Annales de la faculté des sciences de Toulouse

Luis Gustavo Mendes
Marcos Sebastiani

Une propriété des surfaces rationnelles

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 7, nº 3 (1998), p. 549-550
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1998_6_7_3_549_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. VII, n° 4, 1998

Une propriété des surfaces rationnelles(*)

LUIS GUSTAVO MENDES(1) et MARCOS SEBASTIANI(2)

RÉSUMÉ. — Un résultat de résolution des singularités de feuilletages holomorphes dans le plan projectif est appliqué à l'élimination des indéterminations des applications rationnelles.

ABSTRACT. — A theorem of reduction of singularities of holomorphic foliations in the projective plane is applied to the elimination of indeterminations of rational maps.

Dans ce qui suit, "surface" veut dire : surface algébrique (projective), compacte, complexe, connexe et non singulière.

Dans cette note nous montrons comment les résultats de M. Carnicer [1] sur les systèmes de Pfaff analytiques de dimensions 1 sur le plan projectif CP^2 impliquent le théorème suivant.

THÉORÈME 1. — *Soit M une surface rationnelle. Alors il existe un ensemble fini $p_1, \ldots, p_k$ de points de CP^2 ($p_i \neq p_j$ si $i \neq j$) tel que M est dominée par la surface obtenue en éclatant une fois chaque point p_j, $j = 1, \ldots, k$.*

Une autre démonstration de ce théorème, basée sur un principe différent, a été obtenue par A. Beauville [2].

THÉORÈME 2. — *Soit Ω un système de Pfaff n'ayant que des singularités isolées sur CP^2. Alors il existe une transformation birationnelle $T : \mathrm{CP}^2 \to \mathrm{CP}^2$ tel que les singularités du transformé strict de Ω par T, $T^*(\Omega)$, sont ou bien irréductibles ou bien des singularités qui disparaissent après un éclatement. De plus, T^{-1} ne contracte à un point aucune courbe algébrique qui soit une séparatrice de Ω.*

(*) Reçu le 22 mai 1997, accepté le 30 septembre 1997

(1) I.M.P.A. Estrada Dona Castorina, 110, Rio de Janeiro RJ-CEP 22460 Brésil

(2) Rua Dario Pederneiras, 610/42 Porto Alegre, RS-CEP 90630-090 Brésil

Pour la preuve voir [1].

Preuve du théorème 1.— Soit $Q : \mathrm{CP}^2 \to M$ une transformation birationnelle. Il suffira de démontrer qu'il existe une transformation birationnelle $T : \mathrm{CP}^2 \to \mathrm{CP}^2$ telle que toutes les singularités de $Q \circ T$ disparaissent en éclatant chacun des points singuliers $Q \circ T$.

Soit $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_r$ les courbes de M qui se contractent en un point par Q^{-1}. On construit facilement une fonction rationnelle α sur M telle que :

i) aucune des $\mathcal{C}_j$ ne soit un pôle de α;

ii) $\alpha\big|_{\mathcal{C}_j}$ ne soit pas constante, $j = 1, \ldots, r$.

En particulier, aucune des $\mathcal{C}_j$ ne soit pas une séparatrice du système de Pfaff avec singularités isolées Γ associé à l'équation $d\alpha = 0$.

Soit $\Omega = Q^*(\Gamma)$. D'après le théorème 2, il existe $T : \mathrm{CP}^2 \to \mathrm{CP}^2$ birationnelle telle que $T^*(\Omega)$ n'a que des singularités ou bien irréductibles ou bien qui disparaissent après un éclatement. De plus, T^{-1} ne contracte à un point aucune séparatrice de Ω.

Soit $\Pi : S \to \mathrm{CP}^2$ l'éclatement de chacune des singularités non irréductibles de $T^*(\Omega)$. Alors $\Pi^*\big(T^*(\Omega)\big)$ n'a que des singularités irréductibles.

Nous allons démontrer que $F = Q \circ T \circ \Pi : S \to M$ est un morphisme, c'est-à-dire M est dominée par S.

Si F n'est pas un morphisme, il existe une courbe $\mathcal{C} \subset M$ qui se contracte en un point par F^{-1}.

Si $\mathcal{C}$ est une séparatrice de Γ, alors $\mathcal{C} \neq \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_r$ et donc $Q^{-1}(\mathcal{C})$ est une courbe séparatrice de Ω. Donc $T^{-1}\big(Q^{-1}(\mathcal{C})\big)$ est une courbe. Alors $\Pi^{-1}\big(T^{-1}\big(Q^{-1}(\mathcal{C})\big)\big)$ est aussi une courbe : contradiction.

Si $\mathcal{C}$ n'est pas une séparatrice de Γ, alors il existe une infinité de germes analytiques de séparatrices de $F^*(\Gamma) = \Pi^*\big(T^*(\Omega)\big)$ passant par $p = F^{-1}(\mathcal{C})$, $p \in S$ (images par F^{-1} des germes de séparatrices de Γ transverses en $\mathcal{C}$). Mais alors p serait une singularité non irréductible de $\Pi^*\big(T^*(\Omega)\big)$: contradiction. □

Références

[1] CARNICER (M.) .— *Cremona transformations and foliations on the complex projectives plane*, Singularity theory, Trieste (1991), pp. 153-172; World Sci. Plublishing, River Edge, New Jersey (1995).

[2] BEAUVILLE (A.) Lettre à l'un des auteurs.