ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

DJIBRILLA GARBA BELKO

Cohomologie relative de formes non exceptionnelles

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 8, nº 2 (1999), p. 203-218

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1999_6_8_2_203_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. VIII, n° 2, 1999
pp. 203–218

Cohomologie relative de formes non exceptionnelles [(*)]

DJIBRILLA GARBA BELKO [(1)]

RÉSUMÉ. — Dans ce travail on considère des problèmes de cohomologie relative associés à des 1-formes différentielles à l'origine de $\mathbf{C}^2$. On s'intéresse à la classe des formes η formellement ω- exactes ($\eta = \hat{a}\omega + d\hat{h}$, où $\hat{a}$ et $\hat{h}$ sont des séries formelles) modulo les formes ω-exactes ($\eta = a\omega + dh$, où a et h sont holomorphes). Cette étude est motivée par le cas des singularités des fonctions $\omega = df$ pour lesquelles ce module est trivial. On montre que si η est formellement ω-exacte et ω est dicritique ou non exceptionnelle, alors $\hat{a}$ et $\hat{h}$ convergent.

ABSTRACT. — In this work we consider a problem of relative cohomology associated to the differential 1-forms at the origin of $\mathbf{C}^2$. We are interested by the class of forms η formally ω- exact ($\eta = \hat{a}\omega + d\hat{h}$, where $\hat{a}$ and $\hat{h}$ are formal power series) modulo the forms ω-exact ($\eta = a\omega + dh$, where a and h are holomorphic). This study is motivated by the case of singularities of functions $\omega = df$ for which this is obvious. We show that if η is formally ω-exact and ω is dicritical or non exceptional then, $\hat{a}$ and $\hat{h}$ are convergent.

1. Introduction

On introduit l'anneau $\mathcal{O}_n$ des germes de fonctions holomorphes à l'origine de $\mathbf{C}^n$ et son complété formel $\hat{\mathcal{O}}_n$. On considère le $\mathcal{O}_n$ module des germes

(*) Reçu le 3 juin 1997, accepté le 29 janvier 1999.
(1) Institut mathématique de Rennes, campus de Beaulieu, av. du Général Leclerc, 35042 Rennes cedex
e-mail: garba@univ-rennes1.fr

de 1-formes holomorphes à l'origine de $\mathbf{C}^n$:

$$\Lambda_n^1 = \{\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i dx_i \ / \ a_i \in \mathcal{O}_n\}$$

et l'ensemble :

$$\underline{\Lambda}_n^1 = \{\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i dx_i \in \Lambda_n^1 \ / \ \omega \wedge d\omega = 0 \ , \ \text{pgcd}\ (a_1, ..., a_n) = 1\}.$$

Etant donnés deux éléments ω et η de Λ_n^1 on dit que η est $\omega-$exacte (resp. formellement $\omega-$exacte) s'il existe a, h dans $\mathcal{O}_n$ (resp. $\hat{a}, \hat{h}$ dans $\hat{\mathcal{O}}_n$) tels que $\eta = a\omega + dh$ (resp. $\eta = \hat{a}\omega + d\hat{h}$). Soit U un voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^2$ sur lequel il existe un représentant ω_U de ω, dont 0 est l'unique singularité. Un cycle de ω_U est la donnée d'une application, de classe $\mathcal{C}^1$, γ de $[0,1]$ dans $U \setminus 0$ telle que :

1. $\gamma(0) = \gamma(1)$
2. $\gamma^* \omega_U = 0$.

Désignons par $C(\omega, U)$ l'ensemble des cycles de ω_U et Λ_U^1 celui des 1-formes holomorphes sur U. Posons :

$$H_{top}^1(\omega_U) = \frac{\{\eta \in \Lambda_U^1 / \ d\eta \wedge \omega = 0 \text{ et } \int_\gamma \eta = 0 \ \forall \ \gamma \in C(\omega, U)\}}{\{\eta = a\omega + dh, \ a, \ h \text{ holomorphe sur } U\}}.$$

On définit le premier groupe de cohomologie relative topologique, $H_{top}^1(\omega)$, comme étant la limite inductive $\lim_U H_{top}^1(\omega_U)$. Dans [Be-Ce] il est prouvé que si ω admet une intégrale première holomorphe ou multiforme générique alors $H_{top}^1(\omega)$ est trivial et toute 1-forme η formellement $\omega-$exacte est $\omega-$exacte. Ces auteurs proposent la conjecture suivante : si l'espace $H_{top}^1(\omega)$ est trivial, alors toute 1-forme holomorphe formellement $\omega-$exacte est $\omega-$exacte. Rappelons qu'un élément ω de $\underline{\Lambda}_2^1$ définit un germe de feuilletage holomorphe saturé de codimension 1 $\Im_\omega$ dont le lieu singulier est l'origine de $\mathbf{C}^2$. On dit que ω (ou $\Im_\omega$) est réduit s'il existe un système de coordonnées (x, y) tel que le 1-jet de ω ($J^1\omega$) s'écrive sous l'une des formes suivantes :

1. $J^1\omega = xdy + \lambda ydx \ \lambda \notin \mathbf{Q}^-$
2. $J^1\omega = xdy$.

Lorsque $J^1\omega$ est de type 1. et λ est rationnel Berthier et Loray [Be-Lo] donnent des conditions nécessaires pour qu'une 1-forme η formellement $\omega-$exacte soit $\omega-$exacte ; cet énoncé est optimal. Si ω est holomorphiquement conjugué à son 1-jet il est établi, dans [Be-Lo], que modulo des conditions diophantiennes sur le rapport des valeurs propres de $J^1\omega$ la ω−exactitude formelle implique la ω−exactitude. En général, les éléments de $\underline{\Lambda}_2^1$ ne sont pas réduits, cependant on a le résultat suivant dû à Seidenberg [Se], [Ma-Mo] : soit U un voisinage ouvert de l'origine de $\mathbf{C}^2$ tel que 0 soit l'unique singularité de ω. Il existe une variété $\tilde{U}$, un morphisme $\pi : \tilde{U} \to U$ obtenu par composition d'un nombre fini d'éclatements et un feuilletage $\tilde{\Im}_\omega$ sur U tels que :

1. $\pi^{-1}(0)$ est un diviseur à croisements normaux
2. $\tilde{\Im}_\omega$ est l'éclaté strict de $\Im_\omega$; c'est le feuilletage saturé de $\pi^*\Im_\omega$
3. $\tilde{\Im}_\omega$ est à singularité réduite
4. la restriction de π à $\tilde{U} \setminus \pi^{-1}(0)$ est un isomophisme de $\tilde{U} \setminus \pi^{-1}(0)$ sur $U \setminus \{0\}$.

