ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

MOHAMED HOUSSEM TLILI

Représentations $*$ des groupes de Lie compacts semi simples

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 9, nº 3 (2000), p. 551-564

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_2000_6_9_3_551_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse

Vol. IX, n° 3, 2000
pp. 551–564

Représentations $*$ des groupes de Lie compacts semi simples (*)

MOHAMED HOUSSEM TLILI (1)

RÉSUMÉ. — On construit par le produit de Moyal covariant sur $M(E, \mathbb{C})$, une représentation du groupe unitaire $U(E)$ sur $L^2(M(E, \mathbb{C}))$; puis on réalise une représentation pour un groupe de Lie compact semi simple G, en utilisant le produit de Moyal défini sur le complexifié de l'algèbre de Lie de G.

ABSTRACT. — We construct by the covariant Moyal product on $M(E, \mathbb{C})$, a representation of the unitary group $U(E)$ on $L^2(M(E, \mathbb{C}))$. We realise a representation for a compact semi simple Lie group G, by using the Moyal product defined on the complexification of the Lie algebra of G.

0. Introduction

La théorie des produits $*$ introduite dans [3] trouve une de ses principales applications dans la détermination des représentations irréductibles des groupes de Lie par la quantification de leurs orbites coadjointes. Les approches utilisées pour la réalisation de ce programme sont étroitement liées à la nature géométrique des orbites de chaque groupe et du bon choix du produit $*$ utilisé.

Dans le cas des groupes de Lie compacts, D. Arnal, S. Gutt et M. Cahen réalisent les représentations irréductibles au moyen du produit $*$ de Berezin [1]. Dans le même cadre, H. Zahir utilise le produit $*$ de S. Gutt [5] sur le fibré cotangent d'un groupe Lie compact pour décrire la représentation

(*) Reçu le 8 juin 1999, accepté le 23 juin 2000

(1) Faculté des Sciences de Monastir, Département de Mathématiques, avenue de l'environnement, 5000 Monastir, Tunisie.

régulière à gauche[10]. Nous avons décrit dans [4] un produit $*$ de Moyal covariant sur $TU(n)$ identifié à un ouvert du complexifié $M(n,\mathbb{C})$ de $\mathfrak{u}(n)$.

Dans le présent article, nous généralisons cette construction au cas d'un groupe de Lie compact semi simple G. Plus précisément, on réalise le groupe adjoint $Ad(G)$ de G comme un sous groupe de $U(dimG)$ et la construction de [4] donne un produit $*$ de Moyal G covariant sur le complexifié $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G. Ce produit permet de réaliser des représentations unitaires irréductibles de G comme des sous-représentations de la représentation $*$ sur $L^2(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$. Pour obtenir par une méthode semblable toutes les représentations unitaires irréductibles de G, on agrandit l'espace de la représentation $*$ de la manière suivante : on identifie d'abord G à un sous groupe de $SU(V)$, où V est un espace hermitien, puis on plonge V dans l'algèbre extérieure $E = \wedge V$. En appliquant la construction de [4] au groupe $U(E)$ on obtient alors un produit $*$ de Moyal G covariant sur le complexifié de l'algèbre de Lie $\mathfrak{u}(E)$ du groupe $U(E)$. La représentation $*$ associée contient toutes les représentations unitaires irréductibles de G.

1. Produit $*$ de Moyal sur un espace vectoriel complexe

On rappelle que sur une variété symplectique (M,ω) le crochet de Poisson est défini par:

$$\{u,v\} = -\omega(X_u, X_v), \qquad u,v \in C^\infty(M),$$

où X_u est le champ de vecteurs vérifiant $du = i(X_u)\omega$.

DÉFINITION 1.— *Un produit $*$ sur une variété symplectique (M,ω) est une application bilinéaire :*

$$\begin{array}{ccll} N\times N & \longrightarrow & N[[\nu]] & \\ (u,v) & \longmapsto & u*v & = \sum_{r\geqslant 0} \nu^r C_r(u,v), \end{array}$$

où $N = C^\infty(M)$, $N[[\nu]]$ est l'espace des séries formelles en ν à coefficients dans N et les C_r sont des opérateurs bidifférentiels vérifiant pour tout (u,v,w) de N^3

i) $C_r(u,v) = (-1)^r C_r(v,u)$.

ii) $C_0(u,v) = u.v$ *et* $C_1(u,v) = \{u,v\}$.

iii) $C_r(1,u) = 0$ *pour* $r > 0$.

iv) $\sum_{r+s=t} C_r(u, C_s(v,w)) = \sum_{r+s=t} C_r(C_s(u,v),w)$.

