LISETTE JAGER

Fonctions de Mathieu et fonctions propres de l'oscillateur relativiste

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 7, nº 3 (1998), p. 465-495

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1998_6_7_3_465_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. VII, n° 3, 1998

Fonctions de Mathieu et fonctions propres de l'oscillateur relativiste[*]

LISETTE JAGER[1]

RÉSUMÉ. — Les fonctions de Mathieu ont été introduites en 1868 lors de la résolution du problème de Dirichlet dans une ellipse. Elles se retrouvent, sous une forme modifiée, dans l'étude d'une version relativiste de l'oscillateur harmonique. Le présent article utilise le calcul de Klein-Gordon (introduit par A. Unterberger comme analogue relativiste du calcul de Weyl) pour obtenir des résultats, exacts ou asymptotiques, sur les fonctions de Mathieu et sur l'oscillateur associé.

ABSTRACT. — Mathieu functions were introduced in 1868 to solve the Dirichlet problem in an ellipse. Modified Mathieu functions also show up in the study of the relativistic oscillator, which is a relativistic deformation of the harmonic oscillator. In the paper we give results, some exact and some asymptotic, about Mathieu functions and the associated oscillator; methods rely strongly on the use of A. Unterberger's Klein-Gordon symbolic calculus (a relativistic substitute of the Weyl calculus).

0. Introduction

On appelle oscillateur relativiste en une variable l'opérateur différentiel

$$L = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - 4\pi^2x^2 + \frac{1}{c^2}\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^2\right), \tag{0.1}$$

où la constante c est la vitesse de la lumière. Cet opérateur est essentiellement autoadjoint sur un espace de Sobolev approprié (dépendant de c) et à résolvante compacte. Ses valeurs propres λ_k sont de multiplicité un. On

(*) Reçu le 10 juin 1995, accepté le 31 mars 1998

(1) Laboratoire de Mathématiques, U.R.A. 1870, U.F.R. Sciences, Université de Reims-Champagne-Ardenne, B.P. 347, F-51062 Reims Cedex
E-mail : lisette.jager@univ-reims.fr

appelle ψ_k la fonction propre de L dans cet espace de Sobolev, associée à la valeur propre λ_k et normalisée par un certain équivalent en $-\infty$ (cf. [U2]).

On peut appliquer à cet opérateur des méthodes classiques, puisqu'il s'agit d'un problème de Sturm-Liouville singulier : le paragraphe 2.1 donne une estimation du $N(\lambda)$ et prouve que la fonction ψ_k est de la parité de k.

Mais la vraie motivation de ce travail est l'étude de L à l'aide du calcul symbolique de Klein–Gordon (§ 2.2) Ce calcul associe, à une fonction f convenable, appelée symbole, un opérateur noté $\mathrm{Op}(f)$. Notons ρ la fonction

$$\rho = \rho(x,p) = \left(1+\frac{x^2}{c^2}\right)\left(1+\frac{p^2}{c^2}\right). \tag{0.2}$$

L'oscillateur relativiste s'écrit $L = \mathrm{Op}\big(\pi c^2(\rho-1) - (16\,\pi c^2)^{-1}\big)$ et l'on connaît l'expression exacte (ce fait est fondamental) du symbole de l'opérateur $L\ \mathrm{Op}\big(f(\rho)\big)$:

$$\left(\pi c^2(\rho-1) - \frac{1}{16\,\pi c^2}\right) f(\rho) - \frac{1}{4\pi c^2}\left(\rho(\rho-1)f''(\rho) + (2\rho-1)f'(\rho)\right) \tag{0.3}$$

[U2, (3.10)]. On voit par là que l'opérateur $\mathrm{Op}(\rho^j)$ est un polynôme de degré j exactement en $\mathrm{Op}(\rho)$, noté P_j. Ces polynômes apparaissent, d'abord, dans un développement asymptotique, en $-\infty$, de la fonction ψ_k. Rappelons la définition des opérateur F_s, qui sont indispensables à notre étude :

$$F_s = \mathrm{Op}\left(\sqrt{2\,e^s}\exp(2\pi c^2 \operatorname{sh} s)\exp(-2\pi c^2\, e^s \rho)\right). \tag{0.4}$$

Ils vérifient la propriété

$$F_s\psi_k = \psi_k(c \operatorname{sh} s)\psi_k$$

qui a pour conséquence le développement

$$\psi_k(c\operatorname{sh}(s)) = \\ = \sqrt{2\,e^s}\, e^{2\pi c^2 \operatorname{sh} s}\left(\sum_{j=0}^{N-1}\frac{(-2\pi c^2\, e^s)^j}{j!}P_j\left(\frac{\lambda_k}{\pi c}+1+\frac{1}{16\,\pi^2 c^4}\right) + \mathrm{O}(e^{Ns})\right). \tag{0.5}$$

C'est un développement du genre BKW, mais dont les coefficients sont explicites.

On retrouve les P_j dans le développement de Fourier–Floquet *convergent* de certaines fonctions de Mathieu. En effet, sous le changement de variable $x = c\,\mathrm{sh}\, s$, l'opérateur L devient

$$M = -\frac{1}{4\pi c^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2} - 2\pi^2 c^4(\mathrm{ch}\, 2s - 1)\right). \tag{0.6}$$

On reconnaît la forme modifiée de l'équation de Mathieu [Ca]. Les fonctions de Mathieu ont été introduites pour résoudre le problème de Dirichlet dans une ellipse (de même que les fonctions de Bessel, pour le résoudre dans un disque). Elles apparaissent lorsqu'on pose

$$x = a\,\mathrm{ch}\,\xi \cos\eta\,, \quad y = a\,\mathrm{sh}\,\xi \sin\eta$$

pour séparer les variables, le nombre a dépendant des paramètres de l'ellipse. On ne dispose pas de l'expression explicite de leurs coefficients de Fourier–Floquet, même si l'on connaît depuis longtemps les relations de récurrence à trois termes qu'ils vérifient. On montre (§ 2.2) que, dans le cas des fonctions de Mathieu 2π-antipériodiques, ces coefficients de Fourier s'expriment grâce aux P_j, le développement des fonctions de Mathieu d'un autre type de (quasi) périodicité faisant intervenir d'autres suites de polynômes généralisant les P_j et dont la définition est un peu moins immédiate.

