ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

RACHID BENABIDALLAH

Solution globale de l'équation d'un gaz visqueux isotherme dans un domaine extérieur assujetti à une grande force dérivant d'un potentiel

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 7, nº 4 (1998), p. 599-625

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1998_6_7_4_599_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. VII, n° 4, 1998

Solution globale de l'équation d'un gaz visqueux isotherme dans un domaine extérieur assujetti à une grande force dérivant d'un potentiel(*)

RACHID BENABIDALLAH(1)

RÉSUMÉ. — On étudie le système d'équations d'un gaz visqueux isotherme assujetti à une force arbitrairement grande dérivant d'un potentiel et on démontre un résultat d'existence et d'unicité globales en temps pour un tel système dans un domaine extérieur.

ABSTRACT. — We study the system of equations of isothermal viscous gas subject to a large external potential force and we prove the global existence and uniqueness of solutions in the three-dimensional exterior domains.

MOTS-CLÉS : Équations de Navier-Stokes, domaines extérieurs, solution globale.

AMS Classification : AMS(MOS): 35B45, 76D05 (1991)

1. Introduction

Dans cet article, on se propose d'étudier l'équation d'un gaz visqueux isotherme; il s'agit du système d'équations décrivant l'écoulement d'un gaz visqueux à température constante.

Nous envisageons le mouvement d'un gaz assujetti à une grande force extérieure dérivant d'un potentiel. Notre but principal est de démontrer, sous

(*) Reçu le 5 mai 1997, accepté le 3 décembre 1997

(1) Université de Tizi-Ouzou, Département de Mathématiques, DZ-15000 Tizi-Ouzou (Algérie)
Università di Pisa, Dipartimento di Matematica "L. Tonelli", Via Buonarroti, n. 2, I-56127 Pisa (Italy)
e-mail : rachid@mail.dm.unipi.it

l'hypothèse de la petitesse des données initiales, un théorème d'existence et d'unicité globales pour le système d'équations en question dans un domaine extérieur, plus précisement le complémentaire d'un compact de $\mathbb{R}^3$.

Nous considérons en effet le système d'équations

$$\partial_t u - \frac{1}{\rho} Au + \nabla\sigma + (u\cdot\nabla)u = 0\,, \tag{1.1}$$

$$\partial_t\sigma + u\cdot\nabla\sigma - u\cdot\nabla\Phi + \nabla\cdot u = 0\,, \tag{1.2}$$

$$\sigma = \log(\rho/\rho_{\mathrm{eq}}) \tag{1.3}$$

dans un domaine extérieur Ω de $\mathbb{R}^3$ et pour $t > 0$ avec les conditions initiales

$$u\big|_{t=0} = u_0\,, \quad \sigma\big|_{t=0} = \log(\rho_0/\rho_{\mathrm{eq}}) = \sigma_0\,. \tag{1.4}$$

L'opérateur A figurant dans (1.1) est donné par

$$Au = \mu\Delta u + \lambda\nabla(\nabla\cdot u) \tag{1.5}$$

avec deux constantes positives μ et λ, tandis que $\Phi = \Phi(x)$ est une fonction scalaire donnée. Quant à la fonction $\rho_{\mathrm{eq}} = \rho_{\mathrm{eq}}(x)$, elle est donnée par

$$\rho_{\mathrm{eq}}(x) = \exp\big(-\Phi(x)\big)\,. \tag{1.6}$$

La solution u devra en outre vérifier les conditions aux limites

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0\,, \quad u \to 0 \text{ pour } |x| \to \infty\,. \tag{1.7}$$

Pour la fonction Φ, nous supposons les hypothèses suivantes

$$\Phi \in L^\infty(\Omega)\,, \quad \nabla\Phi \in L^\infty(\Omega)\cap L^2(\Omega)\,, \quad \nabla\nabla\Phi \in W_3^1(\Omega)\,. \tag{1.8}$$

La relation (1.6) et la première condition de (1.8) (et une certaine régularité sur Φ) entraînent l'existence de deux constantes $\underline{m}$ et $\overline{m}$ telles que

$$0 < \underline{m} \le \rho_{\mathrm{eq}}(x) \le \overline{m} < \infty \quad \forall\, x \in \Omega\,. \tag{1.9}$$

Si on substitue les relations (1.3), (1.5) et (1.6) dans les équations (1.1)-(1.2), ces dernières s'expriment sous la forme

$$\partial_t u - \frac{1}{\rho}\left(\mu\Delta u + \lambda\nabla(\nabla\cdot u)\right) + (u\cdot\nabla)u + \frac{1}{\rho}\nabla\rho = -\nabla\Phi\,, \tag{1.1bis}$$

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho u) = 0 . \tag{1.2bis}$$

Si $u = (u_1, u_2, u_3)$ et ρ représentent respectivement le vecteur vitesse et la densité du fluide et si μ et λ vérifient la condition $\lambda \geq \mu/3$, condition requise par le principe de la thermodynamique, les équations (1.1bis) et (1.2bis) régiront le mouvement d'un gaz visqueux isotherme assujetti à la force extérieure dérivant du potentiel Φ.

Le résultat fondamental concernant la résolubilité globale (par rapport au temps) du système d'équations d'un gaz visqueux est dû à Matsumura et Nishida ([8], [9]), qui ont démontré l'existence et l'unicité de la solution globale du système d'équation d'un gaz visqueux et calorifère sous les hypothèses que les données initiales soient petites et que le potentiel Φ soit suffisamment voisin d'une constante. Plus récemment, Matsumura et Padula [10] ont démontré que dans un domaine borné un résultat analogue a lieu même avec une grande force dérivant d'un potentiel. D'autre part, dans [2] et [3], nous avons prouvé l'existence et l'unicité de la solution globale du système (1.1bis) et (1.2bis) respectivement dans l'espace entier $\mathbb{R}^3$ et dans le demi-espace $\mathbb{R}^3_+$ sous une grande force dérivant d'un potentiel.

Dans la suite pour une fonction u à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, on désignera par ∇u, $\nabla\nabla u$ et $\nabla\nabla\nabla u$ les vecteurs dont les composantes sont $\partial_{x_i} u_j$ (i, $j = 1, 2, 3$), $\partial_{x_i}\partial_{x_j} u_k$ (i, j, $k = 1, 2, 3$) et $\partial_{x_i}\partial_{x_j}\partial_{x_k} u_\ell$ (i, j, k, $\ell = 1, 2, 3$) respectivement. Quant à $\nabla_z v$ et $\nabla_z\nabla_z v$, ils désigneront les vecteurs dont les composantes sont respectivement les dérivées partielles $\partial_{z_i} v_j$ et $\partial_{z_i}\partial_{z_j} v_k$ (i, j, $k = 1, 2, 3$) par rapport aux variables z_i ($i = 1, 2, 3$) que l'on introduira dans la section 2.

Par ailleurs, on notera

$$\|\cdot\|_{L^p}, \quad \|\cdot\|_{L^r(t_0,t_1;H^k)}$$

au lieu de $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$, $\|\cdot\|_{L^r(t_0,t_1;H^k(\Omega))}$ les normes dans les espaces $L^p(\Omega)$ et $L^r(t_0, t_1; H^k(\Omega))$. Mais lorsqu'il s'agit d'un sous-domaine Ω' de Ω ou d'un sous-domaine Q de $\mathbb{R}^3_+$, on le précisera toujours par la notation

$$\|\cdot\|_{L^p(\Omega')}, \quad \|\cdot\|_{L^p(Q)} .$$

2. Préliminaires

Comme Ω est un domaine extérieur et donc muni d'une frontière courbe et compacte, on établira des estimations a priori des solutions, en décomposant

Ω en des parties qui seront transformées de manière convenable en une partie de l'espace entier $\mathbb{R}^3$ ou du demi-espace $\mathbb{R}^3_+$; les estimations seront ainsi réduites essentiellement à celles dans $\mathbb{R}^3$ ou dans $\mathbb{R}^3_+$, comme on le verra dans la section suivante

Ou suppose que Ω est de classe C^3. Comme on le sait bien, il est possible de choisir un système fini $\{\Omega_r\}_{r=0}^N$ d'ouverts de $\mathbb{R}^3$ et un système $\{\chi_r\}_{r=0}^N$ de fonctions de classe $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ vérifiant les conditions (i)-(v) citées ci-dessous :

(i) $0 \leq \chi_r \leq 1$ $(r = 0, \ldots, N)$, $\displaystyle\sum_{r=0}^{N} \chi_r(x) = 1\ \forall x \in \Omega$,

(ii) $\operatorname{supp} \chi_0 \subset \Omega$ et $\operatorname{dist}(\operatorname{supp} \chi_0, \partial\Omega) > 0$,

(iii) $\operatorname{supp} \chi_r$ est compact et $\operatorname{supp} \chi_r \subset \Omega_r$ $(r = 1, \ldots, N)$,

(iv) pour chaque $r = 1, \ldots, N$, il existe une carte locale $(y_{r_1}, y_{r_2}, y_{r_3})$, un nombre positif α_r et une fonction γ_r de calsse C^3 définie sur $B_{\alpha_r} = [-\alpha_r\,,\,\alpha_r] \times [-\alpha_r\,,\,\alpha_r]$ tels que

$$\Omega_r \cap \partial\Omega \subset \left\{(y_{r_1}, y_{r_2}, y_{r_3}) \mid y_{r_3} = \gamma_r(y_{r_1}, y_{r_2}),\ (y_{r_1}, y_{r_2}) \in B_{\alpha_r}\right\},$$

$$\Omega_r \cap \Omega \subset \Big\{(y_{r_1}, y_{r_2}, y_{r_3}) \mid \gamma_r(y_{r_1}, y_{r_2}) < y_{r_3} < \gamma_r(y_{r_1}, y_{r_2}) + \alpha_r\,,\ (y_{r_1}, y_{r_2}) \in B_{\alpha_r}\Big\},$$

(v) $\partial_{y_{r_i}} \gamma_r(0,0) = 0$, $\left|\partial_{y_{r_i}} \gamma_r(y_{r_1}, y_{r_2})\right| \leq \epsilon\ \forall (y_{r_1}, y_{r_2}) \in B_{\alpha_r}$ $(r = 1, \ldots, N,\ i = 1, 2)$

avec un nombre positif ϵ assez petit (que l'on choisira convenablement dans la suite comme requis dans les démonstrations des lemmes 3.4 et 3.5).