Remarquons que $N[[\nu]]$ est une algèbre de Lie pour :

$$[u,v]_* = \frac{1}{2\nu}(u*v - v*u) = \{u,v\} + \sum_{k=1}^{\infty} \nu^{2k} C_{2k+1}(u,v).$$

L'exemple fondamental de produit * est celui de Moyal sur $\mathbb{R}^{2k}$, muni de la forme bilinéaire ω définie par :

$$\omega(\xi,\eta) = \sum_{j=1}^{k} x_j y_{k+j} - x_{k+j} y_j, \quad (\xi = (x_1, ..., x_{2k}), \eta = (y_1, ..., y_{2k})).$$

Si on note $\Lambda = (\Lambda^{ij})$ la matrice de ω dans la base canonique de $\mathbb{R}^{2k}$, le crochet de Poisson associé à ω est alors:

$$\{u,v\} = \sum_{i,j=1}^{2k} \Lambda^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} = \sum_{i,j=1}^{2k} \Lambda^{ij} \partial_i u \partial_j v.$$

Le produit de Moyal sur $\mathbb{R}^{2k}$ est le produit * défini par

$$u * v = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\nu^n}{n!} P^n(u,v), \tag{1}$$

où l'opérateur bidifférentiel P^n est par définition :

$$P^0(u,v) = u.v, \;\; P^n(u,v) = \sum_{i_1,\ldots i_n, j_1,\ldots j_n} \Lambda^{i_1 j_1} .. \Lambda^{i_n j_n} \partial_{i_1 \ldots i_n} u \partial_{j_1 \ldots j_n} v. \tag{2}$$

Maintenant on suppose qu'un groupe de Lie G agit sur la variété symplectique (M,ω) par symplectomorphismes.

DÉFINITION 2. — *S'il existe une application $\mathcal{X} : \mathfrak{g} \longrightarrow C^\infty(M)$, $X \longmapsto \mathcal{X}_X$ vérifiant:*

$$i(X^-)\omega = d\mathcal{X}_X, \quad X \in \mathfrak{g},$$

X^- étant le champ de vecteurs défini par :

$$X^- u(\xi) = \frac{d}{dt}|_{t=0} u(exp(-tX).\xi),$$

on dit que l'action de G est hamiltonienne. De plus

1) *L'action du groupe G est dite <u>fortement hamiltonienne</u> si $\mathcal{X}$ est un homomorphisme de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ dans l'algèbre de Lie $(C^\infty(M), \{,\})$:*

$$\mathcal{X}_{[X,Y]} = \{\mathcal{X}_X, \mathcal{X}_Y\}, \qquad X, Y \in \mathfrak{g}.$$

2) *Si M est munie d'un produit $*$, on dit que ce produit est <u>covariant</u> si $\mathcal{X}$ est un homomorphisme de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ dans l'algèbre de Lie $(C^\infty(M)[[\nu]], [\ ,\ ]_*)$:*

$$\mathcal{X}_{[X,Y]} = [\mathcal{X}_X, \mathcal{X}_Y]_* = \frac{1}{2\nu}(\mathcal{X}_X * \mathcal{X}_Y - \mathcal{X}_Y * \mathcal{X}_X).$$

Remarque. — Un exemple fondamental est celui d'une action fortement hamiltonienne d'un groupe de Lie G sur un espace vectoriel symplectique (V, ω) telle que les fonctions hamiltoniennes $\mathcal{X}_X$ soient des polynômes homogènes de degré deux. Dans ce cas, le produit de Moyal sur V est $\mathfrak{g}$-invariant (en particulier est covariant), c'est à dire :

$$[\mathcal{X}_X, F]_* = \{\mathcal{X}_X, F\}, \quad \forall F \in C^\infty(V), \quad \forall X \in \mathfrak{g},$$

puisque par définition des P^{2k+1},

$$P^{2k+1}(\mathcal{X}_X, F) = 0, \quad \forall k \geqslant 1.$$

Dans ce cas, on peut fixer la valeur du paramètre formel ν en $\frac{1}{2i}$. L'expression de $u * v$ est alors bien définie si u et v appartiennent à l'espace $\mathcal{S}(V) \oplus S(V^*)$, somme directe de l'espace de Schwartz des fonctions C^∞ à décroissance rapide sur V et de l'espace des fonctions polynomiales sur V [10]. C'est le cas que nous avons étudié dans [4].

