Annales de la faculté des sciences de Toulouse

Chantal Moussy

# Théorème du point fixe et théorème de Cauchy-Kowalewsky-Lednev pour les systèmes semi-linéaires

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série*, tome 8, nº 3 (1999), p. 491-535

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1999_6_8_3_491_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. VIII, n° 3, 1999
pp. 491–535

# Théorème du point fixe et Théorème de Cauchy-Kowalewsky-Lednev pour les systèmes semi-linéaires (*)

CHANTAL MOUSSY (1)

**RÉSUMÉ.** — Ce travail a pour objet d'étendre la méthode de démonstration utilisée par Wagschal [W] pour résoudre un problème de Cauchy généralisé (i.e. problème de Goursat pour certains auteurs) scalaire semi-linéaire, à un système d'équations semi-linéaires. Cette méthode consiste à utiliser le Théorème du point fixe dans des espaces de Banach appropriés.
Nous commencerons par établir un historique du Théorème de Cauchy-Kowalewsky-Lednev.
Dans la seconde partie, nous rappellerons la construction des algèbres de Banach données par Wagschal, qui nous permettra de définir par la suite nos espaces de Banach.
La troisième partie sera consacrée à l'étude du problème de Cauchy généralisé dans divers espaces de fonctions holomorphes, partiellement holomorphes, et partiellement Gevrey.

**ABSTRACT.** — We want to reduce the proof of Cauchy-Kowalewsky theorem for systems in the generality introduced by Lednev dealing with the notion of spectral radius, by using the fixed point theorem in Banach spaces of holomorphic, partially holomorphic and partially Gevrey functions. This work generalizes Wagschal's results and methods to a system of semi-linear equations.
We start by an historic of Cauchy-Kowalewsky-Lednev Theorem.
In the second part we recall the construction of Banach algebras, which are defined through the formalism of Cauchy majorant functions in the holomorphic case, or the formalism of formal power series in the Gevrey case.
The third part will be devoted to the study of generalized Cauchy problem in this different Banach spaces.

(*) Reçu le 8 février 1999, accepté le 28 octobre 1999

(1) Université de Paris VI, Institut de Mathématiques de Jussieu, U.M.R. 9994 du CNRS, Tour 46 5è étage - case 247, 4 place Jussieu 75252 Paris Cedex 05
e-mail: moussy@math.jussieu.fr

## 1. Historique du théorème de Cauchy-Kowalewsky-Lednev

En 1842, Cauchy énonce, dans un théorème fondamental, les conditions de convergence d'une série formelle à l'aide des fonctions majorantes [C1], puis décide d'appliquer ce principe à l'intégration par séries des équations aux dérivées partielles. Il établit alors dans [C2], un théorème d'existence et d'unicité de la solution analytique du "problème de Cauchy scalaire (c'est à dire à une seule équation), quasi linéaire" (suivant la terminologie de Petrowski [P]) :

$$\begin{cases} D_t u = \sum_{i=1}^{n} A_i D_{x_i} u + B \\ u_{|t=0} = u_o(x_1, ..., x_n) \end{cases}$$

où $B, A_i$ sont des fonctions analytiques des $(n+1)$ variables $t, x_1, ..., x_n$ et de l'inconnue $u$ elle même fonction des mêmes variables, et où $u_o$ est une fonction analytique des variables $x_1, ..., x_n$.

La démonstration consiste à développer en série formelle la solution. Les coefficients de cette série, obtenus à l'aide des conditions initiales et de l'équation en déterminent alors l'unicité. La convergence de cette série résulte alors de son théorème sur les fonctions majorantes précédemment évoqué. Dans un premier temps, il étend dans [C3], paragraphe I, ce résultat et cette méthode de démonstration au "problème de Cauchy pour les systèmes quasi linéaires " de la forme :

$$\begin{cases} D_t u_j = \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} A_{ik} D_{x_i} u_k + B_j & \text{pour} \quad 1 \leqslant j \leqslant N \\ u_{j|t=0} = u_{o,j}(x_1, ..., x_n) & \text{pour} \quad 1 \leqslant j \leqslant N \end{cases}$$

$B_j, A_{ik}$ sont des fonctions analytiques des $(n+1)$ variables $t, x_1, ..., x_n$ et de l'inconnue $u = (u_1, ..., u_N)$ elle même fonction des mêmes variables, et où $u_{0,j}$ est une fonction analytique des $n$ variables $x_1, ..., x_n$ .

Dans un second temps, il généralise le résultat et la méthode de démonstration de [C2] au "problème de Cauchy scalaire semi-linéaire" de la forme :

$$\begin{cases} D_t u = F(x_1, ..., x_n, t, u, D_{x_1} u, ..., D_{x_n} u) \\ u_{|t=0} = u_o(x_1, ..., x_n) \end{cases}$$

où $F$ et $u_o$ sont des fonctions analytiques en leurs variables respectives, et $u$ est une fonction de $t, x_1, ..., x_n$.

Dans [C3], paragraphe II, il étend le résultat et la méthode de démonstration du paragraphe I, au "problème de Cauchy pour les systèmes semi linéaires" du premier ordre de la forme:

$$\begin{cases} D_t u_j = F_j(x_1, ..., x_n, t, u_1, ..., u_N, D_x u, D_t u) & \text{pour} \quad 1 \leqslant j \leqslant N \\ u_{j|t=0} = u_{o,j}(x_1, ..., x_n) & \text{pour} \quad 1 \leqslant j \leqslant N \end{cases}$$

où

$$D_x u = \{D_{x_i} u_k\}_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant k \leqslant N} \text{ et } D_t u = \{D_t u_k\}_{1 \leqslant k \leqslant N, k \neq j},$$

$F_j, u_{0,j}$ sont des fonctions analytiques de leurs variables, et $u_j$ est une fonction de $t, x_1, ..., x_n$, pour $1 \leqslant j \leqslant N$.

Par la suite, dans [C4], il généralise le résultat de [C2] au "problème de Cauchy scalaire semi-linéaire d'ordre quelconque de la forme :

$$\begin{cases} D_t^m u = F(x_1, ..., x_n, t, D^A u) & \\ D^k u_{|t=0} = u_{o,k}(x_1, ..., x_n) & \text{pour} \quad 0 \leqslant k \leqslant m-1 \end{cases}$$

où $D^A u = \{D_x^\alpha D_t^\beta u/(\alpha, \beta) \in A\}$, $A$ est une partie finie de l'ensemble

$$\{(\alpha, \beta) \in \mathbf{N}^{n+1}/|\alpha| + \beta \leqslant m, \quad (\alpha, \beta) \neq (0, m)\},$$

$F, u_{0,k}$ sont des fonctions analytiques de leurs variables, et $u$ est une fonction de $t, x_1, ..., x_n$.

Pour cela, il réduit ce problème à un système semi-linéaire du premier ordre. A la fin du même article [C4], il indique comment généraliser ce résultat et cette méthode de réduction à des systèmes d'ordre quelconque, sans toutefois préciser la forme particulière des équations en question.

Sans jamais faire référence aux résultats de Cauchy précédemment cités, mais seulement à Briot et Bouquet [B] qui citent nommément Cauchy, Sophie Kowalewsky apporte les précisions en question, une trentaine d'années après dans sa thèse [K], en généralisant les résultats de Cauchy aux systèmes semi-linéaires d'ordre quelconque de la forme :

$$\begin{cases} D_t^{m_i} u_i = F_i(x_1, ..., x_n, t, D^B u) & \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant N \\ D_t^k u_{i|t=0} = g_{i,k}(x_1, ..., x_n) & \text{et} \quad 0 \leqslant k \leqslant m_i - 1 \end{cases}$$

où $D^B u = \{D_x^\alpha D_t^\beta u_k/(k, \alpha, \beta) \in B\}$, $B = \bigcup_k \{k\} \times B_k$, $B_k$ est une partie finie de l'ensemble $\{(\alpha, \beta) \in \mathbf{N}^{n+1}/|\alpha| + \beta \leqslant m_k, \quad (\alpha, \beta) \neq (0, m_k)\}$, les fonctions $F_i$ sont des fonctions analytiques des variables $t, x_1, ...x_n$ et de $y \in \mathbf{R}^r$ où $r = cardB$, $g_{i,k}$ sont des fonctions analytiques des variables $x_1, ...x_n$ et $u_i$ est fonction de ces mêmes variables et de $t$.

Ces systèmes sont aujourd'hui appelés "systèmes de Cauchy-Kowalewsky".

Sophie Kowalewsky démontre directement le résultat, sans ramener le système à un système du premier ordre, mais en suivant exactement le même schéma de démonstration que Cauchy, c'est-à-dire en développant en série formelle la solution et en montrant sa convergence à l'aide du principe des fonctions majorantes de Cauchy. Ce résultat sera plus connu sous le nom de "Théorème de Cauchy-Kowalewsky".

Cette démonstration fut simplifiée par Goursat dans [G1], qui étend en 1895, dans [G2],[G3], ce résultat et cette démonstration au "problème de Cauchy généralisé" de la forme suivante (que certains auteurs appellent "problème de Goursat") :

$$\begin{cases} D_x D_t u = f(t, x, u, D_x u, D_t u, D_x^2 u, D_t^2 u) \\ u(0,x) = \phi(x), \quad u(t,0) = \psi(t), \quad \phi(0) = \psi(0) \end{cases}$$

où $\phi$ et $\psi$ sont des fonctions holomorphes des variables $x$ et $t$ respectivement, $f$ est holomorphe en toutes ces variables.

Un demi siècle après, Lednev [L] généralise le résultat de Goursat au "problème de Cauchy généralisé pour les systèmes" de la forme :

$$\begin{cases} D_x^{\alpha_i} u_i = F_i(x_1, ..., x_n, D^B u) & \text{pour} \quad 0 \leqslant i \leqslant N \\ u_i - w_i = O(x^{\alpha_i}) & \text{pour} \quad 0 \leqslant i \leqslant N \end{cases}$$

où $\alpha_i \in \mathbf{N}^n$, $D^B u = \{D_x^\beta u_k / (k, \beta) \in B\}$, $\quad B = \bigcup_k \{k\} \times B_k$, $B_k$ est une partie finie de l'ensemble $\{\beta \in \mathbf{N}^n / |\beta| \leqslant |\alpha_k|, \quad \beta \neq \alpha_k\}$, les fonctions $F_i$ sont des fonctions analytiques des variables $x_1, ..., x_n$ et de $y \in \mathbf{R}^r$ où $r = cardB$, $w_i$ sont des fonctions analytiques des variables $x_1, ...x_n$ et $u_i$ est fonction de ces mêmes variables.

Plus précisément, il définit pour tout $\xi \in (\mathbf{R}_+^*)^n$ le rayon spectral $\rho(\xi)$ de la matrice spectrale du système précédent et démontre, suivant le même schéma de démonstration que Cauchy, que le système précédent admet une unique solution analytique s'il existe un $\xi \in (\mathbf{R}_+^*)^n$ vérifiant $\rho(\xi) < 1$. Cette dernière condition est vérifiée pour les systèmes de Cauchy-Kowalewsky (voir par exemple [Ga] Note 2, p.152), ce qui prouve bien que le théorème de Lednev est une généralisation du théorème de Cauchy-Kowalewsky, que nous appellerons "Théorème de Cauchy-Kowalewsky-Lednev".

En 1965, Gärding [Ga] donne une démonstration plus élégante du théorème de Lednev, en utilisant une fonction majorante plus fine que celle de Cauchy et la méthode d'approximations successives par une suite récurrente de séries formelles holomorphes.

Persson généralise, dans [Pe], ce théorème dans l'espace des fonctions partiellement analytiques, c'est-à-dire analytiques en certaines variables (que l'on appellera variables principales et par rapport aux quelles sont dérivées les fonctions inconnues, dans les termes de gauche des équations du système précédent), et de classe de Gevrey $d$ par rapport à toutes les variables, où $d$ est un multi-indice, (suivant la terminologie de Persson [Pe]).

Ce problème de Cauchy partiellement analytique a été introduit par Le Roux [Le], et Holmgrem [H], puis a été étudié par d'autres auteurs comme Salehov et Friedlender [SF], Friedlender [F1] et Friedman [F2], Pucci [Pu], Talenti [T1], [T2].

Persson utilise dans sa démonstration la méthode des approximations successives, par une suite récurrente de séries formelles analytiques en les variables principales, et dont les coefficients sont des fonctions adéquates des autres variables.

Une dizaine d'années après, Wagschal[W] en se basant sur deux idées dûes à Gevrey réduit la démonstration des résultats analogues à ceux de Gärding et de Persson au théorème du point fixe dans des algèbres de Banach, algèbres définies par l'intermédiaire, soit du formalisme des fonctions majorantes de Cauchy dans le cas holomorphe, soit d'un formalisme de séries formelles dans le cas non holomorphe. La première idée, consiste à utiliser des fonctions majorantes $\phi$ vérifiant $\phi^2 \ll \phi$. La seconde idée consiste à déduire les propriétés des espaces de Gevrey de celles des espaces de fonctions analytiques.

Il restreint cependant son étude au "problème de Cauchy généralisé scalaire semi-linéaire".

Nous nous proposons d'étendre les résultats et la méthode de démonstration de Wagschal au "problème de Cauchy généralisé pour les systèmes semi-linéaires".

Nous commencerons par présenter les algèbres de Banach construites par Wagschal, et rappellerons quelques propriétés de ces dernières.

## 2. Rappels sur les algèbres de Banach de certains espaces de fonctions [W]

### 2.1. Algèbre de Banach de fonctions holomorphes

Soient $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{C}^n$, $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in (\mathbf{R}_+^*)^n$.

On note $\xi.x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i$,

$\mathbf{C}\{x\}$ l'algèbre des séries convergentes,

$\mathbf{C}[[x]]$ l'algèbre des séries formelles à coefficients dans $\mathbf{C}$,

$D_t^{-1}u$ désigne la primitive de $u$ par rapport à $t$ qui s'annule avec $t$.

Définition 2.1.1. — Soient $u = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^n} u_\alpha x^\alpha$, $\quad u \in \mathbf{C}[[x]]$, $\quad$ et

$$\phi = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^n} \phi_\alpha x^\alpha, \quad \phi \in \mathbf{R}^+[[x]].$$

On dit que la série $u$ est majorée par $\phi$ et on écrit $u \ll \phi$ si

$$(\forall \alpha \in \mathbf{N}^n) \qquad (|u_\alpha| \leqslant \phi_\alpha)$$

Si de plus $\phi$ est convergente, on dit que $\phi$ est une fonction majorante de $u$.

Considérons la fonction majorante de Lax [La]: $\theta(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(n+1)^2}$. Elle vérifie la

Proposition 2.1.2. — *Il existe une constante $K > 0$ telle que $\theta^2(t) \ll K\theta(t)$.*

On considère pour $R > 0$, la fonction majorante $\phi_R(t) = K^{-1}\theta(\frac{t}{R})$ définie pour $|t| < R$.

Proposition 2.1.3

1) *Pour tout $k \geqslant 1$ et tout $R > 0$ on a $\phi_R^k(t) \ll \phi_R(t)$.*

2) *Pour tout $R > 0$ et tout $k \in \mathbf{N}$, il existe une constante $c > 0$ telle que $D_t^{-k}\phi_R(t) \ll cR^k\phi_R(t)$*

COROLLAIRE et DÉFINITION 2.1.4. — *Etant donné* $\xi \in (\mathbf{R}_+^*)^n$ *nous noterons*

$$B_R(\xi) = \{u \in \mathbf{C}\{x\}; (\exists c \geqslant 0)(u(x) \ll c\phi_R(\xi.x))\}$$

*et pour* $u \in B_R(\xi)$, $\|u\| = \min\{c \geqslant 0; u(x) \ll c\phi_R(\xi.x)\}$.

*Les espaces* $B_R(\xi)$ *munis de cette norme sont alors des algèbres de Banach de fonctions holomorphes au voisinage de l'origine de* $\mathbf{C}^n$, *associées à la fonction majorante* $\phi_R$.

PROPOSITION 2.1.5. — *Soient* $u \in B_R(\xi)$ *et* $R' > 0$ *tels que* $\|u\| < R'$, *alors la fonction*

$$\frac{R'}{R'-u} \in B_R(\xi) \qquad et \qquad \frac{R'}{R'-u} \ll (K + \frac{\|u\|}{R'-\|u\|})\phi_R(\xi.x)$$

LEMME 2.1.6. — *Pour tout* $\eta > 1$, *il existe une constante* $c(\eta) > 0$ *telle que pour tout* $R > 0$, *on a*

$$\frac{\eta R}{\eta R - t} \ll c(\eta)\phi_R(t).$$

COROLLAIRE 2.1.7. — $\xi$ *étant fixé, toute fonction holomorphe au voisinage de l'origine de* $\mathbf{C}^n$ *appartient à l'espace* $B_R(\xi)$ *dès que* $R$ *est suffisamment petit.*

## 2.2. Algèbre de Banach de fonctions partiellement holomorphes

Soient $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbf{R}^p$, $y = (y_1, \ldots, y_q) \in \mathbf{C}^q$, $|x| = (|x_1|, \ldots, |x_p|)$, $|y| = (|y_1|, \ldots, |y_q|)$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_p) \in (\mathbf{R}_+^*)^p$, $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_q) \in (\mathbf{R}_+^*)^q$.

On note $\xi.|x| = \sum_{i=1}^{p} \xi_i |x_i|$, $\zeta.|y| = \sum_{i=1}^{q} \zeta_i |y_i|$,
$\Omega$ un ouvert de $\mathbf{R}_x^p \times \mathbf{C}_y^q$, $\Omega_R = \{(x,y) \in \mathbf{R}^p \times \mathbf{C}^q; \xi.|x| + \zeta.|y| < R\}$, $R > 0$, $\alpha \in \mathbf{N}^p$, $C^{\alpha,\omega}(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbf{C} / \forall \beta \in \mathbf{N}^p, \beta \leqslant \alpha, D_x^\beta u$ holomorphe en $y$ et continue par rapport à $x\}$, $D_{x_i}^{-1} u$ désigne la primitive de $u$ par rapport à $x_i$ qui s'annule avec $x_i$.