$\pi^{-1}(0)$ est appelé le diviseur exceptionnel. On dit qu'une composante irréductible C de $\pi^{-1}(0)$ est non dicritique si $C \setminus \mathrm{Sing}\tilde{\Im}_\omega$ est une feuille, où $\mathrm{Sing}\tilde{\Im}_\omega$ désigne l'ensemble des singularités de $\tilde{\Im}_\omega$. Si c'est le cas elle est porteuse d'une holonomie projective définie comme suit : soient P un point régulier de $\tilde{\Im}_\omega$ dans C et Σ une transversale au feuilletage en P. .On identifie Σ_P à $\mathbf{C}_0$, où $\mathbf{C}_0$ (resp. $\mathbf{C}_0^n$) est le germe à l'origine de $\mathbf{C}$ (resp. $\mathbf{C}^n$) . Pour tout élément γ de $\pi_1(C \setminus \mathrm{Sing}\tilde{\Im}_\omega, P)$ le relevé de γ en z, assez proche de P, suivant une fibration transverse à $\tilde{\Im}_\omega$, dont Σ est une fibre, aboutit à $h_\gamma(z)$. Le germe d'application $h_\gamma : \Sigma_P \longrightarrow \Sigma_P$ qui à z associe $h_\gamma(z)$ est holomorphe. La représentation d'holonomie de C est le morphisme qui à γ associe h_γ, son image dans le groupe des germes de difféomorphismes holomorphes à l'origine de $\mathbf{C}$ ($Diff_1$) est le groupe d'holonomie projective de C. Ce groupe est défini à conjugaison holomorphe près. Pour plus de précisions se référer à [Ma-Mo]. Un sous groupe G de $Diff_1$ est dit exceptionnel si sa partie tangente à l'identité est monogène. Cette classe contient les groupes abéliens "exceptionnels" et les groupes non abéliens exceptionnels de Cerveau-Moussu. Un élément ω de $\underline{\Lambda}_2^1$ est dit semi-localement non exceptionnel si le diviseur exceptionnel d'une résolution minimale des singularités de ω admet une composante non dicritique dont le groupe d'holonomie projective est non exceptionnel. Plus généralement un élément ω de $\underline{\Lambda}_n^1$ ($n \geqslant 3$) est dit semi-localement non exceptionnel s'il existe un germe de plongement général $\tau : \mathbf{C}_0^2 \to \mathbf{C}_0^n$ tel que $\tau^*\omega$ soit semi-localement non exceptionnel. On se propose de déterminer une classe de formes pour lesquelles les notions d'exactitude et d'exactitude formelle sont équivalentes. Plus précisement on a :

THÉORÈME 1.1. — *Soient η une 1-forme à l'origine de $\mathbf{C}^n$ et ω un élément de $\underline{\Lambda}_n^1$ tels qu'il existe $\hat{a}$ et $\hat{h}$ dans $\hat{\mathcal{O}}_n$ vérifiant $\eta = \hat{a}\omega + d\hat{h}$. Si ω est semi-localement non exceptionnelle, alors $\hat{a}$ et $\hat{h}$ convergent.*

On s'intéresse dans la suite aux formes semi-localement exceptionnelles. Soient ω un élément de $\underline{\Lambda}_2^1$ et $\pi : \tilde{\mathbf{C}}_0^2 \to \mathbf{C}_0^2$ un morphisme de réduction des singularités de ω. Une zone bleue de $\pi^{-1}(0)$ est la donnée d'une séquence connexe, Z, de composantes non dicritiques de $\pi^{-1}(0)$ telle que les coins dans Z soient des singularités résonnantes linéarisables. Sous certaines conditions, qu'on précisera plus loin, on associe à Z un sous groupe de $Diff_1$ qu'on appellera groupe d'holonomie enrichi de Z. Ce groupe est obtenu par adjonction des difféomorphismes d'holonomie des composantes de Z à travers les applications de Dulac des coins de Z. Cette notion de zone bleue généralise celle de zone holomorphe introduite par E. Paul [P]. Un élément de $\underline{\Lambda}_n^1$ ($n \geqslant 3$) est dit non exceptionnel s'il existe un germe de plongement général $\tau : \mathbf{C}_0^2 \to \mathbf{C}_0^n$ tel que le diviseur d'une résolution de $\tau^*\omega$ admette une zone bleue dont le groupe d'holonomie enrichi est non exceptionnel. Le résultat précédent se généralise :

THÉORÈME 1.2. — *Soient η une 1-forme holomorphe à l'origine de $\mathbf{C}^n$ et ω un élément de $\underline{\Lambda}_n^1$ tels qu'il existe $\hat{a}, \hat{h}$ dans $\hat{\mathcal{O}}_n$ vérifiant $\eta = \hat{a}\omega + d\hat{h}$. Si ω est non exceptionnel, alors $\hat{a}$ et $\hat{h}$ convergent.*

Nous montrons ensuite que si ω est un élément dicritique de $\underline{\Lambda}_2^1$, alors toute 1-forme η formellement $\omega-$exacte est $\omega-$exacte.

Je remercie D. Cerveau et M. Berthier pour les idées de base qu'ils m'ont données dans certaines démonstrations et leur assistance dans l'élaboration du présent article.

