, s'_\varepsilon)d\tau \leqslant -2c \int_0^t ((|u_\varepsilon|^\omega - |w_\varepsilon|^\omega)\, w'_\varepsilon, s'_\varepsilon)d\tau$$
$$-2\lambda \int_0^t (|u_\varepsilon|^\mu u_\varepsilon - |w_\varepsilon|^\mu w_\varepsilon, s'_\varepsilon)d\tau + \varepsilon \int_0^t \int_\Omega k'(u_\varepsilon)u'_\varepsilon s'^2_\varepsilon dx d\tau$$
$$-2\varepsilon \int_0^t ([k(u_\varepsilon) - k(w_\varepsilon)]\, w''_\varepsilon, s'_\varepsilon)d\tau - 2\varepsilon \int_0^t (k'(u_\varepsilon)u'^2_\varepsilon - k'(w_\varepsilon)w'^2_\varepsilon, s'_\varepsilon)d\tau.$$

Dans toute la preuve, on convient de noter C toute constante positive. On observe que $k'(u_\varepsilon)u'^2_\varepsilon - k'(w_\varepsilon)w'^2_\varepsilon = k'(u_\varepsilon)\left(u'^2_\varepsilon - w'^2_\varepsilon\right) + (k'(u_\varepsilon) - k'(w_\varepsilon))\, w'^2_\varepsilon$. Par ailleurs, l'inclusion algébrique et topologique $H^1_0(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$ entraîne que u_ε et u'_ε (resp. w_ε et w'_ε) sont dans $L^\infty(Q)$. Il résulte alors du théorème de la valeur moyenne les inégalités:

$$\left||u_\varepsilon|^\mu u_\varepsilon - |w_\varepsilon|^\mu w_\varepsilon\right| \leqslant C\,|s_\varepsilon| \ \ ; \ \ \left||u_\varepsilon|^\omega - |w_\varepsilon|^\omega\right| \leqslant C\,|s_\varepsilon| \text{ (car } \omega > 1) \ ;$$
$$|k(u_\varepsilon) - k(w_\varepsilon)| \leqslant C\,|s_\varepsilon| \ \ ; \ \ |k'(u_\varepsilon) - k'(w_\varepsilon)| \leqslant C\,|s_\varepsilon|\,;$$
$$\left|k'(u_\varepsilon)u_\varepsilon'^2 - k'(w_\varepsilon)w_\varepsilon'^2\right| \leqslant C\,|k'(u_\varepsilon)s_\varepsilon'| + C\,|s_\varepsilon|\,.$$

Par conséquent:

$$\left|-2c\int_0^t ((|u_\varepsilon|^\omega - |w_\varepsilon|^\omega)\,w_\varepsilon', s_\varepsilon')d\tau - 2\lambda\int_0^t (|u_\varepsilon|^\mu\,u_\varepsilon - |w_\varepsilon|^\mu\,w_\varepsilon, s_\varepsilon')d\tau\right| \tag{2.36}$$
$$+\left|\varepsilon\int_0^t\int_\Omega k'(u_\varepsilon)u_\varepsilon' s_\varepsilon'^2 dx d\tau - 2\varepsilon\int_0^t (k'(u_\varepsilon)u_\varepsilon'^2 - k'(w_\varepsilon)w_\varepsilon'^2, s_\varepsilon')d\tau\right|$$
$$\leqslant C\varepsilon\int_0^t\int_\Omega |k'(u_\varepsilon)|\,s_\varepsilon'^2 dx d\tau + \frac{\alpha}{4}\int_0^t \|s_\varepsilon'\|_{L^2}^2\,d\tau + C\int_0^t \|s_\varepsilon\|_{L^2}^2\,d\tau$$

et

$$\left|-2\varepsilon\int_0^t ([k(u_\varepsilon) - k(w_\varepsilon)]\,w_\varepsilon'', s_\varepsilon')d\tau\right| \tag{2.37}$$
$$\leqslant C\int_0^t \left\|\frac{\partial s_\varepsilon}{\partial x}\right\|_{L^2}^2 \|w_\varepsilon''\|_{L^2}^2\,d\tau + \frac{\alpha}{4}\int_0^t \|s_\varepsilon'\|_{L^2}^2\,d\tau.$$

Comme $k'(u_\varepsilon)$ est borné sur Q, on déduit de (2.35), (2.36) et (2.37), l'inégalité

$$\varepsilon\int_\Omega k(u_\varepsilon)s_\varepsilon'^2 dx + \vartheta_\varepsilon \left\|\frac{\partial s_\varepsilon}{\partial x}\right\|_{L^2}^2 + \frac{3\alpha}{2}\int_0^t \|s_\varepsilon'\|_{L^2}^2\,d\tau + \beta\,\|s_\varepsilon\|_{L^2}^2 \tag{2.38}$$
$$\leqslant C\varepsilon\int_0^t \|s_\varepsilon'\|_{L^2}^2\,d\tau + C\int_0^t \|s_\varepsilon\|_{L^2}^2\,d\tau + C\int_0^t \left\|\frac{\partial s_\varepsilon}{\partial x}\right\|_{L^2}^2 \|w_\varepsilon''\|_{L^2}^2\,d\tau.$$

Comme $\displaystyle\int_0^t \|s_\varepsilon\|_{L^2}^2\,d\tau \leqslant t^2\int_0^t \|s_\varepsilon'\|_{L^2}^2\,d\tau$, on introduit $T_o = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{C}}$ et on pose $\varepsilon_3 = \dfrac{\alpha}{4C}$ où C est la constante positive figurant dans l'inégalité (2.38). Alors, pour tout $\varepsilon < \varepsilon_3$ et pour tout $t \leqslant T_o$, il résulte de (2.38) grâce à la propriété $w_\varepsilon'' \in L^2(Q)$ et au lemme de Gronwall que $s_\varepsilon = u_\varepsilon - w_\varepsilon = 0$ sur $\Omega \times]0, T_o[$. Il vient ensuite par récurrence que $u_\varepsilon - w_\varepsilon = 0$ sur Q. On peut donc énoncer le théorème 2.1 où $\varepsilon_0 = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ ε_1 ayant été déterminé au lemme 2.2 en (2.10) et ε_2 étant défini au lemme 2.3 par (2.26). $\square$

3. Comportement de la solution u_ε quand $\varepsilon \to 0_+$

On suppose dans ce paragraphe que les conditions H, H_1, H_ℓ ou H_b sont satisfaites et que de plus, lorsque $\vartheta_\varepsilon = \varepsilon$, les hypothèses H_b et H_2 sont vérifiées.