Nous utiliserons dans ce paragraphe le formalisme des fonctions majorantes uniquement par rapport aux variables d'holomorphie $y$.

DÉFINITION 2.2.1. — Si $u \in C^{0,\omega}(\Omega_R)$ et si pour tout $x$ vérifiant $\xi.|x| < R$, la fonction holomorphe $y \mapsto u(x,y)$ est majorée par la fonction

$y \mapsto c\phi_R(\xi.|x| + \zeta.y)$, alors

$$u \ll c\phi_R(\xi.|x| + \zeta.y) \Leftrightarrow \begin{cases} \textit{pour tout } x \textit{ tel que } \xi.|x| < R \textit{ et tout } \delta \in \mathbf{N}^q, \\ |D_y^\delta u(x,0)| \leqslant c\zeta^\delta D^{|\delta|}\phi_R(\xi.|x|) \end{cases}$$

PROPOSITION 2.2.2.— *Pour tout $k \geqslant 1$, $0 \leqslant h < R$, on a $\phi_R^k(h+\zeta.y) \ll \phi_R(h+\zeta.y)$.*

COROLLAIRE et DÉFINITION 2.2.3.— *On considère le sous-espace de $C^{0,\omega}(\Omega_R)$:*

$$E_R(\xi,\zeta) = \{u \in C^{0,\omega}(\Omega_R); (\exists c \geqslant 0)(u \ll c\phi_R(\xi.|x| + \zeta.y)\}$$

*munis de la norme $\|u\| = \min\{c \geqslant 0; u \ll c\phi_R(\xi.|x| + \zeta.y)\}$, les espaces $E_R(\xi,\zeta)$ sont des algèbres de Banach de fonctions partiellement holomorphes, associées à la fonction majorante $\phi_R$.*

PROPOSITION 2.2.4.— *Soient $u \in E_R(\xi,\zeta)$ et $R' > 0$ tels que $\|u\| < R'$, alors*

$$\frac{R'}{R'-u} \in E_R(\xi,\zeta) \qquad \textit{et} \qquad \frac{R'}{R'-u} \ll (K + \frac{\|u\|}{R'-\|u\|})\phi_R(\xi.|x| + \zeta.y)$$

Indiquons enfin comment opèrent les "dérivations" dans les algèbres $E_R(\xi,\zeta)$.

PROPOSITION 2.2.5.— *Pour tout $(\gamma,\delta) \in (-\mathbf{N})^p \times \mathbf{Z}^q$ tel que $|\gamma|+|\delta| \leqslant 0$, il existe une constante $c_{\gamma,\delta} \geqslant 0$ telle que l'application $D_x^\gamma D_y^\delta : E_R(\xi,\zeta) \to E_R(\xi,\zeta)$ soit linéaire continue de norme $\leqslant c_{\gamma,\delta}\xi^\gamma\zeta^\delta R^{-|\gamma|-|\delta|}$. En outre si $|\gamma|+|\delta| = 0$, on a $c_{\gamma,\delta} = 1$.*

### 2.3. Algèbre de Banach de fonctions de classe de Gevrey $\mathrm{G}^{\alpha,d}$

Soient $x = (x_1,...,x_p) \in \mathbf{R}^p$, $y = (y_1,...,y_q) \in \mathbf{R}^q$, $t = |x| = (|x_1|,...,|x_p|)$, $\xi = (\xi_1,...,\xi_p) \in (\mathbf{R}_+^*)^p$, $\zeta = (\zeta_1,...,\zeta_q) \in (\mathbf{R}_+^*)^q$. On note $\xi.|x| = \sum_{i=1}^p \xi_i.|x_i|$, $\zeta.y = \sum_{i=1}^q \zeta_i.y_i$, $D_{t_i}^{-1}$ la primitive par rapport à $t_i$ qui s'annule avec $t_i$. $U \times \Omega$ un ouvert de $\mathbf{R}_x^p \times \mathbf{R}_y^q$, $|U|$ l'image de $U$ par l'application $x \mapsto |x|$,

Pour

$$R > 0,\ U_R = \{x \in \mathbf{R}^p; \xi.|x| < R\}, \quad \Omega_R = U_R \times \Omega, \quad |U_R| = \{|x|; x \in U_R\}$$

Soient $\alpha \in \mathbf{N}^p$, $d$ un nombre $\geqslant 1$. On note

$$C^{\alpha,\infty}(U \times \Omega) = \{u : U \times \Omega \to \mathbf{R}; \forall \delta \in \mathbf{N}^q, \forall \gamma \in \mathbf{N}^p, \gamma \leqslant \alpha, D_x^\gamma D_y^\delta u$$

soit continue sur $U \times \Omega\}$, $G^{\alpha,d}(U \times \Omega) = \{u \in C^{\alpha,\infty}(U \times \Omega)/\exists c > 0, \forall \gamma \in \mathbf{N}^p, \gamma \leqslant \alpha, \forall \delta \in \mathbf{N}^q, \sup\limits_{U \times \Omega} |D_x^\gamma D_y^\delta u| \leqslant c^{|\delta|+1}\delta!^d\}$.

Nous appellerons $G^{\alpha,d}(U \times \Omega)$ l'espace des fonctions de classe de Gevrey $G^{\alpha,d}$ sur $U \times \Omega$.

DÉFINITION 2.3.1. — Soient $\Omega$ un ouvert de $\mathbf{R}^q$, $u \in C^\infty(\Omega; \mathbf{R})$ et une série formelle $\phi$ en $y$ dans $\Omega$, $\phi(y) = \sum\limits_{\delta \in \mathbf{N}^q} \phi_\delta \dfrac{y^\delta}{\delta!}$, où $\phi_\delta \geqslant 0$, $\forall \delta \in \mathbf{N}^q$. On note

$$u \ll \phi \Leftrightarrow \sup_\Omega |D_y^\delta u(y)| \leqslant \phi_\delta, \quad \forall \delta \in \mathbf{N}^q.$$

Par conséquent, $u \ll \phi \Rightarrow D_y^\delta u \ll D_y^\delta \phi, \quad \forall \delta \in \mathbf{N}^q$, où $D_y^\delta \phi$ est la dérivée formelle de la série $\phi$.

La proposition suivante nous permet de majorer une fonction composée.

PROPOSITION 2.3.2. — *Soient $\Omega$ un ouvert de $\mathbf{R}^q$, $\Omega'$ un ouvert de $\mathbf{R}^r$, $v \in \mathbf{C}^\infty(\Omega'; \mathbf{R})$ et*
*$u = (u_1, ..., u_r) \in \mathbf{C}^\infty(\Omega; \mathbf{R}^r)$, tels que $u(\Omega) \subset \Omega'$. Si $u_i \ll \phi_i$ et si $v \ll \psi$ alors*

$$v \circ u \ll \psi([\phi_1], ..., [\phi_r]) \qquad \textit{ou} \quad [\phi_i] = \phi_i - \phi_i(0), \quad \textit{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant r.$$

Considérons la série formelle en y, $\phi(t, y) = \sum\limits_{\delta \in \mathbf{N}^q} \dfrac{y^\delta}{\delta!} \phi_\delta(t)$,
où $\phi_\delta : |U| \to \mathbf{R}^+$ sont continues.

DÉFINITION 2.3.3. — On note $C_\phi^{0,\infty}(U_R \times \Omega) = \{u \in C^{0,\infty}(U_R \times \Omega); (\exists c \geqslant 0)(u \ll c\phi)\}$ avec la notation $u \ll c\phi \Leftrightarrow \forall \delta \in \mathbf{N}^q, \quad \forall x \in U_R$, $\sup\limits_\Omega |D_y^\delta u(x, y)| \leqslant c\phi_\delta(t), \quad (\text{où } t = |x|)$

On munit cet espace de la norme $\|u\| = min\{c \geqslant 0; u \ll c\phi\}$

PROPOSITION 2.3.4. — *Les espaces $C_\phi^{0,\infty}(U_R \times \Omega)$ sont des espaces de Banach.*

Dans toute la suite, nous désignerons par $U_R$ un voisinage ouvert autoabsorbant de $\mathbf{R}^p$ c'est-à-dire vérifiant la propriété suivante

$$\begin{cases} \forall x \in U_R, \quad \forall \lambda \in [0,1]^p \quad \lambda x \in U_R \\ \lambda x = (\lambda_1 x_1, ..., \lambda_p x_p) \end{cases}$$

Il en résulte que $|U_R|$ est autoabsorbant.

On définit pour tout $(\gamma, \delta) \in (-\mathbf{N})^p \times \mathbf{N}^q$, la dérivée formelle de $\phi(t,y)$ par

$$D_t^\gamma D_y^\delta \phi(t,y) = \sum_{\substack{\epsilon \in \mathbf{N}^q, \\ \epsilon \geqslant \delta}} \frac{y^{\epsilon-\delta}}{(\epsilon-\delta)!} D_t^\gamma \phi_\epsilon(t), \quad t \in |U_R|.$$

PROPOSITION 2.3.5. — *Soit $u \in C_\phi^{0,\infty}(U_R \times \Omega)$ alors pour tout $(\gamma, \delta) \in (-\mathbf{N})^p \times \mathbf{N}^q$, on a*

$$D_x^\gamma D_y^\delta u \ll \|u\| D_t^\gamma D_y^\delta \phi.$$

Considérons la série formelle obtenue à partir de la série de Taylor de la fonction $y \mapsto \phi_R(\xi.t + \zeta.y)$ en lui appliquant un opérateur de Gevrey,

$$\Phi_R^{0,d}(t,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\zeta.y)^k}{k!} k!^{d-1} D^k \phi_R(\xi.t)$$

Cette série formelle est bien définie pour $t \in |U_R|$.

COROLLAIRE et DÉFINITION 2.3.6. — *On note,*

$$G_R^{0,d}(\Omega_R) = C_{\Phi_R^{0,d}}^{0,\infty}(U_R \times \Omega) = \{u \in C^{0,\infty}(U_R \times \Omega) / \exists c \geqslant 0, u \ll c\Phi_R^{0,d}\}$$

*où*

$$u \ll c\Phi_R^{0,d} \Leftrightarrow \forall \delta \in \mathbf{N}^q, \ \forall x \in U_R, \ \sup_\Omega |D_y^\delta u(x,y)| \leqslant c\zeta^\delta (|\delta|!)^{d-1} D^{|\delta|} \phi_R(\xi.t)$$

*Munis de la norme $\|u\| = min\{c \geqslant 0; u \ll c\Phi_R^{0,d}\}$ les espaces $G_R^{0,d}(\Omega_R)$ sont des algèbres de Banach de fonctions de classe de Gevrey $G^{0,d}$, associées à la fonction $\Phi_R^{0,d}$.*

Le lemme suivant nous montre que l'on peut travailler indifféremment sur les espaces $G_R^{0,d}$ ou sur les espaces $G^{0,d}$.

LEMME 2.3.7

1) $G^{0,d}_R(\Omega_R) \subset G^{0,d}(\Omega_{R'})$, *pour* $0 < R' < R$,

2) *Pour tout* $\zeta \in (\mathbf{R}^*_+)^q$, *et tout* $u \in G^{0,d}(\Omega_R)$, *il existe* $R_0 > 0$, *tel que pour tout* $R' \in ]0, R_0[$, $u \in G^{0,d}_{R'}(\Omega_{R'})$ *pour* $\xi$ *quelconque.*

LEMME 2.3.8. — *Soit* $\theta^d_R(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{R^k} k!^{d-1}$. *Pour tout* $\eta > 1$, *il existe* $c = c(\eta) > 0$ *tel que*

$$\theta^d_{\eta R}(z) \ll c \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} k!^{d-1} D^k \phi_R(0)$$

*Par suite,*

$$\theta^d_{\eta R}(\zeta.y) \ll c\Phi^{0,d}_R(0, y) \ll c\Phi^{0,d}_R(t, y), \quad \forall t \in |U_R|.$$

PROPOSITION 2.3.9. — *Pour* $0 \leqslant c < R'$, *on a*

$$\theta^d_{R'} \circ [c\Phi^{0,d}_R] \ll \max(K, \frac{c}{R' - c}) \Phi^{0,d}_R$$

PROPOSITION 2.3.10. — *Pour tout* $(\gamma, \delta) \in (-\mathbf{N})^p \times \mathbf{N}^q$ *tel que* $|\gamma| + d|\delta| \leqslant 0$, *il existe une constante* $c_{\gamma,\delta} \geqslant 0$ *telle que l'application* $D^\gamma_x D^\delta_y : G^{0,d}_R \to G^{0,d}_R$ *soit linéaire continue de norme* $\leqslant c_{\gamma,\delta} \xi^\gamma \zeta^\delta R^{-|\gamma| - |\delta|}$.

## 2.4. Algèbre de Banach de fonctions de classe de Gevrey $\mathbf{G}^{\omega,\mathbf{d}}$

Soient $d$ un nombre $\geqslant 1$, $x = (x_1, ..., x_p) \in \mathbf{C}^p$, $y = (y_1, ..., y_q) \in \mathbf{R}^q$, $\xi = (\xi_1, ..., \xi_p) \in (\mathbf{R}^*_+)^p$, $\zeta = (\zeta_1, ..., \zeta_q) \in (\mathbf{R}^*_+)^q$. On note $\xi.x = \sum_{i=1}^{p} \xi_i x_i$, $\zeta.y = \sum_{i=1}^{q} \zeta_i y_i$, $U \times \Omega$ un ouvert de $\mathbf{C}^p_x \times \mathbf{R}^q_y$.

Pour $R > 0$, on note $U_R = \{x \in \mathbf{C}^p; \xi.|x| < R\}$, $\Omega_R = U_R \times \Omega$, $C^{\omega,\infty}(U \times \Omega) = \{u : U \times \Omega \to \mathbf{C}; \forall \delta \in \mathbf{N}^q,\ D^\delta_y u$ soit holomorphe en $x$ et continue en $y\}$, $G^{\omega,d}(U \times \Omega) = \{u \in C^{\omega,\infty}(U \times \Omega)/\exists c > 0,\ \forall \delta \in \mathbf{N}^q,\ \sup_{U \times \Omega} |D^\delta_y u| \leqslant c^{|\delta|+1} \delta!^d\}$.

Nous appellerons $G^{\omega,d}(U \times \Omega)$ l'espace des fonctions de classe de Gevrey $G^{\omega,d}$ sur $(U \times \Omega)$.

Soit $\Phi(x,y) = \sum_{\delta\in\mathbf{N}^p} \frac{(y)^\delta}{\delta!}\Phi_\delta(x)$ une série formelle en $y$ dans $\Omega \subset \mathbf{R}^q$ où les $\Phi_\delta$ sont des séries entières en $x$ à coefficients positifs ou nuls, et convergentes dans un même voisinage $U$ de l'origine de $\mathbf{C}^p$.

Pour tout $u \in C^{\omega,\infty}(U\times\Omega)$, on note

$$u \ll \Phi \Leftrightarrow \forall\delta\in\mathbf{N}^q,\quad \forall y\in\Omega,\quad D_y^\delta u(x,y) \ll \Phi_\delta(x)$$

ce qui équivaut à

$$u \ll \Phi \Leftrightarrow \forall(\gamma,\delta)\in\mathbf{N}^p\times\mathbf{N}^q,\quad \forall y\in\Omega,\quad |D_x^\gamma D_y^\delta u(0,y)| \leqslant D_x^\gamma\Phi_\delta(0)$$

et on a également

$$u \ll \Phi \Rightarrow \forall(\gamma,\delta)\in\mathbf{Z}^p\times\mathbf{N}^q,\quad \forall y\in\Omega,\quad D_x^\gamma D_y^\delta u \ll D_x^\gamma D_y^\delta\Phi$$

où

$$D_x^\gamma D_y^\delta\Phi(x,y) = \sum_{\epsilon\in\mathbf{N}^p,\epsilon\geqslant\delta} \frac{(y)^{\epsilon-\delta}}{(\epsilon-\delta)!}D_x^\gamma\Phi_\epsilon(x)$$

On note

$$C_\Phi^{\omega,\infty}(U\times\Omega) = \{u\in C^{\omega,\infty}(U\times\Omega)/(\exists c\geqslant 0)\quad (u\ll c\Phi)\}$$

PROPOSITION 2.4.1.— *Muni de la norme $\|u\| = min\{c\geqslant 0; u\ll c\Phi\}$, $C_\Phi^{\omega,\infty}(U\times\Omega)$ est un espace de Banach.*

Considérons la série formelle $\Phi_R^{\omega,d}(x,y)$, vérifiant $(\Phi_R^{\omega,d})^2 \ll \Phi_R^{\omega,d}$ définie pour $x\in U_R$ par:

$$\Phi_R^{\omega,d}(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\zeta.y)^k}{k!}k!^{d-1}D^k\phi_R(\xi.x)$$

COROLLAIRE et DÉFINITION 2.4.2.— *On note*

$$G_R^{\omega,d}(\Omega_R) = C_{\Phi_R^{\omega,d}}^{\omega,\infty}(\Omega_R) = \{u\in C^{\omega,\infty}(U_R\times\Omega); (\exists c\geqslant 0)\quad (u\ll c\Phi_R^{\omega,d})\}$$

*où*

$$u\ll c\Phi_R^{\omega,d} \Leftrightarrow \forall\delta\in\mathbf{N}^q,\quad \forall y\in\Omega,\quad D_y^\delta u(x,y) \ll c\zeta^\delta|\delta|!^{d-1}D^{|\delta|}\phi_R(\xi.x)$$

*Munis de la norme $\|u\| = min\{c\geqslant 0; u\ll c\Phi_R^{\omega,d}\}$, les espaces $G_R^{\omega,d}(\Omega_R)$ sont des algèbres de Banach de fonctions de classe de Gevrey $G^{\omega,d}$, associées à la fonction majorante $\Phi_R^{\omega,d}$.*

Le lemme suivant nous donne les relations entre les espaces $G_R^{\omega,d}$ et $G^{\omega,d}$

LEMME 2.4.3

1) $G_R^{\omega,d}(\Omega_R) \subset G^{\omega,d}(\Omega_{R'})$ *pour* $0 < R' < R$,

2) *Pour tout* $u \in G^{\omega,d}(U \times \Omega)$ *il existe* $R_0 > 0$ *tel que pour* $R \in ]0, R_0]$, $u \in G_R^{\omega,d}(\Omega_R)$.

