ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

FAYÇAL MAAREF

Sur un analogue irrégulier de la connexion de Gauss-Manin

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 8, nº 1 (1999), p. 117-124

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1999_6_8_1_117_0>

© Université Paul Sabatier, 1999, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (http://picard.ups-tlse.fr/~annales/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. VIII, n° 1, 1999

Sur un analogue irrégulier de la connexion de Gauss-Manin(*)

FAYÇAL MAAREF(1)

RÉSUMÉ. — Étant donné deux polynômes f et $g : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, nous montrons que la monodromie analytique des groupes de cohomologie du complexe de $\mathcal{D}$-modules $f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} \exp g)$ est quasi-unipotente. Ceci généralise le résultat connu pour $g = 0$

ABSTRACT. — Given two polynomials f and $g : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, we prove that the analytic monodromy of the cohomology groups of the complex of $\mathcal{D}$-modules $f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} \exp g)$ is quasi-unipotent. This generalise the result known for $g = 0$.

1. Introduction

Si $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, $n \geq 1$ est un polynôme, on sait que le complexe image directe $f_+\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ (la connexion de Gauss–Manin) est à cohomologie holonome à singularités régulières qui sont les valeurs de bifurcation de f et qu'en dehors de ces points les faisceaux des sections analytiques horizontales coïncident avec les fibrations vectorielles qui paramétrisent les cohomologies des fibres $f^{-1}(t)$ en dehors de l'ensemble de bifurcation. En particulier, grâce au théorème de monodromie ([6] et ses références), les exposants de la monodromie locale de $f_+\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ autour des points singuliers sont des nombres rationnels. Nous nous proposons de donner l'analogue de ce résultat pour le complexe image directe $f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} \exp g)$ où g est un autre polynôme. Dans la situation initiale, le point fondamental est l'isomorphisme $DR^{\mathrm{an}} f_+\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} \simeq Rf_*\underline{\mathbb{C}}$, qui utilise la régularité de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ et qui est une version relative du

(*) Reçu le 20 octobre 1997, accepté le 10 novembre 1998

(1) Université de Bordeaux I, 351 cours de la Libération, F-33405 Talence (France)
e-mail : maaref@math.u-bordeaux.fr

théorème de comparaison de Deligne–Grothendieck. Ce n'est plus le cas pour $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} \exp g$ qui est irrégulier. Il s'agira alors pour nous de donner l'analogue de l'isomorphisme précédent. Nous explicitons les faisceaux de ses sections analytiques horizontales sur l'ouvert de lissité et nous montrons que la restriction du module analytique associé au $\mathcal{D}$-module $\mathcal{H}^k f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} \exp g)$ à un petit cercle S^1_ϵ entourant une singularité coïncide avec une fibration de cohomologie relative des fibres $f^{-1}(t)$, $t \in S^1_\epsilon$. Grâce à la suite longue de cohomologie relative, ceci permet d'exprimer les exposants des monodromies locales analytiques de $f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} \exp g)$ à l'aide de fibrations de Milnor liées à f et g; leur rationalité est ainsi assurée. Le résultat clé à la base de ce travail est une version relative d'un théorème de C. Sabbah qui est une généralisation d'un résultat de Dimca–Saito sur la cohomologie du complexe de De Rham algébrique de $\mathbb{C}^n$ tordu par l'exponentielle d'un polynôme [1].

2. Le résultat

Pour le formalisme des $\mathcal{D}$-modules algébriques, nous renvoyons à [2] (notamment pour la définition de l'image directe f_+, p. 240, et l'image inverse i^+, p. 232) et [7]. Par isomorphisme de complexes d'une catégorie on sous-entend un isomorphisme dans la catégorie dérivée des objets de la catégorie donnée. Pour la notion de cohomologie relative, nous renvoyons à [4].

On va d'abord évaluer la fibre générique du $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$-module $\mathcal{H}^k f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} \exp g)$, $k = 1, \ldots, n-1$ (qui est holonome d'après [2, p. 292] ou [7, p. 77]).