2. Groupes de difféomorphismes holomorphes

Notons $\mathbf{C}\{z\}$ (resp. $\mathbf{C}[[z]]$) l'anneau des séries convergentes (resp. formelles) en z et identifions $Diff_1$ au sous ensemble de $\mathbf{C}\{z\}$:

$$\{h(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \ / \ a_0 = 0 \text{ et } a_1 \neq 0\}.$$

On rappelle les résultats dûs à D. Cerveau et R. Moussu qu'on peut aussi trouver dans [P] ou dans la thèse de Loray [Lo].

DÉFINITION 2.1. — Un élément de $Diff_1$ est dit tangent à l'identité à l'ordre k si $h(z) = z + a_k z^{k+1} + \ldots$, $a_k \neq 0$.

On a les :

LEMME 2.2. — *Soit G un sous groupe de $Diff_1$. Si G est non résoluble, alors il existe deux éléments de G tangents à l'identité à des ordres différents.*

LEMME 2.3. — *Soit G un sous groupe résoluble de $Diff_1$. Si l'ensemble des éléments tangents à l'identité de G est non monogène, alors il existe un unique élément ν de $\mathbf{N}^*$ tel que G est holomorphiquement conjugué à un sous groupe de :*

$$H_\nu = \{\frac{az}{(1+bz^\nu)^{\frac{1}{\nu}}} \;/\; a \;\in \mathbf{C}^* \;,\quad b \;\in \mathbf{C}\}.$$

3. Rappels sur la théorie des fonctions Gevrey

DÉFINITION 3.1. — On dit qu'un ouvert U de $\mathbf{C}$ est sectoriel d'ouverture $\alpha > 0$ s'il existe $r > 0$ tel que $U = S_\alpha = \{0 < |z| < r, \alpha_1 < Argz < \alpha + \alpha_1\}$.

- Une fonction holomorphe h sur un ouvert sectoriel U admet une série formelle $\hat{h} = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ comme développement asymptotique Gevrey d'ordre k si pour tout sous secteur V de U il existe des constantes a et b positives telles que :

$$|h(z) - \sum_{p=0}^{n-1} a_p z^p| < ab^n |z|^n (n!)^{\frac{1}{k}} \;\forall\; z \;\in V.$$

L'ensemble des fonctions holomorphes sur U admettant un développement asymptotique d'ordre k sera noté $G_k(U)$.

- Une série formelle $\hat{h}$ est k-sommable dans la direction θ ($\{z/Argz = \theta\}$) si $\hat{h}$ est le développement asymptotique à l'origine d'une fonction $f_\theta(z) \;\in\; G_k(U)$, où U est un secteur d'angle supérieur à $\frac{\pi}{k}$ et de bissectrice θ.

- La série $\hat{h}$ est k-sommable si elle l'est dans toute direction à l'exception d'un nombre fini appelées directions singulières.

Désignons par $\mathbf{C}[[z]]_k$ l'algèbre des séries k-sommables. Si $\hat{h}$ est k-sommable, sa k-somme se calcule à l'aide de la transformation de Borel-Laplace.

Et dans ce cas sa transformée de Borel :

$$\mathcal{B}_k(\hat{h})(\zeta) = \sum_{n\geqslant} \frac{a_n}{\Gamma(1+\frac{n}{k})}\zeta^n$$

converge au voisinage de l'origine et admet un prolongement analytique dans toute direction à l'exception de celles qui sont singulières. La transformée de Laplace de $\mathcal{B}_k(\hat{h})$:

$$\mathcal{L}_k\mathcal{B}_k(\hat{h})(z) = \int_{\arg(z)=\theta} \exp\left(\frac{-\zeta}{z^k}\right)\mathcal{B}_k(\hat{h})d\zeta$$

resomme $\hat{h}$ lorsque θ n'est pas une direction singulière.

Les séries satisfaisant une équation aux différences ont des propriétés de k-sommabilité :

THÉORÈME 3.2 *[To]. — Soient $f(z) = z+a_kz^{k+1}+...$, où a_k est différent de 0, un difféomorphisme holomorphe sur un disque ouvert Δ_ε, centré en 0, et g (resp. $\hat{h}$) un élément de $\mathbf{C}\{z\}$ (resp. $\mathbf{C}[[z]]$) tels que :*

$$\hat{h}\circ f - \hat{h} = g.$$

Alors $\hat{h}$ est k-sommable.

REMARQUE 3.3. — *Le théorème ci-dessus est démontré dans [To] pour $f = \frac{z}{1-z}$. En fait la démonstration n'utilise que la dynamique topologique de f et les inégalités de Cauchy. Elle se généralise sans difficulté.*

On a le critère suivant de convergence de séries formelles dû à J.-P. Ramis :

THÉORÈME 3.4 *[To]. — Soient k et k' deux éléments distincts de $\mathbf{N}^*$. On a :*

$$\mathbf{C}[[z]]_k \cap \mathbf{C}[[z]]_{k'} = \mathbf{C}\{z\}.$$

4. Preuve du théorème 1.1

La preuve en dimension plus grande que deux est une conséquence de celle en dimension 2 et du résultat qui suit :

THÉORÈME 4.1 *[Be-Ce]. — Soient $\tau : \mathbf{C}^2_0 \longrightarrow \mathbf{C}^n_0$ un germe de plongement général et ω (resp. η) un élément de $\underline{\Lambda}^1_n$ (resp. Λ^1_n, $n \geqslant 3$) tels que $\omega\wedge d\omega = 0$ et $\omega \wedge d\eta = 0$. S'il existe a_0 et h_0 appartenant à $\mathcal{O}_2$ tels que :*

$$\tau^*\eta = a_0\tau^*w + dh_0$$

alors il existe a et h dans $\mathcal{O}_n$, uniques, tels que :

1. $a_0 = a \circ \tau$ *et* $h_0 = h \circ \tau$
2. $\eta = a\omega + dh$.

