ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

FRÉDÉRIC MENOUS

Les bonnes moyennes uniformisantes et une application à la resommation réelle

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 8, nº 4 (1999), p. 579-628

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1999_6_8_4_579_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. VIII, n° 4, 1999
pp. 579–628

Les bonnes moyennes uniformisantes et une application à la resommation réelle (*)

Frédéric Menous (1)

Résumé. — L'objet de cet article est l'étude de certaines moyennes uniformisantes, utiles dans l'étude des séries divergentes réelles. Ces moyennes, qui opèrent sur les transformées de Borel (ou éventuellement les «accélérées») des séries divergentes, *uniformisent* les fonctions analytiques ramifiées au-dessus de l'axe réel positif. De plus, elles doivent concilier trois propriétés essentielles, mais souvent antagonistes : préserver la réalité des séries (pour que leurs resommées soient réelles), respecter le produit de convolution (dans le plan de Borel) et, ce qui est peut-être l'essentiel, préserver la croissance latérale des transformées de Borel (pour pouvoir resommer les séries).

On étudie ainsi la moyenne de Catalan, introduite par J. Ecalle, qui respecte ces trois impératifs et vérifie de nombreuses identités combinatoires et intégrales.

Toutes ces moyennes uniformisantes ont un large domaine d'application dans l'étude des séries divergentes associées à certains «objets analytiques locaux» (champs de vecteurs, équations différentielles, difféomorphismes). Leurs trois propriétés sont parfaitement adaptées aux situations mêlant réalité, non-linéarité et divergence. Une bonne illustration en est la conjugaison réelle de certains champs de vecteurs réels.

Abstract. — The aim of this article is the study of uniformising averages, useful in the study of divergent series. These averages, which operate on the Borel transformed of divergent series, uniformize the analytic functions that are ramified over the positive axis. Moreover, they must associate three essential, but often antithetic, properties : they must respect the realness of series (so that their sums should be real), respect

(*) Reçu le 14 septembre 1999, accepté le 30 novembre 1999

(1) Laboratoire d'analyse harmonique, Département de Mathématiques, Bâtiment 425, Université Paris-Sud, Centre d'Orsay, 91405 Orsay cedex.
E-mail: Frederic.Menous@math.u-psud.fr

the convolution product (in the Borel plane) and, which may be the most important, respect the lateral growth of the Borel transformed (so as to resum the series).
Likewise, we study the Catalan average, presented by J. Ecalle ; it respects these three requirements and verify numerous combinatoric and integral identities.
All these uniformizing averages have a broad field of application in the study of divergent series associated to "local analytic objects" (Vector fields, differential equations, diffeomorphisms). Their three properties are totally fit to situations mixing realness, non-linearity, divergence. A good illustration of this point is the real conjugacy of some real analytic vector fields.

Première partie

I. Introduction

Nous allons dans cet article introduire les bonnes moyennes uniformisantes, qui fournissent une réponse à la question de la resommation réelle : comment assigner une resommée réelle à une série divergente réelle «d'origine naturelle». Nous donnerons d'abord quelques heuristiques qui feront apparaître les difficultés propres à la resommation réelle. Les bonnes moyennes uniformisantes permettrons de surmonter ces difficultés. Nous en donnerons la définition ainsi que celle de nombreux objets qui leur sont attachés et nous nous attarderons sur le cas de la moyenne dite de Catalan. Enfin, nous présenterons un exemple d'application : la conjugaison réelle des champs de vecteurs analytiques réels. J. Ecalle a introduit ces bonnes moyennes uniformisantes et on trouvera un exposé complet sur celles-ci dans [3].

1. Quelques heuristiques.

Le point de départ de ce sujet est l'étude de la resommation *réelle* : on cherche à assigner une somme réelle $\varphi(z)$ à une série divergente réelle $\widetilde{\varphi}(z)$. On est souvent amené à considérer un schéma de resommation du type suivant :

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\varphi}(z) & - \quad - \quad \longrightarrow & \varphi(z) \\ & \searrow \qquad \nearrow & \\ & \widehat{\varphi}(\zeta) & \end{array} \tag{I.1.1}$$

$\widetilde{\varphi}(z)$ est généralement une série divergente réelle d'origine «naturelle», par exemple, une solution formelle d'un problème analytique local (conjugaison de champs de vecteurs réels, équations différentielles, etc...). On soumet alors $\widetilde{\varphi}(z)$ à une transformation de Borel formelle (pour obtenir $\hat{\varphi}(\zeta)$) qui, par exemple, transforme chaque monôme $z^{-\sigma}$ en $\zeta^{\sigma-1}/\Gamma(\sigma)$. Pour obtenir $\varphi(z)$, on opère alors une transformation de Laplace sur $\mathbf{R}^+$:

$$\hat{\varphi}(\zeta) \longrightarrow \varphi(z) = \int_0^{+\infty} e^{-z\zeta}\hat{\varphi}(\zeta)d\zeta \tag{I.1.2}$$

Bien sûr, ce schéma est le plus simple possible : dans le cas général, il peut être nécessaire d'appliquer un nombre fini d'«accélérations», ce qui implique autant d'intégrations sur $\mathbf{R}^+$.

L'application d'un tel schéma, bien qu'elle semble aisée, fait apparaître certaines difficultés lors de la dernière transformation $\hat{\varphi}(\zeta) \to \varphi(z)$. La fonction $\hat{\varphi}(\zeta)$, d'abord définie comme un germe en 0, doit être analytiquement prolongée sur $\mathbf{R}^+$ (pour qu'on puisse lui appliquer la transformation de Laplace). En raison de l'origine «naturelle» de $\widetilde{\varphi}(z)$, le prolongement analytique est généralement possible et même indéfiniment : on ne rencontre en général pas de coupures, mais seulement des singularités isolées. Or, parmi celles-ci, il peut y en avoir (en nombre fini ou infini) au-dessus de $\mathbf{R}^+$. Dans ce cas, le prolongement analytique de $\hat{\varphi}(\zeta)$ (noté encore $\hat{\varphi}(\zeta)$) est une fonction *multiforme* sur $\mathbf{R}^+$ et, afin de pouvoir appliquer la transformation de Laplace, on doit, par un «procédé approprié», remplacer $\hat{\varphi}(\zeta)$ par une fonction $(\mathbf{m}\hat{\varphi})(\zeta)$ *uniforme.*

C'est là que se fait sentir le besoin de *moyennes uniformisantes* $\mathbf{m}$ «appropriées». Une telle moyenne $\mathbf{m}$ sera qualifiée de «bonne» (i.e. appropriée) lorsqu'elle vérifie les trois propriétés suivantes :

P1 : Il est indispensable que la moyenne $\mathbf{m}$ transforme la convolution des fonctions ramifiées en la convolution des fonctions uniformes. En effet, si la série formelle $\widetilde{\varphi}(z)$ est solution formelle d'une équation ou d'un système *non linéaire*, c'est seulement à cette condition que la resommée $\varphi(z)$ sera solution effective du même problème.

P2 : La moyenne $\mathbf{m}$ doit aussi respecter la réalité. Cette propriété est évidemment souhaitable lorsque la série $\widetilde{\varphi}(z)$ a des coefficients réels et doit se voir attribuer une somme réelle $\varphi(z)$, comme c'est le cas dans l'étude d'objets provenant de la physique ou de la géométrie réelle.

P3 : La moyenne $\mathbf{m}$ doit *respecter la croissance latérale.* Plus précisément, il s'agit de prendre en compte la tendance qu'ont presque toutes les fontions résurgentes $\hat{\varphi}(\zeta)$ d'origine naturelle à *croître surexponentiellement sur les chemins qui traversent $\mathbf{R}^+$ une infinité de fois, même quand, sur les chemins* *latéraux (droit et gauche) elles présentent une croissance exponentielle régulière.* Or les moyennes uniformisantes **m**, surtout celles qui vérifient les propriétés **P1** et **P2**, font nécessairement intervenir les déterminations de $\hat{\varphi}(\zeta)$ sur ces chemins à forte croissance. D'où la nécessité impérative de choisir une moyenne **m** qui «préserve la croissance latérale», i.e. telle que l'*uniformisée* $(\mathbf{m}\hat{\varphi})(\zeta)$ soit à croissance exponentielle, et donc capable de subir la transformation de Laplace.

Les propriétés **P1**, **P2** et **P3**, décrites ici de manière «qualitative», sont bien sûr susceptibles d'une définition précise.

2. Plan de l'article.

Dans la première partie, nous rappelerons, dans le cas d'une algèbre de résurgence simple, la définition de ces moyennes. Nous introduirons aussi tous les opérateurs qui leur sont associés et qui permettent de formaliser les propriétés **P1, P2, P3**.

Dans une deuxième partie, nous donnerons la définition de ces propriétés et nous présenterons un certain nombres de moyennes, bonnes ou «mauvaises». Les définitions et propriétés de ces deux parties sont dues à J. Ecalle.

Nous nous attarderons ensuite sur la moyenne de Catalan et nous prouverons que celle-ci est une bonne moyenne.

Enfin, dans la dernière partie, nous montrerons comment ces bonnes moyennes fournissent un procédé de resommation réelle en nous appuyant sur le problème suivant :

Soit un champ de vecteurs réel résonnant :

$$X = (x_1 + g(x_1, x_2))\partial_{x_1} - (x_2)^2\partial_{x_2} \quad (g(x_1, x_2) \in x_1x_2\mathbf{R}\{x_1, x_2\}) \qquad \text{(I.2.3)}$$

formellement conjugué à :

$$Y = y_1\partial_{y_1} - (y_2)^2\partial_{y_2} \qquad \text{(I.2.4)}$$

La conjugante réelle et formelle :

$$(y_1, y_2) \mapsto (x_1 = \tilde{\varphi}(y_1, y_2), x_2 = y_2) \qquad \text{(I.2.5)}$$

est génériquement divergente mais aussi résurgente en la variable infiniment grande $z = 1/y_2$. Comment obtenir des resommées réelles de celle-ci qui fournissent une solution convergente au problème de la conjugaison réelle ?

Table des matières

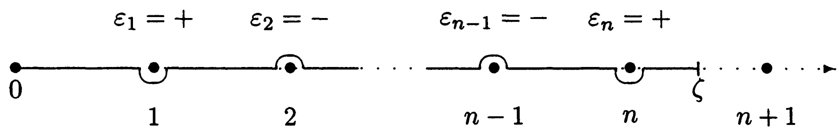
Deuxième partie

II. Définitions et propriétés

1. L'algèbre $RESUR(\mathbf{R}^+//\mathbf{N}^*, int.)$.

Soit $\widehat{\varphi}$ une fonction définie holomorphe à la racine de $\mathbf{R}^+$ (i.e. sur un intervalle $]0,\dots[$), mais pas nécessairement en 0. $\widehat{\varphi}$ est dit *prolongeable par-dessus* $\mathbf{R}^+//\mathbf{N}$ si $\widehat{\varphi}(\zeta)$ se prolonge analytiquement le long de tout chemin longeant $\mathbf{R}^+$ et contournant d'un demi-tour de rayon arbitrairement petit chaque point n de $\mathbf{N}^*$. Le prolongement de $\widehat{\varphi}$ est donc multiforme et on peut introduire la notation suivante :

Notation. — Pour tout réel ζ dans $]n, n+1[$ $(n \in \mathbf{N}^*)$ et pour toute séquence de n signes $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$, on peut noter $\widehat{\varphi}(\zeta^{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n})$ le prolongement analytique de $\widehat{\varphi}$ suivant le chemin qui longe $\mathbf{R}^+$ de 0 (ou d'un point proche de 0) à ζ en contournant chaque singularité k ($1 \leqslant k \leqslant n$) par la droite (resp. la gauche) si $\varepsilon_k = +$ (resp. $\varepsilon_k = -$) :



On peut maintenant donner la définition suivante :

DÉFINITION 1.— *L'algèbre* $RESUR(\boldsymbol{R}^+//\boldsymbol{N}^*, int.)$ *est l'espace des fonctions définies holomorphes à la racine de* $\boldsymbol{R}^+$*, prolongeables par-dessus* $\boldsymbol{R}^+//\boldsymbol{N}$*, dont tous les prolongements sont localement intégrables. Cette algèbre est munie d'une convolution :*

$$\forall \widehat{\varphi}_1, \widehat{\varphi}_2 \in RESUR(\boldsymbol{R}^+//\boldsymbol{N}^*, int.)$$

$$\widehat{\varphi}_3(\zeta) = (\widehat{\varphi}_1 * \widehat{\varphi}_2)(\zeta) = \int_0^\zeta \widehat{\varphi}_1(\zeta_1)\widehat{\varphi}_2(\zeta - \zeta_1)d\zeta_1 \qquad \text{(II.1.1)}$$

Cette convolution est localement définie en 0 et $\widehat{\varphi}_3$ *est un élément de la même algèbre.*

Cette définition est due à J. Ecalle et on peut noter que la stabilité par convolution n'est en rien évidente.

2. L'algèbre *ALIEN* des opérateurs étrangers propres.

Les fonctions de $RESUR(\mathbf{R}^+//\mathbf{N}^*, int.)$ peuvent être associées, par transformation de Borel formelle, à certaines séries divergentes appartenant par exemple à $\mathbf{C}[[z^{-1}]]$. Parmi les opérateurs agissant sur $RESUR(\mathbf{R}^+//\mathbf{N}^*, int.)$, on peut citer la «dérivation naturelle» (qui correspond à ∂_z pour les séries formelles) :

$$\begin{array}{rccc} \widehat{\partial} \; : & RESUR(\mathbf{R}^+//\mathbf{N}^*, int.) & \longrightarrow & RESUR(\mathbf{R}^+//\mathbf{N}^*, int.) \\ & \widehat{\varphi}(\zeta) & \longmapsto & -\zeta\widehat{\varphi}(\zeta) \end{array} \qquad \text{(II.2.2)}$$

Mais, hormis celle-ci, il existe une algèbre d'opérateurs, internes sur $RESUR(\mathbf{R}^+//\mathbf{N}^*, int.)$, qui *analysent les singularités* des fonctions résurgentes : L'algèbre *ALIEN* des opérateurs étrangers propres.

DÉFINITION 2. — *Soit* $\boldsymbol{Op}$ *un élément de ALIEN. Celui-ci est défini par ses poids :*

$$\boldsymbol{Op} = \{\boldsymbol{Op}^{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{Op}^{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n}\ ;\ n \in \boldsymbol{N}\ ;\ \varepsilon_i \in \{+,-\}\ ;\ \boldsymbol{Op}^{\boldsymbol{\varepsilon}} \in \boldsymbol{C}\} \tag{II.2.3}$$

soumis aux relations d'autocohérence :

$$\forall n \geqslant 1\ ;\ \forall(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{n-1}) \in \{+,-\}^{n-1}\ ;\quad \sum_{\varepsilon_n=\pm} \boldsymbol{Op}^{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{n-1},\varepsilon_n} = 0 \tag{II.2.4}$$

L'espace vectoriel $ALIEN$ *forme une algèbre dont la multiplication (non commutative) est définie comme suit : Pour 2 éléments de* $ALIEN$ $\boldsymbol{Op}$ *et* $\boldsymbol{Op}^*$, *on définit leur produit* $\boldsymbol{Op}^{**} = \boldsymbol{Op}^*\,\boldsymbol{Op}$ *par ses poids :*

$$\forall n \geqslant 0\ ;\ \forall(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n) \in \{+,-\}^n$$
$$(\boldsymbol{Op}^{**})^{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n} = (\boldsymbol{Op}^{**})^{\boldsymbol{\varepsilon}} = \sum_{\boldsymbol{\varepsilon}^1\boldsymbol{\varepsilon}^2=\boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{Op}^{\boldsymbol{\varepsilon}^1}(\boldsymbol{Op}^*)^{\boldsymbol{\varepsilon}^2} \tag{II.2.5}$$

où la somme s'étend à toutes les décompositions de la séquence $\boldsymbol{\varepsilon}$ *en deux séquences, dont l'une ou l'autre peut être vide. De plus, on vérifie aisément que* $\boldsymbol{Op}^{**}$ *est bien un élément de* $ALIEN$ *(relations d'autocohérence).*

Nous avons défini $ALIEN$ indépendamment de son action sur $RESUR(\mathbf{R}^+//\mathbf{N}^*, int.)$. Avant d'introduire celle-ci, il convient de remarquer que $ALIEN$ est une algèbre graduée sur $\mathbf{N}$:

$$\begin{aligned} ALIEN &= \bigoplus_{m\geqslant 0} ALIEN_m \\ \mathbf{Op} &= \sum_{m\geqslant 0} \mathbf{Op}_m \end{aligned} \tag{II.2.6}$$

où la *composante homogène* $\mathbf{Op}_m$ est l'opérateur étranger défini par les poids :

$$\mathbf{Op}_m^{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \neq m \\ \mathbf{Op}^{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n} & \text{si} \quad n = m \end{cases} \tag{II.2.7}$$

et cette graduation est bien sûr compatible avec la multiplication :

$$\forall \mathbf{Op}, \mathbf{Op}^* \in ALIEN\ ;\ \forall m \geqslant 0\ ;$$
$$(\mathbf{Op}^*\mathbf{Op})_m = \sum_{m_1=0}^{m_1=m} \mathbf{Op}^*_{m_1}\mathbf{Op}_{m-m_1} \tag{II.2.8}$$

Reste maintenant à définir l'action de $ALIEN$ sur $RESUR(\mathbf{R}^+//\mathbf{N}^*, int.)$.