Proposition 1.— *Il existe un ensemble fini $\Sigma \subset \mathbb{C}$ tel que si l'on note par i_t l'inclusion d'un point t hors de Σ, on a un isomorphisme canonique d'espaces vectoriels*

$$i_t^+ \mathcal{H}^k f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} \exp g) \simeq H^k_{\Phi_t}\left(f^{-1}(t)^{\mathrm{an}}, \mathbb{C}\right)$$

où Φ_t est la famille des fermés $U_{t,\rho} := \left\{x \in f^{-1}(t) \mid \Re(-g(x)) \geq \rho\right\}$ et $H^k_{\Phi_t}(-)$ désigne la cohomologie à supports dans cette famille.

Preuve.— Grâce à l'holonomie de $\mathcal{H}^k(f_+\mathcal{O}_U \exp g)$ il existe un ensemble fini Σ_0 tel que la restriction de $\mathcal{H}^k f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} \exp g)$ à $\mathbb{C}\backslash\Sigma_0$ soit une connexion intégrable. Il n'est pas difficile de voir que pour tout $t \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_0$, on a un isomorphisme

$$i_t^+ \mathcal{H}^k f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} \exp g) \simeq \mathcal{H}^k i_t^+ f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} \exp g)\,.$$

Soit Σ_1 l'ensemble (fini) des valeurs critiques de f et posons $\Sigma := \Sigma_0 \cup \Sigma_1$. Sur $\mathbb{C} \setminus \Sigma$, on a un isomorphisme

$$i_t^+ f_+ \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} \exp g \simeq f_+(\mathcal{O}_{f^{-1}(t)} \exp g_t) .$$

où g_t est g restreint à $f^{-1}(t)$. D'après le théorème 1.1 de [10], le terme de droite est isomorphe à $H^k_{\Phi_t}\left(f^{-1}(t)^{\mathrm{an}}, \mathbb{C}\right)$, d'où le résultat. □

Dans la suite, on supposera que 0 est une singularité pour $f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} \exp g)$ et on posera $U = f^{-1}(\mathbb{C} \setminus \Sigma)$.

Remarque.— Il serait intéressant de savoir caractériser si la singularité 0 est régulière ou pas. La notion de faisceau d'irrégularité (et son comportement par image directe de $\mathcal{D}$-modules) introduite par Z. Mebkhout [8] est sûrement le bon point de vue à considérer.

COROLLAIRE 1.— *Pour $t \in \mathbb{C}^* \setminus \Sigma$, il existe ρ_t assez grand tel qu'on ait l'isomorphisme*

$$i_t^+ \mathcal{H}^k f_+(\mathcal{O}_U \exp g) \simeq H^k\left(f^{-1}(t)^{\mathrm{an}}, g_t^{-1}(\rho_t)^{\mathrm{an}}, \mathbb{C}\right)$$

où $g_t := g$ restreint à $f^{-1}(t)$.

Preuve.— D'une part, on a un isomorphisme naturel

$$H^k_{\Phi_t}(f^{-1}(t), \mathbb{C}) \simeq \varinjlim H^k\left(f^{-1}(t)^{\mathrm{an}}, U_{t,\rho}, \mathbb{C}\right)$$

avec les flèches naturelles

$$H^k\left(f^{-1}(t)^{\mathrm{an}}, U_{t,\rho}, \mathbb{C}\right) \longrightarrow H^k\left(f^{-1}(t)^{\mathrm{an}}, U_{t,\rho'}, \mathbb{C}\right)$$

provenant des inclusions $U_{t,\rho'} \subset U_{t,\rho}$ si $\rho' \geq \rho$; ce sont des isomorphismes pour ρ et ρ' assez grands. D'autre part, si ρ est assez grand, l'inclusion de $g_t^{-1}(\rho_t)^{\mathrm{an}}$ dans $U_{t,\rho}$ est une équivalence d'homotopie. □

On cherche à présent à calculer la monodromie locale en 0 de la fibration vectorielle $\mathcal{L}_k^{\mathrm{an}}$ associée au fibré analytique à connexion

$$(\mathcal{H}^k(f_+\mathcal{O}_U \exp g), \nabla)$$

Pour cela, il suffit de calculer $DR^{\mathrm{an}} f_+(\mathcal{O}_U \exp g)$. En effet, on a le lemme suivant.