3.1. Premiers résultats de convergence

On déduit des lemmes 2.2 et 2.3 et des propriétés (2.30), (2.32) et (2.34) les estimations a priori suivantes sur u_ε :

COROLLAIRE 3.1.— *Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout ε dans $]0, \varepsilon_0[$,*

$$
\begin{aligned}
&i)\ \|u_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;\,H_0^1)} + \|u_\varepsilon'\|_{L^2(0,T;\,H_0^1)} + \|u_\varepsilon'\|_{L^\infty(0,T;\,L^{\rho+2})} \leqslant C,\\
&ii)\ \varepsilon \left\| \sqrt{k(u_\varepsilon)}\, u_\varepsilon'' \right\|_{L^\infty(0,T;\,L^2)} + \sqrt{\varepsilon}\sqrt{\vartheta_\varepsilon}\, \|u_\varepsilon'\|_{L^\infty(0,T;\,H_0^1)}\\
&\qquad\qquad + \sqrt{\varepsilon}\, \|u_\varepsilon''\|_{L^2(Q)} + \sqrt{\varepsilon} \left\| |u_\varepsilon'|^{\frac{\rho}{2}}\, u_\varepsilon'' \right\|_{L^2(Q)} \leqslant C,\\
&iii)\ \sqrt{\varepsilon} \left\| \sqrt{t\, k(u_\varepsilon)}\, u_\varepsilon'' \right\|_{L^\infty(0,T;\,L^2)} + \sqrt{\vartheta_\varepsilon}\, \left\| \sqrt{t}\, u_\varepsilon' \right\|_{L^\infty(0,T;H_0^1)}\\
&\qquad\qquad + \left\| \sqrt{t}\, u_\varepsilon'' \right\|_{L^2(Q)} + \left\| \sqrt{t}\, |u_\varepsilon'|^{\frac{\rho}{2}}\, u_\varepsilon'' \right\|_{L^2(Q)} \leqslant C.
\end{aligned}
$$

De plus, sous les conditions H_b et H_2,

$$
iv)\ \sqrt{\vartheta_\varepsilon}\, \|\Delta u_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;\,L^2)} + \left\| |u_\varepsilon'|^{\frac{\rho}{2}}\, u_\varepsilon' \right\|_{L^2(0,T;\,H_0^1)} \leqslant C.
$$

En outre, il résulte de l'égalité: $\varepsilon \dfrac{\partial}{\partial t}\, [k(u_\varepsilon) u_\varepsilon'] = \varepsilon\, k(u_\varepsilon) u_\varepsilon'' + \varepsilon\, k'(u_\varepsilon) u_\varepsilon'^2$ et des estimations i) et ii) du corollaire 3.1, l'estimation:

$$
\left\| \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\, [k(u_\varepsilon) u_\varepsilon'] \right\|_{L^2(Q)} \leqslant C\sqrt{\varepsilon},\ C > 0 \text{ indépendante de } \varepsilon \in]0, \varepsilon_1[\,. \tag{3.1}
$$

Grâce au corollaire 3.1, on peut extraire une suite de $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ notée encore $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ et définir une fonction u telles que:

$$
\left\{
\begin{array}{l}
u_\varepsilon \rightharpoonup u \quad \textit{dans} \quad L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))\ \textit{faible}{*},\\
u_\varepsilon' \rightharpoonup u' \ \textit{dans}\, L^2(0,T;H_0^1(\Omega))\ \textit{faible et}\, L^\infty(0,T;L^{\rho+2}(\Omega))\ \textit{faible}{*},\\
t\, u_\varepsilon'' \rightharpoonup t\, u'' \quad \textit{dans} \quad L^2(Q)\ \textit{faible},
\end{array}
\right. \tag{3.2}
$$

avec de plus si $\vartheta_\varepsilon = \vartheta$,

$$tu'_\varepsilon \rightharpoonup tu' \ dans \ L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \ \ faible * . \tag{3.3}$$

Les propriétés de convergence faible (3.2) et (3.3) entraînent, grâce aux résultats de compacité classiques et au théorème de convergence dominée de Lebesgue, qu'une nouvelle suite extraite encore notée $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ vérifie les propriétés de convergence forte suivantes, $q \in [1,\infty[$,

si $\vartheta_\varepsilon = \vartheta$:

$$\left\{\begin{array}{l} u_\varepsilon \to u \ \ dans \ \ L^2(0,T;\, C(\overline{\Omega})) \ et \ dans \ L^q(Q), \\ h_2(u_\varepsilon) \to h_2(u) \ \ dans \ \ L^2(0,T;\, C(\overline{\Omega})) \ et \ dans \ L^q(Q), \\ tu'_\varepsilon \to tu' \ \ dans \ \ L^2(0,T;\, C(\overline{\Omega})) \ et \ dans \ L^q(Q), \\ t^{\rho+1}h_1(u'_\varepsilon) \to t^{\rho+1}h_1(u') \ \ dans \ \ L^q(Q), \\ th_3(u'_\varepsilon, u_\varepsilon) \to th_3(u',u) \ \ dans \ \ L^q(Q), \end{array}\right. \tag{3.4}$$