DÉFINITION 3. — *L'action d'un opérateur* $\boldsymbol{Op}$ *de ALIEN sur* $RESUR(\boldsymbol{R}^+//\boldsymbol{N}^*, int.)$ *est définie par l'action de ses composantes homogènes* $(m \geqslant 0)$ *:*

$$\begin{array}{rccc} \boldsymbol{Op}_m & : \ RESUR(\boldsymbol{R}^+//\boldsymbol{N}^*, int.) & \longrightarrow & RESUR(\boldsymbol{R}^+//\boldsymbol{N}^*, int.) \\ & \widehat{\varphi} & \longmapsto & \widehat{\psi} = (\boldsymbol{Op}_m \widehat{\varphi}) \end{array}$$

où, pour $\zeta < 1$ *:*

$$\widehat{\psi}(\zeta) = (\boldsymbol{Op}_m \widehat{\varphi})(\zeta) = \sum_{\alpha_1=\pm,\ldots,\alpha_m=\pm} \boldsymbol{Op}^{\alpha_1,\ldots,\alpha_m} \widehat{\varphi}\left(((\zeta+m)^{\alpha_1,\ldots,\alpha_m}\right) \quad \text{(II.2.9)}$$

et les prolongements de $\widehat{\psi}$ *s'en déduisent :*

$$\begin{gathered} \forall n \geqslant 0 \ , \ \forall \zeta \in]n, n+1[\ , \ \forall \varepsilon_i \in \{+,-\} \\ \widehat{\psi}(\zeta^{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n}) = \sum_{\alpha_1=\pm,\ldots,\alpha_m=\pm} \boldsymbol{Op}^{\alpha_1,\ldots,\alpha_m} \widehat{\varphi}\left(((\zeta+m)^{\alpha_1,\ldots,\alpha_m \varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n}\right) \end{gathered} \quad \text{(II.2.10)}$$

On vérifie aisément que l'action des composantes homogènes d'un opérateur est interne sur $RESUR(\mathbf{R}^+//\mathbf{N}^*, int.)$ et que la multiplication des opérateurs correspond à la composition de leur action :

$$\begin{gathered} \forall \mathbf{Op}, \mathbf{Op}^* \in ALIEN \ ; \ \forall \widehat{\varphi} \in RESUR(\mathbf{R}^+//\mathbf{N}^*, int.) \\ (\mathbf{Op}^*\mathbf{Op})\widehat{\varphi} = \mathbf{Op}^*(\mathbf{Op}\widehat{\varphi}) \end{gathered} \quad \text{(II.2.11)}$$

Enfin, ces opérateurs ne commutent pas avec la dérivation naturelle :

$$\forall m \geqslant 0 \ , \quad [\mathbf{Op}_m, \widehat{\partial}] = \mathbf{Op}_m \widehat{\partial} - \widehat{\partial} \mathbf{Op}_m = m \mathbf{Op}_m \quad \text{(II.2.12)}$$

Parmi les opérateurs de $ALIEN$, il en existe deux types qui nous intéresseront particulièrement. Ce sont d'une part les dérivations, c'est-à-dire les opérateurs $\mathbf{Op}$ tels que :

$$\forall m \geqslant 0 \ , \ \forall \widehat{\psi}, \widehat{\varphi} \ , \quad \mathbf{Op}_m(\widehat{\varphi} * \widehat{\psi}) = (\mathbf{Op}_m \widehat{\varphi}) * \widehat{\psi} + \widehat{\varphi} * (\mathbf{Op}_m \widehat{\psi}) \quad \text{(II.2.13)}$$

ce qui peut formellement s'écrire ($\mathbf{Op} = \sum \mathbf{Op}_m$, $\mathbf{Op}_0 = 0$)

$$\forall \widehat{\psi}, \widehat{\varphi} \ , \quad \mathbf{Op}(\widehat{\varphi} * \widehat{\psi}) = (\mathbf{Op}\widehat{\varphi}) * \widehat{\psi} + \widehat{\varphi} * (\mathbf{Op}\widehat{\psi}) \quad \text{(II.2.14)}$$

et d'autre part les automorphismes de convolution, c'est-à-dire les opérateurs $\mathbf{Op}$ tels que

$$\forall m \geqslant 0 \ , \ \forall \widehat{\psi}, \widehat{\varphi} \ , \quad \mathbf{Op}_m(\widehat{\varphi} * \widehat{\psi}) = \sum_{m_1=0}^{m_1=m} (\mathbf{Op}_{m_1} \widehat{\varphi}) * (\mathbf{Op}_{m-m_1} \widehat{\psi}) \quad \text{(II.2.15)}$$

ce qui peut formellement s'écrire ($\mathbf{Op} = \sum \mathbf{Op}_m$, $\mathbf{Op}_0 = Id_{RESUR}$)

$$\forall \widehat{\psi}, \widehat{\varphi}\ , \quad \mathbf{Op}(\widehat{\varphi} * \widehat{\psi}) = (\mathbf{Op}\widehat{\varphi}) * (\mathbf{Op}\widehat{\psi}) \tag{II.2.16}$$

On peut ainsi donner l'exemple des automorphismes de convolution **Lur** et **Rul** donnés par leur poids :

$$\mathbf{Lur}^{\emptyset} = Id\ ; \quad \mathbf{Lur}^{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n} = \begin{cases} \varepsilon_n & \text{si} \quad \varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_{n-1} = + \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{II.2.17}$$

$$\mathbf{Rul}^{\emptyset} = Id\ ; \quad \mathbf{Rul}^{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n} = \begin{cases} -\varepsilon_n & \text{si} \quad \varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_{n-1} = - \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{II.2.18}$$

et

$$\mathbf{Lur}.\mathbf{Rul} = \mathbf{Rul}.\mathbf{Lur} = 1 = Id$$

Nous finirons par l'exemple de la dérivation **Dun** :

$$\mathbf{Dun} = \log(\mathbf{Lur}) = -\log(\mathbf{Rul}) \tag{II.2.19}$$

ce qui signifie pour les composantes homogènes ($n \geqslant 1$) que :

$$\mathbf{Dun}_n = \sum_{s \geqslant 1} \sum_{\substack{n_1+\ldots+n_s=n \\ n_i \geqslant 1}} \frac{(-1)^{s+1}}{s} \mathbf{Lur}_{n_s} \ldots \mathbf{Lur}_{n_1} \tag{II.2.20}$$

$$= \sum_{s \geqslant 1} \sum_{\substack{n_1+\ldots+n_s=n \\ n_i \geqslant 1}} \frac{(-1)^{s}}{s} \mathbf{Rul}_{n_s} \ldots \mathbf{Rul}_{n_1} \tag{II.2.21}$$

et les poids de **Dun** sont :

$$\forall n \geqslant 1\ ,\ \forall (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{+,-\}^n\ , \quad \mathbf{Dun}^{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n} = \varepsilon_n \frac{p!\,q!}{n!} \tag{II.2.22}$$

où p (resp. q) désigne le nombre de signe $+$ (resp. $-$) dans la séquence $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1})$. On peut remarquer ici que les opérateurs $\mathbf{Dun}_n$ ne sont autres que les dérivations étrangères «classiques» Δ_n (voir [4, 6, 3]).

Nous aurons besoin, lors de notre étude, d'évaluer si certains opérateurs de *ALIEN* sont des dérivations ou des automorphismes de convolution. Pour cela nous utiliserons ces exemples ainsi que les *moules de passage d'un opérateur à un autre*, moules qui seront définis en section 6.

3. L'espace $AVER$ des moyennes.

Nous allons maintenant définir l'espace $AVER$ des moyennes uniformisantes sur $RESUR(\mathbf{R}^+//\mathbf{N}^*, int.)$. Celles-ci sont des projections sur l'algèbre $UNIF(\mathbf{R}^+, int.)$ des fonctions uniformes localement intégrables sur $\mathbf{R}^+$. Etant donné les notations précédentes, on a :

DÉFINITION 4.— *Un élément $\boldsymbol{m}$ de $AVER$ est défini par ses poids :*

$$\boldsymbol{m} = \{\boldsymbol{m}^{\varepsilon} = \boldsymbol{m}^{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n} \; ; \; n \in \boldsymbol{N} \; ; \; \varepsilon_i \in \{+,-\} \; ; \; \boldsymbol{m}^{\varepsilon} \in \boldsymbol{C}\} \qquad \text{(II.3.23)}$$

soumis aux relations d'autocohérence :

$$\forall n \geqslant 1 \; ; \; \forall(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}) \in \{+,-\}^{n-1} \; ;$$

$$\sum_{\varepsilon_n = \pm} \boldsymbol{m}^{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{n-1},\varepsilon_n} = \boldsymbol{m}^{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{n-1}} \; (\textit{resp. } \boldsymbol{m}^{\emptyset} = 1) \textit{ si } n > 1 \; (\textit{resp. } n = 1) \qquad \text{(II.3.24)}$$

Une telle moyenne uniformisante agit sur les fonctions de $RESUR(\boldsymbol{R}^+//\boldsymbol{N}^*, int.)$:

$$\begin{array}{rcccc} \boldsymbol{m} & : & RESUR(\boldsymbol{R}^+//\boldsymbol{N}^*, int.) & \longrightarrow & UNIF(\boldsymbol{R}^+, int.) \\ & & \widehat{\varphi} & \longmapsto & \boldsymbol{m}\widehat{\varphi} \end{array} \qquad \text{(II.3.25)}$$

selon la règle suivante :

$$\forall \zeta \in \boldsymbol{R}^+$$
$$(\boldsymbol{m}\widehat{\varphi})(\zeta) = \sum_{\varepsilon_1=\pm,\ldots,\varepsilon_n=\pm} \boldsymbol{m}^{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n} \widehat{\varphi}(\zeta^{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n}) \quad (\textit{si } n < \zeta < n+1) \qquad \text{(II.3.26)}$$

Ainsi, pour $\widehat{\varphi}$ dans $RESUR(\mathbf{R}^+//\mathbf{N}^*, int.)$, ζ dans $]n, n+1[$, $\mathbf{m}\widehat{\varphi}(\zeta)$ est une *moyenne* des 2^n déterminations de $\widehat{\varphi}$ au-dessus du point ζ. Par ailleurs, cette définition appelle quelques remarques :

– Du fait des relations d'autocohérence, si une fonction $\widehat{\varphi}$ de $RESUR(\mathbf{R}^+//\mathbf{N}^*, int.)$ est en fait uniforme (tous ses prolongements sont identiques), alors :

$$\mathbf{m}\widehat{\varphi} = \widehat{\varphi}$$

– Toute fonction $\widehat{\varphi}$ de $RESUR(\mathbf{R}^+//\mathbf{N}^*, int.)$ est entièrement déterminée par l'ensemble de ses uniformisées $\mathbf{m}\widehat{\varphi}$. En effet, soit $\boldsymbol{\eta} = \eta_1, \ldots, \eta_n, \ldots$

une séquence infinie de signes $+$ ou $-$ et $\mathbf{m}_\eta$ la moyenne définie par les poids :

$$\mathbf{m}_\eta^{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m} = \begin{cases} 1 & si \quad \varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m = \eta_1,\ldots,\eta_m \\ 0 & sinon \end{cases}$$

alors $\mathbf{m}_\eta$ est un élément de $AVER$ et, pour $\widehat{\varphi}$ dans $RESUR(\mathbf{R}^+//\mathbf{N}^*, int.)$ et ζ dans $]n, n+1[$, on a : $(\mathbf{m}_\eta\widehat{\varphi})(\zeta) = \widehat{\varphi}(\zeta^{\eta_1,\ldots,\eta_n})$. On peut donc retrouver toutes les déterminations de $\widehat{\varphi}$ si on connaît l'action de $AVER$ sur $\widehat{\varphi}$.

On peut citer les exemples des moyennes latérales **mul** et **mur** qui joueront un rôle essentiel par la suite. En terme de poids :

$$\mathbf{mur}^{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n} = 1 \text{ (resp. 0)} \quad \text{si } \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = + \quad \text{(resp. autrement)} \tag{II.3.27}$$

$$\mathbf{mul}^{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n} = 1 \text{ (resp. 0)} \quad \text{si } \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = - \quad \text{(resp. autrement)} \tag{II.3.28}$$

On pourrait se contenter de ces définitions pour qualifier les trois propriétés essentielles des bonnes moyennes uniformisantes. Cependant, nous allons introduire l'algèbre $RAMIF(\mathbf{R}^+//\mathbf{N}^*, int.)$ de *toutes* les fonctions ramifiées (mais pas forcément analytiques), localement intégrables, à points de ramification au-dessus de $\mathbf{N}^*$. Nous procédons ainsi pour diverses raisons :

– Sur une telle algèbre, la convolution, qui étend celle de $RESUR(\mathbf{R}^+//\mathbf{N}^*, int.)$, est globale et ne dépend plus du prolongement analytique.

– Les éléments de $UNIF(\mathbf{R}^+, int.)$, obtenus par uniformisation, ne sont pas nécessairement analytiques, si bien que la nature de $RAMIF(\mathbf{R}^+//\mathbf{N}^*, int.)$, de ce point de vue, s'avérera plus adéquate.

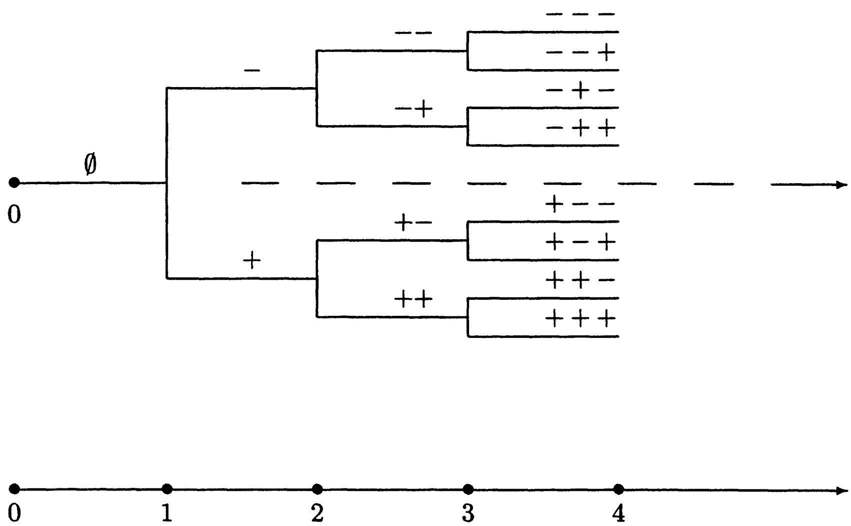
– Il existe sur $RAMIF(\mathbf{R}^+//\mathbf{N}^*, int.)$ une algèbre d'*opérateurs étrangers stationnaires*, qui ne diffère de $ALIEN$ que par son action (et que nous noterons encore $ALIEN$). C'est à cette algèbre qu'appartiendront les automorphisme qui permettront de «relier» deux moyennes, et qui joueront un rôle essentiel et fort pratique dans l'énoncé et l'étude des propriétés **P1**, **P2**, **P3**.

4. L'algèbre $RAMIF(\mathbf{R}^+//\mathbf{N}^*, int.)$.

L'espace $\mathbf{R}^+//\mathbf{N}^*$.

Il s'agit ici de donner l'espace où sont définies les fonctions de $RAMIF(\mathbf{R}^+//\mathbf{N}^*, int.)$. Celui-ci, $\mathbf{R}^+//\mathbf{N}^*$, est constitué d'une branche au-dessus de l'intervalle $]0,1[$, 2 branches au-dessus de l'intervalle $]1,2[$, …, et 2^r branches au-dessus de l'intervalle $]r, r+1[$ $(r \in \mathbf{N})$. Chaque branche au-dessus de $]r, r+1[$ est caractérisée par son adresse $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r)$ constituée de r signes $\varepsilon_i = \pm$. Si $\varepsilon_r = +$ (resp. $\varepsilon_r = -$), la branche au-dessus de $]r, r+1[$

ayant pour adresse $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$ est vue comme la continuation par la droite (resp. par la gauche) de la branche au-dessus de $]r-1, r[$ ayant pour adresse $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{r-1}$. Ainsi, chaque point de $\mathbf{R}^+//\mathbf{N}^*$ peut être caractérisé par le point ζ de $\mathbf{R}^+$ au-dessus duquel il se trouve et par l'adresse $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$ de sa branche ($r = E(\zeta)$). Nous noterons ce point $\zeta^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r}$ (comme dans la section 1) :



On peut maintenant définir :

DÉFINITION 5. — *L'algèbre* $RAMIF(\boldsymbol{R}^+//\boldsymbol{N}^*, int.)$ *: ses éléments sont les fonctions localement intégrables définies sur* $\boldsymbol{R}^+//\boldsymbol{N}^*$*. Cet espace possède une convolution globale, qui étend la convolution locale des éléments de* $RESUR(\boldsymbol{R}^+//\boldsymbol{N}^*, int.)$*, vue alors comme une sous-algèbre de* $RAMIF(\boldsymbol{R}^+//\boldsymbol{N}^*, int.)$.