$\{\Omega_r\}_{r=0}^N$, $\{\chi_r\}_{r=0}^N$ $\{(y_{r_1}, y_{r_2}, y_{r_3})\}_{r=1}^N$ et $\{\gamma_r\}_{r=1}^N$ étant choisis, on considère Ω_r et sa carte locale $(y_{r_1}, y_{r_2}, y_{r_3})$ pour $r \geq 1$ fixé. Pour simplifier la notation, on omettra, dans la suite, l'indice r des variables y_{r_i} $(i = 1, 2, 3)$ et on écrira simplement y_i. On introduit maintenant le changement de coordonnées par

$$z_1 = y_1\,,\quad z_2 = y_2\,,\quad z_3 = y_3 - \gamma_r(y_1, y_2)\,. \tag{2.1}$$

Il est évident que, en vertu de la condition (iv), le changement donné par (2.1) transforme $\Omega_r \cap \Omega$ en une partie de $Q_r = B_{\alpha_r} \times [\,0\,,\,\alpha_r\,] \subset \mathbb{R}^3_+$ et $\Omega_r \cap \partial\Omega$ en une partie de $B_{\alpha_r} \subset \mathbb{R}^2$.

La définition (2.1) implique que les dérivations par rapport aux variables (y_1, y_2, y_3) et celles par rapport aux variables (z_1, z_2, z_3) sont reliées par

$$\begin{cases} \partial_{y_i} = \partial_{z_i} - (\partial_{y_i}\gamma_r)\partial_{z_3} \quad (i = 1,\, 2), \\ \partial_{y_3} = \partial_{z_3} \,. \end{cases} \tag{2.2}$$

Les relations (2.2) nous permettent de transformer le système d'équations (1.1)-(1.3) dans $\Omega_r \cap \Omega$ en

$$\partial_t u - \frac{\mu}{\rho}\,\Delta_z u + \frac{\lambda}{\rho}\,\nabla_z\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right) + \nabla_z\sigma = F\,, \tag{2.3}$$

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} + \nabla_z \cdot u = G \tag{2.4}$$

avec

$$\begin{aligned} F = {} & \frac{\mu}{\rho}\left(-2((\nabla'\gamma_r)\cdot\nabla_z)\partial_{z_3}u - (\Delta'\gamma_r)\partial_{z_3}u + \left|\nabla'\gamma_r\right|^2 u\right) + \\ & + \frac{1}{\rho}\,(\nabla'\gamma_r)\left(\lambda\partial_{z_3}\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right) + \rho\partial_{z_3}\sigma\right) - (u\cdot\nabla)u + \\ & + \frac{\lambda}{\rho}\left(\nabla_z(u\cdot\nabla\Phi) + (\nabla'\gamma_r)\partial_{z_3}(u\cdot\nabla\Phi)\right), \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$G = (u\cdot\nabla\Phi) + (\nabla'\gamma_r)\cdot\partial_{z_3}u\,, \tag{2.6}$$

où ∇', Δ' et Δ_z désignent les opérateurs différentiels $\nabla' = (\partial_{z_1}, \partial_{z_2}, 0)$, $\Delta' = \partial_{z_1}^2 + \partial_{z_2}^2$ et $\Delta_z = \partial_{z_1}^2 + \partial_{z_2}^2 + \partial_{z_3}^2$, tandis que ∇ désigne l'opérateur différentiel $\nabla = (\partial_{y_1}, \partial_{y_2}, \partial_{y_3})$. Comme l'expression du système d'équations (1.1)-(1.3) est invariante pour le choix du système (x_1, x_2, x_3) ou (y_1, y_2, y_3), dans la suite on écrira ∇ pour désigner $(\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3})$ ainsi que $(\partial_{y_1}, \partial_{y_2}, \partial_{y_3})$ sans risque d'équivoque.

Nous rappelons ici également les résultats classiques suivants. On rappelle d'abord le lemme suivant.

LEMME 2.1.— *Soit Ω un domaine extérieur de $\mathbb{R}^3$ de classe C^3. Si $Au \in H^k(\Omega)$, alors on a pour $k = 0,\, 1$*

$$\left\|\partial_{x_i}\partial_{x_j}u\right\|_{H^k} \leq c\left(\left\|Au\right\|_{H^k} + \left\|u\right\|_{L^2}\right)\,, \quad i,\, j = 1,\, 2,\, 3 \tag{2.7}$$

avec une constante c.

Démonstration. — C'est un résultat classique (voir par exemple [1]). □

Nous considérons maintenant le système d'équations de Stokes dans un domaine Ω de $\mathbb{R}^3$ de classe C^3

$$\begin{cases} -\mu\Delta v + \nabla p = f, \\ \nabla \cdot v = h \end{cases} \tag{2.8}$$

avec les conditions aux limites

$$v\big|_{\partial\Omega} = 0\,, \quad v \to 0 \text{ pour } |x| \to \infty\,. \tag{2.9}$$

On a alors le lemme suivant.

LEMME 2.2.— *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine extérieur de classe C^3, $f \in H^1(\Omega)$ et $h \in H^2(\Omega)$. Si (v,p) vérifie (2.8)-(2.9), alors on a les inégalités*

$$\begin{gathered} \|\nabla\nabla v\|_{L^2} + \|\nabla p\|_{L^2} \leq c\Big(\|h\|_{H^1} + \|f\|_{L^2} + \|\nabla v\|_{L^2}\Big) \\ \|\nabla\nabla\nabla v\|_{L^2} + \|\nabla\nabla p\|_{L^2} \leq c\Big(\|h\|_{H^2} + \|f\|_{H^1} + \|\nabla v\|_{L^2}\Big) \end{gathered} \tag{2.10}$$

avec une constante c.

Démonstration. — Voir le lemme 4.3 de [9]. □

D'autre part, on considère dans un sous-domaine borné ω de $\mathbb{R}^3$ l'équation

$$\nabla \cdot \psi = \theta \tag{2.11}$$

avec la condition aux limites

$$\psi\big|_{\partial\omega} = 0 \tag{2.12}$$

et la condition de compatibilité

$$\int_\omega \theta \,\mathrm{d}x = 0\,. \tag{2.13}$$

On a alors le résultat suivant.

LEMME 2.3.— *L'équation (2.11) avec les conditions (2.12)-(2.13) admet au moins une solution $\psi \in H_0^1(\omega)$ satisfaisant à l'inégalité*

$$\|\psi\|_{H_0^1(\omega)} \leq c\|\theta\|_{L^2(\omega)} \tag{2.14}$$

avec une constante c ne dépendant pas de $\theta \in L^2(\omega)$.

Démonstration. — L'existence d'une solution $\psi \in H_0^1(\omega)$ et son estimation (2.14) sont des conséquences immédiates de résultats connus (cf. [7]). □

3. Estimations a priori

Dans la suite, on va établir des estimations a priori sur u et σ en supposant que (u, σ) est une solution sur $[0, T]$ et appartenant à la classe

$$\begin{cases} u \in L^\infty(0,t\,; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0,t\,; H^3(\Omega))\,, \\ \partial_t u \in L^2(0,t\,; H_0^1(\Omega))\,, \quad \sigma \in L^\infty(0,t\,; H^2(\Omega))\,. \end{cases} \tag{3.1}$$

Ces estimations nous permettrons de prolonger la solution sur l'intervalle $[0, \infty[$.

On définit les fonctions $\mathcal{D}$ et $\mathcal{L}_0$ de t $(0 \le t \le T)$ par

$$\mathcal{D}(t) = \|\nabla u\|_{H^2}^2 + \|\nabla \sigma\|_{H^1}^2 + \|\sqrt{\rho}\,\partial_t u\|_{L^2}^2 + \|\sqrt{\rho}\,\nabla \partial_t u\|_{L^2}^2\,, \tag{3.2}$$

$$\mathcal{L}_0(t) = \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\sqrt{\rho}\,\nabla \sigma\|_{L^2}^2 + \|\sqrt{\rho}\,\nabla\nabla \sigma\|_{L^2}^2\,. \tag{3.3}$$

On démontre alors le résultat suivant.

LEMME 3.1.— *Soit (u, σ) une solution du sytème d'équations (1.1)-(1.3) appartenant à la classe (3.1) avec les conditions initiales u_0 et σ_0 dans $H^2(\Omega)$. Si, outre les hypothèses (1.8)-(1.9), on suppose que*

$$\|\nabla \sigma\|_{L^\infty(0,\infty\,;L^3)} \le \delta_0\,, \tag{3.4}$$

où δ_0 est un nombre positif donné, alors on a les inégalités

$$\begin{aligned} &\|\sqrt{\rho}\,u(t)\|_{L^2}^2 + \int_\Omega \rho_{\mathrm{eq}}(\sigma e^\sigma - e^\sigma + 1) + \int_0^t \|\nabla u(s)\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}s \le \\ &\quad \le c\Big(\|\sqrt{\rho_0}\,u_0\|_{L^2}^2 + \int_\Omega \rho_{\mathrm{eq}}(\sigma_0 e^{\sigma_0} - e^{\sigma_0} + 1)\Big)\,, \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\mu}{2}\,\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 + \int_\Omega (\rho u)\cdot\nabla\sigma + \int_0^t \|\sqrt{\rho}\,\partial_t u\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}s \le \\ &\quad \le c\left(\|u_0\|_{H^1}^2 + \|\sigma_0\|_{H^1}^2\right) + c_1 \int_0^t \left(\exp\|\sigma\|_{L^\infty}\right)\|\nabla u\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}s + \\ &\quad + c\int_0^t \left(\exp\frac{1}{2}\,\|\sigma\|_{L^\infty}\right)\mathcal{D}(s)\big(\mathcal{L}_0(s) + \mathcal{L}_0^{1/2}(s)\big)\,\mathrm{d}s\,, \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t \|\sigma'(s)\|^2_{L^2(\Omega')}\,\mathrm{d}s \leq \\
&\quad \leq c_2 \int_0^t \big(\exp 2\|\sigma\|_{L^\infty}\big)\, \|\sqrt{\rho}\,\partial_t u\|^2_{L^2}\,\mathrm{d}s + \\
&\qquad + c_2 \int_0^t \big(\exp 2\|\sigma\|_{L^\infty}\big)\, \|\nabla u\|^2_{L^2}\,\mathrm{d}s + \\
&\qquad + c \int_0^t \left(\exp \frac{1}{2}\,\|\sigma\|_{L^\infty}\right) \mathcal{D}(s)\big(\mathcal{L}_0(s) + \mathcal{L}_0^{1/2}(s)\big)\,\mathrm{d}s\,,
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

$$
\begin{aligned}
&\|Au(t)\|^2_{L^2} - 2\int_\Omega (\rho A u)\cdot\nabla\sigma + \frac{\mu}{2}\int_0^t \|\sqrt{\rho}\,\nabla\partial_t u\|^2_{L^2}\,\mathrm{d}s \leq \\
&\quad \leq c\Big(\|u_0\|^2_{H^2} + \|\sigma_0\|^2_{H^1}\Big) + \\
&\qquad + c_3 \int_0^t \big(\exp\|\sigma\|_{L^\infty}\big)\Big(\|\nabla u\|^2_{H^1} + \|\sqrt{\rho}\,\partial_t u\|^2_{L^2}\Big)\,\mathrm{d}s + \\
&\qquad + c \int_0^t \big(\exp 3\|\sigma\|_{L^\infty}\big)\, \mathcal{D}(s)\big(\mathcal{L}_0(s) + \mathcal{L}_0^{1/2}(s)\big)\,\mathrm{d}s\,,
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

où c, c_1, c_2 et c_3 sont des constantes ne dépendant que de δ_0, μ, λ et Φ, tandis que la fonction σ' et Ω' figurant dans (3.7) sont une fonction et un sous-domaine borné de Ω choisis de sorte que

$$
\sigma' = \sigma - \frac{1}{|\Omega'|}\int_{\Omega'} \sigma\,\mathrm{d}x\,,
\tag{3.9}
$$

$$
\left(\frac{1}{|\Omega'|^{1/6}}\,\|\nabla\Phi\|_{L^2} + \|\nabla\Phi\|_{L^3(\Omega\setminus\Omega')}\right) \leq \frac{1}{4\underline{m}\sqrt{2}}\,,
\tag{3.10}
$$

où $\underline{m}$ est la constante figurant dans (1.9).

