EMMANUEL MAZZILLI

Équation de Cauchy-Riemann dans les ellipsoïdes réels de $\mathbf{C}^n$

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 7, nº 3 (1998), p. 527-548

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1998_6_7_3_527_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. VII, n° 3, 1998

Équation de Cauchy–Riemann dans les ellipsoïdes réels de $\mathbb{C}^n$ (*)

EMMANUEL MAZZILLI[(1)]

RÉSUMÉ. — Dans cet article nous résolvons l'équation de Cauchy–Riemann $\bar\partial u = f$ dans les ellipsoïdes réels. Nous donnons les estimations L^p optimales pour les solutions. Dans [3], Chen–Krantz–Ma ont obtenu ce résultat dans les ellipsoïdes complexes; pour cela, ils utilisaient le type faible pour les opérateurs. Dans ce travail nous utilisons des techniques plus élémentaires. Pour obtenir les estimations optimales nous n'utilisons pas, comme fonction support, l'équation du plan tangent complexe mais la fonction support construite par Diederich–Fornaess–Wiegerinck dans [4].

ABSTRACT. — In this paper we solve the Cauchy–Riemann equation $\bar\partial u = f$ in real ellipsoids. We give L^p optimal estimation for solutions. In [3], Chen–Krantz–Ma obtained this result in complex ellipsoids; for this, they used weak type for operators. In this work, we don't use weak type but much more elementary technics. To have optimal estimation we don't use, for support function, the equation of complex tangent space like in [3], but the support function construct by Diederich–Fornaess–Wiegerinck in [4] .

MOTS-CLÉS : Équation de Cauchy–Riemann, domaines pseudoconvexes, représentations intégrales, ordre de contact.

AMS Classification : 32A 25, 32A 40, 32F 15, 32F 20

0. Introduction

Les estimations L^p pour l'équation $\bar\partial u = f$ sont étudiées depuis longtemps. Pour les domaines strictement pseudoconvexes, les estimations L^p

(*) Reçu le 11 décembre 1996, accepté le 25 mars 1997

(1) Laboratoire de Géométrie, Analyse et Topologie, C.N.R.S. U.R.A. D751, Université Lille I, F-59655 Villeneuve-d'Ascq Cedex (France)
E-mail : mazzilli@gat.univ-lille1.fr

optimales ont été obtenues par Krantz dans [6]. Pour les domaines faiblement pseudoconvexes, des résultats optimaux n'ont été obtenus que dans $\mathbb{C}^2$, par exemple par Chen dans [2]. Dans $\mathbb{C}^n$, les choses sont plus délicates et les seuls résultats optimaux connus sont ceux obtenus dans les ellipsoïdes complexes (voir [3]); ici nous nous intéressons aux ellipsoïdes réels. Citons également un résultat de Polking dans [7], où il construit une solution intégrale de $\overline{\partial} u = f$ dans les domaines convexes de $\mathbb{C}^n$, obtenant ainsi des résultats optimaux pour f une $(0, n-1)$-forme. Nous construisons une solution intégrale de $\overline{\partial} u = f$ à l'aide des formules de Berndtsson Andersson de [1]. À la différence de Chen–Krantz–Ma dans [3], nous n'utilisons pas le type faible, mais nous montrons que les inégalités de Young classiques restent valables malgré des chutes logarithmiques. L'avantage de ces techniques est de pouvoir obtenir l'estimation exacte pour $f \in L^1(\Omega)$. Ainsi, nous pouvons améliorer l'estimation, pour $f \in L^1(\Omega)$, donnée dans [3]. Nos résultats sont résumés par le théorème suivant.

THÉORÈME. — *Soient $n_1, \dots, n_n, m_1, \dots, m_n$ des entiers positifs et Ω l'ellipsoïde réel :*

$$\Omega = \Big\{ z_j = x_j + i y_j \in \mathbb{C}^n \mid \\ |x_1|^{2n_1} + |y_1|^{2m_1} + \cdots + |x_n|^{2n_n} + |y_n|^{2m_n} < 1 \Big\}.$$

Soit f une $(0,1)$-forme à coefficients dans $L^p(\Omega)$ telle que $\overline{\partial} f = 0$ au sens des distributions. Alors, il existe une fonction u sur Ω telle que $\overline{\partial} u = f$ au sens des distributions avec :

(i) si $1 \le p < Mn + 2$, on a

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \le C_p \|f\|_{L^p(\Omega)}$$

avec $1/q = 1/p - 1/(Mn+2)$;

(ii) si $p = Mn + 2$, on a

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \le C_q \|f\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall\, q < +\infty ;$$

(iii) si $p > Mn + 2$, on a

$$\|u\|_{\Lambda_\alpha(\Omega)} \le C_p \|f\|_{L^p(\Omega)}, \quad \alpha = \frac{1}{M} - \frac{(n + 2/M)}{p}$$

où $M = 2 \sup_{1 \le i \le n} (\inf(n_i, m_i))$.

1. Construction de la solution intégrale

Pour construire une solution intégrale, nous allons utiliser les formules de Berndtsson–Andersson et le résultat essentiel figurant dans [1].

THÉORÈME 1 (Berndtsson, Andersson). — *Soit f une $(0,q)$-forme avec $q > 0$, dans $C^1(\overline{D})$, où D est un domaine borné régulier de $\mathbb{C}^n$, alors nous avons :*

$$f(z) = C_{q,n}\left(\int_{\partial D} f \wedge K_q + (-1)^{q+1}\left(\int_D \overline{\partial} f \wedge K_q - \overline{\partial}_z \int_D f \wedge K_{q-1}\right)\right)$$

pour $z \in D$, avec

$$K = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!}\, \frac{G^{(k)}\Big(\langle \widetilde{Q}\,,\, z-\zeta\rangle + 1\Big) s \wedge \big(\overline{\partial}_{\zeta,z} s\big)^{n-1-k} \wedge \big(\overline{\partial}_\zeta Q\big)^k}{\langle \tilde{s}\,,\, \zeta - z\rangle^{n-k}}\,.$$

K_q désigne la composante de bidegrés $(n, n-q-1)$ en ζ et de bidegrés $(0,q)$ en z. De plus, $Q = \sum_{j=1}^n \widetilde{Q}_j\, \mathrm{d}\zeta_j$, où

$$\widetilde{Q} : \overline{D} \times \overline{D} \longrightarrow \mathbb{C}^n$$
$$(\zeta, z) \longmapsto (\widetilde{Q}_1(\zeta, z), \ldots, \widetilde{Q}_n(\zeta, z))$$

et vérifie

(i) $\widetilde{Q} \in C^1(\overline{D} \times \overline{D})$,

(ii) $\widetilde{Q}$ est holomorphe en $z \in D$, pour ζ fixé dans $\overline{D}$;

$s = \sum_{j=1}^n \tilde{s}_j\, \mathrm{d}\zeta_j$ *où*

$$\tilde{s} : \overline{D} \times \overline{D} \longrightarrow \mathbb{C}^n$$
$$(\zeta, z) \mapsto (\tilde{s}_1(\zeta, z), \ldots, \tilde{s}_n(\zeta, z))$$

et vérifie

$$\big|s(\zeta, z)\big| \le C\big|\zeta - z\big| \quad \textit{et} \quad \Big|\big\langle s\,,\, \zeta - z\big\rangle\Big| \ge C\big|\zeta - z\big|^2$$

uniformément pour $\zeta \in \overline{D}$ et z dans un sous-ensemble compact de D.

G désigne une fonction holomorphe d'une variable complexe dans un domaine simplement connexe qui contient l'image de $\overline{D}\times\overline{D}$ par l'application

$$(\zeta, z) \mapsto \langle \widetilde{Q}\,,\, z-\zeta\rangle + 1 = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{Q}_i(z_i - \zeta_i) + 1$$

avec $G(1) = 1$.

La preuve du théorème figure intégralement dans [1].