La structure d'algèbre n'est en rien évidente. $RESUR(\mathbf{R}^+//\mathbf{N}^*, int.)$ est inclus dans $RAMIF(\mathbf{R}^+//\mathbf{N}^*, int.)$: on identifie les notations $\widehat{\varphi}(\zeta^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n})$ des prolongements de $\widehat{\varphi}$ de $RESUR(\mathbf{R}^+//\mathbf{N}^*, int.)$ et $\widehat{\varphi}(\zeta^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n})$ la valeur de $\widehat{\varphi}$ au-dessus de ζ sur la branche d'adresse $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$. Maintenant (voir [3]), relativement à la topologie de convergence uniforme sur les compacts (sur $\mathbf{R}^+//\mathbf{N}^*$), $RESUR(\mathbf{R}^+//\mathbf{N}^*, int.)$ est dense dans $RAMIF(\mathbf{R}^+//\mathbf{N}^*, int.)$ et le produit de convolution est continu sur $RESUR(\mathbf{R}^+//\mathbf{N}^*, int.)$. Cela induit donc une convolution sur $RAMIF(\mathbf{R}^+//\mathbf{N}^*, int.)$, encore commutative et associative. Mais comme les fonction de $RAMIF(\mathbf{R}^+//\mathbf{N}^*, int.)$ ne sont pas nécessairement analytiques, cette convolution ne peut se déduire d'une convolution locale suivie du prolongement analytique. Ce produit est exprimé globalement, par une intégrale de la forme :

$$(\hat{\varphi}_1 * \hat{\varphi}_2)(\zeta) = \int C_\zeta^{\zeta_1,\zeta_2} \hat{\varphi}_1(\zeta_1)\hat{\varphi}_2(\zeta_2) d\zeta_1 \tag{II.4.29}$$

$$\zeta_1, \zeta_2, \zeta \in \mathbf{R}^+//\mathbf{N}^* \ ; \ \dot{\zeta}_1 + \dot{\zeta}_2 = \dot{\zeta} \ ; \ 0 < \dot{\zeta}_1 < \dot{\zeta} \ ; \ 0 < \dot{\zeta}_2 < \dot{\zeta}. \tag{II.4.30}$$

Ici, ζ_1, ζ_2, ζ sont des points de $\mathbf{R}^+//\mathbf{N}^*$ au-dessus des points $\dot{\zeta}_1, \dot{\zeta}_2, \dot{\zeta}$ de $\mathbf{R}^+$. Le *tenseur de structure* $C_\zeta^{\zeta_1,\zeta_2}$ est localement constant ; à valeurs entières (positives ou négatives) ; et s'annule dès que $\dot{\zeta}_1 + \dot{\zeta}_2 \neq \dot{\zeta}$. Pour plus de détails, voir [3].

De plus, l'action des moyennes de $AVER$ s'étend sans difficultés sur l'algèbre $RAMIF(\mathbf{R}^+//\mathbf{N}^*, int.)$. L'avantage de cette algèbre est qu'elle permet de définir les *opérateurs étrangers stationnaires*, qui jouent un rôle important dans l'étude des moyennes.

5. L'algèbre des opérateurs étrangers stationnaires.

Comme sur $RESUR(\mathbf{R}^+//\mathbf{N}^*, int.)$, il existe une algèbre d'opérateurs internes sur $RAMIF(\mathbf{R}^+//\mathbf{N}^*, int.)$. Nous noterons encore cette algèbre $ALIEN$, car ses éléments, ainsi que les lois, sont définis exactement comme pour les opérateurs étrangers propres (cf section 2). La différence n'est que dans le mode d'action. Afin de différencier celle-ci, nous noterons ces opérateurs **op** (première lettre minuscule) en comparaison avec l'opérateur propre associé **Op** (première lettre majuscule).

Cette algèbre est bien sûr aussi graduée, avec la même définition des composantes homogènes (voir 2). Reste donc à définir en quoi diffère l'action d'un opérateur étranger stationnaire :

DÉFINITION 6.— *L'action stationnaire d'un opérateur* **op** *de* $ALIEN$ *sur* $RAMIF(\mathbf{R}^+//\mathbf{N}^*, int.)$ *est définie par l'action de ses composantes homogènes* ($m \geqslant 0$) *:*

$$\begin{array}{cccc} \boldsymbol{op}_m & : & RAMIF(\mathbf{R}^+//\mathbf{N}^*, int.) & \longrightarrow & RAMIF(\mathbf{R}^+//\mathbf{N}^*, int.) \\ & & \widehat{\varphi} & \longmapsto & \widehat{\psi} = (\boldsymbol{op}_m \widehat{\varphi}) \end{array}$$

où, pour ζ *dans* $]n, n+1[$ ($n \in \mathbf{N}$), *et pour toute adresse* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *:*

$$\widehat{\psi}(\zeta^{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}) = \begin{cases} 0 & si \quad n < m \\ \displaystyle\sum_{\substack{\varepsilon_i = \pm \\ 1 \leqslant i \leqslant m}} \boldsymbol{op}_m^{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m} \widehat{\varphi}(\zeta^{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m,\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-m}}) & si \quad n \geqslant m \end{cases} \tag{II.5.31}$$

*L'opérateur **op** agit lui-même car la somme :*

$$(\boldsymbol{op}\widehat{\varphi}) = \sum_{m\geqslant 0} (\boldsymbol{op}_m \widehat{\varphi})$$

définit encore un élément de $RAMIF(\boldsymbol{R}^+//\boldsymbol{N}^*, int.)$.

On vérifie que l'action stationnaire de $ALIEN$ est bien interne sur $RAMIF(\mathbf{R}^+//\mathbf{N}^*, int.)$ (mais pas sur $RESUR(\mathbf{R}^+//\mathbf{N}^*, int.)$). L'action est qualifiée de stationnaire car, pour une fonction $\widehat{\varphi}$ de $RAMIF(\mathbf{R}^+//\mathbf{N}^*, int.)$, la définition de $(\mathbf{op}\widehat{\varphi})$ en un point $\zeta^{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$ de $\mathbf{R}^+//\mathbf{N}^*$ ne dépend que d'une combinaison linéaire des déterminations de $\widehat{\varphi}$ au-dessus du même point ζ de $\mathbf{R}^+$. Hormis le fait que l'action stationnaire d'un opérateur stationnaire n'est pas restreinte à l'action de ses composantes homogènes, on peut remarquer que, contrairement à celle des opérateurs propres, celle-ci commute avec la dérivation naturelle :

$$\forall \mathbf{op} \in ALIEN \ , \quad [\mathbf{op}, \widehat{\partial}] = 0 \tag{II.5.32}$$

On peut encore distinguer, parmi les éléments de $ALIEN$, les automorphismes de convolution et les dérivations (voir section 2). Citons l'exemple des automorphismes de convolution **lur** et **rul** et de la dérivation **dun**, équivalents stationnaires des opérateurs **Lur**, **Rul** et **Dun** (voir (II.2.17) à (II.2.22)).

Avant de revenir sur les propriétés **P1, P2, P3** qui permettent de définir et d'étudier la «bonté» d'une moyenne, nous allons achever cette partie en introduisant les moules de passage d'un opérateur à un autre (stationnaires ou propres). C'est l'étude des propriétés combinatoires de ces moules qui nous permettra généralement de conclure quant à la nature, dérivation ou automorphisme de convolution, d'un opérateur étranger donné. En particulier, c'est l'examen de certains moules, associés à une moyenne **m**, qui permet généralement de montrer que celle-ci préserve la convolution (**P1**) mais aussi la croissance latérale (**P2**).

6. Les moules de passage.

Nous décidons ici de travailler sur les opérateurs étrangers stationnaires : les relations que nous allons étudier tiennent à la structure de l'algèbre $ALIEN$ et non à son action, si ce n'est pour celle d'un opérateur sur un produit de fonctions qui se traduit de la même manière du point de vue de l'action stationnaire ou de l'action propre.

On peut déceler directement sur les poids d'un opérateur **op** si c'est une dérivation ou un automorphisme (voir [3], §A.2). Mais dans la suite, pour établir qu'un opérateur étranger est une dérivation ou un automorphisme, nous raisonnerons plutôt sur les «moules de passage» d'un opérateur à un autre. Précisons cette notion : pour toute paire d'opérateurs **op** et **op**$'$ (dérivations, automorphismes ou autre ...), si **op**$'$ peut s'exprimer en fonction des composantes homogènes de **op**, alors cette expression est nécessairement unique et les coefficients $\langle \mathbf{op}', \mathbf{op}\rangle^{\bullet}$ qu'elle comporte constituent le «moule de passage» de **op** à **op**$'$:

$$\mathbf{op}' = \sum_{n_i>0} \langle \mathbf{op}', \mathbf{op}\rangle^{n_1,\ldots,n_s} \mathbf{op}_{n_s} \ldots \mathbf{op}_{n_1} \tag{II.6.33}$$

La «composition des passages» se traduit par la composition usuelle des moules (voir [3], §A.6) :

$$\langle \mathbf{op}'', \mathbf{op}\rangle^{\bullet} = \langle \mathbf{op}'', \mathbf{op}'\rangle^{\bullet} \circ \langle \mathbf{op}', \mathbf{op}\rangle^{\bullet} \tag{II.6.34}$$

La multiplication des moules intervient dans la situation suivante :

$$\langle \mathbf{op}'', \mathbf{op}\rangle^{\bullet} \times \langle \mathbf{op}', \mathbf{op}\rangle^{\bullet} = \langle \mathbf{op}'\mathbf{op}'', \mathbf{op}\rangle^{\bullet} \tag{II.6.35}$$

On peut maintenant caractériser les moules de passage dans les quatre cas intéressants où les deux opérateurs sont des dérivations ou des automorphismes. Si **op** est une dérivation, alors **op**$'$ en est une si et seulement si le moule $\langle \mathbf{op}', \mathbf{op}\rangle^{\bullet}$ est *alternal* : un moule $M^{\bullet}$ est alternal si et seulement si pour toutes séquences $\boldsymbol{n}'$ et $\boldsymbol{n}''$, on a :

$$\sum_{\boldsymbol{n}\in sh(\boldsymbol{n}',\boldsymbol{n}'')} M^{\boldsymbol{n}} = 0 \tag{II.6.36}$$

où la somme est étendue à toutes les séquences $\boldsymbol{n}$ obtenues par «battage» (shuffle) des séquences $\boldsymbol{n}'$ et $\boldsymbol{n}''$. On a, par exemple, pour des séquences n_1 et n_2, n_3 :

$$M^{n_1,n_2,n_3} + M^{n_2,n_1,n_3} + M^{n_2,n_3,n_1} = 0$$

De même si **op** est une dérivation, alors **op**$'$ est un automorphisme de convolution si et seulement si le moule $\langle \mathbf{op}', \mathbf{op}\rangle^{\bullet}$ est *symétral* : un moule $M^{\bullet}$ est symétral si et seulement si pour toutes séquences $\boldsymbol{n}'$ et $\boldsymbol{n}''$, on a :

$$\sum_{\boldsymbol{n}\in sh(\boldsymbol{n}',\boldsymbol{n}'')} M^{\boldsymbol{n}} = M^{\boldsymbol{n}'} M^{\boldsymbol{n}''} \tag{II.6.37}$$

avec une somme sur les mêmes séquences que pour (II.6.36). Par exemple :

$$M^{n_1,n_2,n_3} + M^{n_2,n_1,n_3} + M^{n_2,n_3,n_1} = M^{n_1} M^{n_2,n_3}$$

Maintenant, si $\mathbf{op}$ est un automorphisme de convolution, alors $\mathbf{op}'$ est une dérivation si et seulement si le moule $\langle \mathbf{op}', \mathbf{op}\rangle^\bullet$ est *alternel* : un moule $M^\bullet$ est alternel si et seulement si pour toutes séquences $\boldsymbol{n}'$ et $\boldsymbol{n}''$, on a :

$$\sum_{\boldsymbol{n} \in ctsh(\boldsymbol{n}', \boldsymbol{n}'')} M^{\boldsymbol{n}} = 0 \tag{II.6.38}$$

où la somme est étendue à toute les séquences $\boldsymbol{n}$ obtenues par battage des séquences $\boldsymbol{n}'$ et $\boldsymbol{n}''$ suivi, éventuellement, de la contraction de composantes adjacentes de $\boldsymbol{n}'$ et $\boldsymbol{n}''$. On a, par exemple, pour des séquences n_1 et n_2, n_3 :

$$M^{n_1,n_2,n_3} + M^{n_2,n_1,n_3} + M^{n_2,n_3,n_1} + M^{n_1+n_2,n_3} + M^{n_2,n_1+n_3} = 0$$

De même si $\mathbf{op}$ est un automorphisme de convolution, alors $\mathbf{op}'$ est un automorphisme si et seulement si le moule $\langle \mathbf{op}', \mathbf{op}\rangle^\bullet$ est *symétrel* : un moule $M^\bullet$ est symétrel si et seulement si pour toutes séquences $\boldsymbol{n}'$ et $\boldsymbol{n}''$, on a :

$$\sum_{\boldsymbol{n} \in ctsh(\boldsymbol{n}', \boldsymbol{n}'')} M^{\boldsymbol{n}} = M^{\boldsymbol{n}'} M^{\boldsymbol{n}''} \tag{II.6.39}$$

où la somme est étendue aux mêmes séquences que dans (II.6.38). On a, par exemple, pour des séquences n_1 et n_2, n_3 :

$$M^{n_1,n_2,n_3} + M^{n_2,n_1,n_3} + M^{n_2,n_3,n_1} + M^{n_1+n_2,n_3} + M^{n_2,n_1+n_3} = M^{n_1} M^{n_2,n_3}$$

Etant donné ces propriétés, pour montrer qu'un opérateur $\mathbf{op}$ est une dérivation (resp. un automorphisme de convolution), on utilisera le plus souvent les moules de passage de $\mathbf{op}$ à $\mathbf{lur}$ ou $\mathbf{rul}$ et on montrera que ceux-ci sont alternels (resp. symétrels). On peut en effet obtenir systématiquement ces moules de passage car les familles $\{\mathbf{lur}_{n_s} \ldots \mathbf{lur}_{n_1}\}$ et $\{\mathbf{rul}_{n_s} \ldots \mathbf{rul}_{n_1}\}$ sont des bases de $ALIEN$. De plus, ces moules revêtent une forme plutôt simple en fonction des poids de $\mathbf{op}$ (cf [3] ou [10]) :

Si on définit : $\forall s \geqslant 0 \quad \forall n_1, \ldots, n_s \in \mathbf{N}^* \quad \forall \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s$

$$\mathbf{op}^{n_1,\varepsilon_1,\ldots,n_s,\varepsilon_s} = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant s \\ (\eta_1^i,\ldots,\eta_{n_i-1}^i) \in \{+,-\}^{n_i-1}}} \mathbf{op}^{\eta_1^1,\ldots,\eta_{n_1-1}^1,\varepsilon_1,\ldots,\eta_1^s,\ldots,\eta_{n_s-1}^s,\varepsilon_s} \tag{II.6.40}$$

alors

$$\langle \mathbf{op}, \mathbf{lur}\rangle^{n_1,\ldots,n_s} = (-1)^s \, \mathbf{op}^{n_1,-,n_2,-,\ldots,n_s,-} \tag{II.6.41}$$

$$\langle \mathbf{op}, \mathbf{rul}\rangle^{n_1,\ldots,n_s} = (-1)^s \, \mathbf{op}^{n_1,+,n_2,+,\ldots,n_s,+} \tag{II.6.42}$$

Nous avons donc introduit dans cette partie la plupart des objets qui ont permis à J. Ecalle de définir précisément les trois propriétés désirables des moyennes. Dans la partie suivante, hormis la définition des propriétés **P1, P2, P3**, nous nous attacherons à introduire un certain nombre de moyennes (uniformes, organique, induites par diffusion, de Catalan) puis nous montrerons dans la quatrième partie que la moyenne de Catalan est une bonne moyenne.

Troisième partie

III. Retour sur les moyennes

1. Les automorphismes de passage.

Afin de définir rigoureusement les propriétés **P1, P2, P3**, nous allons d'abord faire le lien entre les moyennes et certains opérateurs étrangers stationnaires. Il est utile d'introduire l'automorphismes de passage d'une moyenne $\mathbf{m_1}$ à une moyenne $\mathbf{m_2}$, qui est un opérateur étranger stationnaire et qui est défini comme suit :

DÉFINITION 7.— *Etant données deux moyennes $\boldsymbol{m_1}$, $\boldsymbol{m_2}$ qui agissent sur $RAMIF(\boldsymbol{R}^+//\boldsymbol{N}^*, int.)$, il existe un unique opérateur étranger $\begin{pmatrix} \boldsymbol{m_1} \\ \boldsymbol{m_2} \end{pmatrix}$ tel que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} RAMIF \arrow[rr, "\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}"] \arrow[dr, "m_2"'] & & RAMIF \arrow[dl, "m_1"] \\ & UNIF & \end{tikzcd}$$

$$m_2 = m_1 \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} \tag{III.1.1}$$

$\begin{pmatrix} \boldsymbol{m_1} \\ \boldsymbol{m_2} \end{pmatrix}$ *est appelé l'automorphisme de passage de $\boldsymbol{m_1}$ à $\boldsymbol{m_2}$ et ses poids se calculent par induction, à partir des actions de $AVER$ et $ALIEN$ sur $RAMIF(\boldsymbol{R}^+//\boldsymbol{N}^*, int.)$ (cf [3]).*

On vérifie aisément que les poids de $\begin{pmatrix} \mathbf{m}_1 \\ \mathbf{m}_2 \end{pmatrix}$ sont bien définis et satisfont les relations d'autocohérence (II.2.4), ce qui permet de montrer que $\begin{pmatrix} \mathbf{m}_1 \\ \mathbf{m}_2 \end{pmatrix}$ est bien un opérateur étranger stationnaire.

On peut par ailleurs remarquer que :

$$\mathbf{lur} = \begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{rul} = \begin{pmatrix} \mathbf{mur} \\ \mathbf{mul} \end{pmatrix} \tag{III.1.2}$$

Ces deux automorphismes de passage sont donc aussi des automorphismes de convolution.

Tout ceci va nous permettre de donner des définitions précises des propriétés **P1, P2, P3**.

2. Les propriétés souhaitables des moyennes uniformisantes.

Rappelons qu'afin d'utiliser une moyenne $\mathbf{m}$ dans l'étude de problèmes de resommation réelle (voir Partie suivante ou [3], §E), nous aurons besoin que celle-ci soit une «bonne» moyenne. Cela signifie que $\mathbf{m}$ doit vérifier les trois propriétés suivantes :

P1 : respecter la convolution.
P2 : respecter la réalité.
P3 : préserver la croissance latérale.

Propriété P1 : respecter la convolution.

Cela signifie que l'application $\mathbf{m}$ est un homomorphisme d'algèbres :

$$\mathbf{m}(\hat{\varphi}_1 * \hat{\varphi}_2) = (\,\mathbf{m}\hat{\varphi}_1) * (\,\mathbf{m}\hat{\varphi}_2) \quad \forall \hat{\varphi}_i \in RAMIF(\mathbf{R}^+//\mathbf{N}^*, int.) \tag{III.2.3}$$

où la première (resp. la seconde) étoile $*$ dénote la convolution globale sur $RAMIF(\mathbf{R}^+//\mathbf{N}^*, int.)$ (resp. sur $UNIF(\mathbf{R}^+\,;\,int.)$).