La covariance du produit $*$ de Moyal sur V permet de définir une représentation π (la représentation $*$) de $\mathfrak{g}$ sur l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(V)$ par :

$$\pi(X)u = i\mathcal{X}_X * u, \;\; X \in \mathfrak{g}, \;\; u \in \mathcal{S}(V). \tag{3}$$

Rappelons d'abord les résultats de [4] et complétons-les.

2. Représentation $*$ du groupe $U(E)$ sur $L^2(\mathrm{u}(E)^{\mathbb{C}})$

Soient E un espace hermitien de dimension p et $(e_1, ..., e_p)$ une base hermitienne de E. On identifie l'espace des endomorphismes sur E, $M(E, \mathbb{C})$, à $E \otimes E$ par l'isomorphisme d'espaces vectoriels $\mathcal{L}$ définie par:

$$\mathcal{L}(A) = \sum_{ij} a_{ij} e_i \otimes e_j$$

si a_{ij} sont les coefficients de l'endomorphisme A dans la base $(e_1, ..., e_p)$.

On munit $E \otimes E$ du produit hermitien $(.,.)$ défini par :

$$(\mathcal{L}(X), \mathcal{L}(Y)) = -tr(X\Theta(Y)), X, Y \in M(E, \mathbb{C}),$$

où Θ est l'involution de Cartan sur $M(E, \mathbb{C})$ laissant fixe les éléments de l'algèbre de Lie $\mathfrak{u}(E)$ du groupe unitaire $U(E)$. On considère la base orthonormale $(v_1, ..., v_{p^2})$ de $E \otimes E$ vérifiant:

$$v_{(l-1)p+s} = e_s \otimes e_l, \qquad l, s \in \{1, ...p, \}$$

et soit φ la paramétrisation de $E \otimes E$ relativement à la base $(v_1, ..., v_{p^2})$ donnée par :

$$\varphi : \sum_{l=1}^{p^2} (x_l + iy_l)v_l \longrightarrow (x_1, ..., x_{p^2}; y_1, ..., y_{p^2}).$$

Pour X dans $M(E, \mathbb{C})$, on désigne par $\mathfrak{Im}tr(X)$ la partie imaginaire de la trace de X. Le produit de Moyal sur $M(E, \mathbb{C})$ défini par la 2-forme symplectique

$$\omega(X, Y) = -\mathfrak{Im}tr(X\Theta(Y)) \quad \text{ou} \quad \omega = \sum_{j=1}^{p^2} dx_j \wedge dy_j$$

et noté $*'$ est covariant sous l'action du groupe $U(E)$, définie par le produit dans $M(E, \mathbb{C})$. On associe à un élément X de $\mathfrak{u}(E)$ la fonction polynomiale $\tilde{\mathcal{X}}_X$ définie sur $E \otimes E$, par:

$$\tilde{\mathcal{X}}_X(v) = -\sum_{l,j=1}^{p^2} a_{lj} x_l y_j - \frac{1}{2} \sum_{l,j=1}^{p^2} b_{lj}(x_l x_j + y_l y_j), \quad v = \sum_{l=1}^{p^2} (x_l + iy_l)v_l \quad (4)$$

où a_{lj} et b_{lj} sont respectivement les parties réelles et imaginaires des coefficients de la matrice de l'endomorphisme $\tilde{X} = X \otimes id_E$ dans la base $(v_1, ..., v_{p^2})$. Alors les fonctions $\tilde{\mathcal{X}}$ définissent une action fortement hamiltonienne de $U(E)$ sur $E \otimes E$. Comme on l'a indiqué plus haut, on définit la représentation $*$ ρ de $\mathfrak{u}(E)$ sur l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(E \otimes E) = \mathcal{S}(\mathfrak{u}(E)^{\mathbb{C}})$ par :

$$\rho(X)u = i\tilde{\mathcal{X}}_X *' u, \qquad u \in \mathcal{S}(E \otimes E), \; X \in \mathfrak{u}(E).$$

($*'$ est le produit de Moyal sur $E \otimes E$ défini par la 2-forme ω, avec $\nu = \frac{-i}{2}$). Soit $\tilde{R}$ la représentation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{u}(E)$ sur l'espace des polynômes $S(E \otimes E)$ réalisée par :

$$\tilde{R}_X f(z) = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(exp - t\tilde{X}.z), \;\; X \in \mathfrak{u}(E), \;\; z \in E \otimes E, \;\; f \in S(E \otimes E).$$

Proposition 1

1) *Il existe un isomorphisme U d'un sous espace $\mathcal{H}$ de $\mathcal{S}(E\otimes E)$ à valeurs dans $S(E\otimes E)$ vérifiant :*

$$U \circ \rho(X) = \tilde{R}(X) \circ U, \qquad \forall X \in \mathfrak{su}(E).$$