LEMME 2.4.4.— *Pour tout* $\eta > 1$, *il existe* $R_0 > 0$, *tel que pour tout* $u \in G^{\omega,d}(\Omega_R), R \in ]0, R_0]$, *il existe* $c > 0$ *tel que :*

$$\forall \delta \in \mathbf{N}^q, \quad \forall y \in \Omega, \quad D_y^\delta u(x,y) \ll c^{|\delta|+1}(|\delta|!)^d \frac{\eta R}{\eta R - \xi . x}$$

LEMME 2.4.5.— *Pour tout* $\eta > 1$, *il existe une constante* $c = c(\eta) > 0$, *telle que*

$$\frac{\eta R}{\eta R - t} \ll c R^k \frac{1}{k!} D^k \phi_R(t) \quad \textit{pour} \quad \textit{tout} \quad k \in \mathbf{N}.$$

PROPOSITION 2.4.6.— *Soient* $u \in G_R^{\omega,d}(\Omega_R)$ *et* $R' > 0$ *tels que* $\|u\| < R'$, *alors*

$$\frac{R'}{R' - u} \in G_R^{\omega,d}(\Omega_R) \quad \textit{et} \quad \frac{R'}{R' - u} \ll (K + \frac{\|u\|}{R' - \|u\|})\Phi_R^{\omega,d}(x,y).$$

PROPOSITION 2.4.7.— *Pour tout* $(\gamma, \delta) \in \mathbf{Z}^p \times \mathbf{N}^q$ *tel que* $|\gamma| + d|\delta| \leqslant 0$, *il existe une constante* $c_{\gamma,\delta} \geqslant 0$ *telle que l'application* $D_x^\gamma D_y^\delta$ : $G_R^{\omega,d}(\Omega_R) \to G_R^{\omega,d}(\Omega_R)$ *soit linéaire, continue de norme* $\leqslant c_{\gamma,\delta}\xi^\gamma\zeta^\delta R^{-|\gamma|-|\delta|}$. *En outre , on a* $c_{\gamma,\delta} = 1$ *si* $|\gamma| = 0, \quad \delta = 0$.

## 3. Problème de Cauchy généralisé

### 3.1. Problème de Cauchy généralisé dans l'espace des fonctions holomorphes

On considère au voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^n$ le problème semi-linéaire suivant:

$$\begin{cases} D_x^{\alpha_i} u_i = f_i(x, D^B u) & 1 \leqslant i \leqslant N \\ u_i = O(x^{\alpha_i}) & 1 \leqslant i \leqslant N \end{cases} \tag{3.1.1}$$

où $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{C}^n, \alpha_i = (\alpha_i^1, ..., \alpha_i^n) \in \mathbf{N}^n, \quad D_x^{\alpha_i} = D_{x_1}^{\alpha_i^1} ... D_{x_n}^{\alpha_i^n}$, $x^{\alpha_i} = x_1^{\alpha_i^1} ... x_n^{\alpha_i^n}$,

$$D_{x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad D^B u = \{D_x^\beta u_k / (k,\beta) \in B\}, \quad B = \bigcup_k \{k\} \times B_k,$$

$B_k$ est une partie finie de l'ensemble $\{\beta \in \mathbf{Z}^n / |\beta| \leqslant |\alpha_k|, \quad \beta \neq \alpha_k\}$,

$$|\beta| = \sum_{i=1}^n \beta_i, \text{ et } D_x^\beta = D_{x_1}^{\beta_1} ... D_{x_n}^{\beta_n} \text{ pour } \beta = (\beta_1, ..., \beta_n) \in \mathbf{Z}^n, \quad D_{x_j}^{-1} = \int_0^{x_j}$$

$f_i$ est une fonction des variables $x_1, ..., x_n$ et de $y = (y_k^\beta)_{(k,\beta)\in B} \in \mathbf{C}^m$, où $m = cardB$, que l'on suppose holomorphe dans un voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^{n+m}$.

La condition $u_k = O(x^{\alpha_k})$ signifie que pour tout $k \in [1, N]$, $u_k(x) = x^{\alpha_k} g_k(x)$ où $g_k$ est holomorphe dans un voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^n$. Lorsqu'elle est vérifiée, on a $D^\beta u_k(0) = 0$ pour tout $k \in [1, N]$ et pour tout $\beta \in B_k$.

On pose pour tout $(k, \beta) \in B$ et pour tout $i \in [1, N]$

$$A_i^{k,\beta} = \frac{\partial f_i(0,0)}{\partial y_k^\beta}$$

et, pour tout $\xi \in (\mathbf{R}_+^*)^n$ on note,

$$A(\xi) = (A_{i,k}(\xi))_{(i,k)\in[1,N]^2} = \Big( \sum_{\substack{|\beta|=|\alpha_k| \\ \beta\in B_k}} |A_i^{k,\beta}| \xi^{\beta-\alpha_i} \Big)_{(i,k)\in[1,N]^2}$$

la matrice spectrale associée au système (3.1.1), et $\lambda(\xi)$ le rayon spectral de la matrice $A(\xi)$, c'est-à-dire la valeur absolue maximale des valeurs propres de $A(\xi)$.

LEMME 3.1.1. — *Soit $A(\xi)$ la matrice spectrale du système* (3.1.1) *et soit $\lambda(\xi)$ son rayon spectral. Si $A(\xi) \to 0$ alors $\lambda(\xi) \to 0$ quand $\xi \to \infty$.*

*Preuve.* — Notons

$$S(\xi) = (S_{j,j}(\xi))_{j\in[1,N]} = (\xi^{\alpha_j})_{j\in[1,N]} \quad \text{et} \quad A'(\xi) = S(\xi) A(\xi) S^{-1}(\xi).$$

Alors $A(\xi)$ et $A'(\xi)$ ont même rayon spectral. Soit $X$ un vecteur propre de $A'(\xi)$ et $\lambda(\xi)$ une valeur propre associée à $X$, on a $SAS^{-1}(\xi)X = \lambda(\xi)X$. Par conséquent $\|SAS^{-1}(\xi)X\| = |\lambda(\xi)|\|X\|$.

Considérons $\|A(\xi)\| = \sup\limits_{X\neq 0} \dfrac{\|A(\xi)X\|}{\|X\|}$ la norme induite de $A$ sur $\mathbf{R}^n$ alors $|\lambda(\xi)| \leqslant \|A(\xi)\|$. L'espace vectoriel des matrices étant de dimension finie $n^2$, il existe un $C > 0$ tel que $\|A(\xi)\| \leqslant C\|A(\xi)\|_\infty = C \sup_{i,j} |a_{i,j}(\xi)|$ où $a_{i,j}(\xi)$ sont les coefficients de la matrice $A$, donc $|\lambda(\xi)| \leqslant C\|A(\xi)\|_\infty$. Par suite, si pour tout $(i,j) \in [1,N]^2$, $a_{i,j}(\xi) \to 0$ quand $\xi \to \infty$, alors $\lambda(\xi) \to 0$ quand $\xi \to \infty$.

THÉORÈME 3.1.2 (dit de Cauchy-Kowalewsky-Lednev [L]). — *S'il existe un $\xi \in (\mathbf{R}_+^*)^n$ tel que $\lambda(\xi) < 1$, le problème* (3.1.1) *admet une unique solution $u = (u_1, ..., u_N)$ où chaque $u_i$ est holomorphe dans un voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^n$ pour $1 \leqslant i \leqslant N$.*

COROLLAIRE 3.1.3 (Théorème de Cauchy-Kowalewsky, version historique [K]). — *Considérons le système* (3.1.1) *avec $\alpha_i = (m_i, 0, ..., 0)$ où $m_i \in \mathbf{N}$ pour $1 \leqslant i \leqslant N$, et pour conditions initiales $D_{x_1}^h u_{i|x_1=0} = g_{i,h}(x')$ où $0 \leqslant h \leqslant m_i - 1$. Alors pour tout $g_{i,h}(x')$ et $f_i(x, D^B u)$ holomorphes dans un voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^{n-1}$, $\mathbf{C}^{n+m}$ respectivement, il existe une unique solution $u = (u_1, ..., u_N)$ où chaque $u_i$ est holomorphe dans un voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^n$.*

*Preuve.* — Il suffit de montrer que la condition sur le rayon spectral est vérifiée pour le système de Cauchy-Kowalewsky.

Soit

$$A(\xi) = (A_{i,k}(\xi))_{(i,k)\in[1,N]^2} = \Big(\sum_{\substack{|\beta|=m_k\\ \beta\in B_k}} |A_i^{k,\beta}| \xi^{\beta-(m_i,0,\dots,0)}\Big)_{(i,k)\in[1,N]^2}$$

la matrice spectrale associée au système (3.1.1), et $S = (S_{i,i})_{i\in\in[1,N]} = (\xi^{(m_i,0,\dots,0)})_{i\in\in[1,N]}$.

Notons $\eta = (\eta_1, ..., \eta_n) = (1, 0, ..., 0)$ alors pour tout $\beta \in B_k$, on a $\eta\beta < \eta(m_k, 0, ..., 0)$. En posant $\xi = (e^{\eta_1 t}, ..., e^{\eta_n t})$ et en faisant tendre $t$ vers $\infty$, on a $SAS^{-1} \to_{\xi\to\infty} 0$. Comme $SAS^{-1}$ et $A$ ont même rayon spectral, on a d'après le lemme 3.1.1 $\lambda(\xi) \to 0$. Donc on peut trouver un $\xi$ assez grand, tel que $\lambda(\xi) < 1$. *c.q.f.d*

La preuve du théorème 3.1.2 résulte de la proposition 3.1.6 et des considérations suivantes.

En considérant pour tout $k \in [1, N]$, $v_k = D_x^{\alpha_k} u_k$ comme nouvelles inconnues, on peut supposer $\alpha_k = (0, ..., 0)$. La matrice spectrale associée au système :

$$v_k = g_k(x, D^{B'} v) \tag{3.1.1'}$$

où $D^{B'}v = \{D_x^{\beta'} v_k / (k, \beta') \in B'\}$, $B' = \bigcup_k \{k\} \times B_1'$, $B_1'$ est une partie finie de l'ensemble $\{\beta' \in \mathbf{Z}^n / |\beta'| \leqslant 0,\ \beta' \neq 0\}$, $\beta' \in B_1'$ vérifie $\beta' = \beta - \alpha_k$, $\beta \in B_k$ a le même spectre que la matrice associée au système (3.1.1).

En effet, posons pour tout $(k, \beta') \in B'$ et pour tout $i \in [1, N]$,

$$A_i^{k,\beta'} = \frac{\partial g_i(0,0)}{\partial y_k^{\beta'}}$$

on a alors

$$\frac{\partial g_i(0,0)}{\partial y_k^{\beta'}} = \frac{\partial f_i(0,0)}{\partial y_k^{\beta}} := A_i^{k,\beta}$$

Pour tout $\xi \in (\mathbf{R}_+^*)^n$ on note $A'(\xi)$ la matrice spectrale de (3.1.1').

$$(A'_{i,k}(\xi))_{(i,k)\in[1,N]^2} = \Big( \sum_{\substack{|\beta'|=0 \\ \beta' \in B_1'}} |A_i^{k,\beta'}| \xi^{\beta'} \Big)_{(i,k)\in[1,N]^2}$$

$$= \Big( \sum_{\substack{|\beta|=|\alpha_k| \\ \beta \in B_k}} |A_i^{k,\beta}| \xi^{\beta - \alpha_k} \Big)_{(i,k)\in[1,N]^2} = (A_{i,k}(\xi) \xi^{\alpha_i - \alpha_k})_{(i,k)\in[1,N]^2}$$

Si $S(\xi) = (S_{j,j})_{j\in[1,N]^2} = (\xi^{\alpha_j})_{j\in[1,N]^2}$, alors $A'(\xi) = S(\xi)A(\xi)S^{-1}(\xi)$, $A'$ et $A$ ont même spectre, et par conséquent même rayon spectral. De plus, on peut supposer $f_j(0,0) = 0$ pour tout $j \in [1, N]$.

En effet, posons $c_j = f_j(0,0)$ et $v_j(x) = u_j(x) - f_j(0,0)$ pour tout $j \in [1, N]$, alors

$$v_j(x) = f_j(x, D^B v + D^B c) - c_j = g_j(x, D^B v) \tag{3.1.1''}$$

où $g_j(x, y) = f_j(x, y + D^B c) - c_j$ pour tout $j \in [1, N]$. Vu que $D^\beta c_k(0) = 0$ pour tout $(k, \beta) \in B$, on a $g_j(0,0) = f_j(0,0) - c_j = 0$.

On vérifie sans peine que la matrice spectrale de (3.1.1″), a le même spectre que $A(\xi)$ et, par conséquent le même rayon spectral.

Par conséquent, il s'agit de prouver le théorème pour le problème

$$u_j(x) = f_j(x, D^B u),\ 1 \leqslant j \leqslant N,\ D^B u = \{D_x^\beta u_k / (k, \beta) \in B\},\ B = \bigcup_k \{k\} \times B_1,$$

et $B_1$ est une partie finie de l'ensemble $\{\beta \in \mathbf{Z}^n / |\beta| \leqslant 0, \beta \neq 0\}$, et $f_j(0,0) = 0$ pour tout $j \in [1, N]$.

A cet effet, nous allons montrer que l'application $\psi : (u_1, ..., u_N) \to (f_i(x, D^B u(x))_{1 \leqslant i \leqslant N}$ est une contraction stricte, dans une boule fermée d'un espace de Banach, définie à l'aide des fonctions majorantes. Nous utiliserons les algèbres de Banach $B_R(\xi)$ définies dans le paragraphe 2.1.

Soient $\xi \in (\mathbf{R}_+^*)^n$ tel que $\lambda(\xi) < 1$ et $\mu \in [\lambda(\xi), 1[$. $\xi$ étant ainsi fixé, nous noterons simplement $B_R$ l'algèbre de Banach $B_R(\xi)$.

D'après un théorème de Frobenius [F], il existe un vecteur $T = (T_1, ..., T_N)$ de composantes positives tel que

$$\sum_k A_{i,k}(\xi) T_i \leqslant \mu T_k \tag{3.1.2}$$

Notons $B_R^N = (B_R)^N$, et définissons sur $B_R^N = (B_R)^N$ la norme $\|u\|_T = \sum_{i=1}^N \|u_i\| T_i$, où $\|.\|$ est la norme définie sur $B_R$.

Puisque $B_R^N$ est un espace de Banach pour la norme $u \mapsto \sup_i \|u_i\|, u = (u_1, ..., u_N) \in B_R^N$ et que

$$(\inf_{1 \leqslant i \leqslant N} T_i) \sup_i \|u_i\| \leqslant \|u\|_T \leqslant (\sum_{i=1}^N T_i) \sup_i \|u_i\|$$

$(B_R^N, \| \ \|_T)$ est donc un espace de Banach.

LEMME 3.1.4 (Taylor). — *Soit $f$ une fonction : $(x, y) \mapsto f(x, y)$ holomorphe dans un voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^{n+m}$ vérifiant $f(0,0) = 0$, il existe une fonction $G$ : $(x, y, z) \mapsto G(x, y, z)$ holomorphe dans un voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^{n+2m}$ vérifiant $G(0,0,0) = 0$, telle que pour $(x, y, z)$ assez petit dans $\mathbf{C}^{n+2m}$:*

$$f(x, y) = f(x, z) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(0,0)}{\partial y_j}(y_j - z_j) + \sum_{j=1}^m G(x, y, z)(y_j - z_j)$$

*Par suite, il existe une fonction $F$ : $(x, y) \mapsto F(x, y)$ holomorphe dans un voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^{n+m}$ vérifiant $F(0,0) = 0$, telle que pour $(x, y)$ assez petit dans $\mathbf{C}^{n+m}$:*

$$f(x, y) = f(x, 0) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(0,0)}{\partial y_j} y_j + \sum_{j=1}^m F(x, y) y_j$$

*Preuve.* — Posons $f(x,y) = f(x, y-z+z) = f(x, h+z) = H(x,h,z)$ Soit $H_n$ la partie homogène de degré $n$ de $H$ par rapport à $h$. On a $H(x,h,z) = \sum_{n\geqslant 0} H_n(x,h,z)$

Or, d'après la formule d'Euler pour les fonctions homogènes, on a

$$H_n(x,h,z) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial H_n(x,h,z)}{\partial h_j} h_j \quad \textit{pour} \quad n \geqslant 1$$

$$H(x,h,z) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial H_n(x,h,z)}{\partial h_j} h_j + H_0(x,h,z)$$

Or, $H_0(x,h,z) = H(x,0,z) = f(x,z)$. Par suite,

$$H(x,h,z) = H(x,0,z) + \sum_{j=1}^{m} (\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} \frac{\partial H_n(x,h,z)}{\partial h_j}) h_j$$

Notons $\quad g(x,h,z) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} \frac{\partial H_n(x,h,z)}{\partial h_j} = g(0,0,0) + G(x,h,z)$

avec $G(x,h,z) = g(x,h,z) - g(0,0,0)$.

Par suite $\quad g(0,0,0) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} \frac{\partial H_n(0,0,0)}{\partial h_j} = \frac{\partial H_1(0,0,0)}{\partial h_j}$.