D'après ce qui précède, si f est une $(0,1)$-forme $\overline{\partial}$ fermée à coefficients dans C^1 sur $\overline{D}$, nous avons

$$f(z) = C_n\left(\int_{\partial D} f\wedge K_1 - \overline{\partial}_z \int_D f\wedge K_0\right),$$

pour le choix de s nous prenons

$$s = \sum_{i=1}^{n} (\overline{\zeta}_i - \overline{z}_i)\,\mathrm{d}\zeta_i\,,$$

quant au choix de Q dans l'ellipsoïde réel, nous avons besoin des lemmes suivants figurant dans [4].

LEMME 1.1.— *Soit $p\in\mathbb{N}^*$. Pour tout $(t,\tau)\in\mathbb{R}^2$, on a*

$$2p\tau^{2p-1}(t-\tau) + \tau^{2p} \le t^{2p}$$

et de plus, il existe $\delta > 0$ tel que, $\forall\,(t,\zeta)\in\mathbb{R}^2$, on a

$$t^{2p} - \tau^{2p} - 2p\tau^{2p-1}(t-\tau) \ge \delta\left(\tau^{2p-2}(t-\tau)^2 + (t-\tau)^{2p}\right).$$

La preuve de ce résultat est donnée intégralement dans [4].

LEMME 1.2.— *Soit*

$$\Omega = \left\{ z_j = x_j + iy_j \in \mathbb{C}^n \;\middle|\; \rho(z) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^{2n_i} + |y_i|^{2m_i} - 1 < 0 \right\}.$$

On peut supposer, sans perte de généralité, que $m_i \le n_i$, $\forall\, i\in\{1,\ldots,n\}$ à l'aide d'un biholomorphisme approprié. Pour ν assez petit, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$2\Re(\phi(\zeta,z)) \le$$

$$\le \rho(z) - \rho(\zeta) - \varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n} (\delta_i^{2n_i-2} + \eta_i^{2m_i-2})|z_i-\zeta_i|^2 + |z_i-\zeta_i|^{2m_i}\right),$$

pour $(\zeta, z) \in \overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$, *où*

$$\phi(\zeta, z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \rho}{\partial \zeta_i}(\zeta)(z_i - \zeta_i) + \\ - \nu \sum_{i=1}^{n} \Big((\eta_i^{2m_i-2} - \delta_i^{2n_i-2})(z_i - \zeta_i)^2 + (z_i - \zeta_i)^{2m_i} \Big)$$

avec $\zeta_i = \delta_i + i\eta_i$.

Preuve.— Ce lemme a été démontré précédemment par Diederich, Fornaess et Wiegerinck pour $(\zeta, z) \in \partial\Omega \times \overline{\Omega}$. Dans ce qui suit, nous l'utiliserons pour $(\zeta, z) \in \overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$; nous en donnons donc une preuve qui est essentiellement la même que celle figurant dans [4].

$$2\Re\phi(\zeta, z) = \sum_{i=1}^{n} \Bigg((2n_i\delta_i^{2n_i-1}(x_i - \delta_i) + 2m_i\eta_i^{2m_i-1}(y_i - \eta_i)) + \\ - 2\nu \Big((\eta_i^{2m_i-2} - \delta_i^{2n_i-2})\big((x_i - \delta_i)^2 - (y_i - \eta_i)^2\big) \Big) + \\ - 2\nu \Re(\zeta_i - z_i)^{2m_i} \Bigg)$$

d'où

$$2\Re\phi(\zeta, z) = \rho(z) - \rho(\zeta) + \sum_{i=1}^{n} \Bigg((\delta_i^{2n_i} - x_i^{2n_i} + 2n_i\delta_i^{2n_i-1}(x_i - \delta_i)) + \\ + (\eta_i^{2m_i} - y_i^{2m_i} + 2m_i\eta_i^{2m_i-1}(y_i - \eta_i)) + \\ - 2\nu(\eta_i^{2m_i-2} - \delta_i^{2n_i-2})\big((x_i - \delta_i)^2 - (y_i - \eta_i)^2\big) + \\ - 2\nu\Re(z_i - \zeta_i)^{2m_i} \Bigg).$$

En appliquant le lemme 1.1, on obtient $\delta > 0$ tel que

$$2\Re\phi(\zeta, z) \le \rho(z) - \rho(\zeta) - \sum_{i=1}^{n} \delta \Big(\delta_i^{2n_i-2}(x_i - \delta_i)^2 + (x_i - \delta_i)^{2n_i} + \\ + \eta_i^{2m_i-2}(y_i - \eta_i)^2 + (y_i - \eta_i)^{2m_i} \Big) + \\ + 2\nu\Big(\eta_i^{2m_i-2}(x_i - \delta_i)^2 + \delta_i^{2n_i-2}(y_i - \eta_i)^2\Big) - \nu A_i$$

où

$$A_i = 2\Big(\eta_i^{2m_i-2}(y_i-\eta_i)^2 + \delta_i^{2n_i-2}(x_i-\delta_i)^2 - \Re(z_i-\zeta_i)^{2m_i}\Big).$$

Le seul terme qui peut être positif est νA_i ; remarquons que les termes

$$-\nu\eta_i^{2m_i-2}(y_i-\eta_i)^2 - \nu\delta_i^{2n_i-2}(x_i-\delta_i)^2$$

seront absorbés par

$$\delta\delta_i^{2n_i-2}(x_i-\delta_i)^2 \quad \text{et} \quad \delta\eta_i^{2m_i-2}(y_i-\eta_i)^2,$$

si $2\nu < \delta$. Soit

$$\Gamma_\sigma = \Big\{(z,\zeta)/\big|y_i-\eta_i\big| \le \sigma\big|x_i-\delta_i\big|\Big\}$$

pour σ assez petit. Si $(\zeta,z)\in\Gamma_\sigma$, le terme réel $(z_i-\zeta_i)^{2m_i}$ est positif pour tout i donc le lemme est vérifié pour $\nu<\delta$ et $(\zeta,z)\in\Gamma_\sigma$. Si $(\zeta,z)\notin\Gamma_\sigma$, alors il existe i tel que $\big|y_i-\eta_i\big| \ge \sigma\big|x_i-\delta_i\big|$, d'où

$$\Big|\Re(z_i-\zeta_i)^{2m_i}\Big| \le C\big|y_i-\eta_i\big|^{2m_i}$$

avec C ne dépendant pas de (ζ,z) ; il vient donc que $\nu\Re(z_i-\zeta_i)^{2m_i}$ est absorbé par $\delta(y_i-\eta_i)^{2m_i}$ si ν est assez petit.

Maintenant posons :

$$\begin{cases} Q_\varepsilon = \dfrac{1}{\rho(\zeta)-\varepsilon}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\bigg(\frac{\partial\rho}{\partial\zeta_i}(\zeta) + \\ \qquad -\nu\Big(\big(\eta_i^{2m_i-2}-\delta_i^{2n_i-2}\big)(z_i-\zeta_i)+(z_i-\zeta_i)^{2m_i-1}\Big)\bigg)\,\mathrm{d}\zeta_i\,, \\ G=\alpha^{-N}\,,\ \text{où } N \text{ est un réel positif fixé pour tout ce qui suit,} \\ s=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(\overline{\zeta}_i-\overline{z}_i)\,\mathrm{d}\zeta_i\,; \end{cases}$$

en appliquant le théorème 1, on obtient

$$\forall\,\varepsilon>0\,,\quad f(z)=C_n\Big(\int_{\partial D} f\wedge K_1^\varepsilon - \overline{\partial}_z\int_D f\wedge K_0^\varepsilon\Big)\,,\quad \forall\,z\in D\,;$$

en faisant tendre ε vers zéro, nous avons

$$f(z) = -\overline{\partial}_z \int_D f \wedge K_0$$

où

$$K_0 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!} G^{(k)}\Big(\langle \widetilde{Q}_0\,, z-\zeta\rangle + 1\Big) \frac{s \wedge \big(\overline{\partial}_\zeta s\big)^{n-1-k} \big(\overline{\partial}_\zeta Q_0\big)^k}{\langle \tilde{s}\,, \zeta - z\rangle^{n-k}}$$

(pour plus de détails voir [1]). Par la suite nous omettrons l'indice pour Q_0 et $\widetilde{Q}_0$.