Lemme 1.— *On a un isomorphisme canonique*

$$\mathcal{L}_k^{\mathrm{an}} \simeq \mathcal{H}^k DR^{\mathrm{an}} f_+(\mathcal{O}_U \exp g)\,.$$

Preuve.— On va montrer qu'on a un isomorphisme canonique

$$\mathcal{H}^k DR^{\mathrm{an}} f_+(\mathcal{O}_U \exp g) \simeq DR^{\mathrm{an}} \mathcal{H}^k f_+(\mathcal{O}_U \exp g)\,.$$

Ceci provient essentiellement du fait que $\mathcal{H}^k(f_+\mathcal{O}_U \exp g)$ est une connexion : par définition, $DR^{\mathrm{an}} f_+\mathcal{O}_U \exp g$ est le complexe simple associé au complexe double

$$\mathcal{O}^{\mathrm{an}} \otimes_{\mathcal{O}} f_+(\mathcal{O}_U \exp g) \xrightarrow{\nabla} \mathcal{O}^{\mathrm{an}} \otimes_{\mathcal{O}} f_+(\mathcal{O}_U \exp g)\,.$$

En filtrant convenablement ce complexe (cf. [3]), on obtient une suite spectrale réguliere et dont le terme E_2 vérifie :

$$E_2^{p,q} = \mathcal{H}^p(DR^{\mathrm{an}} \mathcal{H}^q(f_+\mathcal{O}_U \exp g) = 0 \quad \text{si } p \neq 0\,.$$

On conclut par le théorème 4.4.1 de [3]. □

Avant d'énoncer le théorème principal, nous allons donner quelques notations. On aura besoin de la factorisation suivante de f : $f = p \circ j \circ \Phi$ avec $\Phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^2,\, x \mapsto \big(f(x), g(x)\big)$, $j : \mathbb{C}^2 \hookrightarrow \mathbb{C} \times \mathbf{P}^1$ l'inclusion, $p : \mathbb{C} \times \mathbf{P}^1 \to \mathbb{C}$ la projection sur le premier facteur. Soit $\pi : \widetilde{\mathbf{P}^1} \to \mathbf{P}^1$ l'éclaté réel de $\mathbf{P}^1$ au point ∞. C'est l'espace des coordonnées polaires au voisinage de ∞, qui est difféomorphe au disque fermé, et $\pi^{-1}(\infty) = \mathbf{S}^1$ est le cercle des directions en ∞. On peut écrire $\widetilde{\mathbf{P}^1} = \mathbb{C} \cup \mathbf{S}^1$.

Soit $\mathbf{I}$ l'arc ouvert de $\mathbf{S}^1$ défini par l'ensemble des directions admettant un voisinage suivant lequel $\exp(-s)$ est à croissance modérée, c'est-à-dire $\theta \in \,]-\pi/2\,,\, \pi/2\,[$. On note par $\widetilde{\mathbf{P}^1_{\mathbf{I}}}$ l'image inverse de $\mathbb{C} \cup \mathbf{I}$ dans $\widetilde{\mathbf{P}^1}$.

Considérons les inclusions

$$\mathbb{C}^2 \overset{\alpha}{\hookrightarrow} \mathbb{C} \times \widetilde{\mathbf{P}^1_I} \overset{\beta}{\hookrightarrow} \mathbb{C} \times \widetilde{\mathbf{P}^1}\,.$$

On notera aussi par π le morphisme $(\mathrm{Id}, \pi) : \mathbb{C} \times \widetilde{\mathbf{P}^1} \to \mathbb{C} \times \mathbf{P}^1$ et $F := p \circ \pi$.