Dans la suite on supposera que n est égal à 2. On a le :

LEMME 4.2. — *Soient $\hat{a}$ et $\hat{h}$ des éléments de $\hat{\mathcal{O}}_2$ et η (resp. ω) dans Λ_2^1 (resp. $\underline{\Lambda}_2^1$), tels que $\eta = \hat{a}\omega + d\hat{h}$. Si $\hat{h}$ converge alors $\hat{a}$ converge.*

Preuve. — C'est une conséquence du lemme de division. □

Soient ω, η, $\hat{a}$ et $\hat{h}$ tels que $\eta = \hat{a}\omega + d\hat{h}$, $\pi : \tilde{\mathbf{C}}_0^2 \longrightarrow \mathbf{C}_0^2$ un morphisme de réduction des singularités de $\Im_\omega$, C une composante de $\pi^{-1}(0)$ qu'on suppose non dicritique, $\gamma : [0,1] \to C \setminus \mathrm{Sing}(\tilde{\Im}_\omega)$ un lacet de classe $\mathcal{C}^1$ et Σ une transversale à $\tilde{\Im}_\omega$ en $P = \gamma(0)$. Notons h_γ le difféomorphisme d'holonomie associé à γ. Pour tout élément z de Σ, assez proche de P, notons γ_z le relevé de γ passant par z suivant une fibration Π transverse à $\tilde{\Im}_\omega$ au voisinage de γ dont Σ, est une fibre. Le résultat suivant est fondamental :

LEMME 4.3. — *On a l'égalité de série formelle entre la série de Taylor de la fonction holomorphe $f(z) = \int_{\gamma_z} \pi^*\eta$ et $[\hat{h} \circ \pi_{/\Sigma} \circ h_\gamma(z) - \hat{h} \circ \pi_{/\Sigma}(z)]$.*

Preuve. — Comme γ est compacte, il existe une suite $t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_{n+1} = 1$ et des cartes (u_j, v_j) de $\tilde{\mathbf{C}}_0^2$ en $\gamma(t_j)$ telles que :

1. $\gamma(t_j) = (0,0) \in (u_j, v_j)$
2. $\omega_j = \pi^*\omega_{/(u_j,v_j)} = g_j^1 du_j$
3. $\eta_j = \pi^*\eta_{/(u_j,v_j)} = g_j^2 du_j + g_j^3 dv_j$, où g_j^1 , g_j^2 , $g_j^3 \in \mathcal{O}_2$
4. $t_{j+1} \in (u_j, v_j)$
5. la fibration Π est donnée par $v_j =$ constante.

Soient Σ_j la fibre de Π en $\gamma(t_j)$ et z un point de Σ_j, assez proche de $\gamma(t_j)$. Notons γ_j (resp. γ_{jz}) la restriction de γ (resp. γ_z) à $[t_j, t_{j+1}]$. On va montrer l'égalité de série formelle entre la série de Taylor de la fonction holomorphe $f_j(z) = \int_{\gamma_{jz}} \eta_j$ et $[\hat{h} \circ \pi_{/\Sigma_j} \circ \gamma_{jz}(t_{j+1}) - \hat{h} \circ \pi_{/\Sigma} \circ \gamma_{jz}(t_j)]$.
De l'hypothèse $\eta_j = (\hat{a} \circ \pi)\omega_j + d(\hat{h} \circ \pi)$ on déduit :

$$\eta_j \wedge du_j = g_j^3 dv_j \wedge du_j = \frac{\partial \hat{h} \circ \pi}{\partial v_j} dv_j \wedge du_j \tag{1}$$

ceci signifie que :

$$\frac{\partial \hat{h} \circ \pi}{\partial v_j} = g_j^3 \tag{2}$$

et par intégration on obtient :

$$\hat{h} \circ \pi = \alpha_j + \hat{\beta}_j \tag{3}$$

où α_j et $\hat{\beta}_j$ appartiennent respectivement à $\mathcal{O}_2$ et $\mathbf{C}[[u_j]]$ et $\hat{\beta}_j$ est la restriction de $\hat{h} \circ \pi$ à Σ_j. On a :

$$\begin{array}{rcl} \eta_j & = & (\hat{a} \circ \pi)\omega_j + d(\hat{h} \circ \pi) \\ & = & ((\hat{a} \circ \pi)g_j^1 + \frac{\partial \hat{\beta}_j}{\partial u_j})du_j + d\alpha_j \\ & = & (g_j^2 - \frac{\partial \alpha_j}{\partial u_j})du_j + d\alpha_j. \end{array} \tag{4}$$

Puisque γ est de classe $\mathcal{C}^1$ on supposera que γ_{jz} est l'application de $[t_j, t_{j+1}]$ dans (u_j, v_j) qui à t associe $(z, v(t))$, où $v(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$. L'équation (4) donne :

$$f_j(z) = \int_{\gamma_{jz}} \eta_j = \int_{t_j}^{t_{j+1}} g_j^3(z, v)v'(t)dt = \alpha_j \circ \gamma_{jz}(t_{j+1}) - \alpha_j \circ \gamma_{jz}(t_j). \tag{5}$$

Il en résulte que pour tout k dans $\mathbf{N}^*$ on a :

$$[\alpha + J^k\hat{\beta}_j(u_j)] \circ \gamma_{jz}(t_{j+1}) - \alpha + J^k\hat{\beta}_j(u_j)] \circ \gamma_{jz}(t_j) = f_j(z) \tag{6}$$

où $J^k\hat{\beta}_j(u_j)$ est le jet d'ordre k de $\hat{\beta}_j(u_j)$. Ce qui par passage à la limite donne un sens à l'égalité :

$$f_j(z) = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \gamma_{jz}^* \eta_j = [\hat{h} \circ \pi_{/\Sigma_j} \circ \gamma_{jz}(t_{j+1}) - \hat{h} \circ \pi_{/\Sigma} \circ \gamma_{jz}(t_j)]. \tag{7}$$

Par sommation on obtient le résultat cherché. □

REMARQUE 4.4. — *Au cours de la preuve du lemme précédent on a établi que la convergence de $\hat{h} \circ \pi$ équivaut à celle de $\hat{\beta} = \hat{h} \circ \pi_{/\Sigma_0}$. Nous avons en outre montré que $\hat{\beta}$ est solution de l'équation aux différences :*

$$\hat{\beta} \circ h_\gamma - \hat{\beta} = f_\gamma$$

où f_γ est holomorphe.