2. Démonstration du théorème

LEMME 2.1.— *Soit $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \rho(z) < 0\}$, où ρ est une fonction de classe C^2 sur $\overline{\Omega}$, soit $K(\zeta, z)$ une application de $\Omega \times \Omega$ dans $\mathbb{C}$, avec $K(\zeta, z)$ mesurable par rapport au produit d'une mesure positive sur Ω $\lambda(\zeta)$ et de $\nu(z)$ une autre mesure positive sur Ω. Alors s'il existe $r > 1$ tel que :*

(i) $\displaystyle\int_\Omega \big|K(\zeta, \cdot\,)\big|^r \big|\rho(z)\big|^{-\varepsilon} \,\mathrm{d}\nu(z) \ \leq\ C_\varepsilon \big|\rho(\zeta)\big|^{-\varepsilon}$ *pour tout ε assez petit et pour $\zeta \in \Omega$,*

(ii) $\displaystyle\int_\Omega \big|K(\,\cdot\,, z)\big|^r \big|\rho(\zeta)\big|^{-\varepsilon} \,\mathrm{d}\lambda(\zeta) \ \leq\ C_\varepsilon \big|\rho(z)\big|^{-\varepsilon}$, *pour tout ε assez petit et pour $z \in \Omega$,*

$$\forall i\,,\ 1 < i < r\,, \quad \int_\Omega \big|K(\,\cdot\,, z)\big|^i \,\mathrm{d}\lambda(\zeta) < C\,, \quad \textit{uniformément en } z \in \Omega\,,$$

l'opérateur linéaire T défini de la façon suivante,

$$Tf(z) := \int_\Omega f(\zeta) K(\zeta, z)\,\mathrm{d}\lambda(\zeta)$$

vérifie :

(i) *pour $1 < p < r/(r-1)$,*

$$\big\|Tf\big\|_{L^q(\Omega,\,\mathrm{d}\nu)} \leq C_p \big\|f\big\|_{L^p(\Omega,\,\mathrm{d}\lambda)}\,,$$

avec $1/q = 1/p + 1/r - 1$,

(ii) pour $p = r/(r-1)$,

$$\|Tf\|_{L^q(\Omega,\,\mathrm{d}\nu)} \leq C_q \|f\|_{L^p(\Omega,\,\mathrm{d}\lambda)}, \quad \forall q,\ 1 < q < +\infty,$$

(iii) pour $p > r/(r-1)$,

$$\|Tf\|_{L^\infty(\Omega,\,\mathrm{d}\nu)} \leq C_p \|f\|_{L^p(\Omega,\,\mathrm{d}\lambda)}.$$

Preuve.— Considérons $1 < p < r/(r-1)$,

$$\begin{aligned} |Tf(z)| &\leq \int_\Omega |f(\zeta)K(\zeta,z)|\,\mathrm{d}\lambda(\zeta) \\ &\leq \int_\Omega \left|\rho(\zeta)^\varepsilon f(\zeta)^p K(\zeta,z)^r\right|^{1/q} \left|K(\zeta,z)\rho(\zeta)^{\frac{-\varepsilon}{1-(r/q)q}}\right|^{1-r/q} \times \\ &\quad \times |f(\zeta)|^{1-p/q}\,\mathrm{d}\lambda(\zeta)\,; \end{aligned}$$

nous avons

$$\frac{1}{q} + \frac{p-1}{p} + \frac{r-1}{r} = 1.$$

Appliquons l'inégalité de Hölder; il vient

$$\begin{aligned} |Tf(z)|^q \leq &\left(\int_\Omega \left|\rho(\zeta)^\varepsilon f(\zeta)^p K(\zeta,z)^r\right| \mathrm{d}\lambda(\zeta)\right) \times \\ &\times \left(\int_\Omega |\rho(\zeta)|^{\frac{-\varepsilon}{q(1-1/p)}} |K(\zeta,z)|^r\,\mathrm{d}\lambda(\zeta)\right)^{(p-1)q/p} \times \\ &\times \left(\int_\Omega |f(\zeta)|^p\,\mathrm{d}\lambda(\zeta)\right)^{q(r-1)/r}. \end{aligned}$$

D'après les hypothèses,

$$\int_\Omega |\rho(\zeta)|^{-\varepsilon} |K(\zeta,z)|^r\,\mathrm{d}\lambda(\zeta) \leq |\rho(z)|^{-\varepsilon} C_\varepsilon, \quad \text{pour } z \in \Omega,$$

d'où

$$\begin{aligned} |Tf(z)|^q \leq |\rho(z)|^{-\varepsilon} (C_p)^{(p-1)q/p} \|f\|^{pq(r-1)/r}_{L^p(\Omega,d\lambda)} \times \\ \times \int_\Omega \left|\rho(\zeta)^\varepsilon f(\zeta)^p K(\zeta,z)^r\right| \mathrm{d}\lambda(\zeta) \end{aligned}$$

pour $z \in \Omega$. Utilisons Fubini,

$$\int_\Omega |Tf(z)|^q \,\mathrm{d}\nu(z) \leq$$
$$\leq \left(C_p^{(p-1)q/p} \|f\|_{L^p(\Omega,d\lambda)}^{pq(r-1)/r}\right) \times$$
$$\times \int_\Omega \left(\int_\Omega |\rho(z)|^{-\varepsilon} |K(\zeta,z)|^r \,\mathrm{d}\nu(z)\right) |\rho(\zeta)|^{\varepsilon} |f(\zeta)|^p \,\mathrm{d}\lambda(\zeta)\,.$$

Maintenant nous avons,

$$\int_\Omega |\rho(z)|^{-\varepsilon} |K(\zeta,z)|^r \,\mathrm{d}\nu(z) \leq C_\varepsilon |\rho(\zeta)|^{-\varepsilon}\,, \quad \text{pour } \zeta \in \Omega\,,$$

donc

$$\|Tf\|_{L^q(\Omega,d\nu)} \leq C_p \|f\|_{L^p(\Omega,d\lambda)}\,.$$

Considérons le cas $p = r/(r-1)$, si $f \in L^{r/(r-1)}$, alors $f \in L^p$ pour $p \leq r/(r-1)$ donc, en appliquant ce qui précède, il est évident que

$$\|Tf\|_{L^q(\Omega,d\nu)} \leq C_q \|f\|_{L^p(\Omega,d\lambda)}\,, \quad \forall\, 1 < q < +\infty\,.$$

Pour le cas $p > r/(r-1)$,

$$|Tf(z)| \leq \int_\Omega \left(|f(\zeta)|^p\right)^{1/p} \left(|K(\zeta,z)|^{p/(p-1)}\right)^{(p-1)/p};$$

appliquons Hölder :

$$|Tf(z)| \leq \|f\|_{L^p(\Omega,d\lambda)} \left(\int_\Omega |K(\zeta,z)|^{p/(p-1)}\right)^{(p-1)/p},$$

mais comme $p > r/(r-1)$, on a $p/(p-1) < r$ et donc

$$\|Tf(z)\|_{L^\infty} \leq C_p \|f\|_{L^p(\Omega,d\lambda)}\,.$$

D'après le théorème 1, nous avons une solution de $\overline{\partial} u = f$ donnée par

$$u(z) = -\int_\Omega f(\zeta) \wedge K_0(\zeta,z)\,, \quad \text{pour } z \in \Omega\,.$$

En explicitant K_0, on obtient

$$u(z) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n,k} \int_\Omega f(\zeta) \wedge$$

$$\wedge \frac{\left(\sum_{i=1}^n (\overline{\zeta}_i - \overline{z}_i)\, \mathrm{d}\zeta_i\right) \wedge \left(\sum_{i=1}^n \mathrm{d}\overline{\zeta}_i \wedge \mathrm{d}\zeta_i\right)^{n-1-k} \wedge \left(\overline{\partial}_\zeta Q\right)^k}{\left(\langle \widetilde{Q}\,,\, z-\zeta\rangle + 1\right)^{N+k} \|\zeta - z\|^{2(n-k)}}$$

avec .