Démonstration. — Les inégalités (3.5), (3.6) et (3.8) s'obtiennent en considérant les produits scalaires dans $L^2(\Omega)$ de l'équation (1.1) avec les fonctions ρu, $\rho\,\partial_t u$ et $-\rho A\,\partial_t u$ respectivement. Quant à (3.7) elle résulte du produit scalaire dans $L^2(\Omega')$ de (1.1) avec la solution ψ du problème (2.11)-(2.12) où on substitue le domaine Ω' à ω et la fonction σ' donnée par (3.9) à θ et du lemme 2.3 (pour les détails, voir la proposition 5.1 de [3]). □

LEMME 3.2.— *Sous les mêmes hypothèses que dans le lemme 3.1, on a*

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \left(\|\nabla\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla\sigma\|_{L^2}^2\right) \mathrm{d}s \leq \\
&\quad \leq \widetilde{c}_1 \int_0^t \left\|\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right\|_{H^1}^2 \mathrm{d}s + c\int_0^t \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \\
&\qquad + c\int_0^t (\exp\|\sigma\|_{L^\infty}) \|\sqrt{\rho}\,\partial_t u\|_{L^2}^2 \,\mathrm{d}s + \\
&\qquad + c\int_0^t \|\sigma'\|_{L^2(\Omega')}^2 \,\mathrm{d}s + \\
&\qquad + c\int_0^t (\exp 3\|\sigma\|_{L^\infty}) \mathcal{D}(s)(\mathcal{L}_0(s) + \mathcal{L}_0^{1/2}(s)) \,\mathrm{d}s\,,
\end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \left(\|\nabla\nabla\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla\nabla\sigma\|_{L^2}^2\right) \mathrm{d}s \leq \\
&\quad \leq \widetilde{c}_2 \int_0^t \left\|\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right\|_{H^2}^2 \mathrm{d}s + \\
&\qquad + c\int_0^t (\exp 3\|\sigma\|_{L^\infty}) \left(\|\sqrt{\rho}\,\partial_t u\|_{L^2}^2 + \|\sqrt{\rho}\,\nabla\partial_t u\|_{L^2}^2 + \|\nabla\sigma\|_{L^2}^2\right) \mathrm{d}s + \\
&\qquad + c\int_0^t (\exp 3\|\sigma\|_{L^\infty}) \mathcal{D}(s)(\mathcal{L}_0(s) + \mathcal{L}_0^{1/2}(s)) \,\mathrm{d}s + c\int_0^t \|\nabla u\|_{H^1}^2 \,\mathrm{d}s
\end{aligned} \tag{3.12}$$

avec c et $\widetilde{c}_1$ et $\widetilde{c}_2$ des constantes ne dépendant que de μ, λ, et de Φ.

Démonstration.— Si on applique le lemme 2.2 au système d'équations (2.8)-(2.9) avec

$$v = u\,, \quad p = \rho_{\mathrm{eq}}\sigma'\,, \quad h = u\cdot\nabla\Phi - \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\,,$$
$$f = -\rho\,\partial_t u - \rho(u\cdot\nabla)u + \lambda\nabla h + (\rho_{\mathrm{eq}} - \rho)\nabla\sigma + \rho_{\mathrm{eq}}\sigma'\nabla\Phi$$

(voir (3.4), (3.9)), on obtient, compte tenu de la condition (3.10) et de la relation évidente

$$\|\rho - \rho_{\mathrm{eq}}\|_{L^p} \leq c\,(\exp\|\sigma\|_{L^\infty})\,\|\sigma\|_{L^p}\,, \quad p\in[1\,,\infty] \tag{3.13}$$

(voir aussi (1.9)), l'inégalité (3.11).

Quant à (3.12), en appliquant de nouveau le lemme 2.2 au système (2.8)-(2.9) avec

$$v = u\,, \quad p = \rho_{\text{eq}}\sigma\,, \quad h = u \cdot \nabla\Phi - \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\,,$$

$$f = -\rho\,\partial_t u - \rho(u \cdot \nabla)u + \lambda\nabla h + (\rho_{\text{eq}} - \rho)\nabla\sigma - \rho_{\text{eq}}\sigma\nabla\Phi\,,$$

on obtient, compte tenu de (3.13) et de la relation

$$\left\|\nabla\nabla\sigma\right\|_{L^2} \leq c\big(\left\|\nabla\nabla(\rho_{\text{eq}}\sigma)\right\|_{L^2} + \left\|\nabla\sigma\right\|_{L^2}\big)\,,$$

l'inégalité (3.12) (pour les détails voir la proposition 5.1 de [3]), ce qui achève la démonstration du lemme 3.2. □

Pour estimer les termes

$$\int_0^t \left\|\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right\|_{H^k}^2 \mathrm{d}s\,, \quad k = 1, 2\,,$$

on établira des inégalités séparément dans la région distante de la frontière $\partial\Omega$ (lemme 3.3) et dans le voisinge de $\partial\Omega$ (lemmes 3.4 et 3.5). Pour cela on utilisera le système de fonctions $\{\chi_r\}_{r=0}^{N}$ introduit dans la section 2.

On a en effet le résultat suivant.

LEMME 3.3.— *Sous les mêmes hypothèses que dans le lemme 3.1, on a*

$$\begin{aligned}
&\left\|\chi_0\sqrt{\rho}\,\nabla\sigma(t)\right\|_{L^2}^2 + \int_0^t \left\|\chi_0\nabla\Big(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\Big)\right\|_{L^2}^2 \mathrm{d}s \leq \\
&\leq c\Big(\left\|\sigma_0\right\|_{H^1}^2 + \left\|u_0\right\|_{H^1}^2\Big) + \\
&\quad + c\int_0^t \big(\exp 2\left\|\sigma\right\|_{L^\infty}\big)\,\mathcal{D}(s)\big(\mathcal{L}_0(s) + \mathcal{L}_0^{1/2}(s)\big)\,\mathrm{d}s + \\
&\quad + c\int_0^t \big(\exp 2\left\|\sigma\right\|_{L^\infty}\big)\,\Big(\left\|\nabla u\right\|_{L^2}^2 + \left\|\sqrt{\rho}\,\partial_t u\right\|_{L^2}^2\Big)\,\mathrm{d}s\,,
\end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}
&\|\chi_0\sqrt{\rho}\,\nabla\nabla\sigma(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \left\|\chi_0\nabla\nabla\Big(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\Big)\right\|_{L^2}^2 \mathrm{d}s \leq \\
&\leq c\Big(\left\|\sigma_0\right\|_{H^2}^2 + \left\|u_0\right\|_{H^2}^2\Big) + \\
&\quad + c\int_0^t \big(\exp\left\|\sigma\right\|_{L^\infty}\big)\,\mathcal{D}(s)\big(\mathcal{L}_0(s) + \mathcal{L}_0^{1/2}(s)\big)\,\mathrm{d}s + \\
&\quad + c\int_0^t \big(\exp 2\left\|\sigma\right\|_{L^\infty}\big)\,\Big(\left\|\nabla u\right\|_{H^1}^2 + \left\|\sqrt{\rho}\,\nabla\partial_t u\right\|_{L^2}^2\Big)\,,
\end{aligned} \tag{3.15}$$

où c est une constante qui ne dépend que de μ, λ et de Φ, tandis que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{L}_0$ sont des fonctions données dans (3.2)-(3.3)

Dans la suite, sans toutefois les citer, on utilisera souvent les théorèmes d'immersion de Sobolev, y compris le théorème de Morrey (voir par exemple [5]).

Démonstration.— On le démontre en s'inspirant de la méthode utilisée dans [3, prop. 5.1]. On considère d'abord la dérivée partielle par rapport à x_i ($i = 1, 2, 3$) des équations (1.1)-(1.2) et on en fait le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$ avec $\rho\chi_0^2\partial_{x_i}u$ et $\rho\chi_0^2\partial_{x_i}\sigma$ respectivement. En adjoignant les deux produits scalaires et en tenant compte des relations

$$\begin{aligned}\int_\Omega \rho\chi_0^2\,(\partial_{x_i}\nabla\sigma)\cdot(\partial_{x_i}u) = \\ = -\int_\Omega \rho\chi_0^2(\partial_{x_i}\sigma)(\partial_{x_i}\nabla\cdot u) - 2\int_\Omega \rho\chi_0\,(\partial_{x_i}\sigma)(\partial_{x_i}u)\cdot(\nabla\chi_0) + \\ - \int_\Omega \rho\chi_0^2\,(\partial_{x_i}\sigma)(\nabla\sigma - \nabla\Phi)\cdot(\partial_{x_i}u)\,, \quad i = 1, 2, 3\,,\end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\nabla\cdot u = (u\cdot\nabla\Phi) - \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\,, \qquad \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = \partial_t\sigma + u\cdot\nabla\sigma \tag{3.17}$$

(voir aussi (1.2)), on en tire par des calculs élémentaires l'inégalité

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\|\chi_0\sqrt{\rho}\,\nabla\sigma\|_{L^2}^2 + \|\chi_0\sqrt{\rho}\,\nabla u\|_{L^2}^2\Big) + \\ + \mu\|\chi_0\nabla\nabla u\|_{L^2}^2 + \lambda\left\|\chi_0\nabla\Big(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\Big)\right\|_{L^2}^2 \le \\ \le \frac{1}{4}\,\|\chi_0\sqrt{\rho}\,\nabla\sigma\|_{L^2}^2 + c\big(\exp 2\|\sigma\|_{L^\infty}\big)\,\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \\ + c\Big(\exp\frac{1}{2}\|\sigma\|_{L^\infty}\Big)\,\|\sqrt{\rho}\,\nabla\nabla\sigma\|_{L^2}\,\|\nabla u\|_{H^1}^2 + \\ + c\big(\exp\|\sigma\|_{L^\infty}\big)\,\|\nabla u\|_{L^2}\Big(\|\nabla u\|_{H^1}^2 + \|\nabla\sigma\|_{H^1}^2\Big)\,.\end{aligned} \tag{3.18}$$