Dans la section 3, on emploie systématiquement les techniques du calcul symbolique. On y propose un calcul approché des opérateurs $L^{\beta}(\ln L)^{d}$ (pour β complexe et d entier positif), c'est-à-dire un développement asymptotique selon les classes de symboles du calcul de Klein–Gordon, du symbole de l'opérateur $L^{\beta}(\ln L)^{d}$. La démonstration s'inspire de la méthode de Seeley [S], utilisée par [HR] dans le cadre du calcul de Weyl, et basée sur la formule de Dunford; elle est facilitée par l'emploi de la formule de composition (0.3). Une application de ce calcul symbolique est l'étude de la fonction zêta de l'oscillateur définie, pour $\Re s > 1/2$ et $\Re b > -(\pi c^2)^{-1}\lambda_0 - 1 - (16\,\pi^2 c^4)^{-1}$, par

$$\zeta_L(s,b) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda_k}{\pi c^2} + 1 + \frac{1}{16\,\pi^2 c^4} + b\right)^{-s} \quad ;$$

cette fonction se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, de pôles d'ordre 2 au plus situés aux points $1/2$, $-1/2$, $-3/2$, ...

Le present article résume des parties de notre thèse [J], dans laquelle certaines preuves sont plus détaillées et qui contient d'autres développements.

1. Calcul de Klein–Gordon et oscillateur relativiste

Cette section donne le minimum de rappels nécessaires à la compréhension de ce travail : le lecteur souhaitant connaître l'origine et la structure du calcul de Klein–Gordon devra se reporter à [U1] et [U2].

On note c la *vitesse de la lumière* et l'on pose, pour tout ξ réel,

$$\langle \xi \rangle = \left(1 + \frac{\xi^2}{c^2}\right)^{1/2} . \tag{1.1}$$

L'*espace de Sobolev* $H_c^{1/2}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des distributions tempérées u telles que

$$\|u\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{u}(\xi)|^2 \langle \xi \rangle \, \mathrm{d}\xi < +\infty \,, \tag{1.2}$$

la transformée de Fourier étant normalisée par

$$(\mathcal{F}u)(\xi) = \widehat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} u(x) \, e^{-2i\pi x\xi} \, \mathrm{d}x \,.$$

Le calcul de Klein–Gordon fait correspondre un opérateur à toute fonction intégrable sur $\mathbb{R}^2$ par la règle suivante.

DÉFINITION 1.1.— *Soit f une fonction définie sur l'espace $\mathbb{R}^2$, sommable pour la mesure de Lebesgue. L'opérateur* $\mathrm{Op}(f)$*, borné sur $H_c^{1/2}(\mathbb{R})$, est défini, pour u appartenant à cet espace, par la formule*

$$\begin{aligned}(\operatorname{ch}\xi)(\mathcal{F}\,\mathrm{Op}(f)u)(c\operatorname{sh}\xi) = c\int_{\mathbb{R}^2} f\left(y, c\operatorname{sh}\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)\right)(\operatorname{ch}\eta)(\mathcal{F}u)(c\operatorname{sh}\eta) \,\times \\ \times\, e^{-2i\pi c y(\operatorname{sh}\xi - \operatorname{sh}\eta)} \operatorname{ch}\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right) \mathrm{d}\eta \, \mathrm{d}y \,.\end{aligned}$$

La fonction f est appelée le symbole de l'opérateur $\mathrm{Op}(f)$.

Les définitions suivantes permettent de donner un sens à $\mathrm{Op}(f)$ sous des conditions plus utiles sur f. La notation (x,p), préférée dans ce qui suit à la notation traditionnelle (x,ξ), est liée à l'interprétation physique du calcul de Klein–Gordon (où p est une impulsion). On appelle *fonction-poids* une fonction m strictement positive définie sur $\mathbb{R}^2$ et telle qu'il existe des constantes $C(m) > 0$ et $N(m) \geq 0$ pour lesquelles l'inégalité

$$\frac{m(x,p)}{m(y,q)} \leq C(m)\Big(1 + c^2|x-y|^2\langle q\rangle\langle p\rangle\Big)^{N(m)}\Big(\langle q\rangle\langle p\rangle - c^{-2}pq\Big)^{N(m)} \quad (1.3)$$

soit valable pour tout couple $\big((x,p),(y,q)\big)$ de points de $\mathbb{R}^2$.

Posons

$$\rho = \rho(x,p) = \langle x\rangle^2\langle p\rangle^2. \quad (1.4)$$

Les fonctions $\langle x\rangle$, $\langle p\rangle$, ρ et $1+\ln\rho$ sont des fonctions-poids tout comme, bien entendu, le produit de deux fonctions-poids, ou les puissances réelles d'une fonction-poids.

Soit m une fonction-poids. On appelle *symbole de poids* m (resp. *symbole de poids* m *et de type* $\rho^{1/2}$) toute fonction f de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant les inégalités suivantes :

$$\left|\Big(\langle p\rangle\frac{\partial}{\partial p}\Big)^j\Big(\langle p\rangle^{-1}\frac{\partial}{\partial x}\Big)^k f(x,p)\right| \leq Cm(x,p) \ \ (\text{resp.} \leq Cm(x,p)\rho(x,p)^{-k/2}) \quad (1.5)$$

pour une constante C ne dépendant que de j et k. On note

$$\|f\|_m^{N,N'} \quad (\text{resp. } \|f\|_{m,\rho^{1/2}}^{N,N'})$$

la borne inférieure des constantes C pour lesquelles les inégalités ci-dessus sont vérifiées lorsque $j \leq N$ et $k \leq N'$. On peut définir la notion de *symbole de poids* m (et éventuellement de *symbole de poids* m *et de type* $\rho^{1/2}$) *jusqu'à l'ordre de dérivabilité* N, en imposant que ces majorations soient vérifiées pour $j + k \leq N$.