2) *ρ s'exponentie en une représentation du groupe $U(E)$ sur $L^2(E\otimes E) = L^2(\mathrm{u}(E)^{\mathbb{C}})$.*

Preuve

1) Pour chaque $m = (m_1, ..., m_{p^2})$ dans $\mathbb{N}^{p^2}$ on désigne par Ω_m la fonction de $\mathcal{S}(E\otimes E)$, définie dans [2] et qui s'écrit, relativement à la paramétrisation φ, par :

$$\Omega_m(x,y) = (x_1 + iy_1)^{m_1} *' ... *' (x_{p^2} + iy_{p^2})^{m_{p^2}} * \Omega,$$

avec

$$\Omega = e^{-\sum_{j=1}^{p^2} x_j{}^2 + y_j{}^2}.$$

Soient $\mathcal{H}$ le sous espace de $\mathcal{S}(E\otimes E)$, des combinaisons linéaires finies des Ω_m, et U l'isomorphisme de $\mathcal{H}$ dans $S(E\otimes E)$ défini par :

$$U(\Omega_m) = P_m = (x_1 + iy_1)^{m_1} ... (x_{p^2} + iy_{p^2})^{m_{p^2}}.$$

On vérifie par récurrence sur s que

$$(x_l - iy_l) *' (x_l + iy_l)^s = (x_l + iy_l)^s *' (x_l - iy_l) + 2s(x_l + iy_l)^{(s-1)}.$$

D'autre part on a :

$$(x_l - iy_l) *' \Omega = 0,$$

donc

$$(x_l - iy_l) *' \Omega_m = 2m_l \Omega_{m-[l]}, \tag{5}$$

avec $m - [l] = (m_1, ..., m_l - 1, ..., m_n)$.

Pour tout couple l, j d'entiers naturels différents on a :

$$x_l y_j - x_j y_l = \frac{1}{2i}((x_j + iy_j) *' (x_l - iy_l) - (x_l + iy_l) *' (x_j - iy_j)),$$

et

$$x_l x_j + y_j y_l = \frac{1}{2}((x_j + iy_j) *' (x_l - iy_l) + (x_l + iy_l) *' (x_j - iy_j)).$$

Par conséquent, si X est dans $\mathfrak{su}(E)$ et si a_{ij} et b_{ij} sont respectivement les parties réelles et imaginaires de la matrice de l'endomorphisme $X \otimes id_E$ dans la base $(v_1, ..., v_{p^2})$, alors de (4) et (5) on obtient :

$$\begin{aligned}
\rho(X)\Omega_m &= -\sum_{j<l} a_{lj}(m_l(x_j+iy_j) *' \Omega_{m-[l]} - m_j(x_l+iy_l) *' \Omega_{m-[j]}) \\
&\quad -\frac{i}{2}\sum_{j\neq l} b_{lj}(m_l(x_j+iy_j) *' \Omega_{m-[l]} + m_j(x_l+iy_l) *' \Omega_{m-[j]}) \\
&\quad -\frac{i}{2}\sum_{l} b_{ll}({x_l}^2+{y_l}^2) *' \Omega_m \\
&= -\sum_{j\neq l}(a_{lj}+ib_{lj})m_l(x_j+iy_j) *' \Omega_{m-[l]} - \frac{i}{2}\sum_l b_{ll}({x_l}^2+{y_l}^2) *' \Omega_m.
\end{aligned}$$

Mais :

$$\begin{aligned}
\sum_l b_{ll}({x_l}^2+{y_l}^2) *' \Omega_m &= \sum_l b_{ll}(x_l+iy_l) *' (x_l-iy_l) *' \Omega_m + (\sum_l b_{ll})\Omega_m \\
&= 2\sum_l b_{ll}m_l(x_l+iy_l) *' \Omega_{m-[l]},
\end{aligned}$$

donc

$$\rho(X)\Omega_m = -\sum_{lj}(a_{lj}+ib_{lj})m_l(x_j+iy_j) *' \Omega_{m-[l]}.$$

Il s'ensuit alors

$$\begin{aligned}
U(\rho(X)\Omega_m) &= -\sum_{lj}(a_{lj}+ib_{lj})m_l(x_j+iy_j)P_{m-[l]} \\
&= \tilde{R}(X)P_m \\
&= \tilde{R}(X)U(\Omega_m).
\end{aligned}$$