D'autre part, si on considère la somme des produits scalaires dans $L^2(\Omega)$ de (1.1) avec $\rho\chi_0^2\nabla\sigma$ et celui de la dérivée par rapport à x_i ($i = 1, 2, 3$) de l'équation (1.2) avec $(\mu+\lambda)\partial_{x_i}\sigma$, il aisé de voir que

$$\begin{aligned} &\frac{\mu+\lambda}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\chi_0\nabla\sigma\right\|_{L^2}^2+\frac{1}{2}\left\|\chi_0\sqrt{\rho}\,\nabla\sigma\right\|_{L^2}^2\leq\\ &\leq c\big(\exp\|\sigma\|_{L^\infty}\big)\left(\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\sqrt{\rho}\,\partial_t u\|_{L^2}^2\right)+\\ &\quad+c\left(\exp\frac{1}{2}\|\sigma\|_{L^\infty}\right)\|\sqrt{\rho}\,\nabla\sigma\|_{L^2}\left(\|\nabla u\|_{H^1}^2+\|\nabla\sigma\|_{H^1}^2\right). \end{aligned}\tag{3.19}$$

En adjoignant maintenant les inégalités (3.18)-(3.19) et en les intégrant par rapport à t, on obtient (3.14).

Pour obtenir (3.15), on considère d'abord les équations (1.1)-(1.2) auxquelles on applique l'opérateur différentiel $\partial_{x_i}\partial_{x_j}$ $(i,\ j=1,2,3)$; si on en fait le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$ avec $\rho\chi_0^2\partial_{x_i}\partial_{x_j}u$ et $\rho\chi_0^2\partial_{x_i}\partial_{x_j}\sigma$ respectivement et si on adjoint ces produits scalaires, on obtient, à l'aide d'un raisonnement analogue à (3.16)-(3.17) et des techniques usuelles, l'inégalité

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\chi_0\sqrt{\rho}\,\nabla\nabla\sigma\|_{L^2}^2+\|\chi_0\sqrt{\rho}\,\nabla\nabla u\|_{L^2}^2\right)+\\ &\qquad+\mu\|\chi_0\nabla\nabla\nabla u\|_{L^2}^2+\lambda\left\|\chi_0\nabla\nabla\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right)\right\|_{L^2}^2\leq\\ &\leq\frac{1}{4}\|\chi_0\sqrt{\rho}\,\nabla\nabla\sigma\|_{L^2}^2+c\big(\exp 2\|\sigma\|_{L^\infty}\big)\|\nabla u\|_{H^1}^2+\\ &\quad+c\big(\exp\|\sigma\|_{L^\infty}\big)\big(\|\nabla u\|_{L^2}+\|\sqrt{\rho}\,\nabla\nabla\sigma\|_{L^2}\big)\|\nabla u\|_{H^2}^2+\\ &\quad+c\big(\exp\|\sigma\|_{L^\infty}\big)\left(\|\sqrt{\rho}\,\nabla\sigma\|_{L^2}^2+\|\sqrt{\rho}\,\nabla\nabla\sigma\|_{L^2}^2\right)\|\nabla u\|_{H^2}^2. \end{aligned}\tag{3.20}$$

Si, en outre, on applique aux équations (1.1) et (1.2) les opérateurs différentiels ∂_{x_i} et $\partial_{x_i}\partial_{x_j}$ respectivement $(i,\ j=1,\ 2,\ 3)$ et on en fait le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$ avec $\chi_0^2\,\partial_{x_i}\partial_{x_j}\sigma$ et $(\mu+\lambda)\chi_0^2\,\partial_{x_i}\partial_{x_j}\sigma$ respectivement, on obtient, en les sommant, l'inégalité

$$\begin{aligned} &\frac{\mu+\lambda}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\chi_0\nabla\nabla\sigma\|_{L^2}^2+\frac{1}{2}\|\chi_0\sqrt{\rho}\,\nabla\nabla\sigma\|_{L^2}^2\leq\\ &\leq c\big(\exp\|\sigma\|_{L^\infty}\big)\left(\|\nabla u\|_{H^1}^2+\|\sqrt{\rho}\,\nabla\partial_t u\|_{L^2}^2\right)+\\ &\quad+c\left(\exp\frac{1}{2}\|\sigma\|_{L^\infty}\right)\|\sqrt{\rho}\,\nabla\nabla\sigma\|_{L^2}^2\left(\|\nabla u\|_{H^2}^2+\|\nabla\sigma\|_{H^1}^2\right). \end{aligned}\tag{3.21}$$

En adjoignant les inégalités (3.20)-(3.21) et en les intégrant par rapport à t, on obtient (3.15), ce qui achève la démonstration du lemme 3.3. □

On va établir maintenant les estimations dans le voisinage de la frontière $\partial\Omega$. Grâce aux propriétés des fonctions χ_r ($r = 1, \ldots, N$) introduites dans la section 2 et au changement de variables (2.1), elles se réduisent aux estimations des solutions des équations (2.3)-(2.4) dans Q_r ($\subset \mathbb{R}^3_+$) pour r fixé ($r = 1, \ldots, N$).

LEMME 3.4.— *Soit $r \in \{1, \ldots, N\}$. Sous les mêmes hypothèses que dans le lemme 3.1 (voir aussi (3.2)-(3.3)), on a pour tout $\epsilon > 0$*

$$\begin{aligned}
&\|\chi_r\sqrt{\rho}\,\nabla_z\sigma\|^2_{L^2(Q_r)} + \int_0^t \left\|\chi_r\nabla_z\Big(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\Big)\right\|^2_{L^2(Q_r)} \mathrm{d}s \leq \\
&\quad \leq c\Big(\|\sigma_0\|^2_{H^1} + \|u_0\|^2_{H^1}\Big) + \\
&\quad + \epsilon\int_0^t \Big(\|\nabla\sigma\|^2_{L^2} + \|\nabla\nabla u\|^2_{L^2}\Big)\,\mathrm{d}s + c\Big(1+\frac{1}{\epsilon}\Big)\int_0^t \|\nabla u\|^2_{L^2}\,\mathrm{d}s + \\
&\quad + c\int_0^t (\exp\|\sigma\|_{L^\infty})\,\|\sqrt{\rho}\,\partial_t u\|^2_{L^2}\,\mathrm{d}s + \\
&\quad + c\int_0^t (\exp 3\|\sigma\|_{L^\infty})\,\mathcal{D}(s)(\mathcal{L}_0(s) + \mathcal{L}_0^{1/2}(s))\,\mathrm{d}s\,,
\end{aligned} \tag{3.22}$$

où c est une constante qui ne dépend que de δ_0, μ, λ, Φ et de γ_r (donc de $\partial\Omega$).

Démonstration.— On considère les équations (2.3)-(2.4) dans $Q_r \subset \mathbb{R}^3_+ = \{z \in \mathbb{R}^3 \mid z_3 > 0\}$. Dans cette démonstration, comme dans (2.5)-(2.6), ∇_z et Δ_z désignent les opérateurs différentiels consistant en des dérivées partielles par rapport aux coordonnées (z_1, z_2, z_3), tandis que ∇ et $\nabla\nabla$ (pour cette notation, voir la section 1) désignent les opérateurs différentiels consistant en des dérivées partielles par rapport aux coordonnées (y_1, y_2, y_3), où les relations entre les deux systèmes de coordonnées sont déterminées par (2.1). On désigne en outre par D_τ l'opérateur différentiel $(\partial_{z_1}, \partial_{z_2})$.

Ceci étant, on considère les équations obtenues en appliquant l'opérateur D_τ à (2.3)-(2.4). La somme de leurs produits scalaires dans $L^2(Q_r)$ respectivement avec $\rho\chi_r^2 D_\tau u$ et $\rho\chi_r^2 D_\tau\sigma$ nous donne

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\|\chi_r\sqrt{\rho}\,D_\tau\sigma\|^2_{L^2(Q_r)} + \|\chi_r\sqrt{\rho}\,D_\tau u\|^2_{L^2(Q_r)}\Big) + \\
&\quad + \mu\|\chi_r\nabla_z D_\tau u\|^2_{L^2(Q_r)} + \lambda\left\|\chi_r D_\tau\Big(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\Big)\right\|^2_{L^2(Q_r)} = \sum_{k=1}^{8} I_k
\end{aligned} \tag{3.23}$$

avec

$$I_1 = \int_{Q_r} \chi_r(\nabla\chi_r)\cdot(\rho u)\Big(\big|D_\tau u\big|^2 + \big|D_\tau\sigma\big|^2\Big)$$

$$I_2 = \sum_{i=1}^{2}\int_{Q_r} \chi_r^2\rho((u\cdot\nabla)\partial_{z_i}u)\cdot(\partial_{z_i}u)\left(\partial_{z_i}\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right)\right)$$

$$I_3 = -2\mu\sum_{i=1}^{2}\int_{Q_r} \chi_r\Big(\big((\nabla_z\chi_r)\cdot\nabla_z\big)\,\partial_{z_i}u\Big)\cdot(\partial_{z_i}u)$$

$$I_4 = 2\sum_{i=1}^{2}\int_{Q_r} \chi_r(\nabla\chi_r)\cdot(\partial_{z_i}u)\left(\rho\,\partial_{z_i}\sigma + \partial_{z_i}\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right)\right)$$

$$I_5 = -\sum_{i=1}^{2}\int_{Q_r} \rho\chi_r^2(\partial_{z_i}u)\cdot(\nabla_z\sigma - \nabla_z\Phi)(\partial_{z_i}\sigma)$$

$$I_6 = -\sum_{i=1}^{2}\int_{Q_r} \rho\chi_r^2(\partial_{z_i}\sigma - \partial_{z_i}\Phi)\left(\mu\Delta_z u - \lambda\nabla_z\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right)\right)\cdot(\partial_{z_i}u)$$

$$I_7 = -\sum_{i=1}^{2}\int_{Q_r} \chi_r^2(\partial_{z_i}G)\left(\rho\,\partial_{z_i}\sigma + \lambda\partial_{z_i}\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right)\right)$$

$$I_8 = \sum_{i=1}^{2}\int_{Q_r} \rho\chi_r^2(\partial_{z_i}F)\cdot(\partial_{x_i}u)\,.$$

La relation (3.23) est obtenue par des calculs élémentaires consistant en la dérivation terme à terme des équations (2.3)-(2.4) et en d'éventuelles intégrations par parties faites tenant compte de la relation

$$\chi_r\,\partial_{z_i}u\big|_{\partial Q_r} = 0\,,\quad i = 1,\,2, \tag{3.24}$$

où une idée analogue à (3.16)-(3.17) a été également utilisée.