Le résultat suivant assure que la convergence de $\hat{\beta}$ implique celle de $\hat{h}$:

LEMME 4.5 *[Ma-Mo].— Si $\hat{h}\circ\pi$ converge en un point de $\pi^{-1}(0)$ alors $\hat{h}$ converge.*

On suppose désormais que le sous groupe, G_1, des éléments tangents à l'identité du groupe d'holonomie de C (G) est non monogène. Pour établir la convergence de $\hat{\beta}$ nous distinguons les deux cas suivants :

1. G est non résoluble. Dans ce cas il contient deux éléments g_1 et g_2 qui sont tangents à l'identité à des ordres différents. D'après la remarque 4.4 et le théorème 3.2 $\hat{\beta}$ a deux niveaux de sommabilités. On déduit alors du théorème 3.4 que $\hat{\beta}$ converge. Le lemme 4.5 assure que $\hat{h}$ converge. Par suite $\hat{a}$ converge d'aprés 4.2.

2. G est résoluble et G_1 est non monogène. Quitte à conjuguer G par un difféomorphisme holomorphe il contient $g_1(z) = \frac{z}{(1+z^\nu)^{\frac{1}{\nu}}}$ et $g_2(z) = \frac{z}{(1+\alpha z^\nu)^{\frac{1}{\nu}}}$, où ν (resp. α) appartient à $\mathbf{N}^*$ (resp. $\mathbf{C}\setminus\mathbf{Q}$). L'existence d'une telle conjugaison et la condition sur α proviennent du fait que G est non exceptionnel. D'après la remarque 4.4 il existe des germes de fonctions holomorphes f_1 et f_2 à l'origine de $\mathbf{C}$ telles que $\hat{\beta}$ satisfassent les équations :

$$\hat{\beta}\circ g_i - \hat{\beta} = f_i,\ i = 1,2.$$

On traite le cas $\nu = 1$ pour simplicité, le cas général s'en déduit en utilisant la dynamique topologique. Soit ϕ la transformée de Borel de $\hat{\beta}$. D'après [To] ϕ vérifie :

$$(\exp(-t) - 1)\phi(t) = \mathcal{B}_1(f_1) = \psi_1(t)Y(t) \tag{1}$$

$$(\exp(-\alpha t) - 1)\phi(t) = \mathcal{B}_1(f_2) = \psi_2(t)Y(t) \tag{2}$$

où ψ_1 et ψ_2 sont des fonctions à croissance exponentielle à l'infini et $\psi_1(t)Y(t)$ et $\psi_2(t)Y(t)$ sont les hyperfonctions régulières associées respectivement à ψ_1 et ψ_2. On déduit :

$$\phi(t) = \frac{\psi_1(t)Y(t)}{\exp(-t) - 1} \tag{3}$$

$$\phi(t) = \frac{\psi_2(t)Y(t)}{\exp(-\alpha t) - 1}. \tag{4}$$

L'équation (3) (resp. (4)) implique que l'ensemble des pôles de ϕ est contenu dans $E = \{2iq\pi\ /\ q \in \mathbf{Z}^*\}$ (resp. $E_\alpha = \{\frac{2iq\pi}{\alpha}\ /\ q \in \mathbf{Z}^*\}$). Comme α appartient à $\mathbf{C}\setminus\mathbf{Q}$ l'intersection de E et E_α est vide. On en déduit que ϕ est holomorphe et par conséquent $\hat{\beta}$ est 1-sommable dans toutes les directions. D'après [Ra] $\hat{\beta}$ converge. On conclut comme précédemment que $\hat{a}$ et $\hat{h}$ convergent. □

5. Notions de zone bleue et de groupe d'holonomie enrichi

Soient ω élément de $\underline{\Lambda}_2^1$, $\pi : \tilde{\mathbf{C}}_0^2 \to \mathbf{C}_0^2$ une résolution minimale des singularités de $\Im_\omega$ et Z une union connexe de composantes irréductibles et non dicritiques de $\pi^{-1}(0)$. On suppose que l'intersection de deux composantes distinctes voisines dans Z ne contient qu'un point qui est une singularité résonnante et linéarisable de $\tilde{\Im}_\omega$.

5.1. Chaîne de Z

DÉFINITION 5.1. — Une chaîne $\mathcal{C}$ de Z est la donnée d'une suite $C_1, ..., C_n$ de composantes irréductibles de Z telle que :

$$C_i \cap C_{i+1} = \{m_i\} \ \forall \ 0 < i < n.$$

Le nombre n sera appelé longueur de la chaîne $\mathcal{C}$.

REMARQUE 5.2. — *Dans une chaîne de Z on a trivialement $C_i \cap C_j = \emptyset$ sauf si $j = i+1$ ou $i-1$.*

5.2. Correspondance de Dulac

Soient C et C' deux composantes irréductibles de Z telles que $C \cap C' = \{m\}$ et $(u, v) : V_m \to \Delta_2$ (polydisque de $\mathbf{C}^2$ centré en 0) une carte de $\tilde{\mathbf{C}}_0^2$ telles que :

1. $m = (0,0)$
2. $(v = 0)$ et $(u = 0)$ sont des équations locales de C et C' respectivement
3. $f(u, v) = u^p v^q$, où p, $q \in \mathbf{N}^*$ et pgcd$(p,q) = 1$, est une intégrale première holomorphe de $\tilde{\Im}_\omega$ sur V_m.