Pratiquement, on peut remarquer que **mul** et **mur** préservent la convolution. Pour qu'une moyenne $\mathbf{m}$ préserve la convolution on montrera donc généralement (voir [3] ou [10]) que l'un des automorphismes de passage $\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{m} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \mathbf{mur} \\ \mathbf{m} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \mathbf{m} \\ \mathbf{mul} \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} \mathbf{m} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix}$ est un automorphisme de *convolution*. On cherchera alors à montrer le caractère symétrel d'un des moules :

$$\left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{m} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{mur} \\ \mathbf{mul} \end{pmatrix} \right\rangle^{n_1,\dots,n_s} = (-1)^s \mathbf{m}^{n_1,+,\dots,n_s,+} \tag{III.2.4}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{mur} \\ \mathbf{m} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix} \right\rangle^{n_1,\dots,n_s} = (-1)^s \mathbf{m}^{n_1,-,\dots,n_s,-} \tag{III.2.5}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{mur} \\ \mathbf{m} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{mur} \\ \mathbf{mul} \end{pmatrix} \right\rangle^{n_1,\dots,n_s} = (-1)^{s-1} \mathbf{m}^{n_1,+,\dots,n_{s-1},+,n_s,-} \tag{III.2.6}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{m} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix} \right\rangle^{n_1,\dots,n_s} = (-1)^{s-1} \mathbf{m}^{n_1,-,\dots,n_{s-1},-,n_s,+} \tag{III.2.7}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{m} \\ \mathbf{mul} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix} \right\rangle^{n_1,\dots,n_s} = (-1)^s \mathbf{m}^{n_s,+,\dots,n_1,+} \tag{III.2.8}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{m} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{mur} \\ \mathbf{mul} \end{pmatrix} \right\rangle^{n_1,\dots,n_s} = (-1)^s \mathbf{m}^{n_s,-,\dots,n_1,-} \tag{III.2.9}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{m} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix} \right\rangle^{n_1,\dots,n_s} = (-1)^{s-1} \mathbf{m}^{n_s,+,\dots,n_2,+,n_1,-} \tag{III.2.10}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{m} \\ \mathbf{mul} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{mur} \\ \mathbf{mul} \end{pmatrix} \right\rangle^{n_1,\dots,n_s} = (-1)^{s-1} \mathbf{m}^{n_s,-,\dots,n_2,-,n_1,+} \tag{III.2.11}$$

Pour plus de détails, on se reportera à [7] ou [3], §A.2.

Propriété P2 : respecter la réalité.

Cela signifie que $\mathbf{m}\hat{\varphi}$ doit être réelle quand $\hat{\varphi}$ l'est. Pour une fonction intégrable $\hat{\varphi}$, être réelle veut dire avoir des valeurs complexes conjuguées sur des branches conjuguées. Donc une moyenne respecte la réalité si et seulement si ses poids vérifient :

$$\mathbf{m}^{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_s} = \overline{\mathbf{m}}^{\bar{\varepsilon}_1,\dots,\bar{\varepsilon}_s} \ (\forall \varepsilon_i \in \{+,-\}) \tag{III.2.12}$$

où bien sûr $\bar{\varepsilon}$ est le signe opposé à ε.

Propriété P3 : préserver la croissance latérale.

Nous ne nous appesantirons pas sur les motivations pour définir une telle propriété (voir [7] et surtout [3], §A.3) : il s'agit essentiellement de prendre en compte la tendance qu'ont presque toutes les fonctions résurgentes $\hat{\varphi}(\zeta)$ d'origine naturelle *à croître surexponentiellement sur les chemins qui traversent* $\mathbf{R}^+$ *une infinité de fois, même quand, sur les chemins latéraux (droit et gauche) elles présentent un croissance exponentielle régulière.* Or les moyennes uniformisantes $\mathbf{m}$, *surtout celles qui préservent la convolution* (**P1**) *et la réalité* (**P2**), font nécessairement intervenir les valeurs de $\hat{\varphi}(\zeta)$ sur ces chemins à forte croissance. Pour obtenir, malgré cela, une moyenne uniforme $\mathbf{m}\hat{\varphi}(\zeta)$ *à croissance exponentielle* (– ce qui est nécessaire si on vise une resommation exacte –) il faut s'entourer de précautions bien particulières. Concrètement, il faut imposer à la moyenne $\mathbf{m}$ la condition technique que voici :

Une moyenne $\mathbf{m}$ est dite «préserver la croissance latérale» si l'opérateur étranger $\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix}$ (ou $\begin{pmatrix} \mathbf{mur} \\ \mathbf{mul} \end{pmatrix}$) est *moins analytique* que l'opérateur $\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{m} \end{pmatrix}$ (ou $\begin{pmatrix} \mathbf{mur} \\ \mathbf{m} \end{pmatrix}$).

Précisons la notion de «moins analytique que». Une réduction *red* de l'algèbre graduée *ALIEN* est, par définition, un homomorphisme d'algèbres graduées de *ALIEN* dans une algèbre $Endo(\mathbf{C}[[x_1,\ldots,x_\nu]])$ avec préservation de *toute* la structure (graduation, action sur un produit). Une réduction est définie lorsque l'on connait les images des dérivations étrangères :

$$\mathbf{dun}_n \mapsto red(\mathbf{dun}_n) \equiv x_1^{n_1}\ldots x_\nu^{n_\nu} \sum_{1\leqslant i\leqslant \nu} A_n^i x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (A_n^i \in \mathbf{C}) \qquad \text{(III.2.13)}$$

où les $\mathbf{dun}_n$ sont les composantes homogènes de la dérivation $\mathbf{dun}$ et engendrent *tout ALIEN* (tout opérateur de *ALIEN* peut s'exprimer en fonction des $\mathbf{dun}_n$).

Finalement, pour une paire d'opérateurs étrangers $\mathbf{op}$ et $\mathbf{op}'$, $\mathbf{op}$ *est moins analytique que* $\mathbf{op}'$ *quand, pour toute réduction red, si red(op) est analytique* (i.e. appartient à $Endo(\mathbf{C}\{x_1,\ldots,x_\nu\})$), *alors red(op′) l'est aussi.* Par exemple, pour une réduction quelconque, $red(\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix})$ et $red(\begin{pmatrix} \mathbf{mur} \\ \mathbf{mul} \end{pmatrix})$ sont soit tous les deux des opérateurs analytiques, soit aucun des deux ne l'est, car ce sont des automorphismes de substitution réciproques de $\mathbf{C}[[x_1,\ldots,x_\nu]]$ (comme réductions d'automorphismes de convolution réciproques). Ainsi, $\begin{pmatrix} \mathbf{mur} \\ \mathbf{mul} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix}$ sont équianalytiques.

Ces trois propriétés ont tendance à s'exclure mutuellement. Cependant, il existe des bonnes moyennes uniformisantes et, avant d'étudier la moyenne de Catalan, nous pouvons déja donner quelques exemples.

3. Exemples de moyennes uniformisantes.

3.1. La moyenne latérale droite mur and la moyenne latérale gauche mul.

On peut montrer que ce sont les seules moyennes préservant la convolution et ne chargeant qu'une branche par intervalle. En termes de poids :

$$\mathbf{mur}^{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n} = 1 \text{ (resp. } 0) \text{ si } \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = + \text{ (resp. autrement)} \quad \text{(III.3.14)}$$

$$\mathbf{mul}^{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n} = 1 \text{ (resp. } 0) \text{ si } \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = - \text{ (resp. autrement)} \quad \text{(III.3.15)}$$

mur et **mul** sont **P1** (convolution) et **P3** (croissance latérale) mais ne préservent clairement pas la réalité.

3.2. La moyenne médiane mun.

Les poids de **mun** dépendent uniquement du nombre p (resp. q) de signes $+$ (resp. $-$) dans l'adresse $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$:

$$\mathbf{mun}^{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n} \equiv \frac{\Gamma(p+1/2)\,\Gamma(q+1/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma(p+q+1)\Gamma(1/2)} \equiv \frac{(2p)!\,(2q)!}{4^{p+q}\,(p+q)!\,p!\,q!} \quad \text{(III.3.16)}$$

Il existe toute une famille de moyennes ne dépendant que du nombre de signes $+$ et $-$ à laquelle appartiennent **mul**, **mur** et **mun**. C'est la famille $\mathbf{mu}_{\alpha,\beta}$ dont les poids sont :

$$\mathbf{mu}_{(\alpha,\beta)}^{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n} \equiv \frac{\Gamma(p+\alpha)\,\Gamma(q+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(p+q+1)\Gamma(\beta)} \quad (\alpha,\beta \in \mathbf{R}^+ \;;\; \alpha+\beta=1) \quad \text{(III.3.17)}$$

$$\mathbf{mu}_{(1,0)} = \mathbf{mur} \;;\; \mathbf{mu}_{(1/2,1/2)} = \mathbf{mun} \;;\; \mathbf{mu}_{(0,1)} = \mathbf{mul} \quad \text{(III.3.18)}$$

Les moyennes $\mathbf{mu}_{(\alpha,\beta)}$ respectent la convolution (**P1**). **mun** est la seule à préserver la réalité mais seul **mul** et **mur** respectent la croissance latérale : aucune des moyennes de cette famille n'est une bonne moyenne.

3.3. La moyenne de Catalan man.

Nous montrerons dans la troisième partie les résultats énoncés ci-dessous.

Les poids de **man** sont rationnels et sont donnés par la formule suivante :

$$\mathbf{man}^{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n} \equiv 4^{-n} ca_{n_1} ca_{n_2} \ldots ca_{n_s}\,(1+n_s) \quad \text{(III.3.19)}$$

où les nombres de Catalan sont :

$$ca_n \overset{def}{=} \frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!} \quad (ca_n \in \mathbf{N}) \quad \text{(III.3.20)}$$

et les indices $n_1, n_2, \ldots, n_s$ représentent les longueurs des «paquets» de signes identiques dans l'adresse $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$:

$$(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = (\pm)^{n_1} (\mp)^{n_2} \ldots (\varepsilon_n)^{n_s} \quad (et\ n_1 + \cdots + n_s = n) \qquad \text{(III.3.21)}$$

Comme **mun**, la moyenne de Catalan **man** appartient en particulier à la famille de moyennes $\mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)}$ (encore une fois $\alpha + \beta = 1$) dont les poids sont :

$$\mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)}^{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n} \stackrel{def}{=} (\alpha\beta)^n (ca_{n_1} ca_{n_2} \ldots ca_{n_{s-1}}) qa_{n_s}((\alpha/\beta)^{\varepsilon_n}) \qquad \text{(III.3.22)}$$

Encore une fois, n_i est le cardinal du $i^{\text{ème}}$ paquet de signes identiques. Toutefois, cette nouvelle formule fait intervenir les polynômes de Catalan qa_n, définis par induction de la manière suivante :

$$qa_0(x) = 1 \qquad \text{(III.3.23)}$$

$$qa_{1+n}(x) = -(1 + x^{-1}) ca_n + (x + 2 + x^{-1}) qa_n(x) \qquad \text{(III.3.24)}$$

Les puissances négatives de x s'éliminent et on peut remarquer que :

$$qa_n(0) = ca_n \quad ; \quad qa_n(1) = (1+n) ca_n \qquad \text{(III.3.25)}$$

$$\lim_{x \to -1} (x+1)^{-1} qa_n(x) = ca_{n-1} \qquad \text{(III.3.26)}$$

La moyenne de Catalan **man** est une *bonne moyenne uniformisante* (voir troisième partie). De plus, par «passage à la limite», elle donne naissance à une nouvelle moyenne : la moyenne brownienne **mown** (pour plus de détails, voir [3, 10, 7]).

3.4. La moyenne brownienne mown.

Comme dans l'équation (II.6.40), posons, pour des entiers n_i donnés :

$$\mathbf{man}^{n_1,\varepsilon_1,\ldots,n_s,\varepsilon_s} \stackrel{def}{=} \sum_{\eta_k^i = \pm} \mathbf{man}^{\eta_1^1 \ldots \eta_{n_1-1}^1 \varepsilon_1 \eta_1^2 \ldots \eta_{n_2-1}^2 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{s-1} \eta_1^s \ldots \eta_{n_s-1}^s \varepsilon_s} \qquad \text{(III.3.27)}$$

alors la limite suivante existe et définit les poids d'une moyenne :

$$\mathbf{mown}^{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_s} = \lim_{n \to +\infty} \mathbf{man}^{n,\varepsilon_1,\ldots,n,\varepsilon_s} \qquad \text{(III.3.28)}$$

Ces poids sont par définition ceux de la moyenne brownienne **mown**, qui est aussi une bonne moyenne. Ceci peut encore se déduire de l'étude directe de la famille $\mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)}$. Cependant, on peut aussi le montrer en remarquant que **man** et **mown** appartiennent toutes deux à un large ensemble de bonnes moyennes uniformisantes, introduit et étudié par J. Ecalle : «les moyennes induites par diffusion».

3.5. Les moyennes induites par diffusion.

Soit une fonction intégrable f sur $\mathbf{R}$ telle que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \qquad \text{(III.3.29)}$$

Cette fonction peut être vue comme la distribution de probabilité au temps $t = 1$, sur l'axe vertical $1 + i\mathbf{R}$, d'une particule partant de l'origine à $t = 0$, se déplaçant dans la direction horizontale à vitesse unitaire, et «diffusant» aléatoirement dans la direction verticale. A une telle «diffusion», on peut associer une moyenne uniformisante $\mathbf{m}$ dont les poids sont définis comme suit :

DÉFINITION 8 (J. Ecalle). — $\mathbf{m}^{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n}$ *est la probabilité pour la particule de rencontrer le demi-axe* $n + i\varepsilon_n\mathbf{R}^+$ *au temps* n *après avoir successivement croisé les demi-axes* $j + i\varepsilon_j\mathbf{R}^+$ *(*$1 \leqslant j < n$*) au temps* j*.*

Ceci se traduit par les formules :

$$\begin{aligned}\mathbf{m}^{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_s} \quad &= \quad \int f(x_1)\dots f(x_s)\sigma_{\varepsilon_1}(x_1)\sigma_{\varepsilon_2}(x_1+x_2) \\ &\qquad \dots\sigma_{\varepsilon_s}(x_1+\dots+x_s)\,dx_1\dots dx_s \qquad \text{(III.3.30)}\end{aligned}$$

où on intègre sur $\mathbf{R}^n$ et on note :

$$\sigma_\pm(x) \equiv 1 \text{ (resp. 0) if } \pm x > 0 \text{ (resp.} \pm x \leqslant 0) \qquad \text{(III.3.31)}$$

J. Ecalle a montré que toute moyenne induite par diffusion respecte à la fois la convolution et la croissance latérale. De plus, dès que la fonction f est rélle et paire, la moyenne respecte aussi la réalité et devient donc une bonne moyenne uniformisante (pour plus de détails, voir [3, 10]).

Il n'est pas très dur de montrer que **man** et **mown** sont induites par diffusion :

$$\mathbf{man} \quad \text{induite par} \quad f(x) = \frac{1}{2}\exp(-\mid x \mid) \qquad \text{(III.3.32)}$$

$$\mathbf{mown} \quad \text{induite par} \quad f(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\exp(-\frac{x^2}{4}) \qquad \text{(III.3.33)}$$

La construction et l'étude des moyennes induites par diffusion sont dues à J. Ecalle. Cette méthode de construction de bonnes moyennes permet de les *généraliser* de telle sorte qu'elles agissent (de «bonne» façon) sur des fonctions résurgentes ayant leurs singularités dans un semi-groupe additif discret de $\mathbf{R}^+$ quelconque. De plus, la condition d'intégrabilité des fonctions n'est pas une necessité. Avant d'entrevoir, dans la dernière partie, le large champ d'application de ces moyennes, nous allons revenir sur la moyenne de Catalan.

Nous ne reviendrons pas ici sur les moyennes induites par diffusion. Cependant, en ce qui concerne la moyenne de Catalan, il existe une preuve indépendante de sa «bonté». Celle-ci est l'objet de la partie suivante.

Quatrième partie

IV. La moyenne de Catalan est une bonne moyenne.

Afin de pouvoir définir les différentes moyennes de Catalan, nous allons introduire les nombres de Catalan ainsi que des polynômes que nous appellerons par abus les «polynômes de Catalan». Après avoir défini les moyennes de Catalan. Nous introduirons les opérateurs infinitésimaux et les automorphismes de passage qui leur sont associés. Enfin, après avoir donné quelques propriétés générales sur la notion de «moins analytique que», nous montrerons que la moyenne de Catalan est effectivement une bonne moyenne uniformisante (principalement qu'elle préserve la croissance latérale).

1. Les nombres et les polynômes de Catalan.

Soient, pour tout entier n :

$$ca_n \stackrel{def}{=} \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} \qquad ka_n \stackrel{def}{=} \frac{(2n)!}{n!n!} \tag{IV.1.1}$$

On a par exemple :

n	0	1	2	3	4	5	6
ca_n	1	1	2	5	14	42	132
ka_n	1	2	6	20	70	252	924

Au décalage près de l'indice, les entiers ca_n sont les classiques nombres de Catalan (cf [1]).