$$Q = \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \rho}{\partial \zeta_i} - \nu(\eta_i^{2m_i-2} - \delta_i^{2n_i-2})(z_i - \zeta_i) + (z_i - \zeta_i)^{2m_i-1} \right) \mathrm{d}\zeta_i\,,$$

d'où

$$\overline{\partial} Q = \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^n \Big(\frac{\partial^2 \rho}{\partial \zeta_i \partial \overline{\zeta}_i} - \nu\big(i(m_i - 1)\eta_i^{2m_i-3} +$$

$$- (n_i - 1)\delta_i^{2n_i-3})(z_i - \zeta_i)\Big) \,\mathrm{d}\overline{\zeta}_i \wedge \mathrm{d}\zeta_i - \frac{\overline{\partial}\rho}{\rho^2} \wedge$$

$$\wedge \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \rho}{\partial \zeta_i} - \nu\Big((\eta_i^{2m_i-2} - \delta_i^{2n_i-2})(z_i - \zeta_i) + (z_i - \zeta_i)^{2m_i-1}\Big)\right) \mathrm{d}\zeta_i$$

$$= \frac{1}{\rho} A - \frac{\overline{\partial}\rho}{\rho^2} \wedge B\,.$$

Il vient donc que

$$(\overline{\partial} Q)^k = \left(\frac{1}{\rho} A - \frac{\overline{\partial}\rho}{\rho^2} \wedge B \right)^k = \frac{1}{\rho^k} A^k + C_k \frac{\overline{\partial}\rho \wedge B \wedge A^{k-1}}{\rho^{k+1}}\,.$$

Ainsi u est une somme de termes de deux types, I_k, J_k,

$$I_k = \int_\Omega \frac{f(\zeta) \wedge S \wedge (1/\rho^k) A^k}{\left(\langle \widetilde{Q}\,,\, z-\zeta\rangle + 1\right)^{N+k} \|\zeta - z\|^{2(n-k)}}$$

$$J_k = \int_\Omega \frac{f(\zeta) \wedge S \wedge (1/\rho^{k+1})\, \overline{\partial}\rho \wedge B \wedge A^{k-1}}{\left(\langle \widetilde{Q}\,,\, z-\zeta\rangle + 1\right)^{N+k} \|\zeta - z\|^{2(n-k)}}\,,$$

où

$$S = \left(\sum_{i=1}^n (\overline{\zeta}_i - \overline{z}_i)\, \mathrm{d}\zeta_i \right) \wedge \left(\sum_{i=1}^n \mathrm{d}\overline{\zeta}_i \wedge \mathrm{d}\zeta_i \right)^{n-1-k} \quad ;$$

les termes J_k sont les moins réguliers, car il apparaît au dénominateur un $\rho(\zeta)$ supplémentaire.

LEMME 2.2.— *$\Omega := \{z \in \mathbb{C}^n \mid \rho(z) < 0\}$, où ρ est une fonction de classe $\mathbb{C}^2$ sur $\overline{\Omega}$. Soit $K(\zeta, z)$ une application de $\Omega \times \Omega$ dans $\mathbb{C}^n$ vérifiant les mêmes hypothèses de mesurabilité qu'au lemme 2.1, si, de plus, pour $r > 1$, on a*

$$\int_\Omega |K(\zeta, z)|^r \, \mathrm{d}\nu(z) \leq M$$

uniformément en $\zeta \in \Omega$, alors $Tf(z) = \int_\Omega f(\zeta) \wedge K(\zeta, z) \, \mathrm{d}\lambda(\zeta)$ envoie $L^1(\Omega, d\lambda)$ dans $L^r(\Omega, d\nu)$.

Preuve.— La preuve est immédiate; mais ce résultat est utile, car il est très facile, avec les formules de Berndtsson–Andersson, d'obtenir l'intégrabilité par rapport à la variable z;

$$|Tf(z)| \leq \int_\Omega \Big(|f(\zeta)| \, |K(\zeta, z)|^r\Big)^{1/r} |f(\zeta)|^{1-1/r} \, \mathrm{d}\lambda(\zeta) \, ;$$

appliquons Hölder, nous obtenons

$$|Tf(z)|^r \leq \Big(\int_\Omega |f(\zeta)| \, |K(\zeta, z)|^r \, \mathrm{d}\lambda(\zeta)\Big) \Big(\int_\Omega |f(\zeta)| \, \mathrm{d}\lambda(\zeta)\Big)^{r-1} .$$

En utilisant Fubini, il vient,

$$\|Tf(z)\|^r_{L^r(\Omega, d\nu)} \leq \|f\|^{r-1}_{L^1(\Omega, d\lambda)} \int_\Omega |f(\zeta)| \Big(\int_\Omega |K(\zeta, z)|^r \, \mathrm{d}\nu(z)\Big) \, \mathrm{d}\lambda(\zeta)$$

d'où

$$\|Tf(z)\|_{L^r(\Omega, d\nu)} \leq M^{1/r} \|f\|_{L_1(\Omega, d\lambda)} \, . \, \square$$

Cas $p = 1$

Nous allons montrer que $K(\zeta, z)$ vérifie le lemme 2.2 avec

$$r = \frac{Mn + 2}{Mn + 1}$$

et $\mathrm{d}\lambda = \mathrm{d}\nu$ la mesure de Lebesgue sur Ω. D'après le lemme 1.2, nous avons

$$\begin{aligned} &|K(\zeta, z)| \leq \\ &\leq \frac{|\overline{\partial}\rho \wedge B \wedge A^{k-1}| \, |\rho(\zeta)|^{N-1}}{\|\zeta - z\|^{2(n-k)-1}} \times \\ &\times \frac{1}{\Big(|\Im\phi(\zeta, z)| - \rho(\zeta) - \rho(z) + S_+\Big)^{N+k}} \end{aligned}$$

où $S_+ = \sum_{i=1}^n (\eta_i^{2m_i - 2} + \delta_i^{2n_i - 2}) |z_i - \zeta_i|^2 + |z_i - \zeta_i|^{2m_i}$.

Dorénavant, nous fixerons $N > 1$; par conséquent si $\zeta \in \Omega \setminus V(\partial\Omega)$, où $V(\partial\Omega)$ est un voisinage de $\partial\Omega$, alors

$$\left|K(\zeta, z)\right|^r \leq C\left\|\zeta - z\right\|^{-r(2(n-k)-1)} \quad \text{avec } r = \frac{Mn+2}{Mn+1}.$$

D'où $\left|K(\,\cdot\,, z)\right|^r$ est intégrable. Considérons $B(q, \sigma/2)$, les boules de centre $q \in \partial\Omega$ et de rayon $\sigma/2$, où σ sera choisi ultérieurement, alors

$$\partial\Omega \subset \bigcup_{q \in \partial\Omega} B(q, \sigma/2)$$

d'où

$$\partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(q_i, \sigma/2) \quad \text{(par compacité de } \partial\Omega\text{)}.$$