La correspondance de Dulac se définit de la manière suivante : soient Q et Q' de coordonnées respectives $(\alpha_1, 0)$ et $(0, \beta_1)$ dans la carte (u, v), Σ_Q et $\Sigma_{Q'}$ des sections transverses locales à $\tilde{\Im}_\omega$ respectivement aux points Q et Q'. Deux points (α_1, v) de Σ_Q et (u, β_1) de $\Sigma_{Q'}$ sont en correspondance si et seulement si $\alpha_1^p v^q = u^p \beta_1^q$. On peut relier la correspondance de Dulac aux déterminations des fonctions multiformes $f_1 = u^{\frac{p}{q}}$ et $f_2 = v^{\frac{q}{p}}$. Identifions les éléments (α_1, v) de $\Sigma_Q \setminus C$ et v de $\mathbf{C}$ d'une part et d'autre part (u, β_1) de $\Sigma_{Q'} \setminus C'$ et u de $\mathbf{C}$. Notons D_k (resp. D_k^{-1}) la $k-$ième détermination de la fonction multiforme f_1 (resp. f_2). La correspondance de Dulac (resp. son "inverse") "associe" à u (resp. v) l'ensemble de $\{\beta_1 D_k(\frac{u}{\alpha_1})/\ k\ \in \mathbf{N}^*\}$ (resp. $\{\alpha_1 D_k^{-1}(\frac{v}{\beta_1})/\ k\ \in \mathbf{N}^*\}$). Soit h un générateur d'holonomie de la séparatrice C' autour de la singularité m, évalué sur la transversale $\Sigma_{Q'}$, on a $h(z) = \exp(2i\pi\frac{p}{q}).z$. Si g est un élément de $Diff_1$ qui commute avec h, alors un calcul simple permet de voir que g s'écrit sous la forme $g(z) = \alpha z\tilde{g}(z^q)$, où α appartient à $\mathbf{C}^*$, $\tilde{g}$ est holomorphe et $\tilde{g}(0) \neq 0$. On vérifie pour tout k et l appartenant à $\mathbf{N}^*$ $D_l^{-1} \circ g \circ D_k$ est un élément de $Diff_1$. Notons $\mathcal{C}(h)$ l'ensemble des éléments de $Diff_1$ qui commutent avec h. Si G est un sous groupe de $Diff_1$ contenu dans $\mathcal{C}(h)$ on désignera par $D^{-1}GD$ le sous groupe de $Diff_1$:

$$\{D_l^{-1} \circ g \circ D_k\ /g \in G\ , k, l\ \in\ \mathbf{N}^*\}.$$

5.3. Compatibilité de $\tilde{\Im}_\omega$ avec les chaînes de Z

Soient ω, $\tilde{\Im}_\omega$ et Z comme au 5.1. On va définir à présent la compatibilité de $\tilde{\Im}_\omega$ avec une chaîne $\mathcal{C}$ de Z et le groupe d'holonomie enrichi de $\mathcal{C}$ par récurrence sur les longueurs des chaînes. Cette définition utilise et généralise le vocabulaire introduit par E. Paul [P] mais avec un sens un peu différent ; elle formalise et précise une notion introduite par Cerveau et Scardua dans le preprint [Ce,S].

1. Soit $\mathcal{C} = (C_1)$ une chaîne de longueur 1 : on ne fait rien (c'est-à-dire que le groupe d'holonomie enrichi est le groupe d'holonomie ordinaire et on dit que $\tilde{\Im}_\omega$ est compatible avec $\mathcal{C}$).

2. Supposons qu'on ait défini la compatibilité par holonomie et le groupe d'holonomie enrichi pour les chaînes de longueur n.

3. Soient $\mathcal{C} = (C_1, ..., C_{n+1})$ une chaîne de longueur $n + 1$ et h_2 le difféomorphisme d'holonomie de la séparatrice C_2 autour de l'unique élément m_1 de $C_1 \cap C_2$. On dit que $\tilde{\Im}_\omega$ est compatible avec $\mathcal{C}$ si :

1. $\tilde{\Im}_\omega$ est compatible avec la chaîne $\mathcal{C}' = (C_2, ..., C_{n+1})$
2. $G_{\mathcal{C}'} \subset \mathcal{C}(h_2)$ où $G_{\mathcal{C}'}$ est le groupe d'holonomie enrichi de $\mathcal{C}'$ (on rappelle que le coin m_1 est résonnant linéarisable et donc h_2 est périodique).

Dans le cas où $\tilde{\Im}_\omega$ est compatible avec $\mathcal{C}$ on définit le groupe d'holonomie enrichi de $\mathcal{C}$, qu'on note $G_{\mathcal{C}}$, comme étant le groupe engendré par G_1 et $D^{-1}G_{\mathcal{C}'}D$, où G_1 est le groupe d'holonomie de C_1 et D est la correspondance de Dulac du coin $m_1 = C_1 \cap C_2$.

DÉFINITION 5.3. — Soit C une composante irréductible de Z.

1. On dit que (Z, C) est une zone bleue de ω si $\tilde{\Im}_\omega$ est compatible avec toute chaîne de Z de premier terme C.

2. Dans le cas où (Z, C) est une zone bleue on définit le groupe d'holonomie enrichi G de (Z, C) comme étant le groupe engendré par :

$$\bigcup_{\mathcal{C}} \{G_{\mathcal{C}} \ / \ \mathcal{C} \ \text{ est une chaine de base } P\}.$$

Remarquer que ce groupe est défini à conjugaison holomorphe près.

6. Démonstration du théorème 1.2

Compte tenu de 4.1 il suffit d'établir le théorème en dimension deux. Soient $\pi : \tilde{\mathbf{C}}^2_0 \longrightarrow \mathbf{C}^2_0$ une résolution minimale des singularités de $\Im_\omega$ et (Z, C) une zone bleue de $\pi^{-1}(0)$ dont le groupe d'holonomie enrichi, noté G et évalué sur une transversale Σ à $\tilde{\Im}_\omega$, est non exceptionnel. En utilisant les mêmes arguments que dans la preuve du théorème 1.1 le lemme qui suit implique le théorème 1.2 :

LEMME 6.1. — *Quelque soit g élément de G il existe f appartenant à $\mathcal{O}_1$ tel que $\hat{\beta} = \hat{h} \circ \pi_{/\Sigma}$ satisfasse l'équation aux différences suivantes :*

$$\hat{h} \circ \pi_{/\Sigma} \circ g(z) - \hat{h} \circ \pi_{/\Sigma}(z) = f(z).$$