THÉORÈME 1.— *On a un isomorphisme canonique*

$$DR^{\mathrm{an}} f_+(\mathcal{O}_U \exp g) \simeq RF_*^{\mathrm{an}} \beta_! R\alpha_* R\Phi_*^{\mathrm{an}} \mathbb{C}_U \,.$$

Preuve.— Grâce à la factorisation de f, on a un isomorphisme

$$DR^{\mathrm{an}} f_+(\mathcal{O}_U \exp g) \simeq DR^{\mathrm{an}} p_+ j_+ \Phi_+(\mathcal{O}_U \exp g)$$

En notant par s une coordonnée sur le deuxième facteur de $\mathbb{C}^2$ et en utilisant la formule de projection (cf. [7]), on a $\Phi_+(\mathcal{O}_U \exp g) \simeq \Phi_+(\mathcal{O}_U) \exp s$.

Si $\int_{p_*^{\mathrm{an}}}$ est le foncteur image directe pour les $\mathcal{D}$-modules analytiques, de la proposition 8.2.2 de [7] et du fait que p est propre, on a

$$\Big(p_+ j_+ (\Phi_+(\mathcal{O}_U) \exp s)\Big)^{\mathrm{an}} \simeq \int_{p_*^{\mathrm{an}}} \Big(j_+ (\Phi_+(\mathcal{O}_U) \exp s)\Big)^{\mathrm{an}} .$$

D'après le théorème 5.4.3 de [7], on a un isomorphisme de foncteurs

$$DR^{\mathrm{an}} \int_{p_*^{\mathrm{an}}} \simeq Rp_*^{\mathrm{an}} DR^{\mathrm{an}}$$

qui est, comme le montre Z. Mebkhout, formel et n'utilise que la cohérence des coefficients. Ainsi, en combinant tous ces résultats on obtient

$$DR^{\mathrm{an}} f_+(\mathcal{O}_U \exp g) \simeq Rp_*^{\mathrm{an}} DR^{\mathrm{an}} j_+ \big(\Phi_+(\mathcal{O}_U) \exp s\big) .$$

Comme $\Phi_+ \mathcal{O}_U$ est à cohomologie holonome régulière [2, théorème 12.2, p. 308], on peut alors appliquer le théorème 5.1 de [10] qui donne un isomorphisme

$$DR^{\mathrm{an}} j_+ \big(\Phi_+(\mathcal{O}_U) \exp s\big) \simeq R\pi_* \beta_! R\alpha_* DR^{\mathrm{an}}(\Phi_+ \mathcal{O}_U) .$$

La régularité de $\mathcal{O}_U$ donne (cf. [2, théorème 14.4, p. 325])

$$\begin{aligned} DR^{\mathrm{an}}(\Phi_+ \mathcal{O}_U) &\simeq R\Phi_*^{\mathrm{an}} DR^{\mathrm{an}} \mathcal{O}_U \\ &\simeq R\Phi_*^{\mathrm{an}} \mathbb{C}_U \,. \end{aligned}$$

En utilisant l'isomorphisme de foncteurs $RF_* \simeq Rp_*^{\mathrm{an}} R\pi_*$ et en recollant toutes les étapes on arrive finalement à l'isomorphisme cherché. □

Soit S_ϵ^1 un cercle centré en 0 et de rayon ϵ assez petit. En utilisant la compacité de S_ϵ^1, on a le résultat suivant.

LEMME 2.— *Il existe $\rho = \rho(\epsilon)$ tel que*

(i) la restriction de $R^kF_*^{\mathrm{an}}\beta_! R\alpha_* R\Phi_*^{\mathrm{an}}\mathbb{C}_U$ à S^1_ϵ soit le faisceau associé au préfaisceau

$$V \rightsquigarrow H^k(f^{-1}(V),\, f^{-1}(V)\cap g^{-1}(\rho),\, \mathbb{C})\,.$$

(ii) $f : (f^{-1}(V), f^{-1}(V)\cap g^{-1}(\rho)) \to (V,V)$ soit une fibration de paire.

Preuve.— Démontrons le point (i).