On a alors,

$$H(x,h,z) = H(x,0,z) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial H_1(0,0,0)}{\partial h_j} h_j + \sum_{j=1}^{m} (\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n} \frac{\partial H_n(x,h,z)}{\partial h_j}) h_j \tag{3.1.3}$$

De plus $\quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y_j} = \frac{\partial H(x,h,z)}{\partial h_j} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{\partial H_n(x,h,z)}{\partial h_j} = \frac{\partial H_1(x,h,z)}{\partial h_j} + \sum_{n\geqslant 2} \frac{\partial H_n(x,h,z)}{\partial h_j}$.

Par conséquent

$$\frac{\partial H_1(x,h,z)}{\partial h_j} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y_j} - \sum_{n\geqslant 2} \frac{\partial H_n(x,h,z)}{\partial h_j}$$

On a alors $\dfrac{\partial H_1(0,0,0)}{\partial h_j} = \dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y_j}$. Par suite d'après (3.1.3), on a

$$f(x,y) = f(x,z) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(0,0)}{\partial y_j}(y_i - z_i) + \sum_{j=1}^{m} \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n} \frac{\partial H_n(x,h,z)}{\partial h_j}(y_j - z_j). \tag{3.1.4}$$

Posons $G(x,y,z) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n} \frac{\partial H_n(x,h,z)}{\partial h_j}$ .

$G$ est holomorphe dans un voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^{n+2m}$, et vérifie $G(0,0,0) = 0$.

Par suite, en prenant $z = 0$ dans l'équation (3.1.3), on a

$$f(x,y) = f(x,0) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(0,0)}{\partial y_j} y_i + \sum_{j=1}^{m} \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n} \frac{\partial H_n(x,y,0)}{\partial y_j} y_j.$$

Posons $F(x,y) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n} \frac{\partial H_n(x,y,0)}{\partial y_j}$. $F$ est holomorphe dans un voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^{n+m}$ et vérifie $F(0,0) = 0$, *c.q.f.d.*

LEMME 3.1.5. — *Soient* $\xi \in (\mathbf{R}_+^*)^n, R_1 > 0, R_1' > 0, \eta > 1, f$ *une fonction* $x \mapsto f(x)$ *holomorphe et bornée dans le disque* $\Delta(\eta, R_1) = \{x \in \mathbf{C}^n / \ \xi_j |x_j| < \eta R_1\}$ *telle que* $f(0) = 0$, $h$ *une fonction* $(x,y) \mapsto h(x,y)$ *holomorphe et bornée dans le polydisque*

$$\Delta_1(\eta, R_1, R_1') = \{(x,y) \in \mathbf{C}^{n+m} / \xi_j |x_j| < \eta R_1, |y_j| < R_1'\}$$

*telle que* $h(0,0) = 0$ *et* $g$ *une fonction* $(x,y,z) \mapsto g(x,y,z)$ *holomorphe et bornée dans le polydisque*

$$\Delta_2(\eta, R_1, R_1') = \{(x,y,z) \in \mathbf{C}^{n+2m} / \xi_j |x_j| < \eta R_1, |y_j| < R_1', |z_j| < R_1'\}$$

*telle que* $g(0,0,0) = 0$.

*Posons pour*

$$0 < R \leqslant R_1 \text{ et } 0 < R \leqslant R_1',\ \epsilon(R) = \sup_{\Delta(\eta,R)} |f(x)|,$$

$$\epsilon_1(R,R') = \sup_{\Delta_1(\eta,R,R')} |h(x,y)|,\ \epsilon_2(R,R') = \sup_{\Delta_2(\eta,R,R')} |g(x,y,z)|$$

*avec*

$$\Delta(\eta, R) = \{x \in \mathbf{C}^n / \quad \xi_j|x_j| < \eta R\},$$

$$\Delta_1(\eta, R, R') = \{(x, y) \in \mathbf{C}^{n+m} / \xi_j|x_j| < \eta R, |y_j| < R'\}$$

$$\Delta_2(\eta, R, R') = \{(x, y) \in \mathbf{C}^{n+m} / \ \xi_j|x_j| < \eta R, \ |y_j| < R', \ |z_j| < R'\},$$

*alors il existe* $c(\eta) \in \mathbf{R}_+^*$ *tel que pour tout* $R \in ]0, R_1]$ *et* $R' \in ]0, R_1']$ *on a*

$$g(x, y, z) \ll \epsilon_2(R, R')c(\eta)\phi_R(\xi.x) \prod_{j=1}^{m} \frac{R'}{R' - y_j} \frac{R'}{R' - z_j}$$

*Par suite, on a*

$$h(x, y) \ll \epsilon_1(R, R')c(\eta)\phi_R(\xi.x) \prod_{j=1}^{m} \frac{R'}{R' - y_j} f(x) \ll \epsilon(R)c(\eta)\phi_R(\xi.x)$$

*Preuve.* — Soient $R \in ]0, R_1]$ et $R' \in ]0, R_1']$. D'après les inégalités de Cauchy, on obtient

$$g(x, y, z) \ll \epsilon_2(R, R') \sum_{(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbf{N}^{n+2m}} \frac{\xi^\alpha x^\alpha y^\beta z^\gamma}{(\eta R)^{|\alpha|} R'^{|\beta|+|\gamma|}} \text{ où } \xi^\alpha x^\alpha = \prod_{j=1}^{n} (\xi_j x_j)^{\alpha_j}.$$

Par suite,

$$g(x, y, z) \ll \epsilon_2(R, R') \sum_{\alpha\in\mathbf{N}^n} \frac{\xi^\alpha x^\alpha}{(\eta R)^{|\alpha|}} \prod_{j=1}^{m} (\frac{R'}{R' - y_j})(\frac{R'}{R' - z_j}).$$

Considérons la fonction $\dfrac{\eta R}{\eta R - \xi.x}$ dont la série de taylor $\sum_{k=0}^{\infty} (\frac{\xi.x}{\eta R})^k$ admet pour domaine de convergence l'ouvert $\{x \in \mathbf{C}^n / \quad \sum_{j=1}^{n} \xi_j.|x_j| < \eta R\}$. On a

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\frac{\xi.x}{\eta R})^k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \frac{|\alpha|!\xi^\alpha x^\alpha}{\alpha!(\eta R)^{|\alpha|}} = \sum_{\alpha\in\mathbf{N}^n} \frac{|\alpha|!\xi^\alpha x^\alpha}{\alpha!(\eta R)^{|\alpha|}}.$$

Or pour tout $\alpha \in (\mathbf{N}^*)^n$, on a $\dfrac{|\alpha|!}{\alpha!} \geqslant 1$. Ce qui signifie que

$$\sum_{\alpha\in\mathbf{N}^n} \frac{\xi^\alpha x^\alpha}{(\eta R)^{|\alpha|}} \ll \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{\xi.x}{\eta R})^k$$

On a donc

$$g(x,y,z) \ll \epsilon_2(R,R')\frac{\eta R}{\eta R - \xi.x}\prod_{j=1}^{m}(\frac{R'}{R'-y_j})(\frac{R'}{R'-z_j}).$$

D'après le lemme 2.1.6, pour tout $\eta > 1$, il existe $c(\eta) > 0$ tel que

$$g(x,y,z) \ll \epsilon_2(R,R')c(\eta)\phi_R(\xi.x)\prod_{j=1}^{m}(\frac{R'}{R'-y_j})(\frac{R'}{R'-z_j}).$$

En utilisant le même principe de démonstration que pour $g$, on obtient pour $h$ et $f$, les inégalités désirées, *c.q.f.d.*

PROPOSITION 3.1.6. — *Il existe des nombres $R_0 > 0, a > 0$ tels que pour tout $R \in ]0, R_0]$, l'application $\psi : u \mapsto \psi(u)$ soit une contraction stricte dans la boule fermée $B'(0,a) = \{u \in B_R^N / \|u\|_T \leqslant a\}$ de l'espace de Banach $B_R^N$.*

*Preuve.* — D'après le lemme 3.1.4, pour tout $i \in [1, N]$, et pour tout $(k,\beta) \in B$, il existe $F_i^{k,\beta} : (x,y) \mapsto F_i^{k,\beta}(x,y)$ holomorphe dans un voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^{n+m}$ vérifiant $F_i^{k,\beta}(0,0) = 0$, et $G_i^{k,\beta} : (x,y,z) \mapsto G_i^{k,\beta}(x,y,z)$ holomorphe dans un voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^{n+2m}$ vérifiant $G_i^{k,\beta}(0,0,0) = 0$, tels que

$$f_i(x,y) = f_i(x,0) + \sum_{(k,\beta)\in B} A_i^{k,\beta} y_k^\beta + \sum_{(k,\beta)\in B} F_i^{k,\beta}(x,y) y_k^\beta \tag{3.1.5}$$

et

$$f_i(x,y) - f_i(x,z) = \sum_{(k,\beta)\in B} A_i^{k,\beta}(y_k^\beta - z_k^\beta) + \sum_{(k,\beta)\in B} G_i^{k,\beta}(x,y,z)(y_k^\beta - z_k^\beta) \tag{3.1.6}$$

Pour tout $i \in [1, N]$, $f_i$ étant holomorphe dans un voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^{n+m}$, étant donné un $\eta > 1$ il existe un $R_1 > 0$ tel que $f_i$ soit définie et bornée sur $\Delta(\eta, R_1)$.

De même pour tout $i \in [1, N]$ et pour tout $(k,\beta) \in B$, $F_i^{k,\beta}$ et $G_i^{k,\beta}$ étant holomorphes dans un voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^{n+m}$, $\mathbf{C}^{n+2m}$ respectivement, il existe $R_1' > 0$ tel que $F_i^{k,\beta}$ et $G_i^{k,\beta}$ soient définies et bornées sur $\Delta_1(\eta, R_1, R_1')$ , $\Delta_2(\eta, R_1, R_1')$ respectivement.

D'après le lemme 3.1.5, il existe $c_1(\eta) > 0$ tel que pour tout $R \in ]0, R_1], R' \in ]0, R_1']$, pour tout $i \in [1, N]$ et pour tout $(k, \beta) \in B$, on a

$$\left\{\begin{array}{l} f_i(x,0) \ll \epsilon(R)c_1(\eta)\phi_R(\xi.x) \\ F_i^{k,\beta}(x, y_k^\beta) \ll \epsilon_1(R,R')c_1(\eta)\phi_R(\xi.x) \displaystyle\prod_{(k,\beta)\in B} \frac{R'}{R' - y_k^\beta} \\ G_i^{k,\beta}(x, y_k^\beta, z_k^\beta) \ll \epsilon_2(R,R')c_1(\eta)\phi_R(\xi.x) \displaystyle\prod_{(k,\beta)\in B} \frac{R'}{R' - y_k^\beta}\frac{R'}{R' - z_k^\beta} \end{array}\right. \tag{3.1.7}$$

Etant donné que pour tout $i \in [1, N]$ et pour tout $(k, \beta) \in B$, $f_i(0,0) = F_i^{k,\beta}(0,0,0) = G_i^{k,\beta}(0,0,0) = 0$, on a $\epsilon(R), \epsilon_1(R, R')$, et $\epsilon_2(R, R')$ qui tendent vers zéro quand $(R, R')$ tend vers zéro.

1) **Cherchons d'abord les conditions suffisantes sur $a > 0$ et sur $R \in ]0, R_1]$ telles que $\psi(B'(0,a)) \subset B'(0,a)$.**

Soient $a \in \mathbf{R}_+^*$ et $u \in B'(0, a)$.

Pour tout $(k, \beta) \in B$, on a $D^\beta u_k \ll \|u_k\| D^\beta(\phi_R(\xi.x)) = \|u_k\|\xi^\beta(D^{|\beta|}\phi_R)(\xi.x)$.

D'après la proposition 2.1.3, 2), il existe un $c_2 > 0$ tel que

$$D^\beta u_k \ll \left\{\begin{array}{lll} \|u_k\|\xi^\beta\phi_R(\xi.x) & \text{si} & |\beta| = 0 \\ \|u_k\|c_2\xi^\beta R^{-|\beta|}\phi_R(\xi.x) & \text{si} & |\beta| < 0 \end{array}\right. \tag{3.1.8}$$

par conséquent

$$\|D^\beta u_k\| \leqslant \left\{\begin{array}{lll} \sup\limits_k \|u_k\|\xi^\beta & \text{si} & |\beta| = 0 \\ \sup\limits_k \|u_k\|c_2\xi^\beta R^{-|\beta|} & \text{si} & |\beta| < 0 \end{array}\right.$$

D'après l'équivalence des normes sur $B_R^N$, il existe $c_3 > 0$ tel que

$$\|D^\beta u_k\| \leqslant \left\{\begin{array}{lll} \|u\|_T c_3\xi^\beta & \text{si} & |\beta| = 0 \\ \|u\|_T c_3 c_2\xi^\beta R^{-|\beta|} & \text{si} & |\beta| < 0 \end{array}\right. \tag{3.1.9}$$

Si

$$ac_3\xi^\beta \leqslant \frac{R'}{2} \text{ et } ac_3c_2\xi^\beta R^{-|\beta|} \leqslant \frac{R'}{2} \tag{3.1.10}$$

la proposition 2.1.5 prouve que pour tout $(k, \beta) \in B$, on a

$$\frac{R'}{R' - D^\beta u_k} \ll (K+1)\phi_R(\xi.x) \tag{3.1.11}$$

Nous noterons $O(R)$ et $O(R,R')$ toute fonction de $R$ ou de $(R,R')$ qui tend vers zéro quand $(R,R')$ tend vers zéro. Les inégalités (3.1.10) s'écrivent alors

$$a \leqslant R'c_4, \qquad aO(R) \leqslant R'.$$

D'après (3.1.5), (3.1.7), (3.1.8), (3.1.11), on obtient, pour tout $i \in [1,N]$

$$f_i(x,y) \ll \Big[O(R) + \sum_{k=1}^{N} \Big(A_{i,k}(\xi) + O(R,R')\Big)\|u_k\|\Big]\phi_R(\xi.x).$$

Par conséquent,

$$\|f_i(x,y)\| \leqslant O(R) + \sum_{k=1}^{N}(A_{i,k}(\xi) + O(R,R'))\|u_k\|.$$

$$\sum_{i=1}^{N} \|f_i(x,y)\|T_i \leqslant O(R) + \sum_{i=1}^{N}\Big(\sum_{k=1}^{N}(A_{i,k}(\xi) + O(R,R'))\|u_k\|\Big)T_i.$$

D'après l'inégalité (3.1.2), on obtient

$$\|f(x,y)\|_T \leqslant O(R) + (\mu + O(R,R'))\|u\|_T$$

Par conséquent $\psi(B'(0,a)) \subset B'(0,a)$ si

$$\left\{\begin{array}{l} a \leqslant c_4R', \qquad aO(R) \leqslant R' \\ O(R) + a(\mu + O(R,R')) \leqslant a \end{array}\right. \tag{3.1.12}$$

2) **Cherchons les conditions pour que $\psi$ soit une contraction stricte.**

Soient $u, u' \in B'(0,a)$, les conditions (3.1.12) étant réalisées, pour tout $(k,\beta) \in B$, on a

$$\frac{R'}{R' - D^\beta u_k} \ll (K+1)\phi_R(\xi.x), \qquad \frac{R'}{R' - D^\beta u'_k} \ll (K+1)\phi_R(\xi.x) \tag{3.1.13}$$

$$D^\beta(u_k - u'_k) \ll \left\{\begin{array}{lll} \|u_k - u'_k\|\xi^\beta\phi_R(\xi.x) & si & |\beta| = 0 \\ c_2\|u_k - u'_k\|\xi^\beta R^{-\beta}\phi_R(\xi.x) & si & |\beta| < 0 \end{array}\right. \tag{3.1.14}$$

Alors d'après (3.1.6),(3.1.7),(3.1.13) et (3.1.14), et en notant $O(R)$ et $O(R,R')$ toute fonction de $R$ ou de $(R,R')$ qui tend vers zéro quand $(R,R')$

tend vers zéro, on obtient pour tout $i \in [1, N]$,

$$f_i(x,y) - f_i(x,z) \ll \sum_{k=1}^{N} (A_{i,k}(\xi) + O(R,R')) \|u_k - u'_k\| \phi_R(\xi.x) \qquad (3.1.15)$$

Par conséquent,

$$\|f_i(x,y) - f_i(x,z)\| \leqslant \sum_{k=1}^{N} (A_{i,k}(\xi) + O(R,R')) \|u_k - u'_k\|$$

et

$$\sum_{i=1}^{N} \|f_i(x,y) - f_i(x,z)\| T_i \leqslant \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} (A_{i,k}(\xi) + O(R,R')) \|u_k - u'_k\| T_i$$

Par suite, en utilisant l'inégalité (3.1.2), on obtient

$$\|f(x,y) - f(x,z)\|_T \leqslant (\mu + O(R,R')) \|u - u'\|_T$$

Pour que $\psi$ soit une contraction stricte, il suffit que

$$\mu + O(R', R) \leqslant \mu_0 < 1$$

En résumé, il suffit de satisfaire

$$\left\{ \begin{array}{l} a \leqslant c_4 R', \qquad aO(R) \leqslant R' \\ O(R) + a(\mu + O(R,R')) \leqslant a \\ \mu + O(R', R) \leqslant \mu_0 \end{array} \right. \qquad (3.1.16)$$

En reprenant le raisonnement de Wagschal [W], il existe $R_2 \in ]0, R_1]$ et $R' \in ]0, R'_1]$ tels que

$$\mu + O(R,R') \leqslant \mu_0, \quad \text{pour tout} \quad R \in ]0, R_2]$$

$R'$ étant ainsi fixé, on choisit $a$ tel que $0 < a \leqslant c_4 R'$, puis $R_0 \in ]0, R_2]$ assez petit pour que

$$aO(R) \leqslant R', \quad O(R) \leqslant (1-\mu_0)a, \quad \text{pour tout} \quad R \in ]0, R_0]$$

La proposition prouve également l'unicité de la solution du théorème.