et si $\vartheta_\varepsilon = \varepsilon$, puisque les conditions H_b et H_2 sont supposées vraies, en utilisant les estimations sur $|u'_\varepsilon|^{\frac{\rho}{2}}\, u'_\varepsilon$ données par le corollaire 3.1 iii) et iv) :

$$\left\{\begin{array}{l} u_\varepsilon \to u,\, h_2(u_\varepsilon) \to h_2(u) \ \ dans \ \ L^2(0,T;C(\overline{\Omega})) \ \ et \ dans \ L^q(Q), \\ tu'_\varepsilon \to tu' \ dans \ L^2(0,T;C(\overline{\Omega})),\, th_1(u'_\varepsilon) \to th_1(u') \ dans \ L^{\frac{\rho+2}{\rho}}(Q), \\ th_3(u'_\varepsilon, u_\varepsilon) \to th_3(u',u) \ \ dans \ \ L^2(Q), \\ t\,|u'_\varepsilon|^{\frac{\rho}{2}}\, u'_\varepsilon \to t\,|u'|^{\frac{\rho}{2}}\, u' \ \ dans \ \ L^2(0,T;\, C(\overline{\Omega})). \end{array}\right. \tag{3.5}$$

Les résultats (3.1), (3.2), (3.4) ou (3.5) permettent de faire tendre ε vers 0_+ dans l'égalité (1) et la propriété (3.2) entraîne pour, tout $t \in [0,T]$, la convergence dans $L^2(\Omega)$ faible de $u_\varepsilon\,(t)$ vers $u\,(t)$.
Si $\vartheta_\varepsilon = \vartheta > 0$, la limite u est une solution du problème P_ϑ défini par:

$$P_\vartheta \left\{\begin{array}{l} u \in L^\infty(0,T;\, H_0^1(\Omega)),\, u' \in L^2(0,T;\, H_0^1(\Omega)), \\ \forall v \in H_0^1(\Omega), \text{ p.p. } t \in]0,T[\,, \\ \vartheta(\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial x}) + (h_1(u') + h_2(u) + h_3(u',u), v) = (f,v), \\ u(x,0) = u_0(x), \text{ p.p. } x \in \Omega, \end{array}\right. \tag{3.6}$$

et si $\vartheta_\varepsilon = \varepsilon$, la fonction limite u est une solution du problème P_0 défini par:

$$P_0 \left\{\begin{array}{l} u \in L^\infty(0,T;\, H_0^1(\Omega)),\, u' \in L^2(0,T;\, H_0^1(\Omega)), \\ \forall v \in H_0^1(\Omega), \text{ p.p. } t \in]0,T[\,, \\ (h_1(u') + h_2(u) + h_3(u',u), v) = (f,v), \\ u(x,0) = u_0(x), \text{ p.p. } x \in \Omega. \end{array}\right. \tag{3.7}$$

Il reste à montrer que le problème P_ϑ (resp. P_0) admet une solution unique.

3.2. Unicité de la solution du problème P_ϑ, $\vartheta \geqslant 0$

LEMME 3.2. — *Quand $\vartheta > 0$ (resp. $\vartheta = 0$ et $\beta \neq 0$) le problème P_ϑ admet une et une seule solution.*

Démonstration. — Soient u et w deux solutions du problème P_ϑ, $\vartheta \geqslant 0$. On pose $s = u - w$ et on choisit $v = u' - w'$ dans les égalités (3.6) (resp. (3.7)) vérifiées par u et w lorsque $\vartheta > 0$ (resp. $\vartheta = 0$). On obtient:

$$\vartheta \left\| \frac{\partial s(t)}{\partial x} \right\|_{L^2}^2 + 2\alpha \int_0^t \|s'(\tau)\|_{L^2}^2 \, d\tau + \beta \|s(t)\|_{L^2}^2$$

$$\leqslant -2\lambda \int_0^t (|u|^\mu u - |w|^\mu w, s') d\tau - 2c \int_0^t ((|u|^\omega - |w|^\omega) w', s') d\tau.$$

On utilise comme au § 2.2 le théorème de la valeur moyenne, l'inclusion algébrique et topologique $H_0^1(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$ et l'inégalité de Young. Il vient:

$$\vartheta \left\| \frac{\partial s(t)}{\partial x} \right\|_{L^2}^2 + \alpha \int_0^t \|s'(\tau)\|_{L^2}^2 \, d\tau + \beta \|s(t)\|_{L^2}^2$$

$$\leqslant C \int_0^t \|s(\tau)\|_{L^2}^2 \, d\tau + Cc \int_0^t \|w'(\tau)\|_{H_0^1}^2 \|s(\tau)\|_{L^2}^2 \, d\tau.$$

Puisque ou bien $\vartheta > 0$ ou bien $\beta > 0$, le lemme de Gronwall permet de conclure que $s = 0$ sur Q. En conséquence $u = w$.

3.3. Propriétés de convergence et estimations de $u_\varepsilon - u$

Nous pouvons maintenant énoncer à partir des propriétés (3.2), (3.3), (3.4), (3.5) et du lemme 3.2 le

THÉORÈME 3.3. — *La suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ des solutions des problèmes $(P_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge, quand $\varepsilon \to 0_+$, dans $L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega))$ faible* vers la solution u du problème noté P_ϑ si $\vartheta_\varepsilon = \vartheta > 0$ et P_0 si $\vartheta_\varepsilon = \varepsilon$.*

$(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge vers u dans $L^2(0,T; C(\overline{\Omega}))$ et dans $L^q(Q)$ pour tout q dans $[1, \infty[$.

$(u'_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge vers u' dans $L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$ faible et $L^\infty(0,T; L^{\rho+2}(\Omega))$ faible et $(tu''_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge vers tu'' dans $L^2(Q)$ faible.*

$(tu'_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge vers tu' dans $L^2(0,T;C(\overline{\Omega}))$ et de plus,si $\vartheta_\varepsilon = \vartheta$, dans $L^q(Q)$ pour tout $q \in [1,\infty[$.