Soit V un voisinage analytique d'un point de S^1_ϵ. Si $\mathbf{H}(-)$ désigne l'hypercohomologie, on a

$$\mathbf{H}^k\big(F^{-1}(V),\, \beta_! R\alpha_* R\Phi_*^{\mathrm{an}}\mathbb{C}_U\big) = \mathbf{H}^k(V \times \widetilde{\mathbf{P}^1},\, \beta_! R\alpha_* R\Phi_*^{\mathrm{an}}\mathbb{C}_U)\,.$$

L'argument dans [10, p. 6] dit que ceci est isomorphe, pour ρ assez grand, à $\mathbf{H}^k(V\times\mathbb{C},\, V\times U_\rho,\, R\Phi_*^{\mathrm{an}}\mathbb{C}_U) := \mathbf{H}^k(V\times\mathbb{C},\, j_!j^{-1}R\Phi_*^{\mathrm{an}}\mathbb{C}_U)$ où j est l'inclusion $V\times U_\rho^c \hookrightarrow V\times\mathbb{C}$ et U_ρ^c est l'ouvert complémentaire de $U_\rho := \{x\in\mathbb{C} \mid \Re(-x)\geq\rho\}$.

En prenant V convenable et quitte à prendre ρ plus grand, Φ définit une fibration au-dessus de $V\times U_\rho^c$. On aura ainsi

$$\mathbf{H}^k(V\times\mathbb{C},\, j_!j^{-1}R\Phi_*^{\mathrm{an}}\mathbb{C}_U) = \mathbf{H}^k\big(V\times\mathbb{C},\, R\Phi_*^{\mathrm{an}}\eta_!\eta^{-1}\mathbb{C}_{f^{-1}(V)}\big)$$

où η est l'inclusion $f^{-1}(V)\cap g^{-1}(U_\rho^c) \hookrightarrow f^{-1}(V)$; d'où l'égalité avec

$$\mathbf{H}^k\big(f^{-1}(V),\, \eta_!\eta^{-1}\mathbb{C}_{f^{-1}(V)}\big) = H^k\big(f^{-1}(V),\, f^{-1}(V)\cap g^{-1}(U_\rho),\mathbb{C}\big)\,.$$

En recouvrant S^1_ϵ par un nombre fini d'ouverts V comme ceci et en prenant le majorant des ρ trouvés, le point (i) est résolu.

Le point (ii) résulte du fait que f se fibre au-dessus de S^1_ϵ et du premier lemme d'isotopie de Thom. □

COROLLAIRE 2.— *Sur S^1_ϵ on a des isomorphismes naturels*

$$\begin{aligned} i_t^+\mathcal{H}^k f_+(\mathcal{O}_U \exp g) &\simeq H^k\Big(f^{-1}(t)^{\mathrm{an}},\, f^{-1}(t)^{\mathrm{an}}\cap g^{-1}(\rho),\, \mathbb{C}\Big) \\ &\simeq H^k\Big(f^{-1}(t)^{\mathrm{an}},\, g_t^{-1}(\rho)^{\mathrm{an}},\, \mathbb{C}\Big)\,. \end{aligned}$$

Notons par f_ρ la restriction de f à $g^{-1}(\rho)$. À la paire $f_\rho^{-1}(t) \subset f^{-1}(t)$ est associée une suite exacte longue de cohomologie relative

$$\ldots \longrightarrow H^{k-1}\Big(f^{-1}(t)^{\mathrm{an}}, \mathbb{C}\Big) \longrightarrow H^{k-1}\Big(f_\rho^{-1}(t)^{\mathrm{an}}, \mathbb{C}\Big)$$
$$\longrightarrow H^{k}\Big(f^{-1}(t)^{\mathrm{an}}, f_\rho^{-1}(t)^{\mathrm{an}}, \mathbb{C}\Big) \longrightarrow H^{k}\Big(f^{-1}(t)^{\mathrm{an}}, \mathbb{C}\Big) \longrightarrow \ldots$$

qui est, grâce au point (ii) de la proposition précédente, compatible à l'action de la monodromie sur chaque facteur. Les exposants de la monodromie de $\mathcal{L}_k^{\mathrm{an}}$ sont donc ceux de $R^{k-1}f_{\rho *}\underline{\mathbb{C}}$ ou de $R^k f_*\underline{\mathbb{C}}$ restreints à S^1_ϵ. En utilisant le théorème de monodromie on obtient ainsi la rationalité des exposants de la monodromie analytique de $f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} \exp g)$. □