On a les résultats suivants.

(i) Soit f un symbole de poids m. L'opérateur $\mathrm{Op}(f)$ opère continûment de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et se prolonge, si $m = 1$, en un opérateur continu de $H_c^{1/2}(\mathbb{R})$ dans $H_c^{1/2}(\mathbb{R})$ ou plus généralement de tout espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$ dans lui-même. Les symboles de poids 1 parcourent la classe traditionnellement notée S_{11}°, mais celle-ci, comme on sait, ne conduirait pas à des opérateurs bornés sur $L^2(\mathbb{R})$ dans le calcul de Weyl.

(ii) Soient f un symbole de poids m_1, g un symbole de poids m_2 (resp. de poids m_1, m_2 et de type $\rho^{1/2}$). L'opérateur $\mathrm{Op}(f)\,\mathrm{Op}(g)$

admet un symbole de poids $m_1 m_2$ (resp. de poids $m_1 m_2$ et de type $\rho^{1/2}$) noté $f\sharp g$, et l'on peut majorer la norme $\|f\sharp g\|_{m_1,m_2}^{N,N'}$ par $C\|f\|_{m_1}^{M,M'}\|g\|_{m_2}^{M,M'}$ où les constantes C, M et M' dépendent de N et N' mais ne dépendent des fonctions-poids m_1, m_2 que par l'intermédiaire des constantes $C(m_i)$ et $N(m_i)$.

(iii) Signalons aussi l'existence d'un développement asymptotique de la composée $f\sharp g$ de deux symboles de poids m_1 et m_2 et de type $\rho^{1/2}$ que nous ne serons pas amenés à utiliser ici. Il existe également des formules de composition sans reste valables dans l'algèbre enveloppante de la représentation de Bargmann–Wigner, dont les générateurs infinitésimaux, dans la réalisation adoptée ici, sont les opérateurs

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{2i\pi}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} = \mathrm{Op}(p) \\ \langle D\rangle &= \left(1+c^{-2}D^2\right)^{1/2} = \mathrm{Op}\Big(\langle p\rangle\Big) \\ B &= x\langle D\rangle = \mathrm{Op}\Big(x\langle p\rangle\Big)\,. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Nous nous servirons de la formule donnant le symbole $\rho\sharp f(\rho)$ rappelée en (1.8).

DÉFINITION 1.2.— *On appelle oscillateur relativiste et l'on note L l'opérateur*

$$-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - 4\pi^2x^2 + \frac{1}{c^2}\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^2\right).$$

Son symbole au sens du calcul de Klein–Gordon est la fonction $\pi c^2(\rho-1) - \left(16\,\pi c^2\right)^{-1}$. On note L_1 l'opérateur $\mathrm{Op}(\rho)$ *qui intervient plus naturellement dans certaines formules.*

L'opérateur L est essentiellement autoadjoint dans $H_c^{1/2}(\mathbb{R})$ et à résolvante compacte. Ses valeurs propres sont simples et forment une suite croissant vers $+\infty$: on note λ_k la *k-ième valeur propre de L* (resp. μ_k la *k-ième valeur propre de L_1*) et ψ_k *la fonction propre de L* dans $H_c^{1/2}(\mathbb{R})$, associée à la valeur propre λ_k, normalisée par la condition

$$\psi_k(-x) \sim \left(\frac{x}{c}\right)^{-1/2}\exp\Big(-2\pi c^2\langle x\rangle\Big)\,, \quad x \to +\infty\,. \tag{1.7}$$

Il est aisé de voir que ψ_k est paire ou impaire. La proposition 2.1 précise que ψ_k est de la parité de k, étant entendu que la plus basse valeur propre est notée λ_0.

Ce qui rend le calcul de Klein–Gordon irremplaçable pour l'étude de l'oscillateur relativiste est que les fonctions de ρ sont exactement les symboles des fonctions de L (au sens spectral). On a la formule explicite de composition [U2, 3.10] :

$$\rho\sharp f(\rho) = \rho f(\rho) - \frac{1}{4\pi^2 c^4}\big(\rho(\rho-1)f''(\rho) + (2\rho-1)f'(\rho)\big) \tag{1.8}$$

valable pour toute fonction $f \in C^\infty\big([1\,,\, +\infty\,[\big)$, vérifiant pour une certaine fonction-poids m les estimations

$$\left|\left(t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^j f(t)\right| \leq C_j m(t)\,. \tag{1.9}$$

Les opérateurs F_s définis ci-dessous interviennent dans l'étude des coefficients de Fourier–Floquet des solutions quasi périodiques de l'équation de Mathieu. Posons, pour $|\Im s| \leq \pi/2$,

$$F_s = \sqrt{2\,e^s}\,\exp(2\pi c^2 \operatorname{sh} s)\operatorname{Op}\big(\exp(-2\pi c^2\, e^s \rho)\big)\,. \tag{1.10}$$

Les fonction ψ_k sont fonctions propres de F_s ; avec la normalisation (1.7) choisie, on a

$$F_s\psi_k = \psi_k(c\operatorname{sh} s)\psi_k\,, \tag{1.11}$$

formule dans laquelle ψ_k apparaît à la fois comme fonction propre et comme valeur propre. Les opérateurs F_s opèrent de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ pour $|\Im s| \leq \pi/2$, et l'on a pour $|\Im s \pm t| \leq \pi/2$ la formule de composition suivante:

$$F_s F_t = c\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi c^2(\operatorname{ch} s \operatorname{ch} t \operatorname{ch} u + \operatorname{sh} s \operatorname{sh} t \operatorname{sh} u)} F_u\,\mathrm{d}u\,. \tag{1.12}$$

On peut déduire de (1.12) une identité intégrale vérifiée par la fonction ψ_k [U2] ou en tirer le symbole de l'opérateur $F_s F_t$ (sect. 2).