En effet, soient $u = (u_1, ..., u_N)$ et $u' = (u'_1, ..., u'_N)$ où chaque $u_k$ et $u'_k$ sont des fonctions holomorphes dans un voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^n$ vérifiant $u_k = f_k(x, D^B u)$, $\quad u'_k = f_k(x, D^B u')$, et $u_k(0) = u'_k(0) = f_k(0,0)$ pour tout $k \in [1, N]$.

D'après le corollaire 2.1.7, on a $u_k \ll O(R)\phi_R(\xi.x)$, et $u'_k \ll O(R)\phi_R(\xi.x)$ pour tout $R > 0$ suffisamment petit et pour tout $k \in [1, N]$. Ce qui signifie que $\|u_k\| \leqslant O(R)$, $\|u'_k\| \leqslant O(R)$, et par suite $\|u\|_T \leqslant O(R)$, $\|u'\|_T \leqslant O(R)$. En choisissant $R \in ]0, R_0]$ tel que $O(R) \leqslant a$, on prouve que $u$ et $u'$ sont deux points fixes de la contraction stricte. *c.q.f.d.*

## 3.2. Problème de Cauchy généralisé dans l'espace des fonctions partiellement holomorphes

Dans ce paragraphe, nous conserverons une hypothèse de continuité par rapport à certaines variables.

On considère au voisinage de l'origine de $\mathbf{R}^p \times \mathbf{C}^q$ le problème semi-linéaire suivant:

$$\begin{cases} D_x^{\alpha_i} D_y^{\beta_i} u_i(x,y) = f_i(x,y,D^B u(x,y)) & 1 \leqslant i \leqslant N \\ u_i = O(x^{\alpha_i} y^{\beta_i}) & 1 \leqslant i \leqslant N \end{cases} \tag{3.2.1}$$

où $x = (x_1, ..., x_p) \in \mathbf{R}^p$, $\alpha_i = (\alpha_i^1, ..., \alpha_i^p) \in \mathbf{N}^p$, $D_x^{\alpha_i} = D_{x_1}^{\alpha_i^1} ... D_{x_p}^{\alpha_i^p}$,

$y = (y_1, ..., y_q) \in \mathbf{C}^q$, $\beta_i = (\beta_i^1, ..., \beta_i^q) \in \mathbf{N}^q$, $D_y^{\beta_i} = D_{y_1}^{\beta_i^1} ... D_{y_q}^{\beta_i^q}$,

$$D^B u = \{D_x^\gamma D_y^\delta u_k / (k, \gamma, \delta) \in B\}, \quad B = \bigcup_k \{k\} \times B_k,$$

$B_k$ est une partie finie de

$$\{(\gamma,\delta) \in \mathbf{Z}^p \times \mathbf{Z}^q / |\gamma| + |\delta| \leqslant |\alpha_k| + |\beta_k|, \ (\gamma,\delta) \neq (\alpha_k, \beta_k)\}, \ |\gamma| = \sum_{i=1}^p \gamma_i,$$

$$D_x^\gamma = D_{x_1}^{\gamma^1} ... D_{x_p}^{\gamma^p} \text{ pour } \gamma \in \mathbf{Z}^p, \ |\delta| = \sum_{i=1}^q \delta_i, \ D_y^\delta = D_{y_1}^{\delta^1} ... D_{y_q}^{\delta^q}$$

pour $\delta \in \mathbf{Z}^q$, $f_i$ pour tout $i \in [1, N]$ est une fonction des variables $x \in \mathbf{R}^p$, $y \in \mathbf{C}^q$ et de $z = (z_k^{\gamma,\delta})_{(k,\gamma,\delta)\in B} \in \mathbf{C}^m$, où $m = cardB$, que l'on suppose de classe $\mathbf{C}^{0,\omega}$ dans un voisinage de l'origine de $\mathbf{R}^p \times \mathbf{C}^{q+m}$, c'est-à-dire continue en $x$ et holomorphe en $(y, z)$.

Si $u_i$ est de classe $\mathbf{C}^{\alpha_i,\omega}$ dans un voisinage de l'origine de $\mathbf{R}^p \times \mathbf{C}^q$ pour tout $i \in [1, N]$, la condition $u_i = O(x^{\alpha_i} y^{\beta_i})$ signifie

$$\begin{cases} D_{x_j}^h u_i(x,y)_{|x_j=0} = 0 & \text{pour tout} \quad 0 \leqslant h < \alpha_i^j, \qquad 1 \leqslant j \leqslant p \\ D_{y_j}^h u_i(x,y)_{|y_j=0} = 0 & \text{pour tout} \quad 0 \leqslant h < \beta_i^j, \qquad 1 \leqslant j \leqslant q \end{cases}$$

On pose pour tout $(k,\gamma,\delta) \in B$ et pour tout $i \in [1,N]$,

$$A_i^{k,\gamma,\delta} = \frac{\partial f_i(0,0,0)}{\partial y_k^{\gamma,\delta}}$$

et pour tout $\zeta \in (\mathbf{R}_+^*)^q$, on note

$$A(\zeta) = (A_{i,k}(\zeta))_{(i,k)\in[1,N]^2} = \Big( \sum_{\substack{|\delta|=|\beta_k| \\ (\alpha_k,\delta)\in B_k}} |A_i^{k,\alpha_k,\delta}| \zeta^{\delta-\beta_i} \Big)_{(i,k)\in[1,N]^2}$$

la matrice spectrale associée au système (3.2.1), et $\lambda(\zeta)$ le rayon spectral de la matrice $A(\zeta)$.

THÉORÈME 3.2.1. — *S'il existe un $\zeta \in (\mathbf{R}_+^*)^q$ tel que $\lambda(\zeta) < 1$, le problème* (3.2.1) *admet une unique solution $u = (u_1, ..., u_N)$ où chaque $u_i$ est de classe $C^{\alpha_i,\omega}$ dans un voisinage de l'origine de* $\mathbf{R}^p \times \mathbf{C}^q$ pour $1 \leqslant i \leqslant N$.

COROLLAIRE. — *Considérons le problème de Cauchy en prenant dans* (3.2.1) *les hypothèses suivantes: $\alpha_i = 0, \beta_i = (m_i, 0, ..., 0)$ où $m_i \in \mathbf{N}$ et les conditions initiales $D_{y_1}^h u_i(x,y)_{|y_1=0} = 0$, pour $0 \leqslant h \leqslant m_i - 1$. Si $f_i(x, D^B u) \in C^{0,\omega}$ dans un voisinage de l'origine de $\mathbf{R}^p \times \mathbf{C}^{q+m}$ alors le problème* (3.2.1) *sous les conditions précédentes admet une unique solution $u = (u_1, ..., u_N)$ où chaque $u_i$ est de classe $C^{0,\omega}$ dans un voisinage de $\mathbf{R}^p \times \mathbf{C}^q$.*

*Preuve.* — Il suffit de vérifier que la condition sur le rayon spectral est vérifiée. Soit $A(\zeta)$ la matrice spectrale du système considéré

$$A(\zeta) = (A_{i,k}(\zeta))_{(i,k)\in[1,N]^2} = \Big( \sum_{\substack{|\delta|=|(m_k,0,\dots,0)| \\ (0,\delta)\in B_k}} |A_i^{k,0,\delta}| \zeta^{\delta-(m_k,0,\dots,0)} \Big)_{(i,k)\in[1,N]^2}$$

$B_k$ est une partie finie de l'ensemble

$$\{(\gamma,\delta) \in \mathbf{Z}^p \times \mathbf{Z}^q / |\gamma| + |\delta| \leqslant m_k, \quad (\gamma,\delta) \neq (0,...,0,m_k,0,...0)\}.$$

En prenant $\eta = (1,0,...,0) \in (\mathbf{R}_*^+)^q$ on a $\eta\delta < \eta(m_k,0,...,0)$. En posant $\zeta = (e^{\eta_1 t}, ..., e^{\eta_q t})$ et en faisant tendre $t$ vers l'infini, on obtient $SAS^{-1} \to 0$ où $S$ est la matrice diagonale $(S_{ii})_{i\in[1,N]} = (\zeta^{(m_i,0,\dots,0)})_{i\in[1,N]}$. D'après le lemme 3.1.1, $\lambda(\zeta) \to 0$. On peut donc trouver un $\zeta$ assez grand de façon à avoir $\lambda(\zeta) < 1$. Ce qui prouve que la condition sur le rayon spectral est bien vérifiée. *c.q.f.d.*

La preuve du théorème 3.2.1 résulte de la proposition 3.2.4 et des considérations suivantes.

Comme dans le cas holomorphe, nous supposerons que $\alpha_k = (0, ..., 0) \in \mathbf{N}^p$, $\beta_k = (0, ..., 0) \in \mathbf{N}^q$ et $f_k(0, 0, 0) = 0$ pour tout $k \in [1, N]$. Il s'agit alors de prouver le théorème pour le problème

$$u_i(x, y) = f_i(x, y, D^B u(x, y)) \qquad 1 \leqslant i \leqslant N$$

$$D^B u = \{D_x^\gamma D_y^\delta u_k / (k, \gamma, \delta) \in B\}, \quad B = \bigcup_k \{k\} \times B_1,$$

$B_1$ est une partie finie de l'ensemble

$$\{(\gamma, \delta) \in (-\mathbf{N})^p \times \mathbf{Z}^q / |\gamma| + |\delta| \leqslant 0, \quad (\gamma, \delta) \neq (0, 0)\},$$

et $f_k(0, 0, 0) = 0$ pour tout $k \in [1, N]$.

La matrice spectrale de ce système est alors

$$A(\zeta) = (A_{i,k}(\zeta))_{i,k \in [1,N]^2} = \Big( \sum_{\substack{|\delta|=0 \\ (0,\delta) \in B_1}} |A_i^{k,0,\delta}| \zeta^\delta \Big)_{(i,k) \in [1,N]^2}$$

*Remarque* 1. — S'il existe un $\zeta \in (\mathbf{R}_+^*)^q$ tel que $\lambda(\zeta) < 1$, il résulte qu'il existe un $\xi \in (\mathbf{R}_+^*)^p$ tel que $\lambda(\xi, \zeta) < 1$ où $\lambda(\xi, \zeta)$ est le rayon spectral de la matrice

$$A'(\xi, \zeta) = (A'_{i,k}(\xi, \zeta))_{i,k \in [1,N]^2} = \Big( \sum_{\substack{|\gamma|+|\delta|=0 \\ (\gamma,\delta) \in B_1}} |A_i^{k,\gamma,\delta}| \xi^\gamma \zeta^\delta \Big)_{(i,k) \in [1,N]^2}$$

Nous allons montrer que l'application $\psi : (u_1, ..., u_N) \to (f_i(x, y, D^B u(x, y))_{1 \leqslant i \leqslant N}$ est une contraction stricte dans une boule fermée d'un espace de Banach.

Nous utiliserons les algèbres de Banach $E_R(\xi, \zeta)$ définies dans le paragraphe 2.2.

Soit $\zeta \in (\mathbf{R}_+^*)^q$ tel que $\lambda(\zeta) < 1$, il existe $\xi \in (\mathbf{R}_+^*)^p$ tel que $\lambda(\xi, \zeta) < 1$ (remarque 1).

Soit $\mu \in [\lambda(\xi, \zeta), 1[$, il existe un vecteur $T = (T_1, ..., T_N)$ de composantes positives tel que

$$\sum_k A_{i,k}(\xi, \zeta) T_k \leqslant \mu T_i$$

$(\xi,\zeta)$ étant ainsi fixés, nous noterons simplement $E_R$ l'algèbre de Banach $E_R(\xi,\zeta)$ .

Notons $E_R^N = (E_R)^N$ et définissons sur $E_R^N = (E_R)^N$ la norme $\|u\|_T = \sum_{i=1}^N \|u_i\|T_i$, où $\|.\|$ est la norme définie sur $E_R$. Alors $(E_R^N, \|u\|_T)$ est un espace de Banach.

On énonce maintenant un lemme analogue au lemme 3.1.4 dans l'espace des fonctions de classe $C^{0,\omega}$.

LEMME 3.2.2. — *Soit $f$ une fonction :$(x,y,z) \mapsto f(x,y,z)$ de classe $C^{0,\omega}$ dans un voisinage de l'origine de $\mathbf{R}^p \times \mathbf{C}^{q+m}$ vérifiant $f(0,0,0) = 0$, il existe une fonction $G$ :*
*$(x,y,z,z') \mapsto G(x,y,z,z')$ de classe $C^{0,\omega}$ dans un voisinage de l'origine de $\mathbf{R}^p \times \mathbf{C}^{q+2m}$ vérifiant $G(0,0,0,0) = 0$, et telle que pour $(x,y,z,z')$ assez petit dans $\mathbf{R}^p \times \mathbf{C}^{q+2m}$:*

$$f(x,y,z) = f(x,y,z') + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(0,0,0)}{\partial z_j}(z_j - z'_j) + \sum_{j=1}^{m} G(x,y,z,z')(z_j - z'_j)$$

*Par suite, il existe une fonction $F$ : $(x,y,z) \mapsto F(x,y,z)$ de classe $C^{0,\omega}$ dans un voisinage de l'origine de $\mathbf{R}^p \times \mathbf{C}^{q+m}$ vérifiant $F(0,0,0) = 0$, et telle que pour $(x,y,z)$ assez petit dans $\mathbf{R}^p \times \mathbf{C}^{q+m}$:*

$$f(x,y,z) = f(x,y,0) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(0,0,0)}{\partial z_j} z_j + \sum_{j=1}^{m} F(x,y,z) z_j$$

LEMME 3.2.3. — *Soient $(\xi,\zeta) \in (\mathbf{R}_+^*)^{p+q}, R_1 > 0, R'_1 > 0, \eta > 1, f$ une fonction $(x,y) \mapsto f(x,y)$ bornée et de classe $C^{0,\omega}$ dans le polydisque*

$$\Delta(\eta,R_1) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^p \times \mathbf{C}^q / \quad \xi.|x| < R_1, \quad \zeta_j|y_j| < \eta R_1\}$$

*telle que $f(0,0) = 0$, $h$ une fonction :$(x,y,z) \mapsto h(x,y,z)$ bornée et de classe $C^{0,\omega}$ dans le polydisque*

$$\Delta_1(\eta,R_1,R'_1) = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^p \times \mathbf{C}^{q+m} / \xi.|x| < R_1, \zeta_j|y_j| < \eta R_1, |z_j| < R'_1\}$$

*telle que $h(0,0,0) = 0$ et $g$ une fonction $(x,y,z,z') \mapsto g(x,y,z,z')$ bornée et de classe $C^{0,\omega}$ dans le polydisque*

$$\Delta_2(\eta,R_1,R'_1) = \{(x,y,z,z') \in \mathbf{R}^p \times \mathbf{C}^{q+2m} / \xi.|x| < R_1, \zeta_j.|y_j| < \eta R_1, |z_j| < R'_1, |z'_j| < R'_1\}$$

*telle que* $g(0,0,0,0)=0$. *Posons pour*

$0<R\leqslant R_1$ et $0<R'\leqslant R'_1$, $\epsilon(R)=\sup_{\Delta(\eta,R)}|f(x,y)|$,

$$\epsilon_1(R,R')=\sup_{\Delta_1(\eta,R,R')}|h(x,y,z)|,\epsilon_2(R,R')=\sup_{\Delta_2(\eta,R,R')}|g(x,y,z,z')|$$

*avec*

$$\Delta(\eta,R)=\{(x,y)\in\mathbf{R}^p\times\mathbf{C}^q/\quad \xi.|x|<R,\quad \zeta_j|y_j|<\eta R\}$$
$$\Delta_1(\eta,R,R')=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^p\times\mathbf{C}^{q+m}/\xi.|x|<R,\zeta_j|y_j|<\eta R,|z_j|<R'\}$$
$$\Delta_2(\eta,R,R')=\{(x,y,z,z')\in\mathbf{R}^p\times\mathbf{C}^{q+2m}/\xi.|x|$$
$$<R,\zeta_j|y_j|<\eta R,|z_j|<R',|z'_j|<R'\},$$

*alors il existe* $c(\eta)\in\mathbf{R}_+^*$ *tel que pour tout* $R\in]0,R_1]$ *et* $R'\in]0,R'_1]$, *on a*

$$G(x,y,z,z')\ll\epsilon_2(R,R')c(\eta)\phi_R(\xi.|x|+\zeta.y)\prod_{j=1}^m\frac{R'}{R'-z_j}\frac{R'}{R'-z'_j}$$

*Par suite, on a*

$$h(x,y,z)\ll\epsilon_1(R,R')c(\eta)\phi_R(\xi.|x|+\zeta.y)\prod_{j=1}^m\frac{R'}{R'-z_j}$$

$$f(x,y)\ll\epsilon(R)c(\eta)\phi_R(\xi.|x|+\zeta.y)$$

*Preuve.* — En utilisant le même raisonnement que dans la preuve du lemme 3.1.5, et l'inégalité suivante

$$\phi_R(\zeta.y)\ll\phi_R(\xi.|x|+\zeta.y).$$

on obtient les inégalités désirées, *c.q.f.d.*

PROPOSITION 3.2.4. — *Il existe des nombres* $R_0>0,a>0$ *tels que pour tout* $R\in]0,R_0]$, *l'application* $\psi:u\mapsto\psi(u)$ *soit une contraction stricte dans la boule fermée* $B'(0,a)=\{u\in E_R^N/\|u\|_T\leqslant a\}$ *de l'espace de Banach* $E_R^N$.