Or, comme $\gamma_r \in C^3$, on a

$$|I_1 + I_2| \leq c\big(\exp\|\sigma\|_{L^\infty}\big)\,\|\nabla u\|_{L^2}\left(\|\nabla u\|_{H^1}^2 + \|\nabla\sigma\|_{H^1}^2\right).$$

Il est, d'autre part, facile d'estimer les termes I_3 et I_4 de sorte que

$$|I_3 + I_4| \leq \frac{\mu}{4}\,\|\chi_r\nabla_z D_\tau u\|_{L^2(Q_r)}^2 + \frac{\lambda}{4}\left\|D_\tau\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right)\right\|_{L^2(Q_r)}^2 +$$

$$+\, c\left(1+\frac{1}{\epsilon}\right)\big(\exp 2\|\sigma\|_{L^\infty}\big)\,\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \epsilon\|\nabla\sigma\|_{L^2}^2\,.$$

En outre, compte tenu de (2.4), on a

$$
\begin{aligned}
|I_5 + I_6| \leq c\Big(\exp\frac{3}{2}\|\sigma\|_{L^\infty}\Big)\Big(\|\nabla u\|_{H^1}^2 + \|\nabla\sigma\|_{L^2}^2\Big) \times \\
\times \Big(\|\sqrt{\rho}\,\nabla\sigma\|_{L^2} + \|\sqrt{\rho}\,\nabla\nabla\sigma\|_{L^2}\Big) + \\
+ c\Big(1 + \frac{1}{\epsilon}\Big)\big(\exp 2\|\sigma\|_{L^\infty}\big)\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \\
+ \epsilon\Big(\|\nabla\sigma\|_{L^2}^2 + \|\nabla\nabla u\|_{L^2}^2\Big).
\end{aligned}
$$

Finalement, après d'éventuelles intégrations par parties effectuées compte tenu de (3.24), on obtient, en vertu de la condition (v) de la section 2 et de (3.13) (voir aussi (2.5)-(2.6)),

$$
\begin{aligned}
|I_7 + I_8| \leq \epsilon\Big(\|\nabla\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla\sigma\|_{L^2}^2\Big) + \\
+ c\left(1 + \frac{1}{\epsilon}\right)\big(\exp 2\|\sigma\|_{L^\infty}\big)\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \\
+ \frac{\mu}{4}\,\|\chi_r\nabla_z D_\tau u\|_{L^2(Q_r)}^2 + \frac{\lambda}{4}\left\|\chi_r D_\tau\Big(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\Big)\right\|_{L^2(Q_r)}^2 + \\
+ c\big(\exp\|\sigma\|_{L^\infty}\big)\|\nabla u\|_{L^2}\,\|\nabla u\|_{H^1}^2 + \\
+ c\big(\exp 3\|\sigma\|_{L^\infty}\big)\|\sqrt{\rho}\,\nabla\sigma\|_{L^2}^2\|\nabla\sigma\|_{H^1}^2.
\end{aligned}
$$

Ces estimations, jointes à (3.23), nous donnent

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\|\chi_r\sqrt{\rho}\,D_\tau\sigma\|_{L^2(Q_r)}^2 + \|\chi_r\sqrt{\rho}\,D_\tau u\|_{L^2(Q_r)}^2\Big) + \\
&\quad + \frac{\mu}{2}\,\|\chi_r\nabla_z D_\tau u\|_{L^2(Q_r)}^2 + \frac{\lambda}{2}\left\|\chi_r D_\tau\Big(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\Big)\right\|_{L^2(Q_r)}^2 \leq \\
&\leq c\big(\exp 3\|\sigma\|_{L^\infty}\big)\|\sqrt{\rho}\,\nabla\sigma\|_{L^2}^2\,\|\nabla\sigma\|_{H^1}^2 + \\
&\quad + \epsilon\left(\|\nabla\sigma\|_{L^2}^2 + \|\nabla\nabla u\|_{L^2}^2\right) + c\Big(1 + \frac{1}{\epsilon}\Big)\big(\exp 2\|\sigma\|_{L^\infty}\big)\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \\
&\quad + c\Big(\exp\frac{3}{2}\|\sigma\|_{L^\infty}\Big)\mathcal{D}(\mathcal{L} + \mathcal{L}_0^{1/2}).
\end{aligned}
\tag{3.25}
$$

On considère maintenant les équations

$$\partial_{z_3}\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right) + \partial_{z_3}(\nabla_z \cdot u) = \partial_{z_3} G$$

$$\rho\,\partial_t u_3 - \mu\Delta_z u_3 + \lambda\,\partial_{z_3}\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right) + \rho\,\partial_{z_3}\sigma = \rho F_3\,,$$

où G et F_3 sont données dans (2.5)-(2.6). En additionnant la première équation multipliée par μ et la deuxième équation (de sorte que le terme $\partial_{z_3}\partial_{z_3} u_3$ soit éliminé), on a

$$\begin{aligned}(\mu+\lambda)\,\partial_{z_3}\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right) + \rho\,\partial_{z_3}\sigma = \rho(F_3 - \partial_t u_3) - \mu\,\partial_{z_3} G + \\ + \mu\,\partial_{z_3}(\partial_{z_1} u_1 + \partial_{z_2} u_2) + \\ - \mu(\partial_{z_1}\partial_{z_1} u_3 + \partial_{z_2}\partial_{z_2} u_3)\,.\end{aligned} \tag{3.26}$$

Comme

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = \partial_t\sigma + u\cdot\nabla\sigma\,, \quad \partial_t\rho = -\nabla\cdot(\rho u)\,,$$

on obtient par des calculs élémentaires

$$\begin{aligned}&\left\langle \partial_{z_3}\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right), \chi_r^2\rho\,\partial_{z_3}\sigma \right\rangle = \\ &= \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\|\chi_r\sqrt{\rho}\,\partial_{z_3}\sigma\|^2_{L^2 Q_r} - \int_{Q_r} \chi_r(\nabla\chi_r)\cdot(\rho u)\left|\partial_{z_3}\sigma\right|^2 + \\ &+ \int_{Q_r} \rho\chi_r^2(\partial_{z_3} u)\cdot(\nabla\sigma)(\partial_{z_3}\sigma)\,;\end{aligned} \tag{3.27}$$

donc le produit scalaire dans $L^2(Q_r)$ de (3.26) avec

$$\chi_r^2\left(\rho\,\partial_{z_3}\sigma + (\mu+\lambda)\partial_{z_3}\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right)\right)$$

s'exprime sous la forme

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\chi_r\sqrt{\rho}\,\partial_{z_3}\sigma\right\|^2_{L^2(Q_r)} + \frac{1}{\mu+\lambda}\left\|\chi_r\rho\,\partial_{z_3}\sigma\right\|^2_{L^2(Q_r)} + \\ + (\mu+\lambda)\left\|\chi_r\,\partial_{z_3}\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right)\right\|^2_{L^2(Q_r)} = \sum_{k=1}^{6} I_k\end{aligned} \tag{3.28}$$

avec

$$I_1 = 2 \int_{Q_r} \chi_r (\nabla \chi_r) \cdot (\rho u) |\partial_{z_3} \sigma|^2$$

$$I_2 = -2 \int_{Q_r} \rho \chi_r^2 (\partial_{z_3} u) \cdot (\nabla \sigma)(\partial_{z_3} \sigma)$$

$$I_3 = \frac{\mu}{\mu+\lambda} \int_{Q_r} \chi_r^2 (\partial_{z_3} \partial_{z_1} u_1 + \partial_{z_3} \partial_{z_2} u_2) \left(\rho\, \partial_{z_3} \sigma + (\mu+\lambda)\, \partial_{z_3} \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} \right) \right)$$

$$I_4 = -\frac{\mu}{\mu+\lambda} \int_{Q_r} \chi_r^2 (\partial_{z_1} \partial_{z_1} u_3 + \partial_{z_2} \partial_{z_2} u_3) \times$$

$$\times \left(\rho\, \partial_{z_3} \sigma + (\mu+\lambda)\, \partial_{z_3} \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} \right) \right)$$

$$I_5 = \frac{1}{\mu+\lambda} \int_{Q_r} \rho \chi_r^2 (\partial_t u_3) \left(\rho\, \partial_{z_3} \sigma + (\mu+\lambda)\, \partial_{z_3} \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} \right) \right)$$

$$I_6 = \frac{1}{\mu+\lambda} \int_{Q_r} \chi_r^2 (\rho F_3 - \mu\, \partial_{z_3} G) \left(\rho\, \partial_{z_3} \sigma + (\mu+\lambda)\, \partial_{z_3} \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} \right) \right).$$

Or, on a

$$|I_1 + I_2| \leq c(\exp \|\sigma\|_{L^\infty}) \, \|\nabla u\|_{L^2} \left(\|\nabla \sigma\|_{H^1}^2 + \|\nabla u\|_{H^1}^2 \right).$$

Il est, en outre, aisé de voir que

$$|I_3 + I_4 + I_5| \leq \frac{1}{4(\mu+\lambda)} \|\chi_r \rho\, \partial_{z_3} \sigma\|_{L^2(Q_r)}^2 +$$

$$+ \frac{\mu+\lambda}{4} \left\| \chi_r\, \partial_{z_3} \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} \right) \right\|_{L^2(Q_r)}^2 +$$

$$+ c \|\chi_r \nabla_z D_\tau u\|_{L^2(Q_r)}^2 + c(\exp \|\sigma\|_{L^\infty}) \, \|\sqrt{\rho}\, \partial_t u\|_{L^2}^2 .$$

Finalement, en rappelant les expressions de F et de G (voir (2.5)-(2.6)) et tenant compte de la condition (v) de la section 2 et de (3.13), on obtient

$$|I_6| \leq \frac{1}{4(\mu+\lambda)} \|\chi_r \rho\, \partial_{z_3} \sigma\|_{L^2(Q_r)}^2 + \frac{\mu+\lambda}{2} \left\| \chi_r\, \partial_{z_3} \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} \right) \right\|_{L^2(Q_r)}^2 +$$

$$+ c(\exp 3\|\sigma\|_{L^\infty}) \Big(\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\sqrt{\rho}\, \nabla \sigma\|_{L^2}^2 \Big) \Big(\|\nabla \sigma\|_{H^1}^2 + \|\nabla u\|_{H^1}^2 \Big) +$$

$$+ c \|\chi_r \nabla_z D_\tau u\|_{L^2(Q_r)}^2 + \epsilon \left(\|\nabla \nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla \sigma\|_{L^2}^2 \right) + c \|\nabla u\|_{L^2}^2 .$$