Soit μ un nombre rationnel positif, on introduit l'anneau des séries de Puiseux

$\mathbf{P}_\mu\{t, v\} = \{a(t, vt^\mu) \ / \ a \ \in \ \mathcal{O}_2\}$ et son complété formel

$\mathbf{P}_\mu[[t, v]] = \{\hat{a}(t, vt^\mu) \ / \ \hat{a} \ \in \ \hat{\mathcal{O}}_2\}$. Le résultat suivant est trivial :

LEMME 6.2 [G]. — *Soit $\hat{H}$ un élément de $\mathbf{P}_\mu[[t, v]]$. Si $\frac{\partial \hat{H}}{\partial t}$ appartient à $\mathbf{P}_\mu\{t, v\}$, alors il existe α dans $\mathbf{P}_\mu\{t, v\}$ et $\hat{\beta}$ dans $\mathbf{C}\{v\}$ tels que :*

$$\hat{H} = \alpha + \hat{\beta}.$$

Soient $\{m\}$ l'intersection de deux composantes irréductibles C_1 et C_2 de Z et $(u,\ t)$ une carte de $\tilde{\mathbf{C}}^2_0$ telles que :

1. $m = (0, 0)$

2. $t = 0$ (resp. $u = 0$) est une équation locale de C_1 (resp. C_2)

3. le germe de l'éclaté strict de ω en m ($\tilde{\omega}_m$) est colinéaire à $pudt + qtdu$, où $q, p \in \mathbf{N}^*$ et $\mathrm{pgcd}(p, q) = 1$

4. $\tilde{\eta}_m = (\pi^*\eta)_m = a_1(u,t)dt + b_1(u,t)du = ((\hat{a} \circ \pi)\pi^*\omega + d(\hat{h} \circ \pi))_m$.

Considérons deux points réguliers P_1 et P_2, assez proches de m, appartenant respectivement à C_1 et C_2. On note Σ_1 (resp. Σ_2) une transversale à $\tilde{\Im}_\omega$ en P_1 (resp. P_2). Soient z dans Σ_1 en correspondance avec l'élément $D_k(z)$ de Σ_2 et γ' un chemin joignant z à $D_k(z)$ tel que $\gamma'^*\tilde{\omega}_m = 0$. L'existence de γ' est liée au choix de $\mathrm{pgcd}(p, q) = 1$ qui assure, par la connexité des fibres de $t^p u^q =$ constante, que les points en correspondance par D_k appartiennent à la même feuille. L'intégrale $\int_{\gamma'} \tilde{\eta}_m$ ne dépend pas du chemin γ' joignant z à $D_k(z)$ tel que $\gamma'^*\tilde{\omega}_m$ soit nul : en effet comme $\tilde{\omega}_m$ admet une intégrale première holomorphe $\tilde{\eta}_m$ est $\tilde{\omega}_m$-exacte, car formellement $\tilde{\omega}_m$-exacte, d'après [Be-Ce]. Si γ'' est un autre chemin joignant z à $D_k(z)$ tel que $\gamma''^*\tilde{\omega}_m$ est nul, alors $\gamma''.\gamma'^{-1}$ est un cycle de $\tilde{\omega}_m$ et donc $\int_{\gamma''.\gamma'^{-1}} \tilde{\eta}_m = 0$. D'où $\int_{\gamma'} \tilde{\eta}_m = \int_{\gamma''} \tilde{\eta}_m$. Dans la suite on supposera que P_1 et P_2 ont respectivement pour coordonnées $(u_0, 0)$ et $(0, t_0)$ dans la carte (u, t), $\Sigma_1 = (u = u_0)$ et $\Sigma_2 = (t = t_0)$. On considère la détermination suivante de $\log(t) = \log|t| + i\arg(t)$ où $\arg(t)$ appartient à $]2k\pi, 2(k+1)\pi[$. On identifie les éléments (u_0, t) de Σ_1 et (u, t_0) de Σ_2 respectivement à t et u et D_k à l'application multiforme qui à t associe $u_0(\frac{t}{t_0})^{-\frac{p}{q}}$. Soit $\gamma_z : [0,1] \longrightarrow [u,t]$, $\gamma_z(s) = (u(s), t(s))$ le chemin tel que :

1. $\gamma_z(0) = (u_0, z)$

2. $\gamma_z(1) = (D_k(z), t_0)$

3. $u^q(s)t^p(s) = u_0^q z^p$.

Le résultat suivant et 4.3 impliquent le lemme 6.1 puisque le groupe d'holonomie enrichi est obtenu par adjonction à travers les coins de Z des groupes d'holonomie projective des composantes de Z :

LEMME 6.3. — *Avec les notations précédentes on a l'égalité de série de Puiseux formelle entre* $f(z) = \int_{\gamma_z} \tilde{\eta}_m$ *et* $[\hat{h} \circ \pi_{/\Sigma_2} \circ D_k(z) - \hat{h} \circ \pi_{/\Sigma_1}(z)]$.

Preuve. — Soit $v = t^{-\frac{p}{q}}u$. On a $dv = t^{-\frac{p}{q}}du - \frac{p}{q}ut^{\frac{p}{q}-1}dt$.

D'où $du = t^\mu dv + \mu v t^{\mu-1}dt$ où $\mu = \frac{p}{q}$.

On a les égalités suivantes :

1. $\tilde{\eta}_m = a_1 dt + b_1 du = a_2(t,v)dt + b_2(t,v)[t^\mu dv + \mu v t^{\mu-1} dt]$, où a_1 et b_1 (resp. a_2 et b_2) appartiennent à $\mathcal{O}_2$ (resp. $\mathbf{P}_\mu\{t,v\}$)

2. $\tilde{\eta}_m = ((\hat{a} \circ \pi)\pi^*\omega + d(\hat{h} \circ \pi))_m = \hat{a}_1 dv + d\hat{h}_1$ où $\hat{a}_1, \hat{h}_1 \in \mathbf{P}_\mu[[t,v]]$

3. $\tilde{\eta}_m \wedge dv = \frac{\partial \hat{h}_1}{\partial t} \wedge dv = [a_2 + \mu b_2 v t^{\mu-1}] dt \wedge dv$.