*Preuve.* — D'après le lemme 3.2.2, pour tout $i\in[1,N]$, et pour tout $(k,\gamma,\delta)\in B$ il existe une fonction $G_i^{k,\gamma,\delta}:\quad(x,y,z,z')\mapsto G_i^{k,\gamma,\delta}(x,y,z,z')$ de classe $C^{0,\omega}$ dans un voisinage de l'origine de $\mathbf{R}^p\times\mathbf{C}^{q+2m}$, vérifiant $G_i^{k,\gamma,\delta}(0,0,0,0)=0$, et une fonction $F_i^{k,\gamma,\delta}:(x,y,z)\mapsto F_i^{k,\gamma,\delta}(x,y,z)$ de classe $C^{0,\omega}$ dans un voisinage de l'origine de $\mathbf{R}^p\times\mathbf{C}^{q+m}$ vérifiant $F_i^{k,\gamma,\delta}(0,0,0)=0$, telles que

$$f_i(x,y,z)=f_i(x,y,0)+\sum_{(k,\gamma,\delta)\in B}A_i^{k,\gamma,\delta}z_k^{\gamma,\delta}+\sum_{(k,\gamma,\delta)\in B}F_i^{k,\gamma,\delta}(x,y,z)z_k^{\gamma,\delta}\tag{3.2.2}$$

et

$$\begin{aligned} f_i(x,y,z) = f_i(x,y,z') &+ \sum_{(k,\gamma,\delta)\in B} A_i^{k,\gamma,\delta}(z_k^{\gamma,\delta} - z_k^{'\gamma,\delta}) \\ &+ \sum_{(k,\gamma,\delta)\in B} G_i^{k,\gamma,\delta}(x,y,z,z')(z_k^{\gamma,\delta} - z_k^{'\gamma,\delta}) \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Pour tout $i \in [1,N]$, $f_i$ étant de classe $C^{0,\omega}$ dans un voisinage de l'origine de $\mathbf{R}^p \times \mathbf{C}^{q+m}$ , étant donné un $\eta > 1$, il existe un $R_1 > 0$ tel que $f_i$ soit définie et bornée sur $\Delta(\eta, R_1)$.

De même pour tout $i \in [1,N]$ et pour tout $(k,\gamma,\delta) \in B$, $F_i^{k,\gamma,\delta}$ et $G_i^{k,\gamma,\delta}$ étant de classe $C^{0,\omega}$ dans un voisinage de l'origine de $\mathbf{R}^p \times \mathbf{C}^{q+m}$, et de $\mathbf{R}^p \times \mathbf{C}^{q+2m}$ respectivement, il existe $R_1' > 0$ tel que $F_i^{k,\gamma,\delta}$ et $G_i^{k,\gamma,\delta}$ soient définies et bornées sur $\Delta_1(\eta, R_1, R_1')$, et $\Delta_2(\eta, R_1, R_1')$ respectivement.

D'après le lemme 3.2.3, il existe $c_1(\eta) > 0$ tel que pour tout $R \in ]0, R_1]$, $R' \in ]0, R_1']$, pour tout $i \in [1,N]$ et pour tout $(k,\gamma,\delta) \in B$, on a

$$\left\{ \begin{aligned} & G_i^{k,\gamma,\delta}(x,y,z,z') \\ & \quad \ll \epsilon_2(R,R')c_1(\eta)\phi_R(\xi.|x| + \zeta.y) \prod_{j=1}^{m} (\frac{R'}{R'-z_j})(\frac{R'}{R'-z_j'}) \\ & F_i^{k,\gamma,\delta}(x,y,z) \ll \epsilon_1(R,R')c_1(\eta)\phi_R(\xi.|x| + \zeta.y) \prod_{j=1}^{m} \frac{R'}{R'-z_j} \\ & f_i(x,y,0) \ll \epsilon(R)c_1(\eta)\phi_R(\xi.|x| + \zeta.y) \end{aligned} \right. \tag{3.1.6}$$

On raisonne ensuite comme dans la démonstration de la proposition 3.1.6.

## 3.3. Problème de Cauchy généralisé dans les espaces de fonctions de classe de Gevrey $\mathbf{G}^{\alpha,\mathbf{d}}$

Dans ce paragraphe, nous conserverons une hypothèse de continuité par rapport à certaines variables et nous abandonnerons l'hypothèse d'holomorphie par rapport à $y$ en la remplaçant par une hypothèse de Gevrey. Ce qui généralise le problème de Pucci et de Talenti concernant le problème de Cauchy.

On considère dans un voisinage de l'origine de $\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q$ le problème semi-linéaire suivant:

$$\left\{ \begin{array}{ll} D_x^{\alpha_i} u_i(x,y) = f_i(x,y,D^B u(x,y)) & 1 \leqslant i \leqslant N \\ u_i = O(x^{\alpha_i}) & 1 \leqslant i \leqslant N \end{array} \right. \tag{3.3.1}$$

où

$$x = (x_1, ..., x_p) \in \mathbf{R}^p, y = (y_1, ..., y_q) \in \mathbf{R}^q, \alpha_i = (\alpha_i^1, ..., \alpha_i^p) \in \mathbf{N}^p,$$
$$x^{\alpha_i} = x_1^{\alpha_i^1} ... x_p^{\alpha_i^p}, \ D_x^{\alpha_i} = D_{x_1}^{\alpha_i^1} ... D_{x_p}^{\alpha_i^p},$$
$$D_{x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}, \ D^B u = \{D_x^\gamma D_y^\delta u_k / (k, \gamma, \delta) \in B\}, \ B = \bigcup_k \{k\} \times B_k,$$

$B_k$ est une partie finie de $\{(\gamma, \delta) \in \mathbf{Z}^p \times \mathbf{N}^q / |\gamma| + d|\delta| \leqslant |\alpha_k|, \quad \gamma < \alpha_k\}$, où $d \geqslant 1$, $\gamma < \alpha$ signifie $\gamma \leqslant \alpha$ et $\gamma \neq \alpha$, $\qquad D_{x_j}^{-1} = \int_0^{x_j}$,

$$|\gamma| = \sum_{i=1}^p \gamma_i, \quad D_x^\gamma = D_{x_1}^{\gamma_1} ... D_{x_p}^{\gamma_p} \text{ pour } \gamma \in \mathbf{Z}^p, \ |\delta| = \sum_{i=1}^q \delta_i, \quad D_y^\delta = D_{y_1}^{\delta_1} ... D_{y_q}^{\delta_q}$$
pour $\delta \in \mathbf{N}^q$.

$f_i$ est une fonction des variables $x \in \mathbf{R}^p, y \in \mathbf{R}^q$ et de $z = (z_k^{\gamma,\delta})_{(k,\gamma,\delta) \in B} \in \mathbf{R}^m$, où $m = cardB$, que l'on suppose de classe de gevrey $G^{0,d}$ dans un voisinage de l'origine de $\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^{q+m}$.

THÉORÈME 3.3.1. — *Le problème* (3.3.1) *admet une unique solution* $u = (u_1, ..., u_N)$ *où chaque* $u_i$ *est de classe de Gevrey* $G^{\alpha,d}$ *dans un voisinage de l'origine de* $\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q$, *pour tout* $1 \leqslant i \leqslant N$.

La preuve résulte de la proposition 3.3.4 et des considérations suivantes.

On remarque que si $d = 1$, ce théorème est contenu dans le théorème 3.2.1. En effet, étant donné que $\gamma < \alpha$, la condition sur le rayon spectral $\lambda(\xi) < 1$ est toujours satisfaite. Nous étudierons donc le problème pour $d > 1$.

Nous supposerons comme dans les cas précédents $\alpha_k = (0, ..., 0) \in \mathbf{N}^p$, pour tout $k \in [1, N]$.

Il s'agit alors de prouver le théorème pour le problème suivant

$$u_i(x, y) = f_i(x, y, D^B u(x, y)) \quad 1 \leqslant i \leqslant N$$

$D^B u = \{D_x^\gamma D_y^\delta u_k / (k, \gamma, \delta) \in B\}$, $B = \bigcup_k \{k\} \times B_1$, $\quad B_1$ est une partie finie de l'ensemble $\{(\gamma, \delta) \in (-\mathbf{N})^p \times \mathbf{N}^q / |\gamma| + d|\delta| \leqslant 0, \quad \gamma \neq 0\}$, où $d > 1$.

A cet effet nous allons montrer que l'application

$$\psi : (u_1(x, y), ..., u_N(x, y)) \to (f_i(x, y, D^B u(x, y)))_{1 \leqslant i \leqslant N}$$

est une contraction stricte dans une boule fermée d'un espace de Banach.

Nous utiliserons les algèbres de Banach définies dans le paragraphe 2.3.

Soient $\xi \in (\mathbf{R}_+^*)^p$, et $\zeta \in (\mathbf{R}_+^*)^q$. Notons $G^{\alpha,d}(\Omega_R)^N = (G^{\alpha,d}(\Omega_R))^N$ et posons
$\|u\|_N = \sup_{1\leqslant i\leqslant N} \|u_i\|$ pour $u = (u_1, ..., u_N) \in G^{\alpha,d}(\Omega_R)^N$. Muni de cette norme, l'espace $G^{\alpha,d}(\Omega_R)^N$ est un espace de Banach.

On énonce maintenant un lemme analogue au lemme 3.1.4, dans l'espace des fonctions de classe de Gevrey $G^{0,d}$.

LEMME 3.3.2. — *Soient $d > 1$ et $f$ une fonction : $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$ de classe de Gevrey $G^{0,d}$ dans un voisinage de l'origine de $\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^{q+m}$ , il existe une fonction $G : (x, y, z, z') \mapsto G(x, y, z, z')$ de classe de Gevrey $G^{0,d}$ dans un voisinage de l'origine de $\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^{q+2m}$, telle que pour $(x, y, z, z')$ assez petit dans $\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^{q+2m}$:*

$$f(x, y, z) = f(x, y, z') + \sum_{j=1}^{m} G(x, y, z, z')(z_j - z'_j)$$

LEMME 3.3.3. — *Soient $\xi \in (\mathbf{R}_+^*)^p$, $\zeta \in (\mathbf{R}_+^*)^q, R_1 > 0, R'_1 > 0, \eta > 1, \Omega$ un voisinage ouvert de $\mathbf{R}^q$, $f$ une fonction $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$ de classe de Gevrey $G^{0,d}$ définie dans le polydisque*

$$\Delta_1(R_1, R'_1) = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^{q+m} / \quad \xi.|x| < R_1, y \in \Omega, |z_j| < R'_1\},$$

*$G$ une fonction : $(x, y, z, z') \mapsto G(x, y, z, z')$ de classe de Gevrey $G^{0,d}$ définie dans le polydisque*

$$\Delta_2(R_1, R'_1) = \{(x, y, z, z') \in \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^{q+2m} / \quad \xi.|x| < R_1, y \in \Omega, |z_j| < R'_1, |z'_j| < R'_1\},$$

*alors il existe $c(\eta) \in \mathbf{R}_+^*$ et $R_0 > 0$ tels que pour tout $R \in ]0, R_0]$, on a*

$$G(x, y, z, z') \ll c(\eta) \Phi_R^{0,d}(t, y) \prod_{j=1}^{m} \theta_{R'}^d(z_j) \theta_{R'}^d(z'_j)$$

$$f(x, y, z) \ll c(\eta) \Phi_R^{0,d}(t, y) \prod_{j=1}^{m} \theta_{R'}^d(z_j).$$

*Preuve.* — Etant donnés $\eta > 1$, $f$ et $g$ de classe de Gevrey $G^{0,d}$ respectivement dans $\Delta_1(R_1, R'_1)$, et $\Delta_2(R_1, R'_1)$, il existe $c > 0$ , $R > 0$, et $R' > 0$

tels que pour tout
$\delta \in \mathbf{N}^q, \epsilon, \gamma \in \mathbf{N}^m$, tout $(x,y,z) \in \Delta_1(R_1, R_1')$, et tout $(x,y,z,z') \in \Delta_2(R_1, R_1')$, on ait

$$|D_y^\delta D_z^\epsilon f(x,y,z)| \leqslant c \frac{\zeta^\delta |\delta|!^d \epsilon!^d}{(\eta R)^{|\delta|} R'^{|\epsilon|}} \tag{3.3.2.}$$

et

$$|D_y^\delta D_z^\epsilon D_{z'}^\gamma G(x,y,z,z')| \leqslant c \frac{\zeta^\delta |\delta|!^d \epsilon!^d \gamma!^d}{(\eta R)^{|\delta|} R'^{|\epsilon|+|\gamma|}} \tag{3.3.3.}$$

En utilisant la série

$$\Theta_{\eta R}^d(\zeta . y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\zeta . y)^k k!^d}{k!(\eta R)^k} = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^q} \frac{\zeta^\alpha y^\alpha |\alpha|!^d}{\alpha!(\eta R)^{|\alpha|}}$$

car

$$\frac{(\zeta . y)^k}{k!} = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^q, |\alpha| = k} \frac{\zeta^\alpha y^\alpha}{\alpha!}$$

les inégalités (3.3.2) et (3.3.3.) signifient que pour tout $x$ tel que $\xi.|x| < R_1$,

$$f(x,y,z) \ll c\Theta_{\eta R}^d(\zeta . y) \prod_{j=1}^m \Theta_{R'}^d(z_j)$$

et

$$G(x,y,z,z') \ll c\Theta_{\eta R}^d(\zeta . y) \prod_{j=1}^m \Theta_{R'}^d(z_j) \Theta_{R'}^d(z_j').$$

En choisissant $R \leqslant R_1$, le lemme 2.3.8 prouve que pour tout $\eta > 1$, il existe $C(\eta) > 0$ et $R_0 > 0$ tels que pour tout $R \in ]0, R_0]$, on ait

$$f(x,y,z) \ll cC(\eta)\Phi_R^{0,d}(|x|, y) \prod_{j=1}^m \Theta_{R'}^d(z_j)$$

et

$$G(x,y,z,z') \ll cC(\eta)\Phi_R^{0,d}(|x|, y) \prod_{j=1}^m \Theta_{R'}^d(z_j)\Theta_{R'}^d(z_j') \qquad c.q.f.d.$$

PROPOSITION 3.3.4. — *Soit $d > 1$. Il existe $a_0 > 0$ tel que pour tout $a \geqslant a_0$ et tout $R \in ]0, R_0]$ suffisamment petit, l'application*

$$\psi : u(x,y) = (u_1(x,y), ..., u_N(x,y)) \mapsto (f_i(x,y,D^B u(x,y)))_{1 \leqslant i \leqslant N}$$

*soit une contraction stricte dans la boule fermée*
*$B'(0,a) = \{u \in G_R^{0,d}(\Omega_R)^N; \|u\| \leqslant a\}$ de l'espace de Banach $G_R^{0,d}(\Omega_R)^N$.*

*Preuve.* — Soient $a > 0$, $u \in B'(0,a) \subset G_R^{0,d}(\Omega_R)^N$, $0 < R \leqslant R_0$, $\Omega$ un voisinage ouvert de $\mathbf{R}^q$.

D'après le lemme 3.3.2, pour tout $i \in [1,N]$ et pour tout $(k,\gamma,\delta) \in B$, il existe une fonction $G_i^{k,\gamma,\delta} : (x,y,z,z') \mapsto G_i^{k,\gamma,\delta}(x,y,z,z')$ de classe de Gevrey $G^{0,d}$ dans un voisinage de l'origine de $\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^{q+2m}$ telle que

$$f_i(x,y,z) - f_i(x,y,z') = \sum_{(k,\gamma,\delta)\in B} G_i^{k,\gamma,\delta}(x,y,z,z')(z_k^{\gamma,\delta} - z_k^{'\gamma,\delta}) \tag{3.3.4}$$

Etant donné que $d > 1$, pour tout $(\gamma,\delta) \in B_k$, $1 \leqslant k \leqslant N$, on a $|\gamma| + |\delta| < 0$.

Par suite d'après la proposition 2.3.10, il existe une fonction $O : ]0, R_0] \to \mathbf{R}_+$ telle que $\lim\limits_{R\to 0} O(R) = 0$ et telle que pour tout $(k,\gamma,\delta) \in B$

$$z_k^{\gamma,\delta} = D_x^\gamma D_y^\delta u_k \ll aO(R)\Phi_R^{0,d}(t,y). \tag{3.3.5}$$

Ainsi pour $\xi.|x| < R$,

$$\sup_\Omega |D_x^\gamma D_y^\delta u_k(x,y)| \leqslant aO(R)\phi_R(\xi.|x|),$$

et l'inégalité

$$\phi_R(\xi.|x|) = \frac{1}{K}\sum_{j=0}^\infty \frac{(\xi.|x|)^j}{R^j(j+1)^2} \leqslant \frac{1}{K}\sum_{j=0}^\infty \frac{1}{(j+1)^2},$$

implique

$$\sup_\Omega |D_x^\gamma D_y^\delta u_k(x,y)| \leqslant aO(R)\phi_1(1).$$

Par conséquent, les fonctions

$$f_i(x,y,D^B u(x,y)) \text{ et } G_i^{k,\gamma,\delta}(x,y,D^B u(x,y), D^B u'(x,y))$$

pour tout $i \in [1,N]$ et pour tout $(k,\gamma,\delta) \in B$ sont bien définies dans $\Omega_R$ pour tout $u, u' \in B(0,a)$, s'il existe un $c_1 > 0$ tel que

$$aO(R) \leqslant c_1 \tag{3.3.6}$$

D'après le lemme 3.3.3, il existe $c(\eta) > 0$ et $R_0 > 0$ tels que pour tout $R \in ]0, R_0]$, et pour tout $i \in [1,N]$,

$$f_i(x,y,z) \ll c(\eta)\Phi_R^{0,d}(|x|,y)\prod_{j=1}^m \Theta_{R'}^d(z_j) \tag{3.3.7}$$

D'après le corollaire 2.3.9 et sous une condition analogue à (3.3.6), on a

$$\Theta^{d}_{R'}[aO(R)\Phi^{0,d}_{R}] \ll K\Phi^{0,d}_{R} \tag{3.3.8}$$

En reportant cette inégalité dans (3.3.7), et en utilisant la proposition 2.3.4, on en déduit qu'il existe un $c_2 > 0$ tel que pour tout $i \in [1, N]$,

$$f_i(x, y, z) \ll c_2\Phi^{0,d}_{R}(t, y)$$

ce qui signifie que pour tout $i \in [1, N]$,

$$\|f_i(x, y, z)\| \leqslant c_2$$

Par suite,

$$\|f(x, y, z)\|_N \leqslant c_2$$

Pour que $\psi(B'(0, a)) \subset B'(0, a)$, il suffit que

$$aO(R) \leqslant c_1 \quad et \quad que \quad c_2 \leqslant a \tag{3.3.9}$$

D'autre part, si $u, u' \in B'(0, a)$, on a

$$z^{\gamma,\delta}_k - z'^{\gamma,\delta}_k = D^{\gamma}_x D^{\delta}_y(u_k - u'_k) \ll \|u_k - u'_k\|O(R)\Phi^{0,d}_{R}(t, y) \tag{3.3.10}$$

En utilisant les majorations (3.3.8), (3.3.10) et le corollaire 2.3.6, on obtient pour tout $i \in [1, N]$

$$f_i(x, y, z) - f_i(x, y, z') \ll \sum_{(k,\gamma,\delta)} c(\eta)K^2O(R)\|u_k - u'_k\|\Phi^{0,d}_{R}(t, y)$$

c'est-à-dire, qu'il existe $c_3 > 0$ tel que

$$f_i(x, y, z) - f_i(x, y, z') \ll c_3O(R)\|u - u'\|_N\Phi^{0,d}_{R}(t, y)$$

ce qui signifie que, pour tout $i \in [1, N]$,

$$\|f_i(x, y, z) - f_i(x, y, z')\| \leqslant c_3O(R)\|u - u'\|_N$$

Par suite,

$$\|f(x, y, z) - f(x, y, z')\|_N \leqslant c_3O(R)\|u - u'\|_N$$

Par conséquent, $\psi$ est une contraction stricte si $c_3O(R) < 1$.
En résumé, il suffit que

$$aO(R) \leqslant c_1, \qquad c_2 \leqslant a, \qquad c_3O(R) < 1 \tag{3.3.11}$$

Reprenons le raisonnement de Wagschal [W]: en prenant $a_0 = c_2$, $a \geqslant a_0$, puis $R$ suffisamment petit pour satisfaire la première et la troisième inégalités de (3.3.11), la proposition est démontrée.*c.q.f.d.*

L'application $\psi$ étant contractante, le théorème du point fixe donne l'existence d'une solution de 3.3.1. Reste à prouver l'unicité.