Considérons également un voisinage U_i de q_i, tel que

$$B(q_i, \sigma/2) \Subset U_i \Subset B(q_i, \sigma) ;$$

si $\zeta \in \Omega \setminus \Omega \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} B(q_i, \sigma/2)\right)$, alors $\int_\Omega \left|K(\,\cdot\,, z)\right| \mathrm{d}\lambda(z)$ est uniformément borné en ζ. Prenons $\zeta \in \Omega \cap B(q_i, \sigma/2)$,

$$\int_\Omega \left|K(\,\cdot\,, z)\right|^r \mathrm{d}\lambda(z) \leq \int_{U_i \cap \Omega} \left|K(\,\cdot\,, z)\right|^r \mathrm{d}\lambda(z) + \int_{\Omega \setminus U_i} \left|K(\,\cdot\,, z)\right|^r \mathrm{d}\lambda(z),$$

puisque $\zeta \in \Omega \cap B(q_i, \sigma/2)$, on a $\left\|\zeta - z\right\|$ est uniformément minoré pour $z \in \Omega \setminus U_i$, par conséquent $\int_{\Omega \setminus U_i} \left|K(\,\cdot\,, z)\right|^r \mathrm{d}\lambda(z)$ l'est aussi. Il suffit donc d'estimer le terme

$$\int_{U_i \cap \Omega} \left|K(\,\cdot\,, z)\right|^r \mathrm{d}\lambda(z).$$

Observons :

$$\begin{aligned}
B &= \partial\rho - \sum_{i=1}^{n} \nu\left((\eta_i^{2m_i-2} - \delta_i^{2n_i-2})(z_i - \zeta_i) + \left(z_i - \zeta_i\right)^{2m_i-1}\right) \mathrm{d}\zeta_i \\
&= \sum_{j=1}^{n} B_j \, \mathrm{d}\zeta_j \\
A &= \bar\partial\,\partial\rho(\zeta) - \nu\bar\partial\left(\sum_{i=1}^{n}(\eta_i^{2m_i-2} - \delta_i^{2n_i-2})(z_i - \zeta_i) + \left(z_i - \zeta_i\right)^{2m_i-1}\right) \mathrm{d}\zeta_i \\
&= \bar\partial B ;
\end{aligned}$$

le $\overline{\partial}$ qui apparaît dans A est le $\overline{\partial}$ tangentiel car dans $K(\zeta, z)$ figure $\overline{\partial}\rho \wedge A^{k-1}$. Introduisons comme dans [4], une base des $(1,0)$-champs de vecteurs tangents à $\mathbb{C}^n$; nous avons $\partial\rho(q) \neq 0$ si $q \in \partial\Omega$. Supposons par exemple que $\partial\rho(\zeta)/\partial\zeta_n \neq 0$ sur $B(q_i, \sigma)$ pour σ assez petit, il s'ensuit que (L_i),

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{\partial\rho}{\partial\zeta_n}(\zeta)\frac{\partial}{\partial\zeta_1} - \frac{\partial\rho}{\partial\zeta_1}(\zeta)\frac{\partial}{\partial\zeta_n} \\ L_i &= \frac{\partial\rho}{\partial\zeta_n}(\zeta)\frac{\partial}{\partial\zeta_i} - \frac{\partial\rho}{\partial\zeta_i}(\zeta)\frac{\partial}{\partial\zeta_n} \\ L_n &= \frac{\partial\rho}{\partial\zeta_1}(\zeta)\frac{\partial}{\partial\zeta_1} + \cdots + \frac{\partial\rho}{\partial\zeta_n}(\zeta)\frac{\partial}{\partial\zeta_n}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

est une base de champs de vecteurs tangents à C^n. Par conséquent,

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega\cap U_i} \left|K(\,\cdot\,, z)\right|^r \mathrm{d}\lambda(z) \le \\ &\le \sum_{(i_1,\ldots,i_{k-1})} \int_{\Omega\cap U_i} \frac{\prod_{j=1}^{k-1}\left|\overline{L}_{ij}(\partial\rho - \nu S_-)\right|}{\left(\left|\Im\phi(\zeta,z)\right| - \rho(\zeta) - \rho(z) + S_+\right)^{r(n+k)}} \\ &\qquad \times \frac{\left|\rho(\zeta)\right|^{r(N-1)}\mathrm{d}\lambda(z)}{\left\|\zeta - z\right\|^{r(2(n-k)-1)}}, \end{aligned}$$

où $S_- = \sum_{i=1}^n \left((\eta^{2m_i-2} - \delta_i^{2n_i-2})(z_i - \zeta_i) + (z_i - \zeta_i)^{2m_i-1}\right)\mathrm{d}\zeta_i$, avec $(i_1, \ldots, i_{k-1})$ un multi-indice de longueur $k-1$ à valeurs dans $(1, \ldots, n-1)$.

Lemme 2.3.— *On a*

$$|\bar{L}_j B_k| \le \delta_{j,k}\left((\eta_k^{2m_k-2} + \delta_k^{2n_k-2}) + \left(\left|\eta_k\right|^{2m_k-3} + \left|\delta_k\right|^{2n_k-3}\right)|z_k - \zeta_k|\right)$$

pour $j \in \{1 \cdots n-1\}$ *et* $k \in \{1 \cdots n-1\}$, *et*

$$|\bar{L}_j B_n| \le \left(\left|\eta_j\right|^{2m_j-1} + \left|\delta_j\right|^{2n_j-1}\right).$$

La démonstration de ce résultat est immédiate.

En appliquant le lemme 2.3, il vient sans difficulté :

$$\int_{\Omega\cap U_i} \left|K(\cdot,z)\right|^r \mathrm{d}\lambda(z) \leq$$

$$\leq \sum_{(i_1,\dots,i_{k-1})} \int_{\Omega\cap U_i} \frac{\prod_{j=1}^{k-1}(\eta_{i_j}^{2m_{i_j}-2} + \delta_{i_j}^{2n_{i_j}-2}) + (\eta_{i_j}^{2m_{i_j}-3} + \delta_{i_j}^{2n_{i_j}-3})\left|z_{i_j} - \zeta_{i_j}\right|}{\left(\left|\Im\phi(\zeta,z)\right| - \rho(\zeta) - \rho(z) + S_+\right)^{r(n+k)}}$$

$$\times \frac{\left|\rho(\zeta)\right|^{r(N-1)} \mathrm{d}\lambda(z)}{\left\|\zeta - z\right\|^{r(2(n-k)-1)}}.$$

LEMME 2.4.— *Soient ζ, $z \in \mathbb{C}$ et $A > 0$ proche de zéro, alors*

$$\int_{B(\zeta,r)} \frac{(\Re\zeta)^{2q}\,\mathrm{d}\lambda(z)}{\left(A + (\Re\zeta)^{2q}|\zeta - z|^2\right)^{\alpha}} \leq \begin{cases} MA^{1-\alpha} & si\ \alpha > 1 \\ -M\ln(A) & si\ \alpha = 1. \end{cases}$$

Preuve.— Utilisons le changement de variables suivant : $u = (\Re\zeta)^q(z - \zeta)$; ceci est légitime si $(\Re\zeta) \neq 0$. Si $(\Re\zeta) = 0$, l'intégrale cherchée est nulle

$$\int_{B(\zeta,r)} \frac{(\Re\zeta)^{2q}\,\mathrm{d}\lambda(z)}{\left(A + (\Re\zeta)^{2q}|\zeta - z|^2\right)^{\alpha}} = \int_{B(0,r)} \frac{\mathrm{d}\lambda(u)}{\left(A + |u|^2\right)^{\alpha}}$$

$$\leq \begin{cases} MA^{1-\alpha} & \text{si } \alpha > 1 \\ -M\ln(A) & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$$

LEMME 2.5.— *Sous les mêmes hypothèses que le lemme 2.4 et $q \in N^*$,*

$$\int_{B(\zeta,r)} \frac{\left|\Re\zeta\right|^{2q-1}|z - \zeta|\,\mathrm{d}\lambda(z)}{\left(A + (\Re\zeta)^{2q}|\zeta - z|^2 + |\zeta - z|^{2q+2}\right)^{\alpha}} \leq \begin{cases} MA^{1-\alpha} & si\ \alpha > 1 \\ -M\ln(A) & si\ \alpha = 1. \end{cases}$$

Preuve.— Nous avons les inégalités,

$$\int_{B(\zeta,r)} \frac{|\Re\zeta|^{2q-1}|z-\zeta|\,\mathrm{d}\lambda(z)}{\left(A+(\Re\zeta)^{2q}|z-\zeta|^2+|z-\zeta|^{2q+2}\right)^{\alpha}} \le$$
$$\le \int_{|z-\zeta|\le|\Re\zeta|} \frac{(\Re\zeta)^{2q}\,\mathrm{d}\lambda(z)}{\left(A+(\Re\zeta)^{2q}|\zeta-z|^2\right)^{\alpha}} +$$
$$+ \int_{|\Re\zeta|\le|z-\zeta|} \frac{\mathrm{d}\lambda(z)}{\left(A+|z-\zeta|^{2q+2}\right)^{\alpha-1+1/(q+1)}}\,.$$

Pour le premier morceau à droite de l'inégalité, on applique le lemme 2.4; pour le second, un passage en coordonnées polaires donne immédiatement le résultat.

Nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que $i_j = j$ pour tout $j \in \{1,\ldots,n-1\}$. Divisons le domaine d'intégration en deux parties,

$$\int_{\Omega\cap U_i} \left|K(\cdot,z)\right|^r \mathrm{d}\lambda(z) \le$$
$$\le \int_{|\rho(\zeta)|^{1/M}\le|\zeta-z|} \frac{\prod_{j=1}^{\alpha}(\eta_j^{2m_j-2}+\delta_j^{2n_j-2}) \prod_{\ell=\alpha+1}^{k-1}(\eta_\ell^{2m_\ell-3}+\delta_\ell^{2n_\ell-3})|z_\ell-\zeta_\ell|}{\left(\left|\Im\phi(\zeta,z)\right|-\rho(\zeta)-\rho(z)+S_+\right)^{r(N+k)}} \times$$
$$\times \frac{\left|\rho(\zeta)\right|^{r(N-1)}\mathrm{d}\lambda(z)}{\left|\rho(\zeta)\right|^{((r-1)/M)(2(n-k)-1)}\left\|\zeta-z\right\|^{(2(n-k)-1)}} +$$
$$+ \int_{|\rho(\zeta)|^{1/M}\ge|\zeta-z|} \frac{\prod_{j=1}^{\alpha}(\eta_j^{2m_j-2}+\delta_j^{2n_j-2}) \prod_{\ell=\alpha+1}^{k-1}(\eta_\ell^{2m_\ell-3}+\delta_\ell^{2n_\ell-3})|z_\ell-\zeta_\ell|}{\left(\left|\Im\phi(\zeta,z)\right|-\rho(\zeta)-\rho(z)+S_+\right)^{r(N+k)}}$$
$$\times \frac{\left|\rho(\zeta)\right|^{r(N-1)}\mathrm{d}\lambda(z)}{\left\|\zeta-z\right\|^{(2(n-k)-1)r}}\,.$$

Introduisons le changement de coordonnées de Henkin donné dans [5],

$$\begin{aligned} t_0 + it_1 &= \big(\rho(\zeta) - \rho(z)\big) + i\Im\phi(\zeta, z) \\ t_2 + it_3 &= (\zeta_1 - z_1) \\ &\vdots \\ t_{2(k-1)} + it_{2(k-1)+1} &= \zeta_{k-1} - z_{k-1} \\ &\vdots \\ t_{2(n-1)} + it_{2(n-1)+1} &= \zeta_{n-1} - z_{n-1} , \end{aligned}$$

en effectuant le changement de variable, la première intégrale à droite de l'inégalité est majorée par

$$\int_{B(0,R)} \frac{\prod_{j=1}^{\alpha}(\eta_j^{2m_j-2} + \delta_j^{2n_j-2}) \prod_{\ell=\alpha+1}^{k-1} (\eta_\ell^{2m_\ell-3} + \delta_\ell^{2n_\ell-3})(t_{2\ell}^2 + t_{2\ell+1}^2)^{\frac{1}{2}}}{\left(|t_0| - \rho(\zeta) + |t_1| + S'_+ + \sum_{i=k}^{n-1}(t_{2i}^2 + t_{2i+1}^2)^{m_i}\right)^{r(N+k)}}$$
$$\times \frac{\big|\rho(\zeta)\big|^{r(N-1)}\, \mathrm{d}\lambda(t)}{\big|\rho(\zeta)\big|^{(r-1)(2(n-k)-1)/M}\big(t_{2k}^2 + \cdots + t_{2(n-1)+1}^2\big)^{(n-k)-1/2}} .$$

où $S'_+ = \sum_{i=1}^{k-1}(\eta_i^{2m_i-2} + \delta_i^{2n_i-2})\big(t_{2i}^2 + t_{2i+1}^2\big)$. En intégrant par rapport à $t_0, t_1, \ldots, t_{2(k-1)+1}$ et à l'aide des lemmes 2.4 et 2.5, il vient

$$I \le \int_{B(0,R)} \frac{\mathrm{d}\lambda(t)}{\left(-\rho(\zeta) + \sum_{i=k}^{n-1}(t_{2i}^2 + t_{2i+1}^2)^{m_i}\right)^{rN-1+k(r-1)}}$$
$$\times \frac{\big|\rho(\zeta)\big|^{r(N-1)}}{\big|\rho(\zeta)\big|^{(r-1)(2(n-k)-1)/M}\big(t_{2k}^2 + \cdots + t_{2(n-1)+1}^2\big)^{(n-k)-1/2}} ;$$

par un passage en polaires, il s'ensuit immédiatement que cette intégrale est majorée uniformément par rapport à ζ.

Le second morceau, en utilisant le changement de variables et en posant $P = \big(\sum_{i=k}^{n-1}(t_{2i}^2 + t_{2i+1}^2)\big)^{1/2}$, devient :

$$\int_{\substack{B(0,R)\\ P\le|\rho(\zeta)|^{1/M}}} \frac{\prod_{j=1}^{\alpha}(\eta_j^{2m_j-2}+\delta_j^{2n_j-2})\prod_{\ell=\alpha+1}^{k-1}(\eta_\ell^{2m_\ell-3}+\delta_\ell^{2n_\ell-3})\big(t_{2\ell}^2+t_{2\ell+1}^2\big)^{1/2}}{\Big(|t_0|-\rho(\zeta)+|t_1|+S'_+ +\sum_{i=k}^{n-1}\big(t_{2i}^2+t_{2i+1}^2\big)^{m_i}\Big)^{r(N+k)}}$$
$$\times\frac{\big|\rho(\zeta)\big|^{r(N-1)}\,\mathrm{d}\lambda(t)}{\big(t_{2k}^2+\cdots+t_{2(n-1)+1}^2\big)^{r(n-k-1/2)}}\,;$$

intégrons à l'aide des lemmes 2.4 et 2.5 par rapport à $t_0, t_1, \ldots, t_{2(k-1)+1}$, il vient

$$\int_{P\le|\rho(\zeta)|^{1/M}}\frac{\big|\rho(\zeta)\big|^{r(N-1)}\,\mathrm{d}\lambda(t)}{\big(t_{2k}^2+\cdots+t_{2n-1}^2\big)^{r(n-k-1/2)}\big|\rho(\zeta)\big|^{r(N+k)-1-k}}\,;$$

en passant en coordonnées polaires, on obtient que l'intégrale est majorée uniformément par rapport à ζ. Le Théorème est donc démontré pour $p=1$. □

Cas p supérieur à 1

Pour $p>1$, nous allons appliquer le lemme 2.1, il suffit de démontrer, pour tout ε assez petit,

$$\int_\Omega\big|\rho(z)\big|^{-\varepsilon}\big|K(\zeta,z)\big|^r\,\mathrm{d}\lambda(z)\le C_\varepsilon\big|\rho(\zeta)\big|^{-\varepsilon}\tag{2.2}$$

et

$$\int_\Omega\big|\rho(\zeta)\big|^{-\varepsilon}\big|K(\zeta,z)\big|^r\,\mathrm{d}\lambda(\zeta)\le C_\varepsilon\big|\rho(z)\big|^{-\varepsilon}\tag{2.3}$$

avec $r=(Mn+2)/(Mn+1)$.