Nous rappelons aussi, qu'en termes de fonctions génératrices, on a :

$$\left\{\begin{array}{lllll} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} ca_n t^n & = & \dfrac{1-\sqrt{1-4t}}{2t} & \stackrel{def}{=} & cag(t) \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} ka_n t^n & = & \dfrac{1}{\sqrt{1-4t}} & \stackrel{def}{=} & kag(t) \end{array}\right. \tag{IV.1.2}$$

On peut aussi définir des polynômes de Catalan $qa_n(x)$ (voir [10]) qui vérifient :

$$\left\{\begin{array}{lll} qa_n(0) & = & ca_n \\ qa_n(1) & = & ka_n \end{array}\right. \tag{IV.1.3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n qa_n(x) = \frac{1}{1-(1+x)\left(\frac{1-\sqrt{1-4t}}{2}\right)} = qag(x,t) \tag{IV.1.4}$$

En particulier, on a :

$$\begin{array}{lll} qa_0(x) & = & 1 \\ qa_1(x) & = & (1+x) \\ qa_2(x) & = & (1+x)(2+x) \\ qa_3(x) & = & (1+x)(5+4x+x^2) \\ qa_4(x) & = & (1+x)(14+14x+6x^2+x^3) \\ qa_5(x) & = & (1+x)(42+48x+25x^2+8x^3+x^4) \end{array} \tag{IV.1.5}$$

et (cf [9]) :

$$\left\{\begin{array}{lll} qa_n(x) & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2k+1)\frac{(2n)!}{(n+k+1)!(n-k)!}x^k \\ \dfrac{qa_n(x)}{(1+x)} & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(2k+2)\frac{(2n-1)!}{(n+k+1)!(n-k-1)!}x^k \end{array}\right. \tag{IV.1.6}$$

Pour achever cette section, nous allons introduire quelques notations. Soit n un entier plus grand que 1 et ε une séquence de signes + ou − : $\varepsilon = \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n$. Si $\varepsilon = (\pm)^{n_1}(\mp)^{n_2}\ldots(\varepsilon_n)^{n_s}$, alors on pose :

$$\left\{\begin{array}{lll} ca^{\varepsilon} & = & ca_{n_1}\ldots ca_{n_s} \\ ca^{\varepsilon *} & = & ca_{n_1}\ldots ca_{n_{s-1}} ka_{n_s} \end{array}\right. \tag{IV.1.7}$$

Grâce à ceci, nous allons pouvoir, dans la section suivante, introduire les moyennes de Catalan et les opérateurs du même nom.

2. La famille des opérateurs de Catalan.

Nous allons définir sur $RAMIF(\mathbf{R}//\mathbf{N}^*)$ différents opérateurs donnés par leurs «poids» (fonctions de la séquence ε) puis nous allons établir quelques unes de leurs propriétés et préciser leur nature (moyennes, dérivations, automorphismes) et leurs liens mutuels.

2.1. Les moyennes de Catalan.

On peut tout de suite donner la définition des moyennes de Catalan $\mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)}$.Celles-ci sont paramétrées par (α,β) où α et β sont réels positifs et $\alpha+\beta=1$.

DÉFINITION 9.— *Quels que soient les réels α et β positifs $(\alpha+\beta=1)$, quelle que soit la séquence $\varepsilon=\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n=(\pm)^{n_1}(\mp)^{n_2}\ldots(\varepsilon_n)^{n_s}$, on pose :*

$$\boldsymbol{ma}^{\varepsilon}_{(\alpha,\beta)} \stackrel{def}{=} (\alpha\beta)^n ca_{n_1}\ldots ca_{n_{s-1}} qa_{n_s}(\alpha^{\varepsilon_n}/\beta^{\varepsilon_n}) \qquad \text{(IV.2.8)}$$

avec $\alpha^+/\beta^+=\alpha/\beta$ et $\alpha^-/\beta^-=\beta/\alpha$.

Si on maintient un facteur trivial $(\alpha+\beta)$ dans $\mathbf{ma}^{\varepsilon}_{(\alpha,\beta)}$, alors c'est un polynôme homogène de degré $2l(\varepsilon)$ (avec $l(\varepsilon)=n$ si $\varepsilon=\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n$).

Afin de pouvoir qualifier de moyennes les objets définis par (IV.2.8), il faut que ceux-ci vérifient la relation (II.3.24), or ceci se vérifie sans grande difficulté en utilisant les séries génératrices (IV.1.2) et (IV.1.4).

De plus, il n'est pas très difficile de voir que :

$$\begin{aligned} \mathbf{ma}_{(1,0)} &= \mathbf{mur} \\ \mathbf{ma}_{(1/2,1/2)} &= \mathbf{man} \\ \mathbf{ma}_{(0,1)} &= \mathbf{mul} \end{aligned} \qquad \text{(IV.2.9)}$$

avec

$$\mathbf{man}^{\varepsilon} = \frac{1}{4^{l(\varepsilon)}} ca^{\varepsilon *} \qquad \text{(IV.2.10)}$$

Cette famille de moyennes étant paramétrée par α ou β, on peut la dériver (et $\partial_\alpha=-\partial_\beta$ car $\alpha+\beta=1$). Ces dérivations font apparaître des opérateurs infinitésimaux qui sont l'objet de la section suivante.

2.2. Les opérateurs infinitésimaux de Catalan.

Les dérivations par rapport à α (ou β) des moyennes de Catalan font apparaître des opérateurs **op** internes sur $RAMIF(\mathbf{R}//\mathbf{N}^*)$, donnés par leurs poids $\mathbf{op}^{\varepsilon}$ (avec $\mathbf{op}^{\emptyset} = 0$).

La postcomposition d'une moyenne **m** par un tel opérateur **op** se traduit, en termes de poids, par :

$$\forall \varepsilon \quad (\mathbf{m}.\mathbf{op})^{\varepsilon} = \sum_{\varepsilon^1\varepsilon^2=\varepsilon} \mathbf{op}^{\varepsilon^1}\mathbf{m}^{\varepsilon^2} \tag{IV.2.11}$$

où ε^1 et ε^2 peuvent être vides (ici on aura $\mathbf{op}^{\emptyset} = 0$).

De plus, on peut introduire les notations suivantes. Soit **op** un opérateur donné par ses poids $\mathbf{op}^{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n}$. On notera $\nabla\mathbf{op}$ l'opérateur de poids $n\mathbf{op}^{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n}$. De même, pour un nombre t, on notera $t^{\nabla}\mathbf{op}$ l'opérateur de poids $t^n\mathbf{op}^{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n}$.

On a alors la proposition suivante :

PROPOSITION 1

$$\partial_\alpha \boldsymbol{ma}_{(\alpha,\beta)} = \frac{1}{\alpha\beta}\boldsymbol{ma}_{(\alpha,\beta)}\boldsymbol{daa}_{(\alpha,\beta)} \tag{IV.2.12}$$

où

$$\boldsymbol{daa}_{(\alpha,\beta)} = (2\nabla - 1)\boldsymbol{da}_{(\alpha,\beta)} = (2\nabla - 1)(\alpha\beta)^{\nabla}\boldsymbol{dam} \tag{IV.2.13}$$

avec, si $\varepsilon = \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n$, les poids suivants :

$$\boldsymbol{dam}^{\varepsilon} = \varepsilon_n \boldsymbol{ca}^{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_{n-1}} \tag{IV.2.14}$$

Démonstration :

Il s'agit donc de montrer que, pour toute séquence ε donnée, on a :

$$\partial_\alpha \mathbf{ma}^{\varepsilon}_{(\alpha,\beta)} = \frac{1}{\alpha\beta}\sum_{\varepsilon^1\varepsilon^2=\varepsilon} \mathbf{daa}^{\varepsilon^1}\mathbf{ma}^{\varepsilon^2} \tag{IV.2.15}$$

Après avoir remarqué que l'on peut se restreindre aux séquences de signes qui finissent par $+$, nous transformerons chacun des membres de l'égalité précédente pour prouver qu'ils sont identiques.

Soit donc une séquence ε finissant par un $+$. Nous noterons $\bar{\varepsilon}$ la séquence composée des signes opposés à ceux de ε.On a alors :

$$\mathbf{ma}^{\varepsilon}_{(\alpha,\beta)} = \mathbf{ma}^{\bar{\varepsilon}}_{(\beta,\alpha)} \quad \text{et} \quad \mathbf{daa}^{\varepsilon}_{(\alpha,\beta)} = -\mathbf{daa}^{\bar{\varepsilon}}_{(\beta,\alpha)}$$

De ce fait, il est aisé de voir que si donc on prouve l'égalité (IV.2.15) pour toute séquence finissant par un $+$ et pour tout couple (α, β), on récupère, par la remarque précédente, le résultat pour toute séquence finissant par un $-$.

Soit une séquence $\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_1 \dots \varepsilon_{n-1}+$. Décomposons-la en paquets de signes identiques :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\pm)^{n_1} \dots (+)^{n_s}$$

avec $n_1 + \dots + n_s = n$ et notons $\check{n}_i = n_1 + \dots + n_i$. Nous allons d'abord nous intéresser au second membre de l'équation (IV.2.15). Etant donné les expressions de $\mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)}$ et de $\mathbf{daa}_{(\alpha,\beta)}$, en décomposant la somme sur $\boldsymbol{\varepsilon}^1\boldsymbol{\varepsilon}^2$ suivant le paquet de signes avec lequel finit $\boldsymbol{\varepsilon}^1$, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\alpha\beta} \sum_{\boldsymbol{\varepsilon}^1\boldsymbol{\varepsilon}^2 = \boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{daa}^{\boldsymbol{\varepsilon}^1}_{(\alpha,\beta)} \mathbf{ma}^{\boldsymbol{\varepsilon}^2}_{(\alpha,\beta)} = (\alpha\beta)^{n-1} \times \\
&\Bigg\{ \sum_{i=1}^{s-1} (-1)^{(s-i)} ca_{n_1} \dots ca_{n_{i-1}} \left(\sum_{k=1}^{n_i} (2\check{n}_{i-1} + 2k - 1) ca_{k-1} ca_{n_i - k} \right) \\
&\qquad ca_{n_{i+1}} \dots qa_{n_s}(\alpha/\beta) \\
&\quad + ca_{n_1} \dots ca_{n_{s-1}} \sum_{k=1}^{n_s} (2\check{n}_{s-1} + 2k - 1) ca_{k-1} qa_{n_s - k}(\alpha/\beta) \Bigg\}
\end{aligned}$$

Or, on peut montrer facilement, grâce aux fonctions génératrices, que :

$$\sum_{k=1}^{n_i} ca_{k-1} ca_{n_i - k} = ca_{n_i}$$

et

$$\sum_{k=1}^{n_i} 2k ca_{k-1} ca_{n_i - k} = (n_i + 1) ca_{n_i}$$

et après calcul, on en déduit :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\alpha\beta} \sum_{\boldsymbol{\varepsilon}^1\boldsymbol{\varepsilon}^2 = \boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{daa}^{\boldsymbol{\varepsilon}^1}_{(\alpha,\beta)} \mathbf{ma}^{\boldsymbol{\varepsilon}^2}_{(\alpha,\beta)} = (\alpha\beta)^{n-1} \times \\
&\Big\{ -\check{n}_{s-1} ca_{n_1} \dots ca_{n_{s-1}} qa_{n_s}(\alpha/\beta) \\
&\quad + ca_{n_1} \dots ca_{n_{s-1}} \sum_{k=1}^{n_s} (2\check{n}_{s-1} + 2k - 1) ca_{k-1} qa_{n_s - k}(\alpha/\beta) \Big\}
\end{aligned}$$

Nous allons maintenant montrer que le premier membre de (IV.2.15) redonne cette expression. Il n'est pas difficile de voir que :

$$\partial_\alpha \mathbf{ma}^\varepsilon_{(\alpha,\beta)} = (\alpha\beta)^{n-1} ca_{n_1} \dots ca_{n_{s-1}} \left(n(\beta-\alpha) q a_{n_s}(\alpha/\beta) + \frac{\alpha}{\beta} q a'_{n_s}(\alpha/\beta) \right)$$

En utilisant à nouveau un argument de séries génératrices, on aboutit bien à la même expression que pour le second membre. □

On peut aussi s'intéresser aux opérateurs de passage d'une moyenne de paramètres (α, β) à celle de paramètres (α', β'). Notre objectif ici ne sera pas de donner leurs poids, mais plutôt les moules permettant de passer de tels opérateurs aux opérateurs infinitésimaux.

2.3. Expression des opérateurs de passage dans une même famille de Catalan.

Nous allons exprimer l'opérateur de passage $\begin{pmatrix} \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)} \\ \mathbf{ma}_{(\alpha',\beta')} \end{pmatrix}$ grâce aux opérateurs infinitésimaux définis à la section 2.2. Plus précisément, on va montrer qu'il existe un moule de passage de cet opérateur à l'opérateur infinitésimal **daam**. On est ainsi conduit à l'énoncé :

PROPOSITION 2.— *Les opérateurs de passage* $\begin{pmatrix} \boldsymbol{ma}_{(\alpha,\beta)} \\ \boldsymbol{ma}_{(\alpha',\beta')} \end{pmatrix}$ *s'expriment en fonction de la dérivation* ***daam*** *grâce au moule de passage défini par :*

$$\left\langle \begin{pmatrix} \boldsymbol{ma}_{(\alpha,\beta)} \\ \boldsymbol{ma}_{(\alpha',\beta')} \end{pmatrix}, \boldsymbol{daam} \right\rangle^{n_1,\dots,n_s} = \int_{\alpha<\alpha_s<\dots<\alpha_1<\alpha'} (\alpha_1\beta_1)^{n_1-1} \dots (\alpha_s\beta_s)^{n_s-1} d\alpha_1 \dots d\alpha_s \qquad \text{(IV.2.16)}$$

si $\alpha < \alpha'$ *et par :*

$$\left\langle \begin{pmatrix} \boldsymbol{ma}_{(\alpha,\beta)} \\ \boldsymbol{ma}_{(\alpha',\beta')} \end{pmatrix}, \boldsymbol{daam} \right\rangle^{n_1,\dots,n_s} = (-1)^s \int_{\alpha'<\alpha_1<\dots<\alpha_s<\alpha} (\alpha_1\beta_1)^{n_1-1} \dots (\alpha_s\beta_s)^{n_s-1} d\alpha_1 \dots d\alpha_s \qquad \text{(IV.2.17)}$$

si $\alpha' < \alpha$.

Démonstration :

Fixons (α_0, β_0). Les moules ci-dessus définissent parfaitement l'opérateur étranger $\begin{pmatrix} \mathbf{ma}_{(\alpha_0,\beta_0)} \\ \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix}$. Si on pose maintenant :

$$\mathbf{op}_{(\alpha,\beta)} = \mathbf{ma}_{(\alpha_0,\beta_0)} \begin{pmatrix} \mathbf{ma}_{(\alpha_0,\beta_0)} \\ \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix}$$

alors on peut montrer que celui-ci est une moyenne et de plus :

$$\mathbf{op}_{(\alpha_0,\beta_0)} = \mathbf{ma}_{(\alpha_0,\beta_0)} \tag{IV.2.18}$$

et

$$\partial_\alpha \mathbf{op}_{(\alpha,\beta)} = \frac{1}{\alpha\beta} \mathbf{op}_{(\alpha,\beta)} \mathbf{daa}_{(\alpha,\beta)} \tag{IV.2.19}$$

On en déduit donc sans difficultés que pour tout (α, β), $\mathbf{op}_{(\alpha,\beta)} = \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)}$. Ceci montre que $\begin{pmatrix} \mathbf{ma}_{(\alpha_0,\beta_0)} \\ \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix}$, défini par le moule précédent, est bien l'opérateur de passage de $\mathbf{ma}_{(\alpha_0,\beta_0)}$ à $\mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)}$, ce qui achève la démonstration. □

Ces moules (IV.2.16) et (IV.2.17) vont nous être très utiles car, en particularisant judicieusement (α, β) et (α', β'), nous en tirerons les propriétés remarquables de tous les opérateurs définis précédemment, ainsi que celles des moyennes de Catalan.

2.4. Propriétés des opérateurs et des moyennes de Catalan.

Nous allons d'abord examiner les opérateurs infinitésimaux en appliquant la proposition 2 aux paramètres $(0, 1)$ et $(1, 0)$:

PROPOSITION 3.— *L'opérateur* **daam** *est une dérivation de* $RAMIF(\mathbf{R}^+//\mathbf{N}^*, int.)$. *Il en est naturellement de même pour* $\mathbf{da}_{\alpha,\beta}$, $\mathbf{daa}_{\alpha,\beta}$ *et* **dam**.

Démonstration :

Prenons le cas de **daam**. Il est évident que si **daam** est une dérivation, alors $\mathbf{da}_{\alpha,\beta}$, $\mathbf{daa}_{\alpha,\beta}$ et **dam** le sont aussi. Appliquons la proposition 2 aux couples $(0, 1)$ et $(1, 0)$. On remarque alors (voir (IV.2.9)) que :

$$\mathbf{ma}_{(0,1)} = \mathbf{mul}$$

et

$$\mathbf{ma}_{(1,0)} = \mathbf{mur}$$

On a donc, comme $\mathbf{lur} = \begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix}$:

$$\langle \mathbf{lur}, \mathbf{daam} \rangle^{n_1,\ldots,n_s} = \int_{0<\alpha_s<\ldots<\alpha_1<1} (\alpha_1\beta_1)^{n_1-1}\ldots(\alpha_s\beta_s)^{n_s-1} d\alpha_1 \ldots d\alpha_s \tag{IV.2.20}$$

Or ce moule, vu la nature de l'intégrande et du chemin d'intégration, est symétral et, comme **lur** est un automorphisme de convolution, **daam** est nécessairement une dérivation. □

En appliquant maintenant la proposition 2 aux paramètres $(0,1)$ et (α,β), on trouve le résultat suivant :

PROPOSITION 4.— *Pour toutes valeurs du paramètre* (α,β) ($\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, $\alpha+\beta=1$), *les moyennes* $\mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)}$ *préservent la convolution.*

Démonstration :

De même que dans la démonstration précédente, comme $\mathbf{ma}_{(0,1)} = \mathbf{mul}$, on a :

$$\left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix}, \mathbf{daam} \right\rangle^{n_1,\ldots,n_s} = \int_{0<\alpha_s<\ldots<\alpha_1<\alpha} (\alpha_1\beta_1)^{n_1-1}\ldots(\alpha_s\beta_s)^{n_s-1} d\alpha_1 \ldots d\alpha_s \tag{IV.2.21}$$

Ici encore, ce moule, de par la forme de son chemin d'intégration, est symétral. Or on vient de voir que **daam** est une dérivation : c'est donc que $\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix}$ est un automorphisme de convolution. Mais comme :

$$\mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)} = \mathbf{mul} \begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix}$$

et que **mul** préserve la convolution, il est maintenant clair que la moyenne $\mathbf{ma}_{(\alpha,\beta)}$ préserve aussi la convolution. □

Nous terminerons en remarquant que la proposition 4 assure que tous les opérateurs de passages rencontrés précédemment sont automatiquement des automorphismes de convolution.