Donc pour tout v dans $\mathcal{H}$, on a :

$$U(\rho(X)v) = \tilde{R}(X)U(v), \quad \forall X \in \mathfrak{su}(E).$$

2) Pour s élément de $\mathbb{N}$, on désigne par $\mathcal{H}_s$ le sous espace de $\mathcal{S}(E\otimes E)$ engendré par les vecteurs $\Omega_m *' \overline{\Omega_{m'}}$ tels que

$$|m| + |m'| = m_1 + ... + m_{p^2} + m'_1 + ... + m'_{p^2} = s.$$

Le sous espace $\mathcal{H}_s$ est invariant sous l'action de la représentation ρ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{u}(E)$. D'autre part on a :

$$L^2(E\otimes E) = \bigoplus_{s\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_s \quad [2],$$

donc ρ s'exponentie en une représentation du groupe $U(E)$ sur $L^2(E\otimes E)$.

Dans le paragraphe suivant, on va réaliser une construction de ce type pour un groupe de Lie compact semi-simple connexe quelconque.

3. Représentation $*$ d'un groupe compact G sur $L^2(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$

On considère un groupe de Lie G compact, connexe et semi simple, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, de dimension n. On désigne par $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ le complexifié de $\mathfrak{g}$, par B la forme de Killing sur $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ et par θ une involution de Cartan laissant fixe les éléments de $\mathfrak{g}$. Sur $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, on définit la 2-forme symplectique ω par :

$$\omega(X,Y) = \mathfrak{Im} B(X, \theta(Y)), \qquad X, Y \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}},$$

et on considère le produit $*$ de Moyal défini par ω.

Le groupe G agit sur $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ par la représentation adjointe. A tout élément X de $\mathfrak{g}$ on associe le champ de vecteurs X^- défini sur $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ par :

$$X^-{}_Z = \frac{d}{dt}|_{t=0} exp - tX.Z = -[X, Z], \qquad Z \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}.$$

PROPOSITION 2

1) *L'action de G sur $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ est fortement hamiltonienne.*

2) *Le produit $*$ de Moyal sur $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ est covariant.*

Preuve. — Les résultats découlent immédiatement du fait que :

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \simeq \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*,$$

où $\mathfrak{g}^*$ est le dual de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

Soit π la représentation $*$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$, définie par (3). Nous allons prouver que π est le générateur infinitésimal d'une représentation L du groupe compact semi simple G sur $L^2(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$. Pour cela, on considère l'ouvert G_r des points réguliers de G et l'ouvert $\mathfrak{C}$ de $\mathfrak{g}$ tel que l'application exponentielle soit un difféomorphisme global de $\mathfrak{C}$ dans G_r (voir [6]) et on commence d'abord par résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d}{dt} f_t = i\mathcal{X}_X * f_t, \qquad f_0 = u \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}). \tag{6}$$

Si on considère une base orthonormale $(X_1, ..., X_n)$ de $\mathfrak{g}$ relativement à $(-B)$, alors on identifie $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ à $\mathbb{R}^{2n}$ par la paramétrisation :

$$\sum_{r=1}^{n} (x_r + iy_r)X_r \longrightarrow (x; y) = (x_1, ..., x_n; y_1, ..., y_n)$$

et on désigne par $\mathcal{F}_1$ la transformée de Fourier partielle relativement à la variable x :

$$\mathcal{F}_1(u)(\xi, y) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi . x} u(x, y) dx.$$

LEMME 1. — *Pour tout u dans l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ et X dans $\mathfrak{g}$, l'équation différentielle (6) admet une unique solution F_t^X qui vérifie les propriétés suivantes :*

(i) *Si on considère l'homomorphisme de groupes de Lie σ de G dans $SO(n)$ défini par :*

$$\sigma(k) = (\sigma(k)_{rs})_{0 \leqslant r,s \leqslant n} \quad \text{où} \quad \sigma(k)_{rs} = -B(Ad(k)X_r, X_s),$$

alors pour tout v dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ on a :

$$\mathcal{F}_1^{-1}({F_t}^X(\mathcal{F}_1(v)))(\xi, \eta) = v(A(exp - tX).(\xi, \eta)),$$

avec

$$A(exp - tX) = \begin{pmatrix} \frac{\sigma(exp-tX)+I}{2} & \sigma(exp - tX) - I \\ \frac{\sigma(exp-tX)-I}{4} & \frac{\sigma(exp-tX)+I}{2} \end{pmatrix}.$$

(ii) *Si X et Y sont deux éléments de $\mathfrak{C}$ tels que $expXexpY$ appartient à G_r alors :*

$${F^X}_1({F^Y}_1(u)) = F_1^{D(X,Y)}(u) \ \text{ si } \ expD(X, Y) = expXexpY.$$

(iii) *L'application de $\mathfrak{g}$ dans $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ définie par :*

$$X \longrightarrow F_1^X(u)$$

est continue.