PROPRIÉTÉ 3.4.— *La solution u du problème P_ϑ, $\vartheta \geqslant 0$ vérifie*

$$\sqrt{t}u'' \in L^2(Q).$$

Démonstration.— Pour chaque $\tau \in]0,T[$, on note par Q_τ le pavé ouvert $\Omega \times]\tau,T[$. Il résulte du corollaire 3.1 que $\left\|\sqrt{t}\,u''_\varepsilon\right\|_{L^2(Q_\tau)} \leqslant C$, où C est évidemment indépendante de τ. On déduit alors de (3.2) que $(u''_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge faiblement dans $L^2(Q_\tau)$ vers u'' et par conséquent u'' satisfait l'inégalité $\left\|\sqrt{t}\,u''\right\|_{L^2(Q_\tau)} \leqslant C$. Il en résulte que $\sqrt{t}\,u'' \in L^2(Q)$.

On pose $p = \rho + 2$.

THÉORÈME 3.5.— *Si $\vartheta_\varepsilon = \vartheta$ est indépendant de ε,*

(i) $\|u_\varepsilon - u\|_{L^\infty(0,T;\,H_0^1)} + \|u'_\varepsilon - u'\|_{L^2(Q)} \leqslant C\sqrt{\varepsilon}$, *(ii)* $\|u'_\varepsilon - u'\|_{L^p(Q)} \leqslant C\varepsilon^{\frac{1}{p}}$,
(iii) $\|\Delta(u_\varepsilon - u)\|_{L^{p'}(Q)} \leqslant C\varepsilon^{\frac{1}{p}}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$,
(iv) $\left\|t^{\frac{p}{8}}(u'_\varepsilon - u')\right\|_{L^2(0,T;\,H_0^1)} \leqslant C\varepsilon^{\frac{1}{2p}}$, *(v)* $\left\|t^{\frac{1}{4}}(u'_\varepsilon - u')\right\|_{L^\infty(0,T;\,L^p)} \leqslant C\varepsilon^{\frac{1}{p^2}}$
où $C > 0$ est une constante indépendante de $\varepsilon \in]0,\varepsilon_0[$.

Si $\vartheta_\varepsilon = \varepsilon$,
(vi) $\|u_\varepsilon - u\|_{L^\infty(0,T;\,L^2)} \leqslant C\sqrt{\varepsilon}$, *(vii)* $\|u'_\varepsilon - u'\|_{L^p(Q)} \leqslant C\varepsilon^{\frac{1}{p}}$
où $C > 0$ est une constante indépendante de $\varepsilon \in]0,\varepsilon_0[$.

Démonstration.

(i) et (ii)- On considère les équations (1) et (3.6) dans lesquelles on choisit respectivement $v = u'_\varepsilon - u'$. Par soustraction de ces deux égalités, en posant $w_\varepsilon = u_\varepsilon - u$, on obtient:

$$\vartheta\Big(\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x}, \frac{\partial w'_\varepsilon}{\partial x}\Big) + (h_1(u'_\varepsilon) - h_1(u'), w'_\varepsilon) + \beta(w_\varepsilon, w'_\varepsilon) + c(|u_\varepsilon|^\omega\, w'_\varepsilon, w'_\varepsilon) \tag{3.8}$$
$$= -\varepsilon\Big(\frac{\partial}{\partial t}\left[k(u_\varepsilon)u'_\varepsilon\right], w'_\varepsilon\Big) - \lambda(|u_\varepsilon|^\mu\, u_\varepsilon - |u|^\mu\, u, w'_\varepsilon) - c((|u_\varepsilon|^\omega - |u|^\omega)u', w'_\varepsilon).$$

On intègre (3.8) de 0 à t. On majore le second membre à l'aide de l'estimation (3.1), la majoration uniforme de u_ε dans $L^\infty(Q)$, le théorème de la valeur moyenne, la propriété u' appartient à $L^2(0,T;\,H_0^1(\Omega))$ et enfin l'inégalité de Young. Au premier membre, on utilise la minoration suivante (cf. J.L. Lions [10]):

$$(|u'_\varepsilon|^\rho\, u'_\varepsilon - |u'|^\rho\, u')w'_\varepsilon \geqslant \sigma\, |w'_\varepsilon|^p\,,\ \sigma > 0, \text{ p.p. } (x,t) \in Q. \tag{3.9}$$

Il vient,

$$\frac{\vartheta}{2}\left\|\frac{\partial w_\varepsilon(t)}{\partial x}\right\|_{L^2}^2+\sigma\gamma\int_0^t\|w'_\varepsilon\|_{L^p}^p\,d\tau+\alpha\int_0^t\|w'_\varepsilon\|_{L^2}\,d\tau+\frac{\beta}{2}\|w_\varepsilon(t)\|_{L^2}^2$$
$$\leqslant C\varepsilon+C\int_0^t\left[1+\|u'\|_{H_0^1}^2\right]\|w_\varepsilon\|_{L^2}^2\,d\tau+\frac{\alpha}{2}\int_0^t\|w'_\varepsilon\|_{L^2}^2\,d\tau.$$

Les estimations i) et ii) du théorème 3.5 proviennent alors du lemme de Gronwall.

(iii) On déduit des équations (1) et (3.6) que:

$$\vartheta\,\Delta(u_\varepsilon-u)=\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left[k(u_\varepsilon)u'_\varepsilon\right]+h_1(u'_\varepsilon)-h_1(u')+h_2(u_\varepsilon)-h_2(u)\qquad(3.10)$$
$$+h_3(u'_\varepsilon,u_\varepsilon)-h_3(u',u).$$

Il suffit alors d'estimer la norme dans $L^{p'}(Q)$ de chacun des termes du second membre de (3.10). On utilise d'abord l'estimation (3.1).