Ces estimations, jointes à (3.28), nous donnent

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\chi_r\sqrt{\rho}\,\partial_{z_3}\sigma\right\|^2_{L^2(Q_r)} + \frac{1}{2(\mu+\lambda)}\left\|\chi_r\rho\,\partial_{z_3}\sigma\right\|^2_{L^2(Q_r)} +$$

$$+\frac{\mu+\lambda}{4}\left\|\chi_r\,\partial_{z_3}\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right)\right\|^2_{L^2(Q_r)} \leq$$

$$\leq c\big(\exp\|\sigma\|_{L^\infty}\big)\left(\|\nabla u\|^2_{L^2} + \|\sqrt{\rho}\,\partial_t u\|^2_{L^2}\right) +$$

$$+ c\big(\exp 3\|\sigma\|_{L^\infty}\big)\left(\|\nabla u\|^2_{L^2} + \|\sqrt{\rho}\,\nabla\sigma\|^2_{L^2}\right)\left(\|\nabla u\|^2_{H^1} + \|\nabla\sigma\|^2_{H^1}\right) +$$

$$+ \widetilde{c}_3\left\|\chi_r\nabla_z D_\tau u\right\|^2_{L^2(Q_r)} + \epsilon\left(\|\nabla\nabla u\|^2_{L^2} + \|\nabla\sigma\|^2_{L^2}\right) + c\|\nabla u\|^2_{L^2}\,. \tag{3.29}$$

En adjoignant l'inégalité (3.25) à l'inégalité (3.29) multipliée par $\mu/(2\widetilde{c}_3)$ et en intégrant par rapport à t, on obtient l'inégalité (3.22), ce qui achève la démonstration du lemme 3.4. □

LEMME 3.5.— *Sous les mêmes hypothèses que dans le lemme 3.3, on a*

$$\left\|\chi_r\sqrt{\rho}\,\nabla_z\nabla_z\sigma\right\|^2_{L^2(Q_r)} + \int_0^t\left\|\chi_r\nabla_z\nabla_z\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right)\right\|^2_{L^2(Q_r)}\mathrm{d}s \leq$$

$$\leq c\left(\|\sigma_0\|^2_{H^2} + \|u_0\|^2_{H^2}\right) +$$

$$+\epsilon\int_0^t\left(\|\nabla\nabla\sigma\|^2_{L^2} + \|\nabla\nabla\nabla u\|^2_{L^2}\right)\mathrm{d}s + \tag{3.30}$$

$$+ c\int_0^t\big(\exp 2\|\sigma\|_{L^\infty}\big)\,\|\nabla u\|^2_{H^1}\,\mathrm{d}s +$$

$$+ c\int_0^t\left(\exp\frac{3}{2}\|\sigma\|_{L^\infty}\right)\mathcal{D}(s)\big(\mathcal{L}_0(s) + \mathcal{L}_0^{1/2}(s)\big)\,\mathrm{d}s$$

où c est une constante ne dépendant que de μ, λ, Φ et de γ_r (donc de $\partial\Omega$).

Démonstration.— Comme dans la démonstration du lemme 3.4, on considère les équations (2.3)-(2.4) dans Q_r ($\in \mathbb{R}^3_+$) avec la même convention de notation pour les opérateurs différentiels relatifs aux coordonnées (z_1, z_2, z_3) et ceux relatifs aux coordonnées (y_1, y_2, y_3). Si, en appliquant aux équations (2.3)-(2.4) l'opérateur différentiel $D_\tau D_\tau = (\partial_{z_1}\partial_{z_1}, \partial_{z_1}\partial_{z_2}, \partial_{z_2}\partial_{z_1}, \partial_{z_2}\partial_{z_2})$, on en fait les produits scalaires dans $L^2(Q_r)$ avec $\rho\chi_r^2 D_\tau D_\tau u$ et $\rho\chi_r^2 D_\tau D_\tau\sigma$ respectivement et si on les somme, alors, compte tenu de la condition

$$\chi_r\partial_{z_i}\partial_{z_j}u\big|_{\partial Q_r} = 0\,,\quad i\,,\,j = 1, 2\,, \tag{3.31}$$

de la condition (v) de la section 2 et de (3.13), on obtient, en rappelant les expressions (3.2)-(3.3) de $\mathcal{D}$ et de $\mathcal{L}_0$, l'inégalité

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\big\|\chi_r\sqrt{\rho}\,D_\tau D_\tau\sigma\big\|^2_{L^2(Q_r)}+\big\|\chi_r\sqrt{\rho}\,D_\tau D_\tau u\big\|^2_{L^2(Q_r)}\Big)+\\
&\qquad+\frac{\mu}{2}\big\|\chi_r\nabla_z D_\tau D_\tau u\big\|^2_{L^2(Q_r)}+\frac{\lambda}{2}\Big\|\chi_r D_\tau D_\tau\Big(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\Big)\Big\|^2_{L^2(Q_r)}\le\\
&\le\epsilon\Big(\big\|\nabla\nabla\sigma\big\|^2_{L^2}+\big\|\nabla\nabla\nabla u\big\|^2_{L^2}\Big)+\\
&\quad+c\Big(1+\frac{1}{\epsilon}\Big)\big(\exp 2\|\sigma\|_{L^\infty}\big)\Big(\big\|\nabla\sigma\big\|^2_{L^2}+\big\|\nabla u\big\|^2_{H^1}\Big)+\\
&\quad+c\Big(\exp\frac{3}{2}\|\sigma\|_{L^\infty}\Big)\mathcal{D}(\mathcal{L}_0+\mathcal{L}_0^{1/2})\,.
\end{aligned}\tag{3.32}$$

On applique maintenant à l'équation (3.26) l'opérateur différentiel D_τ et on en fait le produit scalaire dans $L^2(Q_r)$ avec

$$\chi_r^2\Big(\rho D_\tau\partial_{z_3}\sigma+(\mu+\lambda)D_\tau\partial_{z_3}\Big(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\Big)\Big)\,.$$

On obtient par un raisonnement analogue à (3.27) et en tenant compte de la condition (v) de la section 2 et de (3.31) pour d'éventuelles intégrations par parties (voir aussi (3.2)-(3.3))

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big\|\sqrt{\rho}\,\chi_r D_\tau\partial_{z_3}\sigma\big\|^2_{L^2(Q_r)}+\frac{1}{2(\mu+\lambda)}\big\|\rho\chi_r D_\tau\partial_{z_3}\sigma\big\|^2_{L^2(Q_r)}+\\
&\qquad+\frac{\mu+\lambda}{2}\Big\|\chi_r D_\tau\partial_{z_3}\Big(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\Big)\Big\|^2_{L^2(Q_r)}\le\\
&\le c\big(\exp 2\|\sigma\|_{L^\infty}\big)\mathcal{D}(\mathcal{L}_0+\mathcal{L}_0^{1/2})+\widetilde{c}_4\big\|\chi_r\nabla_z D_\tau D_\tau u\big\|^2_{L^2(Q_r)}\,.
\end{aligned}\tag{3.33}$$

Si on multiplie (3.33) par $\mu/(2\widetilde{c}_4)$ et si on l'adjoint à (3.32), on obtient, en les intégrant par rapport à t, l'inégalité

$$\big\|\chi_r\sqrt{\rho}\,D_\tau\nabla_z\sigma\big\|^2_{L^2(Q_r)}+\int_0^t\Big\|\chi_r D_\tau\nabla_z\Big(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\Big)\Big\|^2_{L^2(Q_r)}\le\int_0^t\Sigma'_\epsilon\,\mathrm{d}s\,,\tag{3.34}$$

où Σ'_ϵ désigne la somme des termes du second membre de (3.32) et ceux du second membre de (3.33) multipliée par $\mu/(2\widetilde{c}_4)$ (sauf bien entendu le dernier terme $\widetilde{c}_4\|\chi_r\nabla_z D_\tau D_\tau u\|^2_{L^2(Q_r)}$).

D'autre part, si on procède comme dans la démonstration de (3.33) en appliquant, au lieu de l'opérateur D_τ, l'opérateur ∂_{z_3} et si on en fait le produit scalaire dans $L^2(Q_r)$ avec

$$\chi_r^2\left(\rho\,\partial_{z_3}\partial_{z_3}\sigma+(\mu+\lambda)\,\partial_{z_3}\partial_{z_3}\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right)\right),$$

on obtient

$$\left\|\chi_r\sqrt{\rho}\,\partial_{z_3}\partial_{z_3}\sigma\right\|^2_{L^2(Q_r)}+\int_0^t\left\|\chi_r\,\partial_{z_3}\partial_{z_3}\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right)\right\|^2_{L^2(Q_r)}\leq\int_0^t\Sigma''_\epsilon\,\mathrm{d}s, \quad (3.35)$$

où Σ''_ϵ est obtenu en substituant le terme $\widetilde{c}_5\left\|\chi_r\nabla_z\nabla_z D_\tau u\right\|^2_{L^2(Q_r)}$ au terme $\widetilde{c}_4\left\|\chi_r\nabla_z D_\tau D_\tau u\right\|^2_{L^2(Q_r)}$ dans le second membre de (3.33).