Nous allons maintenant étudier les relations d'analycité entre les différents opérateurs de Catalan que nous venons de définir. Mais avant cela nous reviendrons sur la notion de «moins analytique que».

3. Retour sur la comparaison d'analycité.

Nous commencerons par donner un critère suffisant pour comparer l'analycité de deux opérateurs puis nous introduirons, pour un couple automorphisme-dérivation, la notion d'*appariement* et nous verrons que l'appariement implique l'équianalycité.

3.1. Critère suffisant de comparaison.

Reprenons la notion de réduction. Soit *red* une réduction de *ALIEN* dans $Endo(\mathbf{C}[[x_1,\dots,x_\nu]])$. Soit **op** un opérateur étranger dont la réduction $red(\mathbf{op})$ préserve les germes analytiques. On a alors

$$\|red(\mathbf{op}_{n_s})\dots red(\mathbf{op}_{n_1})\|_{V,V'} \ < \ C^n_{V,V'}\ s! \tag{IV.3.22}$$

avec des normes relatives à deux voisinages bornés $V' \subset V$ de 0 dans $\mathbf{C}^\nu$:

$$\|\varphi\|_V \overset{def}{=} \sup_{x\in V} \mid \varphi(x) \mid \quad (\varphi \in \mathbf{C}\{x_1,\dots,x_\nu\}) \tag{IV.3.23}$$

$$\|red(\mathbf{op}_{n_s})\dots red(\mathbf{op}_{n_1})\|_{V,V'} \overset{def}{=} \sup_{\|\varphi\|_V\leqslant 1} \|red(\mathbf{op}_{n_s})\dots red(\mathbf{op}_{n_1}).\varphi\|_{V'} \tag{IV.3.24}$$

De plus, pour tout $\rho > 0$, on peut choisir V, V' tels que $C_{V,V'} \leqslant \rho$.

Si maintenant $\mathbf{op}^*$ est un opérateur qui s'exprime en fonction de **op** grâce à un moule $\langle\mathbf{op}^*,\mathbf{op}\rangle^\bullet$, on peut donner le critère suivant :

PROPOSITION 5.— *Si il existe une constante C telle que pour tout séquence on ait :*

$$\mid \langle op^*, op\rangle^{n_1,\dots,n_s} \mid \leqslant C^{n_1+\dots+n_s}\frac{1}{s!} \tag{IV.3.25}$$

*alors **op** est «moins analytique que» $\boldsymbol{op}^*$.*

Démonstration : Supposons avoir une réduction telle que $red(\mathbf{op})$ soit analytique et montrons qu'alors $red(\mathbf{op}^*)$ l'est aussi. On a

$$red(\mathbf{op}^*_n) = \sum_{n_1+\dots+n_s=n} \langle\mathbf{op}^*,\mathbf{op}\rangle^{n_1,\dots,n_s}\, red(\mathbf{op}_{n_s})\dots red(\mathbf{op}_{n_1}) \tag{IV.3.26}$$

d'où

$$\begin{aligned}\|red(\mathbf{op}^*_n)\| &\leqslant \sum_{n_1+\dots+n_s=n} \mid \langle\mathbf{op}^*,\mathbf{op}\rangle^{n_1,\dots,n_s} \mid C^n_{V,V'}\ s! \\ &\leqslant \sum_{s=1}^{n} C^{s-1}_{n-1} C^n C^n_{V,V'} \\ &\leqslant (2CC_{V,V'})^n\end{aligned}$$

En choisissant V, V' tels que $C_{V,V'} \leqslant \rho < 1/2$, on obtient :

$$\|red(P)\|_{V,V'} \leqslant \frac{1}{1-2\rho}$$

Ce qui prouve que $red(\mathbf{op}^*)$ est stable sur $\mathbf{C}\{x_1, \ldots, x_\nu\}$ et donc que $\mathbf{op}^*$ est moins analytique que $\mathbf{op}$. □

On peut remarquer qu'il s'agit ici d'un critère suffisant mais pas nécessaire. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer le cas de deux automorphismes de convolution réciproques de $ALIEN$. Par réduction, ceux-ci deviennent des automorphismes de substitution réciproques qui sont par conséquent soit tous deux analytiques soit tous deux formels. Or, dans ce cas précis, on obtient deux opérateurs «équianalytiques», dont les moules de passage ne vérifient pas les hypothèses de la proposition précédente.

En regardant justement deux automorphismes réciproques, nous allons, dans le paragraphe suivant, construire une dérivation tout aussi analytique que ces automorphismes.

3.2. Dérivations et automorphismes appariés.

Nous rappelons la définition suivante :

DÉFINITION 10.— *Soient D une dérivation et P et Q un automorphisme et son inverse. D et P sont dits appariés si :*

$$D = P^{-1}(\nabla P) = Q(\nabla Q^{-1}) \tag{IV.3.27}$$

avec bien sûr :

$$(\nabla P)^{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n} = n\, P^{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n} \quad ((\nabla P)^{\emptyset} = 0)$$

Il n'est pas difficile de voir que l'on a :

$$D_n = nP_n + \sum_{n_1+n_2=n} n_1 Q_{n_2} P_{n_1} \tag{IV.3.28}$$

avec $D = \sum D_n$; $P = 1 + \sum P_n$; $Q = 1 + \sum Q_n$.

On calcule aisément les moules de passage correspondants :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \langle D,P\rangle^{n_1,\dots,n_s} & = & (-1)^{s+1}n_1 \\ \langle D,Q\rangle^{n_1,\dots,n_s} & = & (-1)^{s}n_s \\ \langle P,D\rangle^{n_1,\dots,n_s} & = & \dfrac{1}{\hat{n}_1\dots\hat{n}_s} \\ \langle Q,D\rangle^{n_1,\dots,n_s} & = & \dfrac{(-1)^s}{\check{n}_1\dots\check{n}_s} \end{array}\right. \tag{IV.3.29}$$

avec, bien sûr, $\hat{n}_i = n_i + \dots + n_s$ et $\check{n}_i = n_1 + \dots + n_i$.

Des identités (IV.3.28) et (IV.3.29) on déduit facilement :

PROPOSITION 6.— *Si D et $P = Q^{-1}$ sont appariés, alors D,P et Q sont équianalytiques.*

Démonstration :

Soit *red* une réduction de ALIEN dans $Endo(\mathbb{C}[[x_1,\dots,x_\nu]])$. Nous savons déjà que pour toute réduction, $red(P)$ et $red(Q)$, en tant qu'automorphismes de substitution réciproques de $\mathbb{C}[[x_1,\dots,x_\nu]]$, sont automatiquement simultanément analytiques ou non-analytiques. Il ne reste donc qu'à montrer l'équianalycité avec D. On montre grâce au critère développé précédemment que D est moins analytique que P car les égalités (IV.3.29) donnent :

$$|\langle P,D\rangle^{n_1,\dots,n_s}| \leqslant \frac{1}{s!}$$

Inversement, supposons que $red(P)$ (et donc $red(Q)$) est analytique. On a de la même façon, voir (IV.3.22) :

$$\|red(Q_{n_2})red(P_{n_1})\|_{V,V'} \leqslant 2C^n_{V,V'}$$

Alors, par l'équation (IV.3.28), $red(D_n).\varphi$ est une fonction analytique et :

$$\begin{array}{lcl} \|red(D_n)\|_{V,V'} & \leqslant & n\|red(P_n)\|_{V,V'} + \displaystyle\sum_{n_1+n_2=n} n_1 C^n_{V,V'} \\ \|red(D_n)\|_{V,V'} & \leqslant & C^n_{V,V'}\left(n + 2\displaystyle\sum_{n_1=1}^{n-1} C^n_{V,V'}\right) \\ \|red(D_n)\|_{V,V'} & \leqslant & n^2 C^n_{V,V'} \end{array}$$

En choisissant correctement les voisinages V, V', on montre bien que $red(D)$ laisse $\mathbf{C}\{x_1,\ldots,x_\nu\}$ stable, ce qui achève la démonstration. □

Nous allons maintenant appliquer ces propriétés aux opérateurs de Catalan et nous en déduirons que la moyenne **man** est une bonne moyenne.

4. La moyenne de Catalan man.

Nous avons vu que **man** ($= \mathbf{ma}_{(1/2,1/2)}$) préserve la convolution (**P1**). Il est clair que cette moyenne préserve la réalité (**P2**) et on peut tout de suite énoncer le résultat suivant :

PROPOSITION 7. — *La moyenne de Catalan est une bonne moyenne : elle préserve la croissance latérale.*

Schéma de la démonstration : Il s'agit de montrer par exemple que $\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{mur} \end{pmatrix}$ (i.e. **lur**) est moins analytique que $\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{man} \end{pmatrix}$. Pour cela, on va faire intervenir la dérivation **daam**. On a en effet

$$\left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{man} \end{pmatrix}, \mathbf{daam} \right\rangle^{n_1,\ldots,n_s} = \int\limits_{0<\alpha_s<\ldots<\alpha_1<1/2} (\alpha_1\beta_1)^{n_1-1}\ldots(\alpha_s\beta_s)^{n_s-1} d\alpha_1\ldots d\alpha_s \tag{IV.4.30}$$

et donc, pour une séquence $n_1,\ldots,n_s$, ceci est majoré en valeur absolue par $1/s!$. Grâce à la proposition 5, on obtient que **daam** est moins analytique que $\begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{man} \end{pmatrix}$. Maintenant, si on montre que **lur** est moins analytique que **daam**, par transitivité, on obtient le résultat voulu.

C'est ce que nous allons montrer dans les deux paragraphes suivant. Nous donnerons d'abord une relation implicite entre **daam** et une dérivation **door** appariée à **lur**, puis nous montrerons que celle-ci, équianalytique à **lur** (proposition 6), est moins analytique que **daam**.

4.1. Relation entre daam et door.

Le moule $\langle \mathbf{daam}, \mathbf{lur}\rangle^\bullet$ relie **daam** à **lur**. On peut appliquer l'opérateur ∇ sur cette relation et comme :

$$\nabla(\mathbf{op}_1\mathbf{op}_2) = (\nabla\mathbf{op}_1)\mathbf{op}_2 + \mathbf{op}_1(\nabla\mathbf{op}_2)$$

on obtient

$$\nabla\mathbf{daam} = \sum_{s\geqslant 1}\sum_{n_i\geqslant 1} \langle \mathbf{daam}, \mathbf{lur}\rangle^{n_1,\ldots,n_s} \left(\sum_{k=1}^{s} \mathbf{lur}_{n_s}\ldots\nabla\mathbf{lur}_{n_k}\ldots\mathbf{lur}_{n_1}\right) \tag{IV.4.31}$$

On peut exprimer $\nabla\mathbf{lur}$ en fonction de $(\nabla\mathbf{lur})\mathbf{rul} = -\mathbf{lur}\nabla\mathbf{rul} \stackrel{def}{=} -\mathbf{door}$ qui est une dérivation appariée à **lur**. Et on a, pour n plus grand que 1 :

$$\nabla\mathbf{lur}_n = -\sum_{k=1}^{n} \mathbf{door}_k \mathbf{lur}_{n-k}$$

Si on remplace chaque composante homogène de **lur** par son expression en fonction de **daam**, on obtient, grâce aux crochets de Lie, la formule suivante :

$$\boxed{\nabla\mathbf{daam} = \textstyle\sum_{n_i \geqslant 1} Cac_{n_0}^{n_1,\ldots,n_s} [\mathbf{daam}_{n_s} \ldots [\mathbf{daam}_{n_1}, \mathbf{door}_{n_0}] \ldots]} \tag{IV.4.32}$$

avec

$$Cac_{n_0}^{n_1,\ldots,n_s} = -\sum_{\boldsymbol{n}^1 \ldots \boldsymbol{n}^t = n_1,\ldots n_s} \langle \mathbf{daam}, \mathbf{lur} \rangle^{n_0, \|\boldsymbol{n}^1\|, \ldots, \|\boldsymbol{n}^t\|} \langle \mathbf{lur}, \mathbf{daam} \rangle^{\boldsymbol{n}^1} \ldots \langle \mathbf{lur}, \mathbf{daam} \rangle^{\boldsymbol{n}^t} \tag{IV.4.33}$$

Mais, après calcul, $Cac_{n_0}^{n_1,\ldots,n_s}$ s'avère un peu plus simple et revêt une expression remarquable :

PROPOSITION 8.— *Pour tous entiers positifs $n_0, n_1, \ldots, n_s$ et n leur somme, on a :*

$$\boxed{\begin{gathered} Cac_{n_0}^{\emptyset} = -(2n-1) ka_{n_0 - 1} \\[1em] Cac_{n_0}^{n_1,\ldots,n_s} = -(2n-1) \sum_{p_0 + p_1 + \ldots + p_s = n_0 - 1} ka_{p_0} ka_{p_1} \ldots ka_{p_s} Sa^{p_1+n_1, p_2+n_2, \ldots, p_s+n_s} \\[1em] \textit{avec} \\[1em] Sa^{m_1,\ldots,m_s} = \frac{(-1)^s}{\check{m}_1 \check{m}_2 \ldots \check{m}_s} \end{gathered}} \tag{IV.4.34}$$

Pour une démonstration de cette propriété, le lecteur pourra se référer à [10].

Cette relation implicite entre $\nabla\mathbf{daam}$ et **door** va nous permettre maintenant de montrer que **door**, et donc **lur**, est moins analytique que **daam**.

4.2. door est moins analytique que daam.

Nous allons montrer que pour toute réduction telle que $red(\mathbf{lur})$, et donc $red(\mathbf{door})$ soient des opérateurs différentiels analytiques, $red(\mathbf{daam})$ est aussi analytique. Pour cela nous allons utiliser la relation implicite (IV.4.32) et certaines majorations de $Cac_{n_0}^{n_1,\dots,n_s}$. Commençons par cette majoration. Il n'est pas très dur de voir que pour $n = n_0 + \ldots + n_s$:

$$\left| \frac{1}{n} Cac_{n_0}^{n_1,\dots,n_s} \right| \leqslant 8^{n_0} 2^s \frac{1}{\check{n}_1 \ldots \check{n}_s} \qquad \text{(IV.4.35)}$$

avec, bien sûr, $\check{n}_i = n_1 + \ldots + n_i$.

Supposons maintenant qu'une réduction red soit telle que $red(\mathbf{door})$ est analytique (donc laisse stable $\mathbf{C}\{x_1, \dots, x_\nu\} = \mathbf{C}\{\boldsymbol{x}\}$). Comme **door** est une dérivation, la donnée de cette réduction équivaut à la donnée de ν germes de fonctions analytiques $v^1, \dots, v^\nu$ dans $\mathbf{C}\{x_1, \dots, x_\nu\}$ telles que :

$$V(\boldsymbol{x}) = red(\mathbf{door}) = \sum_{i=1}^{\nu} v^i(\boldsymbol{x}) x_i \partial_{x_i} \quad (v^i(0, \dots, 0) = 0) \qquad \text{(IV.4.36)}$$

Pour montrer qu'alors $red(\mathbf{daam})$ est analytique, il s'agit de s'assurer que les fonctions $a^1, \dots, a^s$ associées sont analytiques avec bien sûr :

$$A(\boldsymbol{x}) = red(\mathbf{daam}) = \sum_{i=1}^{\nu} a^i(\boldsymbol{x}) x_i \partial_{x_i} \quad (a^i(0, \dots, 0) = 0) \qquad \text{(IV.4.37)}$$

On remarquera qu'a priori les a^i sont des séries formelles en $x_1, \dots, x_\nu$. Pour montrer que ces fonctions sont analytiques, nous aurons besoin de quelques notations et propriétés. Soit F une dérivation sur $\mathbf{C}\{\boldsymbol{x}\}$ (ou $\mathbf{C}[[\boldsymbol{x}]]$), alors on a :

$$\begin{aligned} F &= \sum_{i=1}^{\nu} f^i(\boldsymbol{x}) x_i \partial_{x_i} \\ &\text{avec} \\ f^i(\boldsymbol{x}) &= \sum_{l=l_1,\dots,l_\nu} f_l^i \boldsymbol{x}^l \quad (f^i(0, \dots, 0) = 0) \end{aligned}$$

Appelons F_n la composante homogène de degré n de F :

$$F_n = \sum_{i=1}^{\nu} \left(\sum_{|l| = l_1 + \ldots + l_\nu = n} f_l^i \boldsymbol{x}^l \right) x_i \partial_{x_i}$$

Finalement, nous noterons :

$$| F |_l = \sum_{i=1}^{\nu} | f_l^i |$$

On remarquera, à ce propos, que $F^{|\cdot|} = \sum_l \mid F \mid_l \boldsymbol{x}^l$ est analytique si et seulement si les f^i le sont ; donc si et seulement si F préserve l'analycité. On peut aussi observer que si F et G sont des dérivations sur $\mathbf{C}\{\boldsymbol{x}\}$ (ou $\mathbf{C}[[\boldsymbol{x}]]$), alors $[F_n, G_m]$ est une dérivation homogène de degré $m+n$ et on a :

$$\mid [F_n, G_m] \mid_l \leqslant 2 \mid n-m \mid \sum_{\substack{\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}=\boldsymbol{l} \\ |\boldsymbol{j}|=n \\ |\boldsymbol{k}|=m}} \mid F \mid_{\boldsymbol{j}} \mid G \mid_{\boldsymbol{k}} \tag{IV.4.38}$$