On en déduit que :

$$\frac{\partial \hat{h}_1}{\partial t} = a_2 + \mu b_2 v t^{\mu-1}. \tag{1}$$

Le lemme 6.2 assure qu'il existe des éléments α de $\mathbf{P}_\mu\{t,v\}$ et $\hat{\beta}$ de $\mathbf{C}[[v]]$ tels que :

$$\hat{h}_1 = \alpha(t,v) + \hat{\beta}(v). \tag{2}$$

On a :

$$\tilde{\eta}_m \wedge dt = t^\mu b_2 dv \wedge dt = (\hat{a}_1 + \frac{\partial \alpha}{\partial v} + \frac{\partial \hat{\beta}}{\partial v}) dv \wedge dt. \tag{3}$$

D'où

$$\hat{a}_1 = t^\mu b_2 - \frac{\partial \alpha}{\partial v} - \frac{\partial \hat{\beta}}{\partial v}. \tag{4}$$

On déduit des équations (1) et (4) que :

$$\tilde{\eta}_m = (t^\mu b_2 - \frac{\partial \alpha}{\partial v}) dv + d\alpha. \tag{5}$$

Ceci implique que :

$$f(z) = \int_{\gamma_z} \pi^*\eta = \alpha \circ \gamma_z(1) - \alpha \circ \gamma_z(0) \tag{6}$$

Il en résulte que, pour tout l élément de $\mathbf{N}^*$, on a l'égalité de série de Puiseux formelle :

$$f(z) = [\alpha + J^l(\hat{h}_1(v)] \circ \gamma_z(1) - [\alpha + J^l(\hat{h}_1(v)] \circ \gamma_z(0). \tag{7}$$

Ce qui en faisant tendre l vers l'infini donne un sens à :

$$f(z) = [\hat{h} \circ \pi_{/\Sigma_2} \circ D_k(z) - \hat{h} \circ \pi_{/\Sigma_1}(z)]. \tag{8}$$

D'où le lemme. □

7. Cas des formes dicritiques

PROPOSITION. — *Soient η une 1-forme à l'origine de $\mathbf{C}^2$ et ω un élément de $\underline{\Lambda}_2^1$ tels qu'il existe $\hat{a}$ et $\hat{h}$ dans $\hat{\mathcal{O}}_2$ vérifiant $\eta = \hat{a}\omega + d\hat{h}$. Si ω est dicritique, alors $\hat{a}$ et $\hat{h}$ convergent.*

Preuve. — Soient $\pi : \tilde{\mathbf{C}}_0^2 \longrightarrow \mathbf{C}_0^2$ une résolution des singularités de $\Im_\omega$, C une composante dicritique de $\pi^{-1}(0)$ et m un point de $C \setminus \mathrm{Sing}\tilde{\Im}_\omega$. Considérons une carte (u,t) de $\tilde{\mathbf{C}}_0^2$, centrée en m, telle que :

1. $t = 0$ est une équation locale de C
2. $\pi^*\omega(u,t) = g(u,t)du$, où g appartient à $\mathcal{O}_2$
3. $\pi^*\eta = a(u,t)du + b(u,t)dt$

La relation $\eta = \hat{a}\omega + d\hat{h}$ donne :

$$\pi^*\eta = g(u,t)(\hat{a}\circ\pi)du + d(\hat{h}\circ\pi). \tag{1}$$

On a :

$$\eta \wedge du = b(u,t)dt \wedge du = \frac{\partial \hat{h}\circ\pi(u,t)}{\partial t} dt \wedge du. \tag{2}$$

On en déduit que :

$$\frac{\partial \hat{h}\circ\pi(u,t)}{\partial t} = b(u,t). \tag{3}$$

Par intégration on obtient :

$$\hat{h}\circ\pi(u,t) = \alpha(u,t) + \hat{\beta}(u), \alpha \in \mathcal{O}_2 \text{ et } \hat{\beta} \in \mathbf{C}[[u]] \tag{4}$$

On sait d'après [Ma-Mo] que l'éclaté d'une série formelle est transversalement convergente, plus précisément appartient à $\mathbf{C}[u][[t]]$. En conséquence, $\hat{\beta}$ converge. En reprenant les arguments de la preuve du théorème 1.1, on conclut que $\hat{h}$ et $\hat{a}$ convergent. □

Bibliographie

[Be-Ce] BERTHIER (M.), CERVEAU (D.). — *Quelques outils de cohomologie relative.* Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, 4ième série t. 26, 1993, 403-424.

[Ce-Ma] CERVEAU (D.), MOUSSU (R.). — *Groupes d'automorphisme de $\mathbf{C}_0$ et équations différentielles ydy+...=0.* Bulletin de la société mathématique de France 116, 1988, 459-488.

[Ce-S] CERVEAU (D.), SCARDUA (B.A.). — On the integration of polynomial vector fields in dimension two. Preprint.

[G] GARBA BELKO (D.). — *Trois études sur les feuilletages holomorphes : cohomologie relative, rigidité en famille et problème du centre*, Thèse de l'université de Rennes1, 1998.

[Lo] LORAY (F.). — Feuilletages à holonomie résoluble, thèse université de Rennes 1, 1994.

[Ma-Mo] MATTEI (J.F.), MOUSSU (R.). — *Holonomie et intégrales premières.* Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure 4^{ieme} série, t. 13, 1980, 469-523.

[P] PAUL (E.). — *Formes singulières à holonomie résoluble.* Prépublication 64, Labo. de Math. E. Picard, Toulouse, 1995.

[Ra] RAMIS (J.-P.). — *Divergent series and holomorphic dynamical systems.* Notes de cours rédigées par L. Stolovitch, Preprint, 1993.

[Se] SEIDENBERG (A.). — *Reduction of singularities of the differentiable equation $AdY + BdX$*, Amer. J. of Math, 1968, 248-269.

[To] TOUGERON (J.-C.). — An introduction to the theory of Gevrey expansions and Borel-Laplace transform with some applications, cours de D.E.A. à Rennes et Toronto. Preprint. 1989.