Par ailleurs, si on considère les mêmes équations (2.8)-(2.9) avec

$$\begin{aligned}
&v=\chi_r\,\partial_{z_i}u\,,\quad p=\chi_r\,\partial_{z_i}(\rho\sigma)\\
&h=\chi_r\,\partial_{z_i}\left(u\cdot\nabla\Phi-\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right)+(\nabla_z\chi_r)\cdot(\partial_{z_i}u)\,,\\
&f=\partial_{z_i}(\rho F)-\chi_r\,\partial_{z_i}\left(\rho\,\partial_t u+\lambda\nabla_z\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right)\right)+\mu(\Delta_z\chi_r)\,\partial_{z_i}u+\\
&\qquad+2\mu\big((\nabla_z\chi_r)\cdot\nabla_z\big)\,\partial_{z_i}u+(\nabla_z\chi_r)\,\partial_{z_i}(\rho\sigma)\,,\quad i=1,2
\end{aligned}$$

dans un domaine borné $\widetilde{Q}$ de $\mathbb{R}^3$ de classe C^3 tel que $\widetilde{Q}\supset Q_r$ et $\partial\widetilde{Q}\supset\{z\in Q_r\mid z_3=0\}$, alors en vertu du résultat connu de Cattabriga [6], on obtient

$$\left\|\nabla_z\nabla_z(\chi D_\tau u)\right\|_{L^2(Q_r)}+\left\|\nabla_z(\chi_r D_\tau(\rho\sigma))\right\|_{L^2(Q_r)}\leq c\Big(\|h\|^2_{H^1}+\|f\|^2_{L^2}\Big)\,. \quad (3.36)$$

Or, grâce à la condition (v) de la section 2 (voir aussi (3.17)), on a

$$\begin{aligned}
&\|h\|^2_{H^1}+\|f\|^2_{L^2}\leq\\
&\leq c\left\|\chi_r\nabla_z D_\tau\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right)\right\|^2_{L^2}+\\
&\quad+\epsilon\Big(\left\|\nabla_z\nabla_z(\chi_r D_\tau u)\right\|^2_{L^2}+\left\|\nabla_z\big(\chi_r D_\tau(\rho\sigma)\big)\right\|^2_{L^2}\Big)+\\
&\quad+c(\exp 3\|\sigma\|_{L^\infty})\left(\left\|\sqrt{\rho}\,\nabla\partial_t u\right\|^2_{L^2}+\|\nabla\sigma\|^2_{L^2}\right)+c\|\nabla u\|^2_{H^1}+\\
&\quad+c(\exp 2\|\sigma\|_{L^\infty})\left(\|\nabla\sigma\|^2_{H^1}+\|\nabla u\|^2_{H^2}\right)\times\\
&\quad\times\left(\|\nabla u\|^2_{L^2}+\left\|\sqrt{\rho}\,\nabla\sigma\right\|^2_{L^2}+\left\|\sqrt{\rho}\,\nabla\nabla\sigma\right\|^2_{L^2}\right).
\end{aligned}$$

En adjoignant ces estimations à (3.36) dans lesquelles on choisit convenablement ϵ et en les intégrant par rapport à t, on obtient, compte tenu de (3.2)-(3.3)

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \left\|\chi_r \nabla_z \nabla_z D_\tau u\right\|^2_{L^2(Q_r)} \,\mathrm{d}s \leq \\
&\quad \leq \widetilde{c}_6 \int_0^t \left\|\chi_r \nabla_z D_\tau \Big(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\Big)\right\|^2_{L^2(Q_r)} \,\mathrm{d}s + \\
&\qquad + c\int_0^t (\exp 3\|\sigma\|_{L^\infty}) \Big(\|\sqrt{\rho}\,\nabla \partial_t u\|^2_{L^2} + \|\nabla\sigma\|^2_{L^2} + \|\nabla u\|^2_{H^1}\Big) \,\mathrm{d}s + \\
&\qquad + c\int_0^t (\exp 2\|\sigma\|_{L^\infty})\, \mathcal{D}(s)\big(\mathcal{L}_0(s) + \mathcal{L}_0^{1/2}(s)\big) \,\mathrm{d}s\,.
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Finalement, en multipliant les inégalités (3.34), (3.35) et (3.37) par des constantes convenablement choisies et en les sommant, on obtient l'inégalité (3.30), ce qui achève la démonstration du lemme 3.5. □

Cela étant, si on rappelle la partition de l'unité $\{\chi_r\}_{r=0}^N$ introduite dans la section 2 et les relations évidentes

$$\|\chi_r \nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq c\|\chi_r \nabla_z u\|_{L^2(Q_r)} \leq c'\|\chi_r \nabla u\|_{L^2(\Omega)}\,,$$

$$\begin{aligned}
\|\chi_r \nabla\nabla u\|_{L^2(\Omega)} &\leq c\Big(\|\chi_r \nabla_z u\|_{L^2(Q_r)} + \|\chi_r \nabla_z\nabla_z u\|_{L^2(Q_r)}\Big) \\
&\leq c'\Big(\|\chi_r \nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|\chi_r \nabla\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\Big)
\end{aligned}$$

avec deux constantes c et c' ne dépendant que de $\partial\Omega$, on obtient, en adjoignant (3.14) et (3.15) respectivement à (3.22) et à (3.30) (voir aussi (3.2)-(3.3)), les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
&\|\sqrt{\rho}\,\nabla\sigma(t)\|^2_{L^2} + \int_0^t \left\|\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right\|^2_{H^1} \,\mathrm{d}s \leq \\
&\quad \leq c\Big(\|\sigma_0\|^2_{H^1} + \|u_0\|^2_{H^1}\Big) + \epsilon\int_0^t \Big(\|\nabla\sigma\|^2_{L^2} + \|\nabla\nabla u\|^2_{L^2}\Big) \,\mathrm{d}s + \\
&\qquad + c\int_0^t (\exp 2\|\sigma\|_{L^\infty})\, \mathcal{D}(s)\big(\mathcal{L}_0(s) + \mathcal{L}_0^{1/2}(s)\big) \,\mathrm{d}s + \\
&\qquad + c\Big(1 + \frac{1}{\epsilon}\Big)\int_0^t (\exp 2\|\sigma\|_{L^\infty}) \Big(\|\sqrt{\rho}\,\partial_t u\|^2_{L^2}) + \|\nabla u\|^2_{L^2}\Big) \,\mathrm{d}s
\end{aligned} \tag{3.38}$$

$$
\begin{aligned}
&\|\sqrt{\rho}\,\nabla\nabla\sigma(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \left\|\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right\|_{H^2}^2 \mathrm{d}s \leq \\
&\leq c\Big(\|\sigma_0\|_{H^2}^2 + \|u_0\|_{H^2}^2\Big) + \\
&+ c\Big(1+\frac{1}{\epsilon}\Big)\int_0^t (\exp 3\|\sigma\|_{L^\infty})\Big(\|\sqrt{\rho}\,\nabla\partial_t u\|_{L^2}^2 + \|\nabla\sigma\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{H^1}^2\Big)\,\mathrm{d}s + \\
&+ \epsilon\int_0^t \Big(\|\nabla\nabla\sigma\|_{L^2}^2 + \|\nabla\nabla\nabla u\|_{L^2}^2\Big)\,\mathrm{d}s + \\
&+ c\int_0^t (\exp 2\|\sigma\|_{L^\infty})\,\mathcal{D}(s)\big(\mathcal{L}_0(s) + \mathcal{L}_0^{1/2}(s)\big)\,\mathrm{d}s
\end{aligned}
\tag{3.39}
$$

où on a également utilisé la relation évidente (voir (3.17))

$$
\left\|\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right\|_{H^1}^2 \leq c\|\nabla u\|_{H^1}^2
$$

avec c une constante positive.

En rappelant les estimations (3.11)-(3.12) qu'on multiplie par des constantes appropriées, on obtient, en les adjoignant aux inégalités (3.38)-(3.39) dans lesquelles on choisit convenablement ϵ, les estimations suivantes :

$$
\begin{aligned}
&\|\sqrt{\rho}\,\nabla\sigma(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \Big(\|\nabla\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla\sigma\|_{L^2}^2\Big)\,\mathrm{d}s \leq \\
&\leq c\Big(\|\sqrt{\rho_0}\,\nabla\sigma_0\|_{L^2}^2 + \|\sqrt{\rho_0}\,\nabla u_0\|_{L^2}^2\Big) + \\
&\quad + c\int_0^t (\exp 2\|\sigma\|_{L^\infty})\,\mathcal{D}(s)\big(\mathcal{L}_0(s) + \mathcal{L}_0^{1/2}(s)\big)\,\mathrm{d}s + \\
&\quad + c_4\int_0^t (\exp 2\|\sigma\|_{L^\infty})\,\Big(\|\sqrt{\rho}\,\partial_t u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\sigma'\|_{L^2(\Omega')}^2\Big)\,\mathrm{d}s
\end{aligned}
\tag{3.40}
$$

$$\begin{aligned}
&\|\sqrt{\rho}\,\nabla\nabla\sigma(t)\|_{L^2}^2+\int_0^t\left(\|\nabla\nabla\nabla u\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}s+\|\nabla\nabla\sigma\|_{L^2}^2\right)\mathrm{d}s\leq\\
&\leq c\Big(\|\sqrt{\rho_0}\,\nabla\nabla\sigma_0\|_{L^2}^2+\|\sqrt{\rho_0}\,\nabla\nabla u_0\|_{L^2}^2\Big)+\\
&\quad+c\int_0^t(\exp 2\|\sigma\|_{L^\infty})\,\mathcal{D}(s)(\mathcal{L}_0(s)+\mathcal{L}_0^{1/2}(s))\,\mathrm{d}s+\\
&\quad+c_5\int_0^t(\exp 3\|\sigma\|_{L^\infty})\times\\
&\qquad\times\left(\|\sqrt{\rho}\,\partial_t u\|_{L^2}^2+\|\sqrt{\rho}\,\nabla\partial_t u\|_{L^2}^2+\|\nabla\sigma\|_{L^2}^2+\|\nabla u\|_{H^1}^2\right)\mathrm{d}s,
\end{aligned}\tag{3.41}$$

où c_4 et c_5 sont des constantes ne dépendant que de μ, λ, Φ et de $\partial\Omega$.

4. Solution locale et solution globale

THÉORÈME 4.1 (Solution locale). — *Soit Ω un domaine extérieur de classe C^3. Si on suppose les hypothèses (1.8)-(1.9) et si on a*

$$u_0\in H^2(\Omega)\,,\quad \sigma_0\in H^2(\Omega)\,,\tag{4.1}$$

alors il existe un $T'>0$ tel que les équations (1.1)-(1.3) avec les conditions (1.4) admettent dans l'intervalle $[\,0\,,T'\,]$ une solution et une seule dans la classe

$$u\in L^\infty(0,T';H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))\cap L^2(0,T';H^3(\Omega))\tag{4.2}$$

$$\sigma\in L^\infty(0,T';H^2(\Omega))\,.\tag{4.3}$$

Remarque. — L'intervalle $[\,0\,,T'\,]$ mentionné dans l'énoncé du théorème 4.1 dépend de u_0 et σ_0. Mais, les raisonnements qui nous ont conduit au théorème 4.1 nous ont permis de déterminer $T'>0$ comme fonction d'un nombre positif M de telle sorte que la solution subsiste au moins dans $[\,0\,,T'\,]$ quelque soient les données initiales u_0,σ_0 vérifiant

$$\|u_0\|_{H^2}+\|\sigma_0\|_{H^2}\leq M\,.$$

Démonstration. — On le démontre de la même manière que le théorème 4.1 de [3] (pour les détails voir [3]). □

THÉORÈME 4.2 (Solution globale). — *Si, outre les hypothèses du théorème 4.1, on suppose que les normes $\|u_0\|_{H^2}$ et $\|\sigma_0\|_{H^2}$ sont suffisamment petites, alors les équations (1.1)-(1.3) admettent une solution (u, σ) et une seule dans la classe*

$$u \in L^\infty(0, \infty; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)), \quad \nabla u \in L^2(0, \infty; H^2(\Omega)), \tag{4.4}$$

$$\sigma \in L^\infty(0, \infty; H^2(\Omega)), \quad \nabla\sigma \in L^2(0, \infty; H^1(\Omega)). \tag{4.5}$$

Démonstration. — Le théorème 4.2 résultera du théorème 4.1, si nous démontrons une estimation a priori en vertu de laquelle les normes $\|u(t)\|_{H^2}$ et $\|\sigma(t)\|_{H^2}$ restent uniformément bornées pour tout $t \in [0, \infty[$. En effet, si elles restent bornées pour tout t par une même constante, le théorème 4.1 implique que la solution (u, σ) peut être prolongée à l'intervalle $[t, t + T'[$ (voir la remarque au théorème 4.1) et en réitérant cette procédure, on peut prolonger (u, σ) à tout l'intervalle $[0, \infty[$.