Puis, on observe que

$$\left\||u'_\varepsilon|^\rho\,u'_\varepsilon-|u'|^\rho\,u'\right\|_{L^{p'}(Q)}\leqslant C\,\|u'_\varepsilon-u'\|_{L^p(Q)}\,.\qquad(3.11)$$

En effet (3.11) résulte de la relation:

$$\left||u'_\varepsilon|^\rho\,u'_\varepsilon-|u'|^\rho\,u'\right|\leqslant(\rho{+}1)\left(|u'_\varepsilon|^\rho+|u'|^\rho\right)|u'_\varepsilon-u'|\ \text{p.p.}\ (x,t)\in Q,\qquad(3.12)$$

de l'inégalité de Hölder avec $q=\frac{p}{p'}$ et de l'estimation i) du corollaire 3.1.

On conclut ensuite à l'aide du théorème de la valeur moyenne, des estimations i) et ii) du théorème 3.5 et de l'estimation i) du corollaire 3.1.

(iv) et (v): On utilise une méthode de quotient différentiel. On considère un réel θ, $0<\theta<T$, l'équation (1) satisfaite par u_ε aux instants τ et $\tau+\theta$ avec $\tau\in\,]0,T-\theta[$ où l'on a choisi la fonction-test $v=\dfrac{\tau^{\frac{p}{4}}(u'_\varepsilon(\tau)-u'(\tau))}{\theta}$. On soustrait les deux égalités obtenues. Il vient en utilisant la notation w_θ introduite dans la preuve du lemme 2.2, p.p. $\tau\in\,]0,T-\theta[$,

$$\tau^{\frac{p}{4}}\varepsilon\Big(\Big(\frac{\partial}{\partial t}\left[k(u_\varepsilon)u'_\varepsilon\right]\Big)_\theta,\,u'_\varepsilon-u'\Big)+\tau^{\frac{p}{4}}\vartheta a(u_{\varepsilon,\theta},\,u'_\varepsilon-u')+\tau^{\frac{p}{4}}((h_1(u'_\varepsilon))_\theta,\,u'_\varepsilon-u')$$
$$+\tau^{\frac{p}{4}}((h_2(u_\varepsilon)+h_3(u'_\varepsilon,u_\varepsilon))_\theta,u'_\varepsilon-u')=\tau^{\frac{p}{4}}(f_\theta,\,u'_\varepsilon-u').$$

On procède de manière analogue avec l'équation (3.6). Il vient:

$$\tau^{\frac{p}{4}}\vartheta a(u_\theta, u'_\varepsilon - u') + \tau^{\frac{p}{4}}((h_1(u') + h_2(u) + h_3(u',u))_\theta, u'_\varepsilon - u') = \tau^{\frac{p}{4}}(f_\theta, u'_\varepsilon - u'), \quad \text{p.p. } \tau \in \,]0, T-\theta[\,.$$

Maintenant, on soustrait ces deux dernières égalités, puis on intègre de 0 à $t \in \,]0, T-\theta[$. Comme $p \geqslant 4$, il vient:

$$\vartheta \int_0^t \tau^{\frac{p}{4}}\Big(\frac{\partial(u_{\varepsilon,\theta} - u_\theta)}{\partial x}, \frac{\partial(u'_\varepsilon - u')}{\partial x}\Big)d\tau + \int_0^t \tau^{\frac{p}{4}}((h_1(u'_\varepsilon))_\theta - (h_1(u'))_\theta, u'_\varepsilon - u')d\tau$$

$$= -\varepsilon t^{\frac{p}{4}}(k(u_\varepsilon)u'_{\varepsilon,\theta}, u'_\varepsilon - u') + \varepsilon\frac{p}{4}\int_0^t \tau^{\frac{p}{4}-1}(k(u_\varepsilon)u'_{\varepsilon,\theta}, u'_\varepsilon - u')d\tau$$

$$+\varepsilon\int_0^t \tau^{\frac{p}{4}}(k(u_\varepsilon)u'_{\varepsilon,\theta}, u''_\varepsilon - u'')d\tau - \varepsilon\int_0^t \tau^{\frac{p}{4}}((k'(u_\varepsilon)u'_\varepsilon)_\theta\, u'_\varepsilon(\tau+\theta), u'_\varepsilon - u')d\tau$$

$$-\varepsilon\int_0^t \tau^{\frac{p}{4}}((k(u_\varepsilon))_\theta u''_\varepsilon(\tau+\theta), u'_\varepsilon - u')d\tau - \int_0^t \tau^{\frac{p}{4}}((h_2(u_\varepsilon))_\theta - (h_2(u))_\theta, u'_\varepsilon - u')d\tau$$

$$-\int_0^t \tau^{\frac{p}{4}}((h_3(u'_\varepsilon, u_\varepsilon))_\theta - (h_3(u',u))_\theta, u'_\varepsilon - u')d\tau.$$

On fait tendre θ vers 0_+. Dans l'équation limite obtenue on fait deux intégrations par parties par rapport à t puis on pose $w_\varepsilon = u_\varepsilon - u$. Il vient:

$$\vartheta\int_0^t \tau^{\frac{p}{4}}\left\|\frac{\partial w'_\varepsilon}{\partial x}\right\|^2_{L^2} d\tau + \gamma t^{\frac{p}{4}}(|u'_\varepsilon|^\rho u'_\varepsilon - |u'|^\rho u', w'_\varepsilon) + \frac{\alpha}{2}t^{\frac{p}{4}}\|w'_\varepsilon\|^2_{L^2} \tag{3.13}$$

$$= -\varepsilon t^{\frac{p}{4}}(k(u_\varepsilon)u''_\varepsilon, w'_\varepsilon) - 2\varepsilon\int_0^t \tau^{\frac{p}{4}}(k'(u_\varepsilon)u'_\varepsilon u''_\varepsilon, w'_\varepsilon)d\tau + \frac{\alpha}{2}\frac{p}{4}\int_0^t \tau^{\frac{p}{4}-1}\|w'_\varepsilon\|^2_{L^2}d\tau$$