Considérons pour tout $k \in [1, N]$, $u_k$ et $u'_k$ deux fonctions de classe de Gevrey $G^{0,d}$ dans un voisinage de l'origine de $\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q$ telles que $u_k = f_k(x, y, D^B u)$, et $u'_k = f_k(x, y, D^B u')$.

Il existe un voisinage ouvert $O \subset \Omega$ de l'origine de $\mathbf{R}^q$ et d'après le lemme 2.3.7, 2) il existe un nombre $R_1 \in ]0, R_0]$ tels que $u_k, u'_k \in G^{0,d}_{R_1}(O_{R_1})$, $k \in [1, N]$.

Pour tout $R \in ]0, R_1]$ on a à fortiori $u_k, u'_k \in G^{0,d}_R(O_R)$.

Notons $u_k \mapsto \|u_k\|_R, u'_k \mapsto \|u'_k\|_R$ la norme de $u_k$ et de $u'_k$ dans l'espace $G^{0,d}_R(O_R)$. On a

$$\|u_k\|_R \leqslant \|u_k\|_{R_1}, \qquad \|u'_k\|_R \leqslant \|u'_k\|_{R_1}$$

et par suite

$$\|u\|_{R,N} \leqslant \|u\|_{R_1,N}, \qquad \|u'\|_{R,N} \leqslant \|u'\|_{R_1,N}$$

En choisissant $a \geqslant \max(a_0, \|u\|_{R_1,N}, \|u'\|_{R_1,N})$ puis $R \in ]0, \min(R_0, R_1)]$ tels que $\psi$ soit une contraction stricte dans la boule fermée $B'(0, a) \subset G^{0,d}_R(O_R)^N$, on prouve que $u$ et $u'$ sont deux points fixes de la contraction stricte, et donc que $u = u'$ sur $O_R$. *c.q.f.d.*

## 3.4. Problème de Cauchy généralisé dans les espaces de fonctions de classe de Gevrey $\mathbf{G}^{\omega,\mathbf{d}}$

Dans ce paragraphe, nous conserverons une hypothèse d'holomorphie par rapport à certaines variable et une hypothèse Gevrey par rapport aux autres variables.

On considère dans un voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^p \times \mathbf{R}^q$ le problème semi-linéaire suivant:

$$\begin{cases} D_x^{\alpha_i} u_i(x, y) = f_i(x, y, D^B u(x, y)) & 1 \leqslant i \leqslant N \\ u_i = O(x^{\alpha_i}) & 1 \leqslant i \leqslant N \end{cases} \tag{3.4.1}$$

où

$x = (x_1, ..., x_p) \in \mathbf{C}^p, y = (y_1, ..., y_q) \in \mathbf{R}^q, \alpha_i = (\alpha_i^1, ..., \alpha_i^p) \in \mathbf{N}^p,$

$$x^{\alpha_i} = x_1^{\alpha_i^1} ... x_p^{\alpha_i^p}, D_x^{\alpha_i} = D_{x_1}^{\alpha_i^1} ... D_{x_p}^{\alpha_i^p},\ D_{x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j},\quad D_{x_j}^{-1} = \int_0^{x_j},$$

$d$ un nombre $\geqslant 1$,

$$D^B u = \{D_x^\gamma D_y^\delta u_k/(k,\gamma,\delta) \in B\},\quad B = \bigcup_k \{k\} \times B_k,\quad B_k$$

est une partie finie de

$$\{(\gamma,\delta) \in \mathbf{Z}^p \times \mathbf{N}^q/|\gamma| + d|\delta| \leqslant |\alpha_k|,\quad (\gamma,\delta) \neq (\alpha_k, 0)\},$$

$$|\gamma| = \sum_{i=1}^p \gamma_i,\quad D_x^\gamma = D_{x_1}^{\gamma_1} ... D_{x_p}^{\gamma_p}$$

pour $\gamma \in \mathbf{Z}^p$, $|\delta| = \sum_{i=1}^q \delta_i$, $\quad D_y^\delta = D_{y_1}^{\delta_1} ... D_{y_q}^{\delta_q}$ pour $\delta \in \mathbf{N}^q$.

$f_i$ est une fonction des variables $x \in \mathbf{C}^p, y \in \mathbf{R}^q$ et de $z = (z_k^{\gamma,\delta})_{(k,\gamma,\delta)\in B} \in \mathbf{R}^m$, où $m = cardB$, que l'on suppose de classe de Gevrey $G^{\omega,d}$ dans un voisinage de l'origine de $\mathbf{C}_{x,z}^{p+m} \times \mathbf{R}_y^q$.

On pose pour tout $(k,\gamma,\delta) \in B$ et pour tout $i \in [1,N]$,

$$A_i^{k,\gamma,\delta} = \frac{\partial f_i(0,0,0)}{\partial z_k^{\gamma,\delta}}$$

et pour tout $\xi \in (\mathbf{R}_+^*)^p$, on note

$$A(\xi) = (A_{i,k}(\xi))_{i,k\in[1,N]^2} = \Big( \sum_{\substack{|\gamma|=|\alpha_k| \\ (\gamma,0)\in B_k}} |A_i^{k,\gamma,0}| \xi^{\gamma-\alpha_i} \Big)_{(i,k)\in[1,N]^2}$$

la matrice spectrale associée au système (3.4.1), et $\lambda(\xi)$ le rayon spectral de la matrice $A(\xi)$.

THÉORÈME 3.4.1.— *S'il existe un* $\xi \in (\mathbf{R}_+^*)^p$ *tel que* $\lambda(\xi) < 1$, *le problème* (3.4.1) *admet une unique solution* $u = (u_1, ..., u_N)$ *où chaque* $u_i$ *est de classe de Gevrey* $G^{\omega,d}$ *dans un voisinage de l'origine de* $\mathbf{C}^p \times \mathbf{R}^q$.

COROLLAIRE.— *Considérons le système de Cauchy-Kowalewsky, en prenant dans* (3.4.1), $\alpha_i = (m_i, 0, ..., 0)$, $m_i \in \mathbf{N}$ *et pour conditions initiales* $D_{x_1}^h u_{i|x_1=0} = 0$, *pour* $0 \leqslant h \leqslant m_i - 1$. *Alors pour tout* $f_i(x, y, D^B u(x,y))$, $1 \leqslant i \leqslant N$ *de classe de Gevrey* $G^{\omega,d}$ *dans un voisinage de l'origine de* $\mathbf{C}_{x,z}^{p+m} \times \mathbf{R}_y^q$, *il existe une unique solution* $u = (u_1, ..., u_N)$ *où chaque* $u_i$ *est de classe de Gevrey* $G^{\omega,d}$ *dans un voisinage de l'origine de* $\mathbf{C}^p \times \mathbf{R}^q$.

*Preuve.* — Il suffit de montrer que la condition sur le rayon spectral est bien vérifiée. On a $B_k$ est une partie finie de l'ensemble $\{(\gamma,\delta) \in \mathbf{Z}^p \times \mathbf{N}^q / |\gamma| + d|\delta| \leqslant m_k, \quad (\gamma,\delta) \neq (m_k, 0, ..., 0)\}$, et

$$A(\xi) = (A_{i,k}(\xi))_{i,k\in[1,N]^2} = ( \sum_{\substack{|\gamma|=m_k \\ (\gamma,0)\in B_k}} |A_i^{k,\gamma,0}| \xi^{\gamma-(m_i,0,...,0)})_{(i,k)\in[1,N]^2}$$

En prenant $\eta = (1, 0, ..., 0) \in (\mathbf{R}_*^+)^p$ on a $\eta\gamma < \eta(m_k, 0, ..., 0)$. En posant $\xi = (e^{\eta_1 t}, ..., e^{\eta_p t})$ et en faisant tendre $t$ vers l'infini, on obtient $SAS^{-1} \to 0$ où $S$ est la matrice diagonale $(S_{ii})_{i\in[1,N]} = (\xi^{(m_i,0,...,0)})_{i\in[1,N]}$. D'après le lemme 3.1.1, $\lambda(\xi) \to 0$. On peut donc trouver un $\xi$ assez grand de façon à avoir $\lambda(\xi) < 1$. Ce qui prouve que la condition sur le rayon spectral est bien vérifiée. *c.q.f.d.*

La preuve du théorème 3.4.1 résulte de la proposition 3.4.5 et des considérations suivantes.

On remarque que si $d = 1$, ce théorème est contenu dans le Théorème 3.1.2. Nous nous limiterons au cas $d > 1$.

Nous supposerons comme dans les cas précédents, que pour tout $k \in [1, N]$, $\alpha_k = (0, ..., 0) \in (\mathbf{N})^p$. De plus, pour tout $(\gamma, \delta) \in B_1$, il existe $j \in [1, N]$ tel que $\gamma_j < 0$, ce qui implique que pour tout $u$, on a $D^B u(0, y) = 0, \quad \forall y \in \Omega$, où $\Omega$ est un voisinage ouvert de l'origine de $\mathbf{R}^q$. On peut donc en prenant $u_i - f_i(0, y, 0)$ comme nouvelle inconnue supposer $f_i(0, y, 0) = 0$ pour tout $y \in \Omega$ et pour tout $i[1, N]$.

Il s'agit alors de prouver le théorème pour le problème

$$u_i(x, y) = f_i(x, y, D^B u(x, y)) \qquad 1 \leqslant i \leqslant N$$

$B = \bigcup_k \{k\} \times B_1$ et $B_1$ est une partie finie de $\{(\gamma,\delta) \in \mathbf{Z}^p \times \mathbf{N}^q / |\gamma| + d|\delta| \leqslant 0, \quad (\gamma,\delta) \neq (0,0)\}$,

La matrice spectrale de ce système est alors

$$A(\xi) = (A_{i,k}(\xi))_{i,k\in[1,N]^2} = ( \sum_{\substack{|\gamma|=0 \\ (\gamma,0)\in B_1}} |A_i^{k,\gamma,0}| \xi^{\gamma})_{(i,k)\in[1,N]^2}$$

Nous noterons encore $\lambda(\xi)$ le rayon spectral de cette matrice.

Nous allons montrer que l'application

$$\psi : (u_1(x, y), ..., u_N(x, y)) \to (f_i(x, y, D^B u(x, y))_{1\leqslant i\leqslant N}$$

est une contraction stricte dans une boule fermée d'un espace de Banach.

Nous utiliserons les algèbres définies dans le paragraphe 2.4.

Soient $\xi \in (\mathbf{R}_+^*)^p$ tel que $\lambda(\xi) < 1$, $\zeta \in (\mathbf{R}_+^*)^q$ (fixé arbitrairement), et $\mu \in [\lambda(\xi), 1[$. Il existe un vecteur $T = (T_1, ..., T_N)$ de composantes positives tel que

$$\sum_k A_{i,k}(\xi, \zeta) T_k \leqslant \mu T_i \tag{3.4.2}$$

Posons $G_R^{\omega,d}(\Omega_R)^N = (G_R^{\omega,d}(\Omega_R))^N$, et définissons sur $G_R^{\omega,d}(\Omega_R)^N$ la norme $\|u\|_T = \sum_{i=1}^{N} \|u_i\| T_i$.

Alors $(G_R^{\omega,d}(\Omega_R)^N, \| \|_T)$ est un espace de Banach.

LEMME 3.4.2. — *Soit $f$ une fonction : $(x,y,z) \mapsto f(x,y,z)$ de classe de Gevrey $G^{\omega,d}$ dans un voisinage de l'origine de $\mathbf{C}_{x,z}^{p+m} \times \mathbf{R}_y^q$ vérifiant $f(0,y,0) = 0$, il existe une fonction $G : (x,y,z,z') \mapsto G(x,y,z,z')$ de classe de Gevrey $G^{\omega,d}$ dans un voisinage de l'origine de $\mathbf{C}_{x,z,z'}^{p+2m} \times \mathbf{R}_y^q$ vérifiant $G(0,y,0,0) = 0$, et une fonction $A : y \mapsto A(y)$ de classe de Gevrey $d$ dans un voisinage de l'origine de $\mathbf{R}_y^q$ vérifiant $A(0) = 0$ telles que pour $(x,y,z,z')$ assez petit dans $\mathbf{C}_{x,z,z'}^{p+2m} \times \mathbf{R}_y^q$:*

$$\begin{aligned} f(x,y,z) = f(x,y,z') + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(0,0,0)}{\partial z_j}(z_j - z_j') + \sum_{j=1}^{m} A(y)(z_j - z_j') \\ + \sum_{j=1}^{m} G(x,y,z,z')(z_j - z_j') \end{aligned}$$

*Par suite, il existe une fonction $F : (x,y,z) \mapsto F(x,y,z)$ de classe de Gevrey $G^{\omega,d}$ dans un voisinage de l'origine de $\mathbf{C}_{x,z}^{p+m} \times \mathbf{R}_y^q$, vérifiant $F(0,y,0) = 0$ telle que pour $(x,y,z)$ assez petit dans $\mathbf{C}_{x,z}^{p+m} \times \mathbf{R}_y^q$:*

$$f(x,y,z) = f(x,y,0) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(0,0,0)}{\partial z_j} z_j + \sum_{j=1}^{m} A(y) z_j + \sum_{j=1}^{m} F(x,y,z) z_j.$$

La fonction $A$ définie précédemment vérifie le Lemme suivant :

LEMME 3.4.3 [W]. — *Soient $O$ un voisinage de l'origine de $\mathbf{R}^q$, $A : O \to \mathbf{C}$ une fonction de classe de Gevrey $d \geqslant 1$ telle que $A(0) = 0$. Alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un nombre $R > 0$ et un voisinage ouvert $\Omega \subset O$ de l'origine de $\mathbf{R}^q$ tels que $A \in G_R^{\omega,d}(\Omega_R)$ et $\|A\| \leqslant \epsilon$.*

LEMME 3.4.4. — *Soient* $(\xi, \zeta) \in (\mathbf{R}_+^*)^{p+q}$, $R_1 > 0, R_1' > 0, \eta > 1, d \geqslant 1, \Omega$ *un voisinage ouvert de l'origine de* $\mathbf{R}^q$, $f$ *une fonction* $(x, y) \mapsto f(x, y)$ *de classe de Gevrey* $G^{\omega,d}$ *dans le polydisque* $\Delta(\eta, R_1) = \{(x, y) \in \mathbf{C}^p \times \mathbf{R}^q / \quad \xi_j |x_j| < \eta R_1, \quad y \in \Omega\}$ *telle que* $f(0, y) = 0 \quad \forall y \in \Omega$,

$F$ *une fonction :* $(x, y, z) \mapsto F(x, y, z)$ *de classe de Gevrey* $G^{\omega,d}$ *dans le polydisque*

$$\Delta_1(\eta, R_1, R_1') = \{(x, y, z) \in \mathbf{C}^{p+m} \times \mathbf{R}^q / \quad \xi_j |x_j| < \eta R_1, y \in \Omega, |z_j| < R_1'\}$$

*telle que* $F(0, y, 0) = 0$, $\forall y \in \Omega$ *et* $G$ *une fonction* $(x, y, z, z') \mapsto G(x, y, z, z')$ *de classe de Gevrey* $G^{\omega,d}$ *dans le polydisque*

$$\Delta_2(\eta, R_1, R_1') = \{(x, y, z, z') \in \mathbf{C}^{q+2m} \times \mathbf{R}^q / \xi_j |x_j| < \eta R_1, y \in \Omega, |z_j| < R_1', |z_j'| < R_1'\}$$

*telle que* $G(0, y, 0, 0) = 0$, $\forall y \in \Omega$.