À cette fin, on introduit la fonction $\mathcal{L}(t)$; on pose en effet

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t) = k_1\|\sqrt{\rho}\,u\|_{L^2}^2 + \frac{\mu}{2}k_2\|\nabla u\|_{L^2}^2 + k_4\|\sqrt{\rho}\,\nabla\sigma\|_{L^2}^2 + k_5\|Au\|_{L^2}^2 + \\ + k_6\|\sqrt{\rho}\,\nabla\nabla\sigma\|_{L^2}^2 + k_1 I_1 + k_2 I_2 + k_5 I_3,\end{aligned} \tag{4.6}$$

où

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_\Omega \rho_{\mathrm{eq}}(\sigma e^\sigma - e^\sigma + 1) \\ I_2 &= \int_\Omega (\rho u)\cdot\nabla\sigma \\ I_3 &= \int_\Omega \rho(Au)\cdot\nabla\sigma, \end{aligned} \tag{4.7}$$

tandis que k_i $(i = 1, \dots, 6)$ sont des constantes à déterminer convenablement. Elles seront définies par les relations (4.11)-(4.16).

On veut en effet choisir les constantes k_i $(i = 1, \dots, 6)$ de sorte que, sous l'hypothèse (3.4) et l'hypothèse

$$\|\sigma\|_{L^\infty(0,\infty;L^\infty)} \le \delta_1 \tag{4.8}$$

avec une constante positive δ_1, on ait,

$$\mathcal{L}(t) \ge 0, \tag{4.9}$$

$$\mathcal{L}(t) + \alpha \int_0^t \mathcal{D}(s)\, ds \leq \mathcal{L}(0) + \beta \int_0^t \mathcal{D}(s)\big(\mathcal{L}(s) + \mathcal{L}^{1/2}(s)\big)\, ds\,, \tag{4.10}$$

avec deux constantes positives α et β ne dépendant que de δ_1 outre les constantes données du problème.

Nous nous proposons de déterminer les constantes k_i $(i = 1, \ldots, 6)$ par les relations suivantes :

$$k_6 = 1 \tag{4.11}$$

$$k_5 = 1 + c_5 \exp 2\delta_1 \tag{4.12}$$

$$k_4 = 1 + \max\big(c_6 k_5, (c_3 k_5 + c_5 k_6) \exp 3\delta_1\big) \tag{4.13}$$

$$k_3 = 1 + c_4 \exp 2\delta_1 \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned} k_2 = 1 &+ c_2 k_3 \exp 2\delta_1 + c_4 k_4 \exp 2\delta_1 + c_3 k_5 \exp \delta_1 + \\ &+ c_5 k_6 \exp 3\delta_1 \end{aligned} \tag{4.15}$$

$$k_1 = 1 + \max(\widetilde{K}, k_2^2/k_4) \tag{4.16}$$

avec

$$\widetilde{K} = k_2 c_1 \exp \delta_1 + k_3 c_2 \exp 2\delta_1 + k_4 c_4 \exp 2\delta_1 + k_5 c_3 \exp \delta_1 + k_6 c_5 \exp 3\delta_1\,.$$

(c_i, $i = 1, \ldots, 5$, sont les constantes figurant dans (3.5)-(3.8) et (3.40)-(3.41), tandis que c_6 est donnée dans (4.19)).

Pour montrer (4.9), on remarque d'abord que

$$c\|\sigma\|_{L^2}^2 \leq I_1 \leq c'\|\sigma\|_{L^2}^2 \tag{4.17}\,,$$

qui résulte immédiatement de (1.3), de (1.9), de (4.8) et de la relation évidente

$$\frac{1}{2}\, r^2 \leq re^r - e^r + 1 \leq r^2 \exp|r|\,, \quad \forall\, r \in \mathbb{R}\,.$$

D'autre part, on voit aisément que, sous l'hypothèse (4.8), on a

$$|I_2| \leq \frac{k_4}{2k_2}\, \|\sqrt{\rho}\,\nabla\sigma\|_{L^2}^2 + \frac{k_2}{2k_4}\, \|\sqrt{\rho}\,u\|_{L^2}^2 \tag{4.18}$$

$$|I_3| \leq \frac{1}{4}\, \|Au\|_{L^2}^2 + c_6\|\sqrt{\rho}\,\nabla\sigma\|_{L^2}^2\,. \tag{4.19}$$

Si on rappelle la definition de $\mathcal{L}(t)$ (voir (4.6)-(4.7), (4.11)-(4.16)), on voit aisément que les inégalités (4.18)-(4.19) entraînent (4.9).

Ces relations impliquent, en outre (voir aussi le lemme 2.1), qu'il existe deux constantes positives ν_1 et ν_2 telles que

$$\nu_1 \left(\left\| u(t) \right\|_{H^2}^2 + \left\| \sigma(t) \right\|_{H^2}^2 \right) \leq \mathcal{L}(t) \leq \nu_2 \left(\left\| u(t) \right\|_{H^2}^2 + \left\| \sigma(t) \right\|_{H^2}^2 \right) . \quad (4.20)$$

En outre, en sommant les inégalités (3.5)-(3.7), (3.40), (3.8) et (3.41) multipliées respectivement par les constantes k_i $(i = 1, \ldots, 6)$ données dans (4.11)-(4.16), on obtient immédiatement l'inégalité (4.10) avec deux constantes α et β.

Or, en vertu de (4.20), on a

$$\left\| \nabla \sigma(t) \right\|_{L^3}^2 \leq c \mathcal{L}(t) , \quad \left\| \sigma(t) \right\|_{L^\infty}^2 \leq c' \mathcal{L}(t) \qquad (4.21)$$

avec deux constantes positives c et c'.

On suppose maintenant que

$$\mathcal{L}(0) < \min \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{1}{2} \Big(1 - \sqrt{1 + \frac{4\alpha}{\beta}} \Big), \frac{\delta_0^2}{c'}, \frac{\delta_1^2}{c} \right) . \qquad (4.22)$$

Alors, comme on a

$$\beta(r + \sqrt{r}) < \alpha \quad \text{pour } r \in \left[0 \, , \, \frac{\alpha}{\beta} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{4\alpha}{\beta}} \right[,$$

on déduit de (4.10) que

$$\mathcal{L}(t) \leq \mathcal{L}(0) , \quad \forall t > 0 . \qquad (4.23)$$

Il résulte des relations (4.21)-(4.23) que

$$\left\| \nabla \sigma \right\|_{L^\infty(0,\infty;L^3)} \leq \delta_0 , \quad \left\| \sigma \right\|_{L^\infty(0,\infty;L^\infty)} \leq \delta_1 , \qquad (4.24)$$

c'est-à-dire que les hypothèses (3.4) et (4.8) sont vérifiées.

Donc, maintenant on peut dire que (4.22) entraîne (4.23) sans les hypothèses (3.4) et (4.8). Par conséquent, en vertu de (4.20), sous l'hypothèse (4.22) on obtient l'estimation a priori

$$\left\| u(t) \right\|_{H^2}^2 + \left\| \sigma(t) \right\|_{H^2}^2 \leq \frac{1}{\nu_1} \mathcal{L}(0)$$

pour tout $t \in [\,0 \, , \infty \,[$, ce qui, d'après le théorème 4.1, nous permet de prolonger la solution (u, σ) dans tout l'intervalle $[\,0 \, , \infty \,[$.

Finalement, comme

$$\alpha - \beta\mathcal{L}(t) + \mathcal{L}^{1/2}(t) \geq \gamma > 0$$

(voir (4.22)-(4.23)), on déduit de (4.10) (voir aussi (3.2)) que

$$\mathcal{D}(\cdot) \in L^1(0, \infty),$$

c'est-à-dire que (u, σ) appartient à la classe donnée par (4.4)-(4.5).

L'unicité de la solution résulte du théorème 4.1, ce qui achève la démonstration du théorème 4.2. □

Remerciements

Je tiens à remercier le professeur H. Fujita Yashima pour les discussions très utiles que j'ai eues avec lui.

Références

[1] AGMON (S.), DOUGLIS (A.) et NIRENBERG (L.) .— *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions*, I, Comm. Pure Appl. Math. **12** (1959), pp. 623-727.

[2] BENABIDALLAH (R.) .— *Solution globale de l'équation d'un gaz visqueux isotherme dans l'espace entier avec une grande force extérieure dérivant d'un potentiel*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **94** (1995), pp. 245-274.

[3] BENABIDALLAH (R.) .— *Solution globale de l'équation d'un gaz visqueux isotherme dans le demi-espace avec une grande force extérieure dérivant d'un potentiel*, J. Math. Kyoto. Univ. **38**, n° 1 (1998), pp. 1-20.

[4] BENABIDALLAH (R.) et FUJITA YASHIMA (H.) .— *Solution locale pour l'équation d'un gaz visqueux isotherme*, Rend. Accad. Naz. Sci. dei XL, **17** (1993), pp. 49-81.

[5] BREZIS (H.) .— *Analyse fonctionnelle – Théorie et applications*, Masson (Paris) (1983).

[6] CATTABRIGA (L.) .— *Su un problema al contorno relativo al sistema di equazioni di Stokes*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **31** (1961), pp. 308-340.

[7] LADYZHENSKAYA (O. A.) .— *The mathematical theory of viscous incompressible flow*, Gordon and Breach (New-York, Londre, Paris) 1969.

[8] MATSUMURA (A.) et NISHIDA (T.) .— *The initial value problem for the equation of a motion viscous and heat-conducting gases*, J. Math. Kyoto Univ. **20** (1980), pp. 67-104.

[9] MATSUMURA (A.) et NISHIDA (T.) .— *Initial boundary value problems for the equations of motion compressible viscous and heat-conducting fluids*, Comm. Math. Phys. **89** (1983), pp. 445-464.

[10] MATSUMURA(A.) et PADULA (M.) .— *Stability of stationary of compressible fluids subject to large external potential forces*, Stab. Anal. Cont. Media. **2** (1992), pp. 183-202.