Preuve

(i) On vérifie que pour tout u dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ et pour tout X dans $\mathfrak{g}$ on a :

$$\pi(X)u = -\sum_{r,s} \alpha_{rs}(X)(ix_r y_s u + \frac{y_s}{2}\frac{\partial u}{\partial y_r} - \frac{x_r}{2}\frac{\partial u}{\partial x_s} + \frac{i}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x_s \partial y_r})$$

où $\quad \alpha_{rs}(X) = -B([X, X_r], X_s)$.

Maintenant, si on pose $V_X = {\mathcal{F}_1}^{-1} \circ \pi(X) \circ \mathcal{F}_1$, alors on a :

$$V_X = -\sum_r (\sum_s (\alpha_{rs}(X)(\frac{x_s}{2} + y_s))\frac{\partial}{\partial x_r} + (\sum_s \alpha_{rs}(X)(\frac{x_s}{4} + \frac{y_s}{2}))\frac{\partial}{\partial y_r}.$$

Cela prouve que V_X est un champ de vecteurs linéaire, donc complet, et si on désigne par

$$A(g)=\begin{pmatrix} \frac{\sigma(g)+I}{2} & \sigma(g)-I \\ \frac{\sigma(g)-I}{4} & \frac{\sigma(g)+I}{2} \end{pmatrix}$$

on vérifie alors que

$$exptV_X.\xi = A(exp-tX).\xi, \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^{2n}$$

et que $A(g)$ est une action isométrique de G sur $\mathbb{R}^{2n}$.

Ainsi $F_t^X(u)=\mathcal{F}_1(exptV_X.\mathcal{F}_1{}^{-1}(u))$ est l'unique solution de (6).

(ii) Soient X et Y deux éléments de $\mathfrak{C}$ tels que $expXexpY$ soit dans G_r. Si $D(X,Y)$ est l'élément de $\mathfrak{C}$ tel que

$$expXexpY = expD(X,Y)$$

alors $expV_X(expV_Yu) = expV_{D(X,Y)}u$ et par conséquent $F_1^X(F_1^Y(u)) = F_1^{D(X,Y)}(u)$.

(iii) Soit $<.,.>$ le produit scalaire sur $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ alors pour tout couple de fonctions u et v de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ l'application :

$$\mathfrak{g}\rightarrow \mathbb{C}, \qquad X \longrightarrow < expV_X.u, v >$$

est continue. D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} ||F_1^X(u)-F_1^Y(u)||^2_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} &= ||expV_X.\mathcal{F}_1^{-1}(u)-expV_Y.\mathcal{F}_1^{-1}(u)||^2_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} \\ &= 2(||u||^2_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} - Re < expV_X.\mathcal{F}_1^{-1}(u), \\ &\qquad expV_Y.\mathcal{F}_1^{-1}(u)>). \end{aligned}$$

$A(g)$ étant isométrique, F_1^X s'étend en un opérateur unitaire défini sur$L^2(\mathbb{R}^{2n})$. Cela prouve la continuité de l'application

$$\mathfrak{g}\longrightarrow L^2(\mathbb{R}^{2n}), \qquad X\longrightarrow F_1^X(u).$$

PROPOSITION 3. — *La représentation π de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ s'exponentie en une représentation L de G dans $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ vérifiant :*

$$\mathcal{F}_1^{-1}(L(k)(\mathcal{F}_1(v))(\xi) = v(A(k^{-1}).(\xi)), \quad \forall k\in G, \quad \xi\in\mathbb{R}^{2n} \quad v\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}).$$

Preuve. — Pour tout élément X de $\mathfrak{C}$ et pour tout u dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$, on pose :

$$L(expX)u = F_1^X(u) \;\text{ et }\; L(exp-X)u = F_1^{-X}(u).$$

On déduit du lemme 1 que L vérifie les propriétés suivantes :

(i) L'application β de G_r à valeurs dans $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ définie par

$$k \longrightarrow L(k)u$$

est continue.

(ii) si k, k' et kk' sont dans G_r alors $L(kk') = L(k) \circ L(k')$.

(iii) L'opérateur $L(k)$ est unitaire.