Cette dernière propriété résulte d'un calcul simple sur les dérivations et les crochets de Lie. En itérant cette propriété et en utilisant les formules (IV.4.32) et (IV.4.35), on trouve la majoration suivante :

$$\begin{aligned} &\mid \tfrac{1}{n} Cac_{n_0}^{n_1,\ldots,n_s} [A_{n_s} \ldots [A_{n_1}, V_{n_0}] \ldots] \mid_l \\ &\leqslant 8^{n_0} 4^s \left(\prod_{i=1}^{s} \frac{n_0 + \ldots + n_{i-1} - n_i}{n_1 + \ldots + n_i} \right) \left\{ A_{n_s}^{|\cdot|} \ldots A_{n_1}^{|\cdot|} V_{n_0}^{|\cdot|} \right\}_l \end{aligned} \tag{IV.4.39}$$

où $A_{n_i}^{|\cdot|}$ désigne le polynôme homogène de degré n_i dans $red(\mathbf{daam})^{|\cdot|}$ et où $\{\ldots\}_l$ signifie que l'on prend le coefficient de $x_1^{l_1} \ldots x_\nu^{l_\nu}$. Maintenant, on obtient facilement la majoration suivante :

$$\frac{\mid n_0 - n_1 \mid}{n_1} \frac{\mid n_0 + n_1 - n_2 \mid}{(n_1 + n_2)} \cdots \frac{\mid n_0 + \ldots + n_{s-1} - n_s \mid}{(n_1 + \ldots + n_s)} \leqslant 2^{n_0+s-1}$$

et donc on a :

$$\mid A_n \mid_l \leqslant \sum_{n_0 + \ldots + n_s = n} 16^{n_0} 8^s \{ A_{n_s}^{|\cdot|} \ldots A_{n_1}^{|\cdot|} V_{n_0}^{|\cdot|} \}_l \tag{IV.4.40}$$

Si on construit les coefficients $\widetilde{A}_l$ par la récurrence :

$$\widetilde{A}_l = \sum_{n_0 + \ldots + n_s = n} 16^{n_0} 8^s \{ \widetilde{A}_{n_s}^{|\cdot|} \ldots \widetilde{A}_{n_1}^{|\cdot|} V_{n_0}^{|\cdot|} \}_l \quad (n = l_1 + \ldots + l_\nu) \tag{IV.4.41}$$

alors d'une part, $\widetilde{A}_l$ majore $\mid red(\mathbf{daam})_n \mid_l$ et d'autre part, si :

$$\widetilde{A}(\boldsymbol{x}) = \sum_l \widetilde{A}_l \boldsymbol{x}^l$$

on a :

$$\widetilde{A}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{1 - 8\widetilde{A}(\boldsymbol{x})} V^{|\cdot|}(16\boldsymbol{x})$$

soit encore ($\widetilde{A}(0,0,\ldots,0)=0$) :

$$\widetilde{A}(\boldsymbol{x}) = \frac{1-\sqrt{1-32\mathit{red}(\mathbf{door})^{|\cdot|}(16\boldsymbol{x})}}{16} \tag{IV.4.42}$$

On peut maintenant conclure car si $\mathit{red}(\mathbf{door})$ préserve l'analycité, alors $\mathit{red}(\mathbf{door})^{|\cdot|}$ appartient à $\mathbf{C}\{x_1,\ldots,x_\nu\}$ et donc $\widetilde{A}(x_1,\ldots,x_\nu)$ aussi (en effet on a $\mathit{red}(\mathbf{door})^{|\cdot|}(0,\ldots,0)=0$). Mais cette série est une série majorante de $\mathit{red}(\mathbf{daam})^{|\cdot|}$ et donc cette fonction appartient aussi à $\mathbf{C}\{x_1,\ldots,x_\nu\}$. Comme on l'a vu précédemment, ceci suffit pour dire que $\mathit{red}(\mathbf{daam})$ préserve l'analycité. □

Cinquième partie

V. Application

Nous allons maintenant donner un exemple d'application des moyennes à la «resommation réelle». En effet, ces moyennes, dans tous les problèmes d'origine naturelle, vont nous permettre de surmonter les difficultés de la resommation, essentiellement dues à la transformation de Laplace.

Avant de donner cet exemple, nous reviendrons sur cette transformation et sur son action sur une “uniformisée” d'une fonction résurgente.

1. La transformation de Laplace.

Dans cette section, nous nous attacherons à essayer d'appliquer la transformation de Laplace dans la direction $\mathbf{R}^+$ à une fonction résurgente donnée. Après avoir donné quelques exemples simples, nous donnerons quelques définitions permettant, dans les problèmes d'origine naturelle, d'obtenir un procéde de resommation réelle.

1.1. Cas d'une fonction sans singularités.

Soit $\widehat{\varphi}$ une fonction de $RESUR(\mathbf{R}^+//\mathbf{N}^*, int.)$ ne possédant pas de singularités sur $\mathbf{R}^+$. Cette fonction est donc uniforme sur $\mathbf{R}^+$ et on peut donc sans difficulté appliquer la *transformation de Laplace tronquée :*

$$\forall z\in\mathbf{R}^+,\quad \forall\zeta_0\in\mathbf{R}^+,\quad \left(\mathcal{L}^{\zeta_0}\widehat{\varphi}\right)(z) = \int_0^{\zeta_0}\widehat{\varphi}(\zeta)e^{-z\zeta}d\zeta \tag{V.1.1}$$

Il est clair que si $\widehat{\varphi}$ est à croissance au plus exponentielle à l'infini, alors, pour z suffisamment grand, on obtient une resommation exacte ($\zeta_0 \to +\infty$) :

$$(\mathcal{L}\widehat{\varphi})(z) = \int_0^{+\infty} \widehat{\varphi}(\zeta)e^{-z\zeta}d\zeta \tag{V.1.2}$$

Dans le cas présent, seule la croissance à l'infini peut faire obstacle à la resommation exacte. Lorsque $\widehat{\varphi}$ possède des singularités sur $\mathbf{R}^+$, on ne peut espérer intégrer directement sur $\mathbf{R}^+$. Au problème de la bonne croissance se greffe celui du contournement des singularités.

1.2. Cas d'une fonction à "bonne croissance latérale".

Dans la pratique, par exemple pour la résolution de certaines équations différentielles réelles, on obtient, après transformation de Borel de la solution formelle, une fonction $\widehat{\varphi}$ de $RESUR(\mathbf{R}^+//\mathbf{N}^*, int.)$ ayant une *bonne croissance latérale* : $\widehat{\varphi}$ possède des singularités sur $\mathbf{N}^*$ et ses déterminations latérales, qu'on peut identifier à $\mathbf{mur}\widehat{\varphi}$ à droite et à $\mathbf{mul}\widehat{\varphi}$ à gauche, ont une croissance au plus exponentielle.

Dans ce cas, non seulement les sommations latérales tronquées :

$$\left(\mathcal{L}^{\zeta_0}\mathbf{mur}\widehat{\varphi}\right)(z) \stackrel{def}{=} \int_0^{\zeta_0} (\mathbf{mur}\widehat{\varphi})(\zeta)e^{-z\zeta}d\zeta \tag{V.1.3}$$

$$\left(\mathcal{L}^{\zeta_0}\mathbf{mul}\widehat{\varphi}\right)(z) \stackrel{def}{=} \int_0^{\zeta_0} (\mathbf{mul}\widehat{\varphi})(\zeta)e^{-z\zeta}d\zeta \tag{V.1.4}$$

sont bien définies, mais, du fait de la croissance, les sommations *exactes* $\mathcal{L}\mathbf{mur}$ et $\mathcal{L}\mathbf{mul}$ le sont aussi.

Du fait que ces deux moyennes préservent la convolution (**P1**), on peut alors affirmer que, même dans les problèmes *non linéaires*, on obtient par ce procédé deux germes solutions exactes de l'équation initiale.

Cependant, ces sommations détruisent la réalité : Si $\widehat{\varphi}$ est la transformée de Borel d'une série formelle réelle, alors $\widehat{\varphi}$ est réelle à la racine de $\mathbf{R}^+$ mais, du fait de l'existence de singularités, $\mathbf{mur}\widehat{\varphi}$ et $\mathbf{mul}\widehat{\varphi}$ sont complexes conjuguées et il en va de même pour $\mathcal{L}\mathbf{mur}\widehat{\varphi}$ et $\mathcal{L}\mathbf{mul}\widehat{\varphi}$.

On peut aussi remarquer qu'on ne peut se contenter de faire la demi-somme des deux germes obtenus. On obtient bien un germe réel mais ce procédé, qui ne préserve plus la structure d'algèbre (**P1**), ne permet pas d'obtenir une solution dans tous les problèmes non linéaires.

Dans ce cas, le plus fréquent, la seule utilisation de **mul** et **mur** ne permet pas d'obtenir un procédé de resommation réelle.

1.3. Les moyennes P1, P2. Les sommations moyennes tronquées.

Afin de pouvoir surmonter ces difficultés, nous devrons utiliser une moyenne **m** qui d'emblée préserve à la fois la convolution (**P1**) et la réalité (**P2**). Pour une fonction $\widehat{\varphi}$ de $RESUR(\mathbf{R}^+//\mathbf{N}^*, int.)$, on peut définir une sommation moyenne tronquée :

$$\left(\mathcal{L}^{\zeta_0}\mathbf{m}\widehat{\varphi}\right)(z) \stackrel{def}{=} \int_0^{\zeta_0} \mathbf{m}\widehat{\varphi}(\zeta)e^{-z\zeta}d\zeta \qquad \text{(V.1.5)}$$

Si de plus la limite existe lorsque ζ_0 tend vers l'infini, alors on aura bien obtenu un procédé de resommation réelle. C'est bien sur cette propriété que l'on veut obtenir. Cependant les fontions résurgentes $\widehat{\varphi}(\zeta)$ d'origine naturelle ont tendance à croître surexponentiellement sur les chemins qui traversent $\mathbf{R}^+$ une infinité de fois, même quand, sur les chemins latéraux (droit et gauche) elles présentent une croissance exponentielle régulière. Or les moyennes uniformisantes **m**, surtout celles qui vérifient les propriétés **P1** et **P2**, font nécessairement intervenir les déterminations de $\widehat{\varphi}(\zeta)$ sur ces chemins à forte croissance. D'où la nécessité impérative de choisir une moyenne **m** qui "préserve la croissance latérale", i.e. telle que l'*uniformisée* $(\mathbf{m}\widehat{\varphi})(\zeta)$ soit à croissance exponentielle, et donc capable de subir la transformation de Laplace.

La propriété **P3**, telle qu'elle a été énoncée (cf section 2, partie III), ne semble pas rendre compte directement de cette bonne croissance. Cependant, pour les fonctions résurgentes d'origine naturelle, nous pourrons généralement conclure :

— Dans les cas que nous rencontrerons, $\widehat{\varphi}$ possèdera une croissance latérale au plus exponentielle. Ceci nous permettra de donner un sens à $\mathcal{L}$**mur** et $\mathcal{L}$**mul**.

— L'action des opérateurs étrangers s'identifie à l'action de certains opérateurs différentiels ordinaires. C'est l'équation du pont. Elle fournira une réduction de $ALIEN$ propre au problème considéré.

— Enfin, grâce aux opérateurs étrangers, on peut relier les sommations moyennes tronquées à celles concernant **mur** ou **mul**. C'est alors grâce à la propriété **P3**, appliquée à la réduction donnée, que nous pourrons prouver la convergence des sommations moyennes tronquées.

Précisons ce dernier point. Tout d'abord, on peut faire intervenir les automorphismes de passage :

$$\mathcal{L}^{\zeta_0}(\mathbf{m}\,\widehat{\varphi}) = \mathcal{L}^{\zeta_0}\left(\mathbf{mul}\begin{pmatrix}\mathbf{mul}\\ \mathbf{m}\end{pmatrix}\widehat{\varphi}\right) \tag{V.1.6}$$

$$\mathcal{L}^{\zeta_0}(\mathbf{m}\,\widehat{\varphi}) = \mathcal{L}^{\zeta_0}\left(\mathbf{mur}\begin{pmatrix}\mathbf{mur}\\ \mathbf{m}\end{pmatrix}\widehat{\varphi}\right) \tag{V.1.7}$$

et on peut alors utiliser l'expression suivante qui permettra généralement de conclure grâce à la propriété **P3** et à l'équation du pont.

Pour toute moyenne **m** et tout opérateur étranger stationnaire, $\mathbf{m}(\mathbf{op}\widehat{\varphi})$ est bien défini et si **Op** est l'opérateur propre associé à **op**, on a :

$$\mathcal{L}^{\zeta_0}(\mathbf{m}(\mathbf{op}\widehat{\varphi})) = \sum_{k=0}^{E(\zeta_0)} e^{-kz}\mathcal{L}^{\zeta_0-k}\mathbf{m}(\mathbf{Op}_k\widehat{\varphi}) \tag{V.1.8}$$

Cette relation s'obtient sans difficulté en appliquant la définition des moyennes et des opérateurs étrangers.

Nous pouvons maintenant donner des exemples de resommation réelle. Mais avant cela, revenons un instant sur la portée de ce procédé.

1.4. Remarques sur la généralisation de ce procédé.

Nous avons défini auparavant les moyennes agissant sur les fonctions résurgentes à singularités intégrables au-dessus de $\mathbf{N}^*$. Toutefois, J. Ecalle a montré que l'on peut étendre ces procédés à des algèbres de fonctions résurgentes beaucoup plus générales (cf [3]). Nous nous contenterons ici d'en donner une idée grâce aux remarques suivantes :

— Les opérateurs étrangers propres se généralisent à l'algèbre des fonctions à singularités non-intégrables au-dessus de $\mathbf{N}$. Grâce aux équations (V.1.6) à (V.1.8), on peut alors généraliser les sommations moyennes tronquées à une telle algèbre.

— De même, J. Ecalle a montré que ces moyennes se généralisent au cas où les fonctions résurgentes considérés ont leurs singularités (intégrables ou non) au-dessus non plus de $\mathbf{N}$ mais d'un semigroupe additif discret $\boldsymbol{\Omega}$ de $\mathbf{R}^+$.

— Enfin, nous nous sommes interessés ici aux séries divergentes resommables par les transformations de Borel et Laplace. Dans le cas le plus général, les séries divergentes d'origine naturelle ne sont pas directement sommables par ce procédé. Elles possèdent plusieurs *temps critiques*. On peut les resommer par un procédé d'accélérosommation qui fait intervenir autant de transformations intégrales que de temps critiques. Dans ce cas, encore une fois, l'utilisation des bonnes moyennes uniformisantes permet d'obtenir une accélérosommation réelle (cf [3]).

Nous pouvons revenir maintenant au problème considéré.

2. Conjugaison réelle de champs de vecteurs réels.

Nous allons tout d'abord énoncer les résultats obtenus puis nous reviendrons sur leur démonstration en examinant de plus près la résurgence des objets étudiés.

2.1. Résultats.

Considérons un champ de vecteurs réel résonnant :

$$X = (x_1 + g(x_1, x_2))\partial_{x_1} - (x_2)^2\partial_{x_2} \quad (g(x_1, x_2) \in x_1 x_2 \mathbf{R}\{x_1, x_2\}) \tag{V.2.9}$$

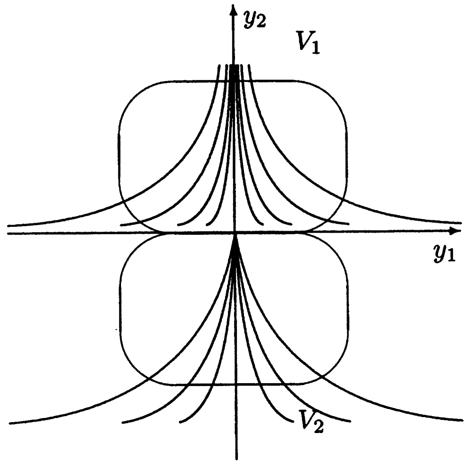
qui est formellement conjugué à :

$$Y = y_1\partial_{y_1} - (y_2)^2\partial_{y_2} \tag{V.2.10}$$

La conjugante réelle et formelle :

$$(y_1, y_2) \mapsto (x_1 = \tilde{\varphi}(y_1, y_2), x_2 = y_2) \tag{V.2.11}$$

est génériquement divergente mais aussi résurgente en la variable infiniment grande $z = 1/y_2$ ($\tilde{\varphi}(y_1, y_2) = \tilde{\varphi}(y_1, z^{-1})$) et la transformation de Borel formelle $z^{-1} \mapsto \zeta$ produit génériquement des singularités au-dessus de $\mathbf{Z}$. Cette apllication formelle peut être resommée (voir [5]) dans des voisinages suffisamment petits V_1 et V_2 :



mais ces premières resommations sectorielles ne sont pas réelles (car on utilise les moyennes **mul** et **mur**). Si on considère X et Y en tant que champs de vecteurs complexes, ces resommations sectorielles ne préserveront pas le plan réel.

Si l'on veut que la resommation transforme cette conjugante formelle en une application sectorielle *réelle*, nous aurons besoin des moyennes uniformisantes :

— Sur des petits voisinages du type V_1, les bonnes moyennes uniformisantes sont une nécessité (du fait des singularités sur $\mathbf{R}^+$ dans le plan des ζ) et chacune d'entre elles fournira une resommée sectorielle réelle qui conjugue les champs X et Y sur V_1.

— Sur des petits voisinages de type V_2, la structure des singularités réelles négatives est très simple et toute moyenne préservant la réalité et la convolution (mais pas nécessairement la croissance latérale) fournira une resommée sectorielle réelle. Ces résultats sont dus à J. Ecalle (voir [5]).