2. Fonctions de Mathieu ordinaires et fonctions propres de l'oscillateur relativiste

Le début de cette section est consacré, en partie, à l'étude classique de l'oscillateur L. Sa fonction propre ψ_k a exactement k zéros réels, elle est donc de la parité de k. La démonstration demande d'adapter la méthode de [D] puisque nous sommes en présence d'un problème de Sturm–Liouville singulier. On détermine aussi un équivalent du $N(\lambda)$ et de la k-ième valeur propre λ_k. On donne enfin un développement asymptotique de ψ_k au voisinage de $-\infty$. Celui-ci revient au développement BKW. On l'obtient cependant d'une manière totalement différente. Basée sur l'utilisation du calcul de Klein-Gordon, celle-ci permet d'exprimer d'emblée les coefficients du développement en termes de la suite de polynômes $\left(P_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $P_n(L_1) = \mathrm{Op}(\rho^n)$.

Le second paragraphe concerne les fonctions de Mathieu ordinaires. Ce sont les solutions périodiques ou quasi périodiques de l'équation

$$u'' + \left(2\pi^2 c^4 \cos 2t + 2\pi^2 c^4 + \frac{1}{4}\right) u = 4\pi^2 c^4 \mu u\,.$$

Il s'agit bien de l'équation de Mathieu générale. La forme $4\pi^2c^4(\mu - 1/2) - 1/4$ du paramètre spectral permet de regarder le membre de gauche comme une version "modifiée" (par le changement de t en it) de l'opérateur défini en (0.6). Les coefficients de Fourier (ou de Fourier–Floquet) des fonctions de Mathieu sont inconnus et vérifient des équations de récurrence à trois termes. Le but de cette section est d'expliciter ces coefficients en termes de polynômes intervenant naturellement dans le calcul de Klein–Gordon. Par exemple, si la fonction de Mathieu est antipériodique, elle admet le développement suivant qui fait apparaître les polynômes P_n cités ci-dessus :

$$\begin{aligned} e^{-2i\pi c^2 \sin t} u(t) = v_1 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(-2\pi c^2\right)^{n-1}}{(n-1)!} P_{n-1}(\mu)\, e^{i(n-1/2)t} + \\ + v_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(2\pi c^2\right)^{n}}{n!} P_n(\mu)\, e^{-i(n+1/2)t}\ ; \end{aligned}$$

ce développement est convergent à la différence de celui qui a été considéré en (0.5) (le développement BKW de ψ_k en $-\infty$); leurs coefficients sont cependant similaires.

2.1 Zéros réels des fonctions ψ_k ; estimation du $N(\lambda)$; développement asymptotique en $-\infty$

PROPOSITION 2.1.— *La k-ième fonction propre ψ_k de l'oscillateur relativiste L a exactement k zéros réels; en particulier, elle est de la parité de k.*

Preuve.— Par le changement de fonction défini par

$$v_k(x) = \langle x \rangle^{1/2} \psi_k(x)\,,$$

on ramène l'équation définissant ψ_k à l'équation sans terme du premier ordre

$$y'' + f(\lambda_k, x) y = 0$$

avec

$$f(\lambda, x) = -4\pi^2 c^2 + \left(4\pi^2 c^2 + \frac{1}{4c^2} + 4\pi\lambda\right) \langle x \rangle^{-2} - \frac{3}{4c^2} \langle x \rangle^{-4}\,. \tag{2.1}$$

Le résultat serait classique pour un problème de Sturm–Liouville régulier. On adapte ici la méthode exposée dans [D, chap. XV] ; on étudie l'équation du second ordre

$$y'' + f(\lambda, x) y = 0\,. \tag{2.2}$$

On note $v_\lambda(x)$ l'unique solution de (2.2) admettant en $-\infty$ le développement suivant (obtenu par la méthode BKW ou toute autre méthode, voir (2.4)) :

$$v_\lambda(x) \sim e^{2\pi c x} \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} B_n x^{-n}\right)\,,$$

on note aussi

$$v'_\lambda(x) \sim e^{2\pi c x} \left(2\pi c + 2\pi c \sum_{n=1}^{+\infty} B_n x^{-n} - \sum_{n=1}^{+\infty} n B_n x^{-n-1}\right)\,.$$

En $+\infty$, la fonction v_λ (et sa dérivée) admet également un développement BKW. Elle est équivalente pour une certaine constante C à $C e^{2\pi c x}$ si λ n'est pas valeur propre de L ou à $C e^{-2\pi c x}$ dans le cas contraire.

On effectue le changement de fonction non linéaire

$$y(x) = r(x)\sin\bigl(\theta(x)\bigr)\,, \quad y'(x) = r(x)\cos\bigl(\theta(x)\bigr)$$

dans l'équation (2.2). La fonction θ vérifie l'équation

$$\theta'(x) = \cos^2\bigl(\theta(x)\bigr) + f(\lambda, x)\sin^2\bigl(\theta(x)\bigr)\,. \tag{2.3}$$

On vérifie que l'unique solution θ_λ de (2.3) tendant vers $\operatorname{Arctg}\bigl((2\pi c)^{-1}\bigr)$ en $-\infty$ coïncide, au voisinage de $-\infty$, avec la fonction $\operatorname{Arctg}\Bigl(v_\lambda(x)\bigl(v'_\lambda(x)\bigr)^{-1}\Bigr)$ et s'écrit $\operatorname{Arctg}\Bigl(v_\lambda(x)\bigl(v'_\lambda(x)\bigr)^{-1}\Bigr) + k\pi$ sur tout intervalle où v'_λ ne s'annule pas. Le nombre de zéros de la fonction v_λ est égal au nombre de fois que la fonction θ_λ passe par un multiple entier de π. La fonction $\lambda \mapsto \theta_\lambda(x)$ est croissante et continue et sa limite en $+\infty$ est congrue, modulo $\pi\mathbb{Z}$, à $\operatorname{Arctg}\bigl((2\pi c)^{-1}\bigr)$ si λ n'est pas valeur propre de l'oscillateur ou à $\operatorname{Arctg}\bigl((-2\pi c)^{-1}\bigr)$ dans le cas contraire. Pour $\lambda < \lambda_0$ (plus petite valeur propre de L), la limite en $+\infty$ est $\operatorname{Arctg}\bigl((2\pi c)^{-1}\bigr)$ et l'on démontre que la fonction

$$\lambda \longmapsto \lim_{x\to+\infty} \theta_\lambda(x)$$

prend une unique fois la valeur $k\pi \pm \operatorname{Arctg}\bigl((2\pi c)^{-1}\bigr)$, $k \geq 1$. Ceci prouve la proposition 2.1. □

Donnons maintenant les résultats concernant les paramètres spectraux.