Comme conséquence immédiate de la propriété (ii), on déduit que si k, k' et kk'^{-1} sont dans G_r alors

$$L(k) \circ L(k'^{-1}) = L(kk'^{-1}).$$

On prouve maintenant que L est prolongeable d'une manière unique en une représentation de G dans $L^2(\mathbb{R}^{2n})$. En effet soient $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$, $g \in G$ et $k \in G_r$ tels que $kg \in G_r$, si $(k_n)_n$ est une suite dans G_r convergente vers g, alors à partir d'un certain ordre, kk_n est dans G_r et par conséquent :

$$\begin{aligned} ||L(k_n)u - L(k_m)u||_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} &= ||L(k)L(k_n)u - L(k)L(k_m)u||_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} \\ &= ||L(kk_n)u - L(kk_m)u||_{L^2(\mathbb{R}^{2n})}. \end{aligned}$$

Mais l'application β est continue, on en déduit alors que la suite $(L(k_n)u)_n$ est convergente dans $L^2(\mathbb{R}^{2n})$, de plus, sa limite est indépendante du choix de la suite $(k_n)_n$ dans G_r, car si $(k'_n)_n$ est une autre suite dans G_r convergente vers g, alors pour n assez grand, kk_n et kk'_n sont dans G_r et on a :

$$||L(k_n)u - L(k'_n)u||_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} = ||L(k)L(k_n)u - L(k)L(k'_n)u||_{L^2(\mathbb{R}^{2n})},$$

ce qui implique $\lim\limits_{n\to+\infty} ||L(k_n)u - L(k'_n)u||_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} = 0$.

On pose alors $L(g)u = \lim\limits_{n\to+\infty} L(k_n)u$. Maintenant si k et k' sont deux éléments dans G_r, alors $L(kk') = L(k) \circ L(k')$.

En effet, soit $(k_n)_n$ une suite dans G_r convergente vers kk', alors $(k^{-1}k_n)_n$ converge vers k', donc pour n assez grand, on a $k^{-1}k_n \in G_r$ et donc on a $L(k_n) = L(k) \circ L(k^{-1}k_n)$. Par conséquent $L(kk') = L(k) \circ L(k')$.

On prouve par un raisonnement similaire que cette égalité s'étend pour k et k' dans G.

Soit R la représentation quasi régulière du groupe $SO(n)$ sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ définie par :

$$R_g f(z) = f(g^{-1}.z), g \in SO(n), f \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Alors on a :

PROPOSITION 4. — *La représentation $R \circ \sigma$ du groupe G est une sous représentation de L.*

Preuve. — Soient f_0 une fonction radiale de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ vérifiant $||f_0||_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 1$ et S l'opérateur de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ à valeurs dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ défini par :

$$(S(h) = \mathcal{F}_1(\varphi)),$$

où φ est la fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ donnée par

$$\varphi(\xi, \eta) = h(\frac{\xi}{2} + \eta) f_0(\eta - \frac{\xi}{2}).$$

L'opérateur S s'étend en une isométrie de $L^2(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^{2n})$. Soit maintenant h une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ alors :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1^{-1}(L(k^{-1})S(h))(\xi, \eta) &= \varphi(\frac{\sigma(k)+I}{2}\xi + (\sigma(k)-I)\eta, \frac{\sigma(k)-I}{4}\xi + \frac{\sigma(k)+I}{2}\eta) \\
&= h(\frac{\sigma(k)}{2}\xi + \sigma(k)\eta) f_0(\eta - \frac{\xi}{2}) \\
&= \mathcal{F}_1^{-1}(S(R_{\sigma(k^{-1})}h))(\xi, \eta).
\end{aligned}$$

D'où

$$L(k) \circ S = S \circ R_{\sigma(k)}, \qquad \forall k \in G.$$

Remarque. — La représentation L contient donc une classe bien determinée de représentations unitaire irréductibles de G. Si G est $SO(3)$, par exmple, on trouve la quasi régulière de G dans $L^2(\mathbb{R}^3)$ qui contient toutes les représentations unitaires irréductibles de G [9]. Cependant si G est de dimension n supérieure à 3, la quasi régulière de $SO(n)$ est loin de contenir toutes les représentations unitaires irréductibles de $SO(n)$, L ne contient à priori pas toutes les représentations unitaires irréductibles de G. De plus σ n'est pas toujours injective. Dans le but de retrouver toutes les représentations irréductibles de G par une méthode similaire, on change donc l'espace de la représentation L en un espace plus grand.