Commençons par montrer (2.2). Si $\zeta\in\big(\Omega/\Omega\cap V(\partial\Omega)\big)$,

$$\int_\Omega\big|\rho(z)\big|^{-\varepsilon}\big|K(\zeta,z)\big|^r\,\mathrm{d}\lambda(z)\le$$
$$\le\int_{|\rho(\zeta)|\le2|\rho(z)|}\big|\rho(\zeta)\big|^{-\varepsilon}\|\zeta-z\|^{r(2(n-k)-1)}\,\mathrm{d}\lambda(z)+$$
$$+\int_{|\rho(z)|\le(1/2)|\rho(\zeta)|}\big|\rho(z)\big|^{-\varepsilon}\Big(\big|\rho(\zeta)\big|+\|\zeta-z\|\Big)^{r(2(n-k)-1)}\,\mathrm{d}\lambda(z)$$
$$\le C\big|\rho(\zeta)\big|^{-\varepsilon}.$$

Prenons $\zeta \in \Omega \cap V(\partial\Omega)$,

$$\int_\Omega |\rho(z)|^{-\varepsilon} |K(\zeta,z)|^r \, d\lambda(z) \leq$$

$$\leq \int_{\Omega\cap U_i} \frac{\prod_{j=1}^{\alpha} (\eta_j^{2m_j-2} + \delta_j^{2n_j-2}) \prod_{\ell=\alpha+1}^{k-1} (\eta_\ell^{2m_\ell-3} + \delta_\ell^{2n_\ell-3}) |z_\ell - \zeta_\ell|}{\left(|\Im\phi(\zeta,z)| - \rho(\zeta) - \rho(z) + S_+\right)^{r(N+k)}}$$
$$\times \frac{|\rho(\zeta)|^{r(N-1)} \, d\lambda(z)}{|\rho(z)|^\varepsilon \|\zeta - z\|^{r(2(n-k)-1)}} \,;$$

découpons cette dernière intégrale en trois morceaux

$$\int_{|\rho(\zeta)|\leq|\rho(z)|} \frac{\prod_{j=1}^{\alpha} (\eta_j^{2m_j-2} + \delta_j^{2n_j-2}) \prod_{\ell=\alpha+1}^{k-1} (\eta_\ell^{2m_\ell-3} + \delta_\ell^{2n_\ell-3}) |z_\ell - \zeta_\ell|}{\left(|\Im\phi(\zeta,z)| - \rho(\zeta) - \rho(z) + S_+\right)^{r(N+k)}}$$
$$\times \frac{|\rho(\zeta)|^{r(N-1)-\varepsilon} \, d\lambda(z)}{\|\zeta - z\|^{r(2(n-k)-1)}} \,,$$

$$\int_{\substack{|\rho(\zeta)|\geq|\rho(z)| \\ |\rho(\zeta)|^{1/M}\leq|z-\zeta|}} \frac{\prod_{j=1}^{\alpha} (\eta_j^{2m_j-2} + \delta_j^{2n_j-2}) \prod_{\ell=\alpha+1}^{k-1} (\eta_\ell^{2m_\ell-3} + \delta_\ell^{2n_\ell-3}) |z_\ell - \zeta_\ell|}{\left(|\Im\phi(\zeta,z)| - \rho(\zeta) - \rho(z) + S_+\right)^{r(N+k)}}$$
$$\times \frac{|\rho(\zeta)|^{r(N-1)} \, d\lambda(z)}{|\rho(z)|^\varepsilon |\rho(\zeta)|^{(r-1)(2(n-k)-1)/M} \|\zeta - z\|^{(2(n-k)-1)}} \,;$$

$$\int_{\substack{|\rho(\zeta)|\geq|\rho(z)| \\ |\rho(\zeta)|^{1/M}\geq|z-\zeta|}} \frac{\prod_{j=1}^{\alpha} (\eta_j^{2m_j-2} + \delta_j^{2n_j-2}) \prod_{\ell=\alpha+1}^{k-1} (\eta_\ell^{2m_\ell-3} + \delta_\ell^{2n_\ell-3}) |z_\ell - \zeta_\ell|}{\left(|\Im\phi(\zeta,z)| - \rho(\zeta) - \rho(z) + S_+\right)^{r(N+k)}}$$
$$\times \frac{|\rho(\zeta)|^{r(N-1)} \, d\lambda(z)}{|\rho(z)|^\varepsilon \|\zeta - z\|^{r(2(n-k)-1)}} \,.$$

Avec les lemmes 2.4, 2.5 et le changement de coordonnées de Henkin, on obtient

$$\int_\Omega |\rho(z)|^{-\varepsilon} |K(\zeta,z)|^r \, d\lambda(z) \leq C_\varepsilon |\rho(\zeta)|^{-\varepsilon} \,.$$

Vérifions (2.3) pour tout ε assez petit. Pour cela nous avons besoin des deux lemmes suivants dont les démonstrations figurent dans [4].

LEMME 2.6.— $(\zeta, z) \in \mathbb{C}^2$, $A > 0$, $q \in N$.

$$\int_{B(z,r)} \frac{(\Re\zeta)^{2q}\,\mathrm{d}\lambda(\zeta)}{\left(A + (\Re\zeta)^{2q}|z-\zeta|^2 + |z-\zeta|^{2q+2}\right)^{\alpha}} \leq \begin{cases} MA^{1-\alpha} & si\ \alpha > 1 \\ -M\ln(A) & si\ \alpha = 1. \end{cases}$$

LEMME 2.7.— $(\zeta, z) \in \mathbb{C}^2$, $A > 0$, $q \in N^*$.

$$\int_{B(z,r)} \frac{|\Re\zeta|^{2q-1}|z-\zeta|\,\mathrm{d}\lambda(\zeta)}{\left(A + |\Re\zeta|^{2q}|z-\zeta|^2 + |z-\zeta|^{2q+2}\right)^{\alpha}} \leq \begin{cases} MA^{1-\alpha} & si\ \alpha > 1 \\ -M\ln(A) & si\ \alpha = 1. \end{cases}$$

Si $z \in (\Omega/\Omega \cap V(\partial\Omega))$, alors

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\rho(\zeta)|^{-\varepsilon}|K(\zeta,z)|^r\,\mathrm{d}\lambda(\zeta) &\leq \int_\Omega \frac{|\rho(\zeta)|^{r(N-1)-\varepsilon}\,\mathrm{d}\lambda(\zeta)}{\|z-\zeta\|^{r(2(n-k)-1)}} \\ &\leq C|\rho(z)|^{-\varepsilon}.\end{aligned}$$

Prenons $z \in V(\partial\Omega)$; alors

$$\int_\Omega |\rho(\zeta)|^{-\varepsilon}|K(\zeta,z)|^r\,\mathrm{d}\lambda(\zeta) \leq$$

$$\leq \int_{\Omega\cap U_i} \frac{\prod_{j=1}^{\alpha}(\eta_j^{2m_j-2} + \delta_j^{2n_j-2}) \prod_{\ell=\alpha+1}^{k-1} (\eta_\ell^{2m_\ell-3} + \delta_\ell^{2n_\ell-3})|z_\ell - \zeta_\ell|}{\left(|\Im\phi(\zeta,z)| - \rho(\zeta) - \rho(z) + S_+\right)^{r(N+k)}}$$

$$\times \frac{|\rho(\zeta)|^{r(N-1)-\varepsilon}\,\mathrm{d}\lambda(\zeta)}{\|\zeta - z\|^{r(2(n-k)-1)}};$$

découpons cette dernière intégrale en deux morceaux,

$$\int_{|z-\zeta|\le|\rho(z)|^{1/M}} \frac{\prod_{j=1}^{\alpha}(\eta_j^{2m_j-2}+\delta_j^{2n_j-2})\prod_{\ell=\alpha+1}^{k-1}(\eta_\ell^{2m_\ell-3}+\delta_\ell^{2n_\ell-3})\left|z_\ell-\zeta_\ell\right|}{\left(\left|\Im\phi(\zeta,z)\right|-\rho(\zeta)-\rho(z)+S_+\right]^{r(k+1)-\varepsilon}}$$
$$\times\frac{\mathrm{d}\lambda(\zeta)}{\left\|\zeta-z\right\|^{r(2(n-k)-1)}},$$

$$\int_{|z-\zeta|\ge|\rho(z)|^{1/M}} \frac{\prod_{j=1}^{\alpha}(\eta_j^{2m_j-2}+\delta_j^{2n_j-2})\prod_{\ell=\alpha+1}^{k-1}(\eta_\ell^{2m_\ell-3}+\delta_\ell^{2n_\ell-3})|z_\ell-\zeta_\ell|}{\left(\left|\Im\phi(\zeta,z)\right|-\rho(\zeta)-\rho(z)+S_+\right)^{r(k+1)+\varepsilon}}$$
$$\times\frac{\mathrm{d}\lambda(\zeta)}{\left(\left|\rho(z)\right|+\left|\zeta-z\right|^{M}\right)^{r(2(n-k)-1)/M}}.$$

Maintenant, il vient sans difficulté, en utilisant le changement de coordonnées de Henkin et les lemmes 2.6-2.7, $\int_\Omega\left|\rho(\zeta)\right|^{-\varepsilon}\left|K(\zeta,z)\right|^{r}\,\mathrm{d}\lambda(\zeta)\le C_\varepsilon\left|\rho(z)\right|^{-\varepsilon}$.