THÉORÈME 2.2.— *Pour tout réel λ, on définit l'entier $N(\lambda)$ comme le nombre de valeurs propres λ_k de l'oscillateur L au plus égales à λ. On a alors*

$$N(\lambda) \sim 2c\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/2} \ln(\lambda)\,, \quad \lambda \to +\infty\,.$$

Preuve.— La fonction $x \mapsto \psi_{2k+1}(c\operatorname{sh} x)$ est fonction propre, pour la valeur propre λ_{2k+1}, du problème de Sturm–Liouville suivant :

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + (4\pi c^2\lambda - 4\pi^2 c^4 \operatorname{sh}^2 x)\right) y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y \in L^2([0\,, +\infty[)\,. \end{cases} \tag{2.4}$$

Le nombre $N(\lambda)$ vérifie évidemment

$$\frac{N(\lambda)}{2} \sim \operatorname{card}\{k \in \mathbb{N} \mid \lambda_{2k+1} \leq \lambda\}.$$

Il suffit d'évaluer cette dernière quantité pour obtenir le théorème. Rappelons le résultat suivant.

THÉORÈME 2.3 ([T, théorème 7.4]).— *Soit le problème de Sturm-Liouville*

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \big(\Lambda - q(x)\big)\right) y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y \in L^2([0\,, +\infty\,[)\,. \end{cases}$$

Supposons la fonction q de classe C^1 sur $[0\,, +\infty\,[$, croissante, non bornée et telle que

$$\lim_{x \to \infty} x^3 q'(x) = +\infty\,.$$

Soit $(\Lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite croissante des valeurs propres de ce problème. Notons

$$M(\Lambda) = \operatorname{card}\{k \in \mathbb{N} \mid \Lambda_k \leq \Lambda\}$$

et soit X le réel positif tel que $q(X) = \Lambda$. Le réel $M(\Lambda)$ vérifie

$$M(\Lambda) \sim \frac{1}{\pi} \int_0^X \big(\Lambda - q(t)\big)^{1/2}\, \mathrm{d}t\,.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \frac{N(\lambda)}{2} &\sim M(4\pi c^2 \lambda) \\ &\sim \frac{1}{\pi} \int_0^{\operatorname{Argsh}((\lambda/\pi c^2)^{1/2})} \big(4\pi c^2 \lambda - 4\pi^2 c^4 \operatorname{sh}^2 t\big)^{1/2}\, \mathrm{d}t\,. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Il reste à estimer l'intégrale elliptique figurant au membre de droite de (2.5) que nous notons $I(\lambda)$. Posons $t = \operatorname{Argsh}\big(\lambda^{1/2}(\pi c^2)^{-1/2} \cos\varphi\big)$. Il vient

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \frac{2\lambda}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^2\varphi \left(1 + \frac{\lambda}{\pi c^2} - \frac{\lambda}{\pi c^2} \sin^2\varphi\right)^{-1/2} \mathrm{d}\varphi \\ &= 2c^2 \left(1 + \frac{\lambda}{\pi c^2}\right)^{1/2} \left(-\int_0^{\pi/2} \left(1 - \frac{\lambda}{\pi c^2 - \lambda} \sin^2\varphi\right)^{1/2} \mathrm{d}\varphi + \right. \\ &\qquad \left. + \int_0^{\pi/2} \left(1 - \frac{\lambda}{\pi c^2 + \lambda} \sin^2\varphi\right)^{-1/2} \mathrm{d}\varphi\right), \end{aligned}$$

donc

$$I(\lambda) = 2c^2\left(1+\frac{\lambda}{\pi c^2}\right)^{1/2}\left(K\left(\left(\frac{\lambda}{\pi c^2+\lambda}\right)^{1/2}\right) - E\left(\left(\frac{\lambda}{\pi c^2+\lambda}\right)^{1/2}\right)\right),$$

où K et E sont les intégrales elliptiques complètes. On conclut grâce aux développements :

$$K(k) = 2\ln 2 - \frac{1}{2}\ln(1-k^2) + \mathrm{O}(1-k^2) \quad \text{et} \quad E(k) = 1 + \mathrm{O}(1-k^2). \ \Box$$

COROLLAIRE 2.4.— *Pour k tendant vers l'infini, on a l'estimation suivante :*

$$\lambda_k \sim \frac{\pi k^2}{16\,c^2(\ln k)^2}.$$

Preuve.— D'après le théorème 2.2, on a

$$k+1 = N(\lambda_k) \sim 2c^2\left(\frac{\lambda_k}{\pi c^2}\right)^{1/2}\ln(\lambda_k).$$

Il suffit d'inverser approximativement la fonction $x \mapsto 2c^2(x/\pi c^2)^{1/2}\ln x$ pour obtenir le corollaire. □

Voici, pour conclure ce paragraphe, le développement asymptotique de la fonction ψ_k.