$$+\int_0^t \Big[\varepsilon\frac{p}{4}\tau^{\frac{p}{4}-1}(k(u_\varepsilon)u''_\varepsilon, w'_\varepsilon) + \varepsilon\tau^{\frac{p}{4}}(k(u_\varepsilon)u''_\varepsilon, w''_\varepsilon) - \varepsilon\tau^{\frac{p}{4}}(k''(u_\varepsilon)u'^3_\varepsilon, w'_\varepsilon)\Big]d\tau$$

$$-\int_0^t \tau^{\frac{p}{4}}(h_2'(u_\varepsilon)u_\varepsilon' - h_2'(u)u', w_\varepsilon')d\tau - \int_0^t \tau^{\frac{p}{4}}((h_3(u_\varepsilon', u_\varepsilon))' - (h_3(u', u))', w_\varepsilon')d\tau$$

$$+\gamma\frac{p}{4}\int_0^t \tau^{\frac{p}{4}-1}(|u_\varepsilon'|^\rho u_\varepsilon' - |u'|^\rho u', w_\varepsilon')d\tau + \gamma\int_0^t \tau^{\frac{p}{4}}(|u_\varepsilon'|^\rho u_\varepsilon' - |u'|^\rho u', w_\varepsilon'')d\tau.$$

Soit $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$. C désigne toute constante positive indépendante de ε. Comme $k(u_\varepsilon)$, $k'(u_\varepsilon)$, $k''(u_\varepsilon)$ et $\sqrt{t}\, u_\varepsilon'$ sont uniformément bornées dans $L^\infty(Q)$, comme $\sqrt{t}\, u''$ est élément de $L^2(Q)$ grâce à la propriété 3.4, comme $\sqrt{t}\, w_\varepsilon''$ est bornée dans $L^2(Q)$, $p \geqslant 4$, il vient à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, des estimations i), ii) et iii) du corollaire 3.1, de l'estimation (i) du théorème 3.5 sur w_ε':

$$\left|\int_0^t \left[\varepsilon\frac{p}{4}\tau^{\frac{p}{4}-1}(k(u_\varepsilon)u_\varepsilon'', w_\varepsilon') + \varepsilon\tau^{\frac{p}{4}}(k(u_\varepsilon)u_\varepsilon'', w_\varepsilon'') - \varepsilon\tau^{\frac{p}{4}}(k''(u_\varepsilon)u_\varepsilon'^3, w_\varepsilon')\right] d\tau\right|$$

$$+\left|-2\varepsilon\int_0^t \tau^{\frac{p}{4}}(k'(u_\varepsilon)u_\varepsilon' u_\varepsilon'', w_\varepsilon')d\tau + \frac{\alpha}{2}\frac{p}{4}\int_0^t \tau^{\frac{p}{4}-1}\left\|w_\varepsilon'\right\|_{L^2}^2 d\tau\right| \leqslant C\varepsilon$$

et

$$\left|\varepsilon t^{\frac{p}{4}}(k(u_\varepsilon)u_\varepsilon'', w_\varepsilon')\right| \leqslant C\varepsilon + \frac{\alpha}{2}t^{\frac{p}{4}}\left\|w_\varepsilon'\right\|_{L^2}^2 .$$

En outre, on utilise l'inégalité de Hölder avec p et p' et la propriété (3.11) puis la propriété (3.12), $\sqrt{t}\, u_\varepsilon'$ est bornée dans $L^\infty(Q)$ indépendamment de ε, $\sqrt{t}u' \in L^\infty(Q)$, $\sqrt{t}w_\varepsilon''$ est bornée dans $L^2(Q)$ indépendamment de ε, l'inégalité de Hölder-Young relative au triplet $(\frac{2(\rho+2)}{\rho}, \rho+2, 2)$, l'estimation i) du corollaire 3.1, l'estimation (ii) du théorème 3.5. On obtient:

$$\left|\gamma\frac{p}{4}\int_0^t \tau^{\frac{p}{4}-1}(|u_\varepsilon'|^\rho u_\varepsilon' - |u'|^\rho u', w_\varepsilon')d\tau + \gamma\int_0^t \tau^{\frac{p}{4}}(|u_\varepsilon'|^\rho u_\varepsilon' - |u'|^\rho u', w_\varepsilon'')d\tau\right|$$

$$\leqslant C\varepsilon^{\frac{1}{p}}.$$

Enfin, grâce à l'estimation (i) du théorème 3.5, comme $\sqrt{t}u_\varepsilon''$ est bornée dans $L^2(Q)$ et $\sqrt{t}u''$ est élément de $L^2(Q)$, il vient:

$$\left|\int_0^t \left[\tau^{\frac{p}{4}}(h_2'(u_\varepsilon)u_\varepsilon' - h_2'(u)u', w_\varepsilon') + \tau^{\frac{p}{4}}((h_3(u_\varepsilon', u_\varepsilon))' - (h_3(u', u))', w_\varepsilon')\right] d\tau\right|$$

$$\leqslant C\sqrt{\varepsilon}.$$

On déduit de (3.13) grâce aux quatre dernières inégalités, la propriété:

$$\vartheta \int_0^t \tau^{\frac{p}{4}} \left\| \frac{\partial (w'_\varepsilon)}{\partial x} \right\|_{L^2}^2 d\tau + \gamma t^{\frac{p}{4}} (|u'_\varepsilon|^\rho u'_\varepsilon - |u'|^\rho u', w'_\varepsilon) \leqslant C(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon} + \varepsilon^{\frac{1}{p}}).$$

Pour obtenir les estimations (iv) et (v), on utilise la minoration (3.9) et l'inégalité de Poincaré.