4. Représentation * de G sur $L^2(\mathrm{u}(E)^{\mathbb{C}})$.

Le groupe de Lie compact semi-simple G s'identifie par une représentation fidèle à un sous groupe de $SU(V)$ où V est un espace hermitien [8]. Posons $E = \wedge V$. Considérons la représentation L^G du groupe G sur $L^2(E \otimes E) = L^2(\mathrm{u}(E)^{\mathbb{C}})$ définie par la restriction à G de la représentation $* \ \rho$ du groupe $U(E)$.

PROPOSITION 5. — *Toutes les représentations irréductibles de G apparaissent dans L^G.*

Preuve. — Soient $\mu_1,...,\mu_d$ les poids dominants fondamentaux de $\mathfrak{su}(V)$. La représentation irréductible fondamentale associée à μ_k est définie par l'action de $\mathfrak{su}(V)$ sur $\wedge^k V$. Désignons par w_k le vecteur de plus haut poids μ_k et appelons z_k la variable de E correspondante à w_k. Soit $\Lambda = n_1\mu_1 + ... + n_d\mu_d$ où $n_1, ..., n_d$, sont dans $\mathbb{N}$, on considère l'élément de l'espace des polynômes sur E, $P_\Lambda = z_1^{n_1}...z_d^{n_d}$. Alors l'action de $\mathfrak{su}(V)$ sur P_Λ engendre la représentation irréductible de plus haut poids Λ [11]. Maintenant si on étend l'action de $\mathfrak{su}(V)$ sur $E \otimes E$ en posant :

$$X.(v \otimes v') = X.v \otimes v', \qquad X \in \mathfrak{su}(V), \qquad v \otimes v' \in E \otimes E,$$

alors le $\mathfrak{su}(V)$ module $S(E \otimes E)$ contient toutes les représentations irréductibles de $\mathfrak{su}(V)$. En vertu de la proposition 1, on en déduit que la restriction de la représentation $* \ \rho$ du groupe $U(E)$ à $SU(V)$, que l'on note $\tilde{\rho}$, contient toutes les représentations irréductibles de $SU(V)$. Soient T une représentation unitaire irréductible de G et α une sous représentation irréductible de $ind_G^{SU(V)}T$, alors d'après le théorème de réciprocité de Frobenius [7], si $n(\alpha, \pi)$ désigne la multiplicité de α dans π, on a :

$$n(\alpha, ind_G^{SU(V)}T) = n(T, \alpha|_G)$$

et par conséquent $n(T, L^G) \neq 0$, puisque

$$n(T, \alpha|_G) \leqslant n(T, \tilde{\rho}|_G) = n(T, L^G).$$

Remerciements. — Je remercie les professeurs D. Arnal et M. Ben Ammar pour leurs suggestions, leurs critiques et leurs encouragements.

Bibliographie

[1] ARNAL (D.), CAHEN (M.) et GUTT (S.). — *Representation of compact Lie groups and quantisation by deformation.* Académie Royale de Belgique. Bulletin de la classe des sciences. 5 série - Tome LXXIV (1988), pp. 123-141.

[2] ARNAL (D.), CORTET (J.C.). — *$*$-product in the method of orbits for nilpotent groups.* J. Geom. and Phys. 2,2, p. 85-116 (1985).

[3] BAYEN (F.), FLATO (M.), FRONSDAL (C.), LICHNÉROWICZ (A.), STERNHEIMER (D.). — *Deformation Theory and quantization.* Ann. of physics. 111 (1978), pp. 61-110 et 111-151.

[4] BEN AMMAR (M.) et TLILI (M.H.). — *Produit $*$ sur le fibré tangent du groupe $U(n)$.* Travaux Mathématiques. Luxembourg. Fascicule X (1998), pp. 1-13.

[5] GUTT (S.). — *An explicit $*$-product on the cotangent bundle of a Lie group.* Letters in Mathematical physics, 7 (1983), pp. 249-258.

[6] HELGASON (S.). — *Differentiel Geometry, Lie groups, and Symmetric spaces.* Academic Press, New York (1978).

[7] PUKANSZKY (L.). — *Leçons sur les représentations des groupes.* Monographies de la Société Mathématique de France. Dunod Paris (1967).

[8] PONTRYAGIN (L.S.). — *Topological groups.* Edition Gordon and Breach, New York (1966).

[9] THEODOR (B.) and TAMMO (D.). — *Representation of compact Lie groups.* Springer Verlag, Berlin (1998).

[10] ZAHIR (H.). — *Représentation $*$-régulière des groupes de Lie compacts.* Thèse de l'université de Metz (1992).

[11] VARADARAJAN (V.S.). — *Lie groups, Lie algebras, and their representations.* Springer Verlag, Berlin (1984).