Notons L_n l'opérateur $\mathrm{Op}(\rho^n)$. La formule de composition (1.8) prouve que L_n est un polynôme de degré n exactement en $L_1 = \mathrm{Op}(\rho)$. On définit le polynôme P_n par

$$L_n = P_n(L_1) = \mathrm{Op}(\rho^n). \tag{2.6}$$

La formule (1.11), à savoir

$$F_s\psi_k = \psi_k(c\,\mathrm{sh}\, s)\psi_k\,,$$

permet de ramener la recherche du développement en $+\infty$ de la fonction ψ_k à celle d'un développement de la fonction-opérateur $s \mapsto F(s)$. Développant en série entière l'exponentielle $\exp(-2\pi c^2\, e^s\rho)$ du symbole

$$\sqrt{2\,e^s}\, e^{2\pi c^2\,\mathrm{sh}\, s}\, e^{-2\pi c^2\, e^s \rho}$$

de l'opérateur F_s, on obtient un développement selon les classes de symboles. Le j-ième terme régulier est un symbole de poids ρ^j et de type $\rho^{1/2}$; et, si l'on note $\rho^N\, e^{N_s} f_N(\rho, s)$ le reste à l'ordre N du développement de Taylor de l'exponentielle $\exp(-2\pi c^2\, e^s \rho)$, la fonction $f_N(\rho, s)$ est un symbole de poids 1 et de type $\rho^{1/2}$. On en déduit le développement

$$\psi_k(c\,\mathrm{sh}\, s) = \sqrt{2\, e^s}\, e^{2\pi c^2\, \mathrm{sh}\, s} \left(\sum_{j=0}^{N-1} \frac{(-2\pi c^2\, e^s)}{j!}\, P_j(\mu_k) + \mathrm{O}(e^{N_s}) \right) \quad ; \quad (2.7)$$

on notera que ce développement n'est pas uniforme par rapport à k.

2.2 Fonctions de Mathieu ordinaires

DÉFINITIONS ET RAPPELS 2.5

Les fonctions de Mathieu sont les solutions u quasi périodiques, de multiplicateur caractéristique $\sigma \in \mathbb{C}$ (c.-à-d. telles que $u(t + 2\pi) = \sigma u(t)$) de l'équation

$$u'' + \left(2\pi^2 c^4 \cos 2t + 2\pi^2 c^4 + \frac{1}{4}\right) u = 4\pi^2 c^4 \mu u\,. \tag{2.8}$$

Si, pour une certaine valeur de $\mu \in \mathbb{C}$, l'équation ci-dessus admet une solution 2π-périodique, elle n'en admet pas d'autre qui soit indépendante de celle-ci. Sinon, elle admet toujours deux solutions quasi périodiques indépendantes, de multiplicateurs caractéristiques inverses l'un de l'autre ([Ca], [WW]).

Si la fonction u est une solution quasi périodique de l'équation (2.8), de multiplicateur caractéristique $e^{2i\pi\nu}$ avec $\Re(\nu) \in [-1/2\,, 1/2\,[$, nous étudierons la fonction v définie par

$$e^{-2i\pi c^2 \sin t} u(t) = v(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n\, e^{i(n+\nu)t}\,. \tag{2.9}$$

Dans le cas où $\nu = -1/2$, on peut énoncer le résultat suivant.

PROPOSITION 2.6.— *Soit* $\left(P_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite de polynômes définie par*

$$P_n(\mathrm{Op}(\rho)) = P_n(L_1) = \mathrm{Op}(\rho^n)\,.$$

Les coefficients v_n *de la fonction* v *définie en (2.9) sont alors donnés par*

$$\begin{cases} v_n = \dfrac{\left(-2\pi c^2\right)^{n-1}}{(n-1)!}\, P_{n-1}(\mu) v_1 & si\ n \geq 1 \\ v_{-n} = \dfrac{\left(2\pi c^2\right)^{n}}{n!}\, P_{n}(\mu) v_0 & si\ n \geq 0. \end{cases}$$

Remarque.— Les coefficients v_0 et v_1 peuvent être choisis arbitrairement puisque, dans ce cas, l'équation de Mathieu admet deux solutions 2π-antipériodiques linéairement indépendantes.

Preuve.— D'énoncé plus simple que le cas où $\nu \neq -1/2$, traité plus loin, cette proposition se trouve de la même façon. Elle est basée sur l'identité de la relation de récurrence à trois termes vérifiée par les v_n (ainsi qu'il résulte de l'équation différentielle (2.8)) et de celle que vérifient les polynômes P_n (conséquence de (1.8)). □

Introduisons à présent, pour tout nombre complexe α, l'opérateur

$$L_\alpha = \mathrm{Op}(\rho^\alpha)$$

et si α n'est pas un entier strictement négatif, l'opérateur

$$L'_\alpha = \frac{\left(\Gamma(\alpha+1)\right)^2}{\left(4\pi^2 c^4\right)^\alpha}\, L_{-\alpha-1}\,. \tag{2.10}$$

Les opérateurs L_α et L'_α vérifient la relation

$$\left(L_1 + \frac{\alpha(\alpha+1)}{4\pi^2c^4}\right) M_\alpha = M_{\alpha+1} + \frac{\alpha^2}{4\pi^2c^4}\, M_{\alpha-1} \tag{2.11}$$

où M_α est mis pour L_α (resp. L'_α). C'est une conséquence directe de la formule de composition (1.8). On a alors le théorème suivant.

THÉORÈME 2.7.— *Pour tout α complexe, $\alpha \neq -1, -2, \ldots$, on a*

$$L_\alpha L'_{\alpha+1} - L'_\alpha L_{\alpha+1} = -\frac{\left(\Gamma(\alpha+1)\right)^2}{\left(4\pi^2 c^4\right)^\alpha}.$$

Le point principal de la preuve de ce théorème est le lemme suivant.

LEMME 2.8.— *Soit z et ζ deux nombres complexes de parties réelles strictement positives. L'opérateur $L_{-z}L_{-\zeta}$ a pour symbole la fonction*

$$\rho^{-z}\sharp\rho^{-\zeta} = \frac{2\left(2\pi c^2\right)^{z+\zeta}}{\Gamma(z)\Gamma(\zeta)}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(z+\zeta-1)u}\left(\rho+\operatorname{sh}^2 u\right)^{-1/2}\times$$
$$\times K_{z-\zeta}\left(4\pi c^2\left(\sqrt{\rho+\operatorname{sh}^2 u}+\operatorname{sh} u\right)\right)\mathrm{d}u\,.$$

Donnons une preuve un peu formelle de ce lemme. En remarquant que

$$\rho^{-z} = \frac{1}{\Gamma(z)}\int_0^{+\infty} e^{-\rho t}t^{z-1}\,\mathrm{d}t\,, \tag{2.12}$$

et en rappelant que $e^{-\rho t}$ est le symbole de l'opérateur

$$\left(\pi c^2 t^{-1}\right)^{1/2}\exp\left(-2\pi c^2\operatorname{sh}\left(\ln\left(\frac{t}{2\pi c^2}\right)\right)\right)F_{\ln(t/2\pi c^2)} =$$
$$= \left(\pi c^2 t^{-1}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{t}{2}+\frac{2\pi^2c^4}{t}\right)F_{\ln(t/2\pi c^2)}\,,$$

on se ramène à composer des opérateurs F_s.