Estimations Lipschitz

Pour les estimations Lipschitz, nous n'utilisons pas les solutions de $\overline{\partial}u=f$ données par les formules de Berndtsson–Andersson mais, comme dans [3], la formule de l'homotopie classique. D'après [3], nous avons une solution de $\overline{\partial}u=f$, où u est une combinaison linéaire ($0\le k\le n-2$) de

$$\int_\Omega f\wedge\overline{\partial}_\zeta\left(\frac{\partial\rho\wedge\left(\overline{\partial}_T\partial\rho\right)^k\wedge\partial\left(\left|\zeta-z\right|^2\right)\wedge\overline{\partial}\partial\left(\left|\zeta-z\right|^2\right)^{n-2-k}}{\left(\langle Q\,,\zeta-z\rangle-\rho(\zeta)\right)^{k+1}\left(\left|\zeta-z\right|^2+\rho(\zeta)\rho(z)\right)^{n-k-1}}\right)=$$
$$=\int_\Omega f\wedge\overline{\partial}_\zeta\left(L_k(\zeta,z)\right)$$

et

$$\int_\Omega\frac{f\wedge\partial\left(\left|\zeta-z\right|^2\right)\wedge\left(\overline{\partial}\partial\left(\left|\zeta-z\right|^2\right)\right)^{n-1}}{\left|\zeta-z\right|^{2n}}.$$

Le second terme qui ne contient que de la section de Bochner–Martinelli est toujours plus régulier que le premier. De même, le plus mauvais terme de

$\operatorname{grad}_z L_k(\zeta, z)$ pour $0 \leq k \leq n-2$ est $\operatorname{grad}_z L_{n-2}(\zeta, z)$. Si $p > (Mn+2)$, posons $q = p/(p-1)$, d'après les inégalités de Hölder nous avons :

$$\int_\Omega |f(\zeta)|\, |\operatorname{grad}_z L_{n-2}(\zeta, z)|\, d\lambda(\zeta) \leq$$

$$\leq \int_\Omega \left(|f(\zeta)|^p\right)^{1/p} \left(|\operatorname{grad}_z L_{n-2}(\zeta, z)|^q\right)^{1/q} d\lambda(\zeta)$$

$$\leq \|f\|_{L^p} \times \left(\int_\Omega |\operatorname{grad}_z L_{n-2}(\zeta, z)|^q\, d\lambda(\zeta)\right)^{1/q},$$

$$\left(\int_\Omega |\operatorname{grad}_z L_{n-2}(\zeta, z)|^q\, d\lambda(\zeta)\right)^{1/q} \leq$$

$$\leq \left(\int_\Omega \frac{\prod_{j=1}^{\alpha}(\eta_j^{2m_j-2} + \delta_j^{2n_j-2}) \prod_{\ell=\alpha+1}^{n-2} (\eta_\ell^{2m_\ell-3} + \delta_\ell^{2n_\ell-3})|\zeta_\ell - z_\ell|}{\left(|\Im\phi(\zeta, z)| - \rho(\zeta) - \rho(z) + S_+\right)^{q(1+n)}} \frac{d\lambda(\zeta)}{|z-\zeta|^q}\right)^{1/q}.$$

Découpons cette dernière intégrale en deux morceaux :

$$\left(\int_{|\rho(z)|^{1/M} \leq |z-\zeta|} \frac{\prod_{j=1}^{\alpha}(\eta_j^{2m_j-2} + \delta_j^{2n_j-2}) \prod_{\ell=\alpha+1}^{n-2} (\eta_\ell^{2m_\ell-3} + \delta_\ell^{2n_\ell-3})|\zeta_\ell - z_\ell|}{\left(|\Im\phi(\zeta, z)| - \rho(\zeta) - \rho(z) + S_+\right)^{q(1+n)}} \times\right.$$

$$\left. \times \frac{d\lambda(\zeta)}{|\rho(z)|^{(q-1)/M} |z-\zeta|}\right)^{1/q}$$

$$\left(\int_{|z-\zeta| \leq |\rho(z)|^{1/M}} \frac{\prod_{j=1}^{\alpha}(\eta_j^{2m_j-2} + \delta_j^{2n_j-2}) \prod_{\ell=\alpha+1}^{n-2} (\eta_\ell^{2m_\ell-3} + \delta_\ell^{2n_\ell-3})|\zeta_\ell - z_\ell|}{\left(|\Im\phi(\zeta, z)| - \rho(\zeta) - \rho(z) + S_+\right)^{q(1+n)}} \times\right.$$

$$\left. \times \frac{d\lambda(\zeta)}{|z-\zeta|^q}\right)^{1/q}.$$

Il vient facilement à l'aide des lemmes 2.6 et 2.7,

$$\int_\Omega |f(\zeta)|\, |\operatorname{grad}_z L_{n-2}(\zeta, z)|\, d\lambda(\zeta) \leq C_p \|f\|_{L^p} |\rho(z)|^{(1/M - (n+2/M)/p) - 1},$$

d'où le résultat. □

3. Exemple

Soit

$$\Omega := \{z_j = x_j + iy_j \in \mathbb{C}^n \mid \\ x_1^2 + y_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + y_{n-1}^2 + x_n^{2m_1} + y_n^{2m_2} - 1 < 0\}$$

où (m_1, m_2) sont deux entiers positifs vérifiant $1 < m_1 < m_2$. Pour $p \geq 1$ et $0 < 1/q < 1/p - 1/(2m_1 n + 2)$, on considère la $(0,1)$-forme suivante :

$$f(z) = \frac{\mathrm{d}\bar{z}_n}{\Phi(a,z)^d}$$

où $d = 1/2m_1 + (1/m_1 + n)/q$ et $a = (1, 0, \ldots, 0)$.

Il est très facile de voir, en modifiant la preuve dans [3] que $f \in L^p(\Omega)$, et qu'il n'existe pas $u \in L^q(\Omega)$ telle que $\bar{\partial} u = f$.

Références

[1] BERNDTSSON (B.) et ANDERSSON (M.) .— *Henkin–Ramirez formulas with weight factor*, Ann. Inst. Fourier **32**, n° 3 (1982).

[2] CHEN (Z.) .— *Optimal L^p estimates for the $\bar{\partial}$-equation in C^2*, Preprint.

[3] CHEN (Z.), KRANTZ (S. G.) (et) MA (D.) .— *Optimal L^p estimates for the $\bar{\partial}$-equation on complex ellipsoid*, Manuscripta Math. **80** (1993), pp. 131-149.

[4] DIEDERICH (K.), FORNAESS (J. E.) et WIEGERINCK (J.) .— *Sharp hölder estimates for $\bar{\partial}$ on ellipsoids*, Manuscripta Math. **56** (1986), pp. 399-417.

[5] HENKIN (G. M.) .— *Integral representations of holomorphic functions in strictly pseudoconvex domains and applications to the $\bar{\partial}$ problem*, Math. U.S.S.R. S.B. **11** (1970), pp. 273-281.

[6] KRANTZ (S. G.) .— *Optimal Lipschitz and L^p regularity for the equation $\bar{\partial} u = f$ on strongly pseudoconvex domains*, Math. Ann. **219** (1976).

[7] POLKING (I. C.) .— *The Cauchy–Riemann equations in convex domains*, Proc. Sympos. Pure Math., Amer. Math. Soc., part 3, **52** (1991).