On peut noter que ces resommées sectorielles dépendent du choix de la moyenne. Mais ceci est tout à fait normal. Le flot de Y est paramétré par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y_1 & = & ue^z \\ & & \\ y_2 & = & 1/z \end{array} \right. \qquad (u \in \mathbf{R}\ ;\ z \in \mathbf{R}^*) \tag{V.2.12}$$

Dans le demi-plan supérieur ($y_2 > 0$):

Soient $\mathbf{m}_1$ et $\mathbf{m}_2$ deux bonnes moyennes uniformisantes et V_1 un voisinage suffisamment petit tel que $\mathbf{m}_1$ et $\mathbf{m}_2$ fournissent deux resommations sectorielles réelles de la conjugante formelle. Grâce à la paramétrisation (z,u) du flot de Y, ces deux resommées fournissent des paramétrisations réelles (z,u) du flot de X. Pour $(ue^z, 1/z) \in V_1$ $(-\rho < ue^z < \rho;$ $0 < z^{-1} < \rho)$:

$$\mathbf{m}_1 \ : \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & {}^{\mathbf{m}_1}x(z,u) \\ & & \\ x_2 & = & 1/z \end{array} \right. \tag{V.2.13}$$

$$\mathbf{m}_2 \ : \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & {}^{\mathbf{m}_2}x(z,u) \\ & & \\ x_2 & = & 1/z \end{array} \right. \tag{V.2.14}$$

Ainsi chaque moyenne $\mathbf{m}_i$ fournit une paramétrisation locale réelle en (z,u) du flot de X. Mais il n'y a aucune ambiguité : $\mathbf{m}_1$ et $\mathbf{m}_2$ étant fixées, il existe un germe $f(u)$ (dépendant de $\mathbf{m}_1$, $\mathbf{m}_2$ et X, et $f(u) \in u + u^2\mathbf{R}\{u\}$) tel que :

$$^{\mathbf{m}_1}x(z,u) = {}^{\mathbf{m}_2}x(z, f(u)) \tag{V.2.15}$$

Le choix d'une bonne moyenne uniformisante induit un choix de la paramétrisation de l'espace des trajectoires de X, pour x_1, x_2 suffisamment petits positifs. On peut remarquer que la trajectoire «centrale'» (correspondant à $y_1 = 0$, $y_2 = 1/z$, $z > 0$) ne change pas :

$$^{\mathbf{m}_1}x(z,0) = {}^{\mathbf{m}_2}x(z,0) \tag{V.2.16}$$

Dans le demi-plan inférieur $(y_2 < 0)$:

Encore une fois, sur un petit voisinage V_2, deux moyennes $\mathbf{m}_1$ et $\mathbf{m}_2$ de type **P1, P2** fourniront deux resommées sectorielles réelles de la conjugante formelle. En utilisant les mêmes notations, chaque moyenne $\mathbf{m}_i$ donne lieu à une paramétrisation (z,u) réelle locale du flot de X. Encore une fois, il n'y a aucune ambiguité : $\mathbf{m}_1$ et $\mathbf{m}_2$ étant fixées, il existe une constante réelle c (dépendant de $\mathbf{m}_1$, $\mathbf{m}_2$ et X) telle que :

$$^{\mathbf{m}_1}x(z,u) = {}^{\mathbf{m}_2}x(z, u + c) \tag{V.2.17}$$

Ceci signifie simplement que, pour les trajectoires de X dans le demi-plan inférieur, il n'y a pas de candidat meilleur que les autres pour le rôle de «trajectoire centrale» car on peut avoir :

$$^{\mathbf{m}_1}x(z,0) \neq {}^{\mathbf{m}_2}x(z,0) \tag{V.2.18}$$

Afin de pouvoir démontrer ces résultats nous auront besoin d'analyser la résurgence de la conjugante formelle.

2.2. Retour sur la résurgence.

Nous allons nous intéresser de plus près au flot du champ de vecteurs X. On a une paramétrisation formelle de ces trajectoires donnée par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \widetilde{x}_1(z,u) & = & \sum_{r=0}^{+\infty} \widetilde{\varphi}_r(z) u^r e^{rz} \text{ avec } \widetilde{\varphi}_r(z) \in \mathbf{C}[[z^{-1}]] \\ \\ \widetilde{x}_2(z,u) & = & z^{-1} \end{array}\right. \tag{V.2.19}$$

pour z grand et u petit.

J. Ecalle a montré les résultats suivants (cf [5]) :

Les composantes $\widetilde{\varphi}_n(z)$ sont résurgentes en z, de réseau de résurgence $\{-1\} \cup \mathbf{N}^*$. Dans le modèle formel, on peut écrire que :

$$e^{-nz}\mathbf{Dun}_n \widetilde{x}_1(z,u) = \mathbf{A}_n \,.\, \widetilde{x}_1(z,u) \text{ pour } n = -1, 1, 2, 3, \ldots \tag{V.2.20}$$

avec

$$\mathbf{A}_n = A_n u^{n+1} \partial_u \quad (A_n \in i\mathbf{R}) \tag{V.2.21}$$

Les singularités dans le plan des ζ ne sont pas forcément intégrables mais nous avons vu que ceci n'est pas un obstacle majeur.

Si z est positif, pour resommer, on considère dans le plan des ζ l'axe $\mathbf{R}^+$. Alors, pour tout r, $\widehat{\varphi}_r(\zeta)$ est une fonction résurgente à singularités au-dessus de $\mathbf{N}^*$ et ses déterminations latérales $\mathbf{mul}\widehat{\varphi}_r$ et $\mathbf{mur}\widehat{\varphi}_r$ sont à croissance au plus exponentielle. On peut donc poser, pour z positif suffisamment grand, $\mathcal{L}\mathbf{mur}\widehat{\varphi}_r = {}^{\mathbf{mur}}\varphi_r(z)$ et $\mathcal{L}\mathbf{mul}\widehat{\varphi}_r = {}^{\mathbf{mul}}\varphi_r(z)$. De plus, pour ue^z suffisamment petit, les séries ${}^{\mathbf{mul}}x_1(z,u) = \sum_0^{+\infty} {}^{\mathbf{mul}}\varphi_r(z) u^r e^{rz}$ et ${}^{\mathbf{mur}}x_1(z,u) = \sum_0^{+\infty} {}^{\mathbf{mur}}\varphi_r(z) u^r e^{rz}$ convergent et fournissent deux resommées de $\widetilde{x}_1(z,u)$. Cependant, celles-ci ne sont pas réelles.

De même, quitte à changer z en $-z$, et donc ζ en $-\zeta$, pour z négatif suffisamment grand, on obtient le même type de résultat, bien que dans ce cas les réseau de singularités soit beaucoup plus simple (seul $\mathbf{Dun}_{-1}$ agit).

On peut maintenant étudier le problème de la resommation réelle. Nous distinguerons le cas $z >> 0$ et $z << 0$ et dans chacun de ces cas nous commencerons par étudier le passage de ${}^{\mathbf{mur}}x_1(z,u)$ à ${}^{\mathbf{mul}}x_1(z,u)$.

2.3. Sur l'axe réel positif.

Réduction de $ALIEN$.

Les équations (V.2.20) et (V.2.21) fournissent un candidat pour la réduction de $ALIEN$ dans $Endo(\mathbf{C}[[u]])$:

$$red(\mathbf{Dun}_n) = A_n u^{n+1}\partial_u \quad (n \geqslant 1)$$

et de ce fait, on obtient par exemple la réduction de **Lur**, qui est un automorphisme de substitution de $\mathbf{C}[[u]]$ s'écrivant :

$$red(\mathbf{Lur}_n) = \mathbf{B}_n \tag{V.2.22}$$

avec

$$\mathbf{B}_n.u^m = \beta_{n,m}u^{n+m}$$

et si $\mathbf{B} = 1 + \sum_{n\geqslant 1}\mathbf{B}_n$:

$$\forall g \in \mathbf{C}[[u]] \quad \mathbf{B}.g = g \circ f \quad \text{avec} \quad f(u) = \mathbf{B}.u \in \mathbf{C}[[u]]$$

Comme précédemment, cela signifie dans le modèle formel que :

$$e^{-nz}\mathbf{Lur}_n\widetilde{x}_1(z,u) = \mathbf{B}_n \ .\ \widetilde{x}_1(z,u) \text{ pour } n = -1, 1, 2, 3, \ldots \tag{V.2.23}$$

Soit encore en examinant chaque composante que :

$$\mathbf{Lur}_n\widetilde{\varphi}_m = \beta_{m-n,n}\widetilde{\varphi}_{n-m} \ (resp.\ 0) \ si\ n \leqslant m \ (resp.\ n > m) \tag{V.2.24}$$

De même, si on considère une moyenne préservant la convolution (**P2**), alors en notant

$$\mathbf{lum} = \begin{pmatrix} \mathbf{mul} \\ \mathbf{m} \end{pmatrix}$$

et **Lum** l'opérateur étranger propre associé, alors $red(\mathbf{Lum})$ est encore un automorphisme de substitution de $\mathbf{C}[[u]]$ qui peut être défini soit par ses composantes homogènes $\mathbf{C} = 1 + \sum_{n\geqslant 1}\mathbf{C}_n$ ($\mathbf{C}_n.u^m = \gamma_{n,m}u^{n+m}$), soit par la série formelle $h(u) = \mathbf{C}.u$.

Nous allons voir maintenant que cette réduction va jouer un rôle crucial dans les procédés de resommation.

Réduction et sommations moyennes.

Considérons une moyenne préservant la convolution. Si on pose :

$$ {}^{\mathbf{m}}_{\zeta_0}x_1(z,u) = \sum_{n\geqslant 0} u^n e^{nz} \mathcal{L}^{\zeta_0}\mathbf{m}\widehat{\varphi}_n \tag{V.2.25} $$

Alors on a le résultat suivant :

$$ \begin{aligned} {}^{\mathbf{m}}_{\zeta_0}x_1(z,u) &= \sum_{n\geqslant 0} u^n e^{nz} \mathcal{L}^{\zeta_0}\mathbf{mul}(\mathbf{lum}\widehat{\varphi}_n) \\ &= \sum_{n\geqslant 0} u^n e^{nz} \sum_{k=0}^{E(\zeta_0)} e^{-kz}\mathcal{L}^{\zeta_0-k}\mathbf{mul}(\mathbf{Lum}_k\widehat{\varphi}_n) \\ &= \sum_{k=0}^{E(\zeta_0)} \sum_{n\geqslant k} u^n e^{(n-k)z}\gamma_{n-k,k}\mathcal{L}^{\zeta_0-k}\mathbf{mul}\widehat{\varphi}_n \\ {}^{\mathbf{m}}_{\zeta_0}x_1(z,u) &= \sum_{k=0}^{E(\zeta_0)} \mathbf{C}_k . {}^{\mathbf{mul}}_{\zeta_0-k}x_1(z,u) \end{aligned} $$

Ceci va nous permettre de conclure. En effet, si $\mathbf{m} = \mathbf{mur}$, alors, lorsque ζ_0 tend vers l'infini, on obtient :

$$ {}^{\mathbf{mur}}x_1(z,u) = \mathbf{B}.{}^{\mathbf{mul}}x_1(z,u) = {}^{\mathbf{mul}}x_1(z,f(u)) \tag{V.2.26} $$

Or ${}^{\mathbf{mur}}x_1(z,u)$ *et* ${}^{\mathbf{mul}}x_1(z,u)$ sont deux solutions convergentes du problème initial. Cela implique que f est en fait dans $\mathbf{C}\{u\}$ ce qui signifie que *red*(**Lur**) = **B** est un automorphisme de substitution «analytique», i.e. dans *Endo*($\mathbf{C}\{u\}$). Grâce à ce résultat, on obtient aisément des resommées réelles de $\widetilde{x_1}(z,u)$.

Soit **m** une bonne moyenne uniformisante :

[P2 :] **m** préserve la convolution donc *red*(**Lum**) = **C** est un automorphisme formel de substitution et on peut alors écrire formellement :

$$ {}^{\mathbf{m}}x_1(z,u) = \mathbf{C}^{\mathbf{mul}}x_1(z,u) = {}^{\mathbf{mul}}x_1(z,g(u)) \tag{V.2.27} $$

avec $\mathbf{C}.u = g(u) \in \mathbf{C}[[u]]$.

[P1 :] **m** préserve la réalité et donc ${}^{\mathbf{m}}_{\zeta_0}x_1(z,u)$ est réel pour tous z, u, ζ_0 réels. Il en est de même par passage à la limite.

[P3 :] La condition technique que nous avions imposé montre que, comme $red(\mathbf{Lur})$ est analytique, $red(\mathbf{Lum})$ l'est aussi et donc $g(u)$ est un germe. Cela signifie que ${}^{\mathbf{m}}x_1(z,u) = {}^{\mathbf{mul}}x_1(z,g(u))$ converge et fournit donc une solution réelle du problème initial.

Nous avons donc obtenu le résultat énoncé dans la section 2 pour des voisinages de type V_1.

On peut finalement remarquer que, étant donné la forme de la réduction, $f(u) = \mathbf{B}.u$ et $g(u) = \mathbf{C}.u$ sont dans $u + u^2\mathbf{C}\{u\}$. De plus, si $\mathbf{m}_1$ et $\mathbf{m}_2$ sont deux bonnes moyennes et g_1, g_2 les germes associés, on a :

$$\begin{aligned} {}^{\mathbf{m}_1}x_1(z,u) &= {}^{\mathbf{mul}}x_1(z,g_1(u)) = {}^{\mathbf{mul}}x_1(z,g_2(g_2^{-1}(g_1(u)))) \\ &= {}^{\mathbf{m}_2}x_1(z,g_2^{-1}(g_1(u))) \end{aligned} \tag{V.2.28}$$

On peut maintenant faire le même type de calcul sur les voisinages de type V_2.

2.4. Sur l'axe réel négatif.

De ce coté-ci, seul $\mathbf{Dun}_{-1}$ agit et :

$$red(\mathbf{Dun}_{-1}) = A_{-1}\partial_u \quad (A_{-1} \in i\mathbf{R}) \tag{V.2.29}$$

De ce fait, on a :

$$\mathbf{B} = red(\mathbf{Lur}) = red(exp(\mathbf{Dun})) = e^{A_{-1}\partial_u} \tag{V.2.30}$$

et donc

$$f(u) = \mathbf{B}.u = u + A_{-1}$$

Pour une moyenne préservant la convolution, on obtient :

$$red(\mathbf{Lum}).u = \mathbf{C}.u = u - \mathbf{m}^- A_{-1}$$

On peut alors appliquer les résultats précédents mais en se contentant d'une moyenne ne préservant que la réalité et la convolution. On obtient alors une solution réelle :

$${}^{\mathbf{m}}x_1(z,u) = \mathbf{C}\,{}^{\mathbf{mul}}x_1(z,u) = {}^{\mathbf{mul}}x_1(z,u - \mathbf{m}^- A_{-1}) \tag{V.2.31}$$

On peut enfin remarquer que, pour une moyenne préservant la réalité, le poids $\mathbf{m}^-$ est de la forme $1/2 + ib$. Lorsque l'on prend deux moyennes $\mathbf{m}_1$

et $\mathbf{m}_2$ qui sont **P1,P2**, on obtient alors :

$$^{\mathbf{m}_1}x_1(z,u) = {}^{\mathbf{m}_2}x_1(z, u + (\mathbf{m}_2^- - \mathbf{m}_1^-)A_{-1}) \tag{V.2.32}$$

avec $(\mathbf{m}_2^- - \mathbf{m}_1^-)A_{-1} \in \mathbf{R}$.

On a bien obtenu les résultats annoncés dans la section 2.

3. Conclusion.

Comme l'illustre l'application précédemment traitée, ces bonnes moyennes uniformisantes permettent d'apporter une réponse positive à la question de la resommation réelle. Nous nous sommes restreint à un cas très simple mais J. Ecalle a montré que ces objets, ainsi que leur utilisation, s'étendent de manière à agir sur des algèbres de résurgence plus générales. Leur champ d'application est très vaste car il couvre la plupart des situations caractérisées par (1) la non-linéarité, (2) la divergence, (3) la réalité. En particulier, ces moyennes s'appliquent dans le schéma de resommation moins simple qu'est l'accéléro-sommation. Le lecteur pourra se référer à [3] pour un exposé complet sur les bonnes moyennes et leurs applications à la resommation réelle.

Bibliographie

[1] COMTET (L.). — *Analyse Combinatoire*, volume 1. P.U.F., 1970.

[2] COSTIN (O.). — On borel summation and stokes phenomena for rank-1 nonlinear systems of ordinary differential equations. *Duke Mathematical Journal*, 93(2): 289–344, 1998.

[3] ECALLE (J.). — Well-behaved convolution averages and their applications to real resummation, à paraître.

[4] ECALLE (J.). — *Les fonctions résurgentes*, volume 2. Publications mathématiques d'Orsay, 1981.

[5] ECALLE (J.). — *Introduction aux fonctions analysables et preuve constructive de la conjecture de Dulac*. Actualités Mathématiques. Hermann, 1992.

[6] ECALLE (J.). — Singularités non abordables par la géométrie. *Annales de l'Institut Fourier*, 42: 73–164, 1992.

[7] ECALLE (J.) et MENOUS (F.). — Well-behaved convolution averages and the non-accumulation theorem for limit-cycles. *Prépublications d'Orsay.*, 1995.

[8] EVEN (C.). — Etude d'une fonction remarquable associée aux moyennes de convolution. *Annales de l'Institut Fourier*, 49(2): 687–705, 1999.

[9] FINUCAN (H.M.). — Some elementary aspects of the Catalan numbers. In *Combinat. Math. IV*, volume 560 of *LNM*, pages 41–45. Springer, 1975.

[10] MENOUS (F.). — *Les bonnes moyennes uniformisantes et leurs applications à la resommation réelle*. Thèse de doctorat, 1996.