Calculons le symbole $h_{s,t}\left(\rho(x,p)\right)$ de l'opérateur F_sF_t. D'après la formule (1.9) qui donne une expression intégrale de F_sF_t et la définition (1.3), on a, pour toute fonction $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$(\operatorname{ch}\xi)\left(\mathcal{F}(F_sF_t\varphi)\right)(c\operatorname{sh}\xi) =$$
$$= c\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi c^2(\operatorname{ch}s\operatorname{ch}t\operatorname{ch}u+\operatorname{sh}s\operatorname{sh}t\operatorname{sh}u)}\times$$
$$\times c\int_{\mathbb{R}^2}\exp\left(-2\pi c^2e^u\left(\langle y\rangle^2\operatorname{ch}^2\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)\right)\right)\sqrt{2\,e^u}\,\times$$
$$\times e^{2\pi c^2\operatorname{sh}u}\left(e^{-2i\pi cy(\operatorname{sh}\xi-\operatorname{sh}\eta)}(\operatorname{ch}\eta)(\mathcal{F}\varphi)(c\operatorname{sh}\eta)\operatorname{ch}\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)\right)\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}u\;;$$

ce qui donne, si l'on utilise la formule

$$\int_{\mathbb{R}} e^{u/2}\, e^{-z\, e^{-u} - \zeta\, e^{u}}\, \mathrm{d}u = \left(\frac{\pi}{\zeta}\right)^{1/2} e^{-2\sqrt{z\zeta}}$$

valable pour $\Re z$ et $\Re\zeta$ strictement positives [MOS, p. 85],

$$\begin{aligned}
&(\operatorname{ch}\xi)\big(\mathcal{F}(F_s F_t \varphi)\big)(c \operatorname{sh}\xi) = \\
&\quad = c \int_{\mathbb{R}^2} e^{-2i\pi c y(\operatorname{sh}\xi - \operatorname{sh}\eta)} (\operatorname{ch}\eta)(\mathcal{F}\varphi)(c\operatorname{sh}\eta) \operatorname{ch}\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right) \times \\
&\quad \times \left(\operatorname{sh}^2\left(\frac{s+t}{2}\right) + \langle y\rangle^2 \operatorname{ch}^2\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)\right)^{-1/2} \times \\
&\quad \times e^{-4\pi c^2 \operatorname{ch}((s-t)/2)\left(\operatorname{sh}^2((s+t)/2) + \langle y\rangle^2 \operatorname{ch}^2((\xi+\eta)/2)\right)^{1/2}} \, \mathrm{d}\eta\, \mathrm{d}y\,.
\end{aligned}$$

D'après la définition 1.1, le symbole $h_{s,t}\big(\rho(x,p)\big)$ de l'opérateur $F_s F_t$ est donc

$$\begin{aligned}
&h_{s,t}(\rho) = \\
&= \left(\rho + \operatorname{sh}^2\left(\frac{s+t}{2}\right)\right)^{-1/2} \exp\left(-4\pi c^2 \operatorname{ch}\left(\frac{s-t}{2}\right) \left(\rho + \operatorname{sh}^2\left(\frac{s+t}{2}\right)\right)^{1/2}\right).
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Notant que

$$\begin{aligned}
\exp\left(-2\pi c^2 \left(\operatorname{sh}\left(\ln\left(\frac{\tau}{2\pi c^2}\right)\right) + \operatorname{sh}\left(\ln\left(\frac{t}{2\pi c^2}\right)\right)\right)\right) &= \\
= \exp\left(-\frac{1}{2}(t+\tau) + 2\pi^2 c^4 \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{\tau}\right)\right),
\end{aligned}$$

on a d'après (2.12) :

$$\begin{aligned}
&\Gamma(z)\Gamma(\zeta)\rho^{-z} \sharp \rho^{-\zeta} = \\
&= \int_{\mathbb{R}+\times\mathbb{R}+} \tau^{z-1} t^{\zeta-1} \left(\frac{\tau}{\pi c^2}\right)^{-1/2} \left(\frac{t}{\pi c^2}\right)^{-1/2} \times \\
&\times \exp\left(-\frac{1}{2}(t+\tau) + 2\pi^2 c^4 \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{\tau}\right)\right) h_{\ln(\tau/(2\pi c^2)),\, \ln(t/(2\pi c^2))}(\rho)\, \mathrm{d}\tau\, \mathrm{d}t\,.
\end{aligned}$$

Remplaçant le symbole de $F_{\ln(t/(2\pi c^2))}F_{\ln(\tau/(2\pi c^2))}$ par son expression (prop. 2.6) et posant

$$u = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\tau t}{4\pi^2 c^4}\right), \quad v = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\tau}{t}\right)$$

(alors $\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau = 8\pi^2 c^4\, e^{2u}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$), on obtient

$$\rho^{-z}\sharp\rho^{-\zeta} =$$
$$= \frac{(2\pi c^2)^{z+\zeta}}{\Gamma(z)\Gamma(\zeta)} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{(z+\zeta-1)u}\, e^{(z-\zeta)v}\, e^{-4\pi c^2\,\mathrm{ch}\, v(\mathrm{sh}\, u+\sqrt{\rho+\mathrm{sh}^2 u})}}{\sqrt{\rho+\mathrm{sh}^2 u}}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,.$$

Enfin, une application de la formule

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z\,\mathrm{ch}\, u}\, e^{\nu u}\,\mathrm{d}u$$

valable pour $\Re(z) > 0$, permet de conclure.