(vi) et (vii) – On considère les équations (1) et (3.7) puis on reprend le procédé utilisé pour établir les estimations (i) et (ii) de ce théorème; on obtient alors l'analogue de (3.8):

$$(h_1(u'_\varepsilon) - h_1(u'), w'_\varepsilon) + \beta(w_\varepsilon, w'_\varepsilon) + c(|u_\varepsilon|^\omega w'_\varepsilon, w'_\varepsilon) = \varepsilon(\Delta u_\varepsilon, w'_\varepsilon) \tag{3.14}$$

$$-\varepsilon(\frac{\partial}{\partial t}\left[k(u_\varepsilon)u'_\varepsilon\right], w'_\varepsilon) - \lambda(|u_\varepsilon|^\mu u_\varepsilon - |u|^\mu u, w'_\varepsilon) - c((|u_\varepsilon|^\omega - |u|^\omega)u', w'_\varepsilon).$$

On intègre (3.14) de 0 à t. On utilise l'estimation (3.1), l'estimation iv) du corollaire 3.1, l'inégalité de Young, les propriétés u_ε est bornée dans $L^\infty(Q)$, u' appartient à $L^2(0,T;\, H_0^1(\Omega))$, le théorème de la valeur moyenne et la minoration (3.9). On obtient, comme $\beta \neq 0$, les estimations (vi) et (vii). □

4. Quelques remarques

REMARQUE 4.1. — Tous les résultats donnés dans cet article restent valables lorsque la fonction k dépend du triplet (x,t,u) si on ajoute dans l'hypothèse H_ℓ (resp. H_b) les conditions suivantes sur les dérivées k'_t , k'_x de k, par rapport à t et à x:

Si k vérifie H_ℓ on ajoute $|k'_t(x,t,v)| \leqslant C_1 |v|^\ell$.
Si k vérifie H_b on ajoute $k'_t(x,t,v)$, $k'_x(x,t,v)$ sont bornées sur $Q \times \mathbb{R}$.

REMARQUE 4.2. — On donne ici des exemples de choix des données u_0, u_1, f de sorte que l'hypothèse $H_1(3)$ soit satisfaite dans les deux cas selon que k vérifie l'hypothèse H_ℓ ou H_b.

Pour tout réel x, on désigne par $E(x)$ la partie entière de x.

Si k vérifie l'hypothèse H_ℓ et si $\vartheta_\varepsilon = \vartheta$, on va établir que la condition H_3

$$\begin{cases} u_0 \text{ s'annule en un nombre fini de points } c_i \ (a = c_1 < \ldots < c_p = b) \\ \text{d'ordre de multiplicité } m_i, \\ \text{au voisinage de chaque } c_i,\ \Phi_\varepsilon \text{ est de classe } C^{\ell_i+1} \text{ où } \ell_i = E\left(\frac{m_i \ell}{2}\right), \\ \Phi_\varepsilon^{(\ell_i+1)} \text{ est bornée indépendamment de } \varepsilon \in]0,1[, \\ \Phi_\varepsilon(c_i) = \ldots = \Phi_\varepsilon^{(\ell_i)}(c_i) = 0,\ i = 1, \ldots, p, \end{cases}$$

est suffisante pour que H_1 (3) soit vérifiée.

Soit $\eta > 0$ tel que $\eta < \min\{\frac{c_{i+1}-c_i}{2};\ i = 1, \ldots, p-1\}$. On pose

$$I_\eta = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant p-1}]c_i + \eta, c_{i+1} - \eta[\tag{4.1}$$

et on note par Φ la fonction appartenant à $L^2(Q)$ définie par:

$$\Phi = |k'(u_0)|\, u_1^2 + \max(1, \vartheta)\, |\Delta u_0| + |f(x,0) - h(u_1, u_0)|\,. \tag{4.2}$$

On va montrer que la fonction $\Psi = \dfrac{\Phi_\varepsilon^2}{k(u_0)}$ est bornée par une fonction appartenant à $L^1(\Omega)$, indépendamment de ε.

D'abord, on remarque grâce à la minoration $C_0\, |v|^\ell \leqslant k(v)$ donnée par l'hypothèse H_ℓ que Ψ est bornée sur I_η par la fonction

$$x \longrightarrow (\sup_{x \in I_\eta} \frac{1}{C_0\, |u_0(x)|^\ell})(\Phi(x))^2.$$

De plus, au voisinage de chaque point c_i, on considère la relation:

$$\frac{(\Phi_\varepsilon(x))^2}{k(u_0)} \leqslant \frac{1}{C_0} \left(\frac{|x - c_i|^{m_i}}{|u_0(x)|} \right)^\ell \left[\frac{\Phi_\varepsilon(x)}{(x - c_i)^{(m_i \ell)\backslash 2}} \right]^2. \tag{4.3}$$

Le second membre de (4.3) admet une limite quand $x \longrightarrow c_i$ et ceci grâce à la condition H_3 et à la formule de Taylor-Lagrange qui permet d'écrire:

$$\Phi_\varepsilon(x) = \frac{(x - c_i)^{\ell_i+1}}{(\ell_i + 1)\,!}\, \Phi_\varepsilon^{(\ell_i+1)}(\theta x + (1-\theta) c_i),\ 0 < \theta < 1.$$

La fonction Ψ est bornée au voisinage de chaque point c_i indépendamment de ε.

On va maintenant donner des choix de fonctions u_0, u_1 et f vérifiant l'hypothèse H_3. Lorsque, par exemple, u_0 s'annule uniquement aux extrémités a et b avec $m_1 = m_2 = 1$, on peut choisir $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ tel que $\mathrm{Supp}(u_1) \subset I_\eta$ puis f tel que $f(x,0) = 0$ aux voisinages de a et b. Alors dans ce cas Φ_ε est réduit aux voisinages de a et b à $\Phi_\varepsilon = \vartheta\Delta u_0 - h_2(u_0)$. Les deux équations différentielles:

$$(E_a)\begin{cases} y:[a,a+\eta]\to\mathbb{R}, \\ \vartheta y'' - h_2(y) = 0, \\ y(a)=0;\ y'(a)=y_1;\ y_1\neq 0, \end{cases} \qquad (E_b)\begin{cases} z:[b-\eta,b]\to\mathbb{R}, \\ \vartheta z'' - h_2(z) = 0, \\ z(b)=0;\ z'(b)=z_1;\ z_1\neq 0, \end{cases}$$

admettent des solutions qui ne s'annulent pas en dehors de a ou b et sont de signe strictement positif (resp. négatif) si $y_1 > 0$ et $z_1 < 0$ (resp. si $y_1 < 0$ et $z_1 > 0$).