*Pour* $0 < R \leqslant R_1$, *et* $0 < R' \leqslant R_1$, *on note* $O(R)$ *et* $O(R, R')$ *toute fonction de* $R$ *ou de* $R, R'$ *qui tend vers zéro quand* $(R, R')$ *tend vers zéro, alors il existe* $c(\eta) \in \mathbf{R}_+^*$ *tel que pour tout* $R \in ]0, R_1]$ *et* $R' \in ]0, R_1']$ *on a*

$$G(x, y, z, z') \ll O(R, R') c(\eta) \Phi_R^{\omega,d}(x, y) \prod_{j=1}^{m} \frac{R'}{R' - z_j} \frac{R'}{R' - z_j'}$$

$$F(x, y, z) \ll O(R, R') c(\eta) \Phi_R^{\omega,d}(x, y) \prod_{j=1}^{m} \frac{R'}{R' - z_j}$$

$$f(x, y) \ll O(R) c(\eta) \Phi_R^{\omega,d}(x, y).$$

*Preuve.* — Soient $R \in ]0, R_1]$ et $R' \in ]0, R_1']$.

Etant donné que $f(0, y) = G(0, y, 0, 0) = F(0, y, 0) = 0 \quad \forall y \in \Omega$, on peut écrire

$$f(x, y) = \sum_{j=1}^{p} x_j f_j(x, y) \tag{3.4.3}$$

$$F(x, y, z) = \sum_{j=1}^{p} x_j F_{1,j}(x, y, z) + \sum_{k=1}^{m} z_j F_{2,k}(x, y, z) \tag{3.4.4}$$

$$G(x, y, z, z') = \sum_{j=1}^{p} x_j G_{1,j}(x, y, z, z') + \sum_{k=1}^{m} z_j G_{2,k}(x, y, z, z') + \sum_{k=1}^{m} z_j' G_{3,k}(x, y, z, z') \tag{3.4.5}$$

où $f_j$, $F_{i,j}$ et $G_{i,j}$ sont définies et de classe de Gevrey $G^{\omega,d}$ dans $\Delta(\eta, R_1)$, $\Delta_1(\eta, R_1, R'_1)$ et $\Delta_2(\eta, R_1, R'_1)$ respectivement.

D'après les lemmes 2.4.4 et 2.4.5, pour tout $R \in ]0, R_1], R' \in ]0, R'_1]$, pour tout $\eta > 1$, il existe $c_1(\eta) > 0$ tel que pour tout $j \in [1,p], k \in [1,m]$

$$\left\{\begin{array}{l} f_j(x,y) \ll c_1(\eta)\Phi_R^{\omega,d}(x,y) \\ F_{1,j}, F_{2,k}(x,y,z) \ll c_1(\eta)\Phi_R^{\omega,d}(x,y) \prod_{j=1}^{m} (\frac{R'}{R'-z_j}) \\ G_{1,j}, G_{2,k}, G_{3,k}(x,y,z,z') \ll c_1(\eta)\Phi_R^{\omega,d}(x,y) \prod_{j=1}^{m} (\frac{R'}{R'-z_j})(\frac{R'}{R'-z'_j}) \end{array}\right. \tag{3.4.6}$$

De plus pour tout $j \in [1,p]$, et pour tout $k \in [1,m]$ on a

$$x_j \ll O(R)\Phi_R^{\omega,d}(x,y), \quad z_k \ll O(R')\frac{\eta R'}{\eta R' - z_k}, \quad z'_k \ll O(R')\frac{\eta R'}{\eta R' - z'_k} \tag{3.4.7}$$

De plus,

$$\frac{\eta R'}{\eta R' - z_j}\frac{R'}{R' - z_j} = \sum_{k=0}^{\infty}(\frac{z_j}{\eta R'})^n \sum_{k=0}^{\infty}(\frac{z_j}{R'})^n = \sum_{k=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{1}{\eta^{n-k}})(\frac{z_j}{R'})^n$$

Il existe, pour tout $\eta > 1$, un $c_2(\eta) > 0$ tel que $|\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{1}{\eta^{n-k}}| \leqslant c_2(\eta)$ par suite,

$$\frac{\eta R'}{\eta R' - z_j}\frac{R'}{R' - z_j} \ll c_2(\eta)\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{z_j}{R'})^n$$

On a alors, on a

$$\frac{\eta R'}{\eta R' - z_j}\frac{R'}{R' - z_j} \ll c_2(\eta)\frac{R'}{R' - z_j} \tag{3.4.8}$$

On en déduit en utilisant le fait que $(\Phi_R^{\omega,d})^2 \ll \Phi_R^{\omega,d}$, que pour tout $0 < R \leqslant R_1$, $0 < R' \leqslant R'_1$

$$\left\{\begin{array}{l} G(x,y,z,z') \ll O(R,R')c(\eta)\Phi_R^{\omega,d}(x,y) \prod_{j=1}^{m} (\frac{R'}{R'-z_j})(\frac{R'}{R'-z'_j}) \\ F(x,y,z) \ll O(R,R')c(\eta)\Phi_R^{\omega,d}(x,y) \prod_{j=1}^{m} \frac{R'}{R'-z_j} \\ f(x,y) \ll O(R)c(\eta)\Phi_R^{\omega,d}(x,y) \qquad c.q.f.d. \end{array}\right. \tag{3.4.9}$$

PROPOSITION 3.4.5. — *Soit $d > 1$ il existe des nombres $R_0 > 0, a > 0$ tels que pour tout $R \in ]0, R_0]$, l'application $\psi : u \to \psi(u)$ soit une contraction stricte dans la boule fermée $B'(0, a) = \{u \in G_R^{\omega,d}(\Omega_R)^N / \|u\|_T \leqslant a\}$ de l'espace de Banach $G_R^{\omega,d}(\Omega_R)^N$.*

*Preuve.* — Lorsque $d > 1$, $(\gamma, \delta) \in B_1$ et $|\gamma| + |\delta| = 0$, on a nécessairement $|\gamma| = 0$ et $\delta = 0$.

Soit $u \in B'(0, a)$. Pour tout $(k, \gamma, \delta) \in B$, d'après la proposition 2.4.7, il existe une fonction $O : ]0, R_0] \to R^+$ telle que $\lim_{R \to 0} O(R) = 0$ et telle que

$$D_x^\gamma D_y^\delta u_k \ll \begin{cases} \|u_k\| O(R) \Phi_R^{\omega,d}(x, y) & si \quad |\gamma| + |\delta| < 0, \\ \|u_k\| \xi^\gamma \Phi_R^{\omega,d}(x, y) & si \quad |\gamma| = 0, \delta = 0 \end{cases} \tag{3.4.10}$$

Sous les conditions

$$a \leqslant cR', \qquad aO(R) \leqslant R' \tag{3.4.11}$$

on a, d'après la proposition 2.4.6,

$$\frac{R'}{R' - D_x^\gamma D_y^\delta u_k} \ll c \Phi_R^{\omega,d}(x, y) \tag{3.4.12}$$

D'après le lemme 3.4.2, pour tout $i \in [1, N]$, et pour tout $(k, \gamma, \delta) \in B$ il existe une fonction $G_i^{k,\gamma,\delta} : \quad (x, y, z, z') \mapsto G_i^{k,\gamma,\delta}(x, y, z, z')$ de classe de Gevrey $G^{\omega,d}$ dans un voisinage de l'origine de $\mathbf{C}_{x,z,z'}^{p+2m} \times \mathbf{R}_y^q$, vérifiant $G_i^{k,\gamma,\delta}(0, y, 0, 0) = 0$ pour tout $y \in \Omega$, une fonction $A_i^{k,\gamma,\delta} : y \mapsto A_i^{k,\gamma,\delta}(y)$ de classe de Gevrey $d$ vérifiant $A_i^{k,\gamma,\delta}(0) = 0$ et une fonction $F_i^{k,\gamma,\delta} : (x, y, z) \mapsto F_i^{k,\gamma,\delta}(x, y, z)$ de classe de Gevrey $G^{\omega,d}$ dans un voisinage de l'origine de $\mathbf{C}_{x,z}^{p+m} \times \mathbf{R}_y^q$ vérifiant $F_i^{k,\gamma,\delta}(0, y, 0) = 0$ pour tout $y \in \Omega$, telles que

$$\begin{aligned} f_i(x, y, z) = f_i(x, y, 0) + \sum_{(k,\gamma,\delta) \in B} A_i^{k,\gamma,\delta} z_k^{\gamma,\delta} + \sum_{(k,\gamma,\delta) \in B} A_i^{k,\gamma,\delta}(y) z_k^{\gamma,\delta} \\ + \sum_{(k,\gamma,\delta) \in B} F_i^{k,\gamma,\delta}(x, y, z) z_k^{\gamma,\delta} \end{aligned} \tag{3.4.13}$$

et

$$\begin{aligned} f_i(x, y, z) = f_i(x, y, z') + \sum_{(k,\gamma,\delta) \in B} A_i^{k,\gamma,\delta}(z_k^{\gamma,\delta} - z_k^{'\gamma,\delta}) \\ + \sum_{(k,\gamma,\delta) \in B} A_i^{k,\gamma,\delta}(y)(z_k^{\gamma,\delta} - z_k^{'\gamma,\delta}) + \sum_{(k,\gamma,\delta) \in B} G_i^{k,\gamma,\delta}(x, y, z, z')(z_k^{\gamma,\delta} - z_k^{'\gamma,\delta}) \end{aligned} \tag{3.4.14}$$

Pour tout $i \in [1, N]$, $f_i$ étant de classe de Gevrey $G^{\omega,d}$ dans un voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^{p+m} \times \mathbf{R}^q$, étant donné un $\eta > 1$, il existe un $R_1 > 0$ tel que $f_i$ soit définie sur $\Delta(\eta, R_1)$.

De même pour tout $i \in [1, N]$ et pour tout $(k, \gamma, \delta) \in B$, $F_i^{k,\gamma,\delta}$ et $G_i^{k,\gamma,\delta}$ étant de classe de Gevrey $G^{\omega,d}$ dans un voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^{p+m} \times \mathbf{R}^q$, $\mathbf{C}^{p+2m} \times \mathbf{R}^q$ respectivement, il existe $R'_1 > 0$ tel que $F_i^{k,\gamma,\delta}$ et $G_i^{k,\gamma,\delta}$ soient définies sur $\Delta_1(\eta, R'_1, R_1)$ , $\Delta_2(\eta, R'_1, R_1)$ respectivement.

D'après le lemme 3.4.4, il existe $c(\eta) > 0$ tel que pour tout $R \in ]0, R_1]$, $R' \in ]0, R'_1]$, pour tout $i \in [1, N]$ et pour tout $(k, \gamma, \delta) \in B$, on a

$$\begin{cases} G_i^{k,\gamma,\delta}(x, y, z, z') \ll O(R, R')c(\eta)\phi_R^{\omega,d}(x, y) \prod_{j=1}^{m} (\frac{R'}{R' - z_j})(\frac{R'}{R' - z'_j}) \\ F_i^{k,\gamma,\delta}(x, y, z) \ll O(R, R')c(\eta)\phi_R^{\omega,d}(x, y) \prod_{j=1}^{m} \frac{R'}{R' - z_j} \\ f_i(x, y, 0) \ll O(R)c(\eta)\phi_R^{\omega,d}(x, y) \end{cases} \tag{3.1.15}$$

Donnons-nous des nombres $\epsilon_{ik} > 0$ pour $1 \leqslant i, k \leqslant N$ tels que la matrice $M = (M_{ik}(\xi))_{1 \leqslant i,k \leqslant N} = (A_{ik}(\xi) + \epsilon_{ik} \sum_{|\gamma|=0,\delta=0} \xi^\gamma)_{1 \leqslant i,k \leqslant N}$ ait un rayon spectral $\lambda_1(\xi) \leqslant \mu < 1$.

On raisonne ensuite comme dans la démonstration de la proposition 3.1.6, pour trouver $R_0 > 0$ et $a > 0$. *c.q.f.d.*

Reste à montrer l'unicité de la solution du théorème 3.4.1.

Soient pour tout $k \in [1, N]$ $u_k$ et $u'_k$ deux fonctions de classe de Gevrey $G^{\omega,d}$ dans un voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^p \times \mathbf{R}^q$ vérifiant $u_k = f_k(x, y, D^B u)$ et $u'_k = f_k(x, y, D^B u')$.

D'après le lemme 2.4.3. 2) il existe $R_1 > 0$ tel que $u_k$ et $u'_k$ soient dans $G_R^{\omega,d}(\Omega_R)$ pour $R < R_1$.

Etant donné que $f_k(0, y, 0) = 0$ pour tout $y$, pour tout $k \in [1, N]$, toute solution $u$ et $u'$ des équations précédentes vérifient pour tout $k \in [1, N]$, $u_k(0, y) = 0$, $u'_k(0, y) = 0$ pour tout $y$.

On a alors pour tout $k \in [1, N]$, $u_k \ll O(R)\phi_R^{\omega,d}(x, y)$ et $u'_k \ll O(R)\phi_R^{\omega,d}(x, y)$, et par suite $\|u\|_T \leqslant O(R)$ et $\|u'\|_T \leqslant O(R)$. Donc pour $R > 0$ assez petit tel que $u$ et $u'$ soient dans la boule $B(0, a)$ de $(G_R^{\omega,d}(\Omega_R))^N$, $u$ et $u'$ sont deux points fixes de la contraction .

Donc $u = u'$ dans $\Omega_R$. Ce qui prouve l'unicité de $u$ dans $(G_R^{\omega,d}(\Omega_R))^N$ au voisinage de l'origine.

On raisonne alors comme dans la démonstration de la proposition 3.1.6 pour prouver l'unicité. *c.q.f.d.*

## Bibliographie


[B] BRIOT (C.) et BOUQUET (J.C.). — *Journ. Ec. Polytechnique*, vol 21.

[C1] CAUCHY (A.). — *Mémoire sur un théorème fondamental, dans le calcul intégral*, C. R. Acad. Sci. Paris, vol. 39, 1842, p. 1020-1026.

[C2] CAUCHY (A.). — *Mémoire sur l'emploi du calcul des limites dans l'intégration des équations aux dérivées partielles*, C. R. Acad. Sci. Paris, vol. 40, 1842, p. 44-59.

[C3] CAUCHY (A.). — *Mémoire sur l'application du calcul des limites à l'intégration d'un système d'équations aux dérivées partielles*, C. R. Acad. Sci. Paris, vol. 40, 1842, p. 85.101.

[C4] CAUCHY (A.). — *Mémoire sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles d'ordre quelconque et sur leur réduction à des systèmes d'équations linéaires du premier ordre*, C. R. Acad. Sci. Paris, vol. 40, 1842, p. 131.138.

[F1] FRIEDLENDER (V.R.). — *On the Cauchy Kowalewsky problem for some partial differential equations*, Uspehi. Mat. Nauk SSSR, vol. 12, 1957, p. 385-388.

[F2] FRIEDLENDER (V.R.). — *On the analycity of solutions of the Cauchy Kowalewsky problem for some non linear partial differential equations*, Mat. Sb (N.S.), vol. 47, 1959, p. 17-44.

[FR] FRIEDMAN (A.). — *A new proof and generalisations of Cauchy Kowalewsky Theorem*, Trans. Am. Math. Soc, vol. 98, 1961, p. 1-20.

[F] FROBENIUS (G.). — *Uber Matrizen aus positiven Elementen II*,Sitzungsbericht d.k Preußischen Ak.d.Wiss. 18, 1909.

[G1] GOURSAT (E.). — *Sur l'existence des fonctions intégrales d'un système d'équations aux dérivées partielles*, Bull. Soc. Math. France, vol. 26, 1898, p. 129-134 et *Cours d'analyse Mathématique*, vol. II, 1905, p. 360.

[G2] GOURSAT (E.). — *Sur la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre*, C. R. Acad. Sci. Paris, vol. 120, 1895, p. 712.

[G3] GOURSAT (E.). — *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*, tome I, 1896.

[Ga] GARDING (L.). — *Une variante de la méthode de majoration de Cauchy*, Acta. Math., 114, 1965, p. 143-158.

[H] HOLMGREN (E.). — *Sur l'équation de la propagation de la chaleur*, Arkiv fur Math. Astr. Physik, vol. 4, 1908, p. 1-2,3-4.

[K] KOWALEWSKY (S.). — *Zur theorie der partiellen Differentialgleichungen*, J. Reine Angew. Math., vol. 80, 1875, p. 1-32.

[L] LEDNEV (N.). — *A new method for solving partial differential equations*, Mat. Sbornik, T22(64), 1948, p. 205-264.

[La] LAX (P.D.). — *Non linear hyperbolic equations*, Comm. Pure Appl. Math., vol. 6, 1953, p. 231-258.

[Le] LE ROUX. — *Sur les intégrales analytiques de l'équation* $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{\partial u}{\partial y}$, Bull. Sci. Math. France, vol. 19, 1895, p. 127-129.

[P] PETROVSKY. — *Théorie des équations différentielles ordinaires et des équation intégrales*, Edition Mir.

[Pe] PERSSON (J.). — *New proofs and generalisations of two theorems by Lednev for Goursat problems*, Math. Ann., vol. 178, 1968, p. 184-208.

[Pu] PUCCI (C.). — *Nuove ricerche sul problema di Cauchy*, Mem. Acc. Sc. Torino, série 3, $n^0$ 1, 1955, p. 45-67.

[SF] SALEHOV (G.S.) and FRIEDLENDER (V.R.). — *On the question of the inverse of the Cauchy Kowalewsky problem*, Uspehi. Mat. Nauk SSSR, vol. 7, 1952, p. 169-192.

[T1] TALENTI (G.). — *Un problema di Cauchy*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 1964, p.165-186.

[T2] TALENTI (G.). — *Sul problema di Cauchy per le equazioni a derivate parziali*, Ann. Mat. Pura. Appl, vol. 67, 1965, p. 365-394.

[W] WAGSCHAL (C.). — *Problème de Goursat non linéaire*, Journal. Math. Pure et Appl, t. 58, 1979, p. 309-337.