Remarque.— il est probablement faux que l'on puisse trouver, en général, un tel ρ sur un disque épointé; c'est pour cette raison que l'on se restreint à un cercle, ce qui est suffisant pour le calcul de la monodromie analytique.

3. Exemples

Pour illustrer le résultat sur la rationalité des exposants de la monodromie nous donnons trois exemples élémentaires pour $n = 2$. Dans tous ces cas le complexe $f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} \exp g)$ se réduit cohomologiquement à un seul $\mathcal{D}$-module.

— Si $f(x,y) = x$ et $g(x,y) = xy^2$, alors la restriction du complexe $f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} \exp g)$ à $\mathbb{C}^*$ est donnée par l'opérateur différentiel $2t\partial_t - 1$ (il est à singularités régulières). Il y a un seul exposant et il est égal à $1/2$.

— Si $f(x,y) = x$ et $g(x,y) = x(x-1)y^2$ la restriction de $f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} \exp g)$ à $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ est donnée par l'opérateur $t(t-1)\partial_t - t + 1/2$ (0 est une singularité régulière). L'exposant de la monodromie en 0 est $-1/2$.

— Si $f(x,y) = x$ et $g(x,y) = (xy+1)y$, alors la restriction du complexe $f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} \exp g)$ à $\mathbb{C}^*$ est donnée l'opérateur différentiel $4t^2\partial_t - (1+2t)$ (0 est une singularité irrégulière). Ses solutions sont les multiples de $t^{1/2} \exp -1/4t$ et l'exposant de monodromie est $1/2$.

Remarque.— Comme me l'a suggéré Z. Mebkhout, il serait intéressant de montrer la rationalité des exposants en donnant une preuve analogue à celle de N. Katz dans le cas régulier (c.-à-d. $g = 0$) [5] .

Remerciements

Je remercie Yves André pour les très agréables et fructueuses discussions qui m'ont poussé à rédiger cet article et C. Sabbah pour les suggestions faites sur le sujet. Je remercie également le rapporteur pour les corrections.

Références

[1] DIMCA (A.) et SAITO (M.) .— *On the cohomology of the general fiber of a polynomial map*, Compositio Math. **85** (1993), pp. 299-309.

[2] BOREL (A.) *et al.* .— *Algebraic $\mathcal{D}$-modules*, Perspectives in Math. **2**, Academic Press, Boston, 1987.

[3] GODEMENT (R.) .— *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Hermann, Paris, 1964.

[4] IVERSEN (B.) .— *Cohomology of sheaves*, Universitext, Springer Verlag, Heidelberg, 1986.

[5] KATZ (N.) .— *Nilpotent connections and the monodromy theorem*, Publ. Math. I.H.E.S. **39** (1971), pp. 355-412.

[6] LE DUNG TRANG .— *Faisceaux constructibles quasi-unipotents*, Séminaire Bourbaki (1981), **581**.

[7] MEBKHOUT (Z.) .— *Le formalisme des six opérations de Grothendieck pour les $\mathcal{D}$-modules cohérents*, Hermann, Paris, 1989.

[8] MEBKHOUT (Z.) .— *Le théorème de positivité de l'irrégularité pour les $\mathcal{D}$-modules*, The Grothendieck Festschrift, Progress in Math., Birkhaüser, Boston, **88** (1990), pp. 83-132.

[9] PHAM (F.) .— *livre Singularités des systèmes de Gauss–Manin*, Progress in Math., Birkhaüser, Boston, **2** (1980).

[10] SABBA (C.) .— *On the comparison theorem for elementary irregular $\mathcal{D}$-modules*, Nagoya J. Math. **141** (1996).