On pourra donc choisir u_0 solution de (E_a) sur $[a,\, a+\eta]$, de (E_b) sur $[b-\eta,\, b]$ et u_0 continue sur $[a+\eta,\, b-\eta]$ de sorte que $u_0 \in H^2(\Omega)$ et $u_0(x) > 0$ sur $]a,b[$. De même, on pourra alors choisir u_0 solution de (E_a) sur $[a,\, a+\eta]$, solution de (E_b) sur $[b-\eta,\, b]$ et u_0 continue sur $[a+\eta,\, b-\eta]$ de sorte que $u_0 \in H^2(\Omega)$ et $u_0(x) < 0$ sur $]a,b[$. L'hypothèse H_3 est alors vérifiée.

Si k vérifie l'hypothèse H_b et si $\vartheta_\varepsilon = \varepsilon$, on pose $I = \{x\in\mathbb{R};\ k(x)=0\}$, $I^+ = I\cap\mathbb{R}_+^*$ et $I^- = I\cap\mathbb{R}_-^*$.
Si $0\notin Adh(I^+)$, il existe alors, $r>0$, telle que $]0,r]\cap I^+ = \emptyset$. Dans ce cas, on peut choisir u_0 telle que $u_0(\overline{\Omega})\subset[0,r]$, qui entraîne en particulier que $k(u_0(x))\neq 0$ si $u_0(x)\neq 0$.

On suppose alors qu'il existe $\ell \geqslant 1$ tel que $L = \varliminf_{x\to 0}(\dfrac{k(x)}{x^\ell}) \neq 0$ et tel que l'hypothèse H_3 soit vérifiée.

La fonction $\Psi = \dfrac{\Phi_\varepsilon^2}{k(u_0)}$ est bornée sur I_η par la fonction

$$x \to (\sup_{x\in I_\eta}\frac{1}{k(u_0)})(\Phi(x))^2$$

où I_η et Φ sont définis par (4.1) et (4.2). Par ailleurs, au voisinage de chaque point c_i,

$$\frac{(\Phi_\varepsilon(x))^2}{k(u_0)} = \frac{(u_0(x))^\ell}{k(u_0)}\left[\frac{(x-c_i)^{m_i}}{u_0(x)}\right]^\ell \left[\frac{\Phi_\varepsilon(x)}{(x-c_i)^{(m_i\ell)\backslash 2}}\right]^2. \tag{4.4}$$

Le second membre de (4.4) admet une limite supérieure finie quand $x\to c_i$, grâce à la formule de Taylor-Lagrange, à l'hypothèse H_3 et au fait que $L\neq 0$. On conclut alors que Φ_ε est bornée au voisinage de chaque point c_i indépendamment de ε.

On prouve un résultat analogue si $0 \notin Adh(I^-)$. Si $0 \in Adh(I^+) \cap Adh(I^-)$, on choisit $u_0 = u_1 = f(x,0) = 0$.

Bibliographie

[1] BENAOUDA (A.) et MADAUNE-TORT (M.). — Singular perturbations for non linear hyperbolic-parabolic problems. SIAM J. on Math. Analysis, 18(1), 1987.

[2] DUVAUT (G.) et LIONS (J.L.). — Les inéquations en mécanique et en physique. Dunod, Paris, 1972.

[3] FEIREISL (E.). — Global Attractors for Semilinear Damped Wave Equations with Supercritical Exponent. Jnal of Diff. Eq. 116, 1995, 431-447.

[4] GEORGIEV (V.) and TODOROVA (G.). — Existence of a solution of the Wave Equation with Nonlinear Damping and Source Terms. Jnal of Diff. Eq. 109, 1994, 295-308.

[5] HAJOUJ (B.). — Perturbations singulières d'équations hyperboliques du second ordre non linéaires, Ann. Math. Blaise Pascal, Vol 7, No. 1, 2000, 1-22.

[6] HAJOUJ (B.). — On an Elasto-Plasticity Problem with Small Parameters. Advances in Mathematical Sciences and Applications., Vol 9, No. 1, 1999, 209-227.

[7] HSIAO (G.C.) et WEINACHT (R.J.). — Singular Perturbations for a Semilinear Hyperbolic Equation. Siam J. Math. Anal., 14, (6), 1983, 1168-1179.

[8] LAR'KIN (N.A.). — On a class of Quasi-Linear Hyperbolic Equations Having Global Solutions. Soviet Math. Dokl., Vol. 20, No. 1, 1979.

[9] LIONS (J.L.). — Quelques méthodes de résolution de problèmes aux limites non linéaires. Dunod, Paris, 1969.

[10] LIONS (J.L.). — Perturbations singulières dans les problèmes aux limites et en contrôle optimal. Lecture Notes in Mathematics, no 393, Springer-Verlag, Berlin New York, 1968.

[11] LIONS (J.L.) et MAGENES (E.). — Problèmes aux limites non homogènes et applications, Vol. 1, Dunod, Paris 1986.

[12] LIONS (J.L.) et STRAUSS (W.A.). — Some Non-Linear Evolutions Equations. Bull. Soc. Math. France, 93, 1965, 43-96.

[13] MILANI (A.). — Long Time Existence and Singular Perturbation Results for Quasilinear Hyperbolic Equations with Small Parameter and Dissipation Term-III. Nonlinear Analysis. Theory, Methods & Applications, Vol. 16, No. 1, 1991, 1-11.