Remarque. — Il conviendrait de prouver que le membre de droite de l'équation du lemme 2.8 est un symbole de poids $\rho^{-\Re(\zeta+z)}$ et de type $\rho^{1/2}$ (c.-à-d. vérifiant les inégalités (1.5)); on épargnera au lecteur ces calculs minutieux, basés sur des majorations classiques de la fonction $K_{z-\zeta}$ et sur les encadrements suivants de l'argument $\mathrm{sh}\, u + (\rho+\mathrm{sh}^2 u)^{1/2}$ de la fonction de Bessel :

$$\begin{cases} \mathrm{sh}\, u + \sqrt{\mathrm{sh}^2 u + \rho} \geq \dfrac{1}{2} \\ \mathrm{sh}\, u + \sqrt{\mathrm{sh}^2 u + \rho} \geq \dfrac{1}{2}\sqrt{\rho\, e^u} \end{cases} \quad \text{si } 0 \geq u \geq -\ln\rho,$$

$$\begin{cases} \dfrac{\rho}{2|\mathrm{sh}\, u| + \sqrt{\rho}} \leq \sqrt{\mathrm{sh}^2 u + \rho} + \mathrm{sh}\, u \leq \dfrac{\sqrt{2}\,\rho}{2|\mathrm{sh}\, u| + \sqrt{\rho}} \\ \dfrac{1}{2}\rho|\mathrm{sh}\, u|^{-1} \geq \dfrac{\rho}{2|\mathrm{sh}\, u| + \sqrt{\rho}} \geq \dfrac{1}{4}\rho|\mathrm{sh}\, u|^{-1} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{si } \rho \geq 4 \\ \text{et} \\ u \leq -\ln\rho. \end{array}$$

Preuve du théorème 2.7

Remplaçons L'_α et $L'_{\alpha+1}$ par leur expression (2.10) dans l'énoncé du théorème 2.7. Prouver ce théorème revient à démontrer que

$$\frac{(\alpha+1)^2}{4\pi^2 c^4} L_\alpha L_{-\alpha-2} - L_{-\alpha-1} L_{\alpha+1} = -I\,.$$

Nous allons, dans un premier temps, établir ce résultat pour un nombre imaginaire pur $z = \alpha + 1$. Considérons pour cela l'opérateur

$$\frac{1}{4\pi^2 c^4}(z+\varepsilon)(z-\varepsilon)L_{z-1-\varepsilon}L_{-z-1-\varepsilon} - L_{z-\varepsilon}L_{-z-\varepsilon}\,,$$

où ε est un nombre > 0 appelé à tendre vers 0. On calcule, grâce au lemme 2.8, le symbole $H(z,\rho,\varepsilon)$ de cet opérateur. Il vient

$$H(z,\rho,\varepsilon) = \frac{-4\big(2\pi c^2\big)^{2\varepsilon}}{\Gamma(z+\varepsilon)\Gamma(-z+\varepsilon)}\int_{\mathbb{R}}\big(\rho+\operatorname{sh}^2 u\big)^{-1/2}e^{2\varepsilon u}\operatorname{ch} u \times$$
$$\times K_{2z}\Big(4\pi c^2\big(\operatorname{sh} u + \sqrt{\rho+\operatorname{sh}^2 u}\big)\Big)\,du\,,$$

(la facteur $(z+\varepsilon)(z-\varepsilon)$ se simplifie avec le facteur $\Gamma(1+\varepsilon-z)\Gamma(1+\varepsilon+z)$ du symbole de $L_{z-1-\varepsilon}L_{-z-1-\varepsilon}$). En posant $t = \operatorname{sh} u + \big(\rho+\operatorname{sh}^2 u\big)^{1/2}$, on obtient

$$H(z,\rho,\varepsilon) = \frac{-4\big(\pi c^2\big)^{2\varepsilon}}{\Gamma(z+\varepsilon)\Gamma(-z+\varepsilon)}\int_{\mathbb{R}}\left(\left(t-\frac{\rho}{t}\right)+\sqrt{\left(t-\frac{\rho}{t}\right)^2+4}\right)^{2\varepsilon}\times$$
$$\times K_{2z}(4\pi c^2 t)\,\frac{\mathrm{d}t}{t}\,.$$

On peut montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\left|\left(\left(t-\frac{\rho}{t}\right)+\sqrt{\left(t-\frac{\rho}{t}\right)^2+4}\right)^{2\varepsilon} - \left(\frac{2t}{\rho}\right)^{2\varepsilon}\right| \le Ct^2 \qquad (2.14)$$

pour $(t,\rho,\varepsilon) \in \mathbb{R}^+ \times [1\,,+\infty[\, \times\,]0\,,1/2]$. On a alors

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^\infty\left(\left(\left(t-\frac{\rho}{t}\right)+\sqrt{\left(t-\frac{\rho}{t}\right)^2+4}\right)^{2\varepsilon} - \left(\frac{2t}{\rho}\right)^{2\varepsilon}\right)K_{2z}(4\pi c^2 t)\frac{\mathrm{d}t}{t} = 0\,.$$

On sait par ailleurs [MOS, p. 91] que, pour $\varepsilon > 0$,

$$\int_0^{+\infty} t^{2\varepsilon-1}K_{2z}(4\pi c^2 t)\,\mathrm{d}t = 2^{2\varepsilon-2}\big(4\pi c^2\big)^{-2\varepsilon}\Gamma(\varepsilon+z)\Gamma(\varepsilon-z)$$

donc $\lim_{\varepsilon\to 0} H(z,\rho,\varepsilon) = -1$.

Ceci prouve le théorème 2.7 lorsque $z \in i\mathbb{R}$ et l'on étend cette égalité à tout z complexe différent de -1, -2, ... par prolongement analytique. □

DÉFINITION ET PROPOSITION 2.9.— *Soit $\alpha \in \mathbb{C}\backslash(-\mathbb{N}^*)$. Considérons les deux suites de polynômes (P_n^α) et (Q_n^α) définies par la relation de récurrence suivante (où (R_n^α) est mis pour (P_n^α) ou (Q_n^α)) :*

$$R_{n+1}^\alpha(X) = \left(X + \frac{(\alpha+n)(\alpha+n+1)}{4\pi^2c^4}\right) R_n^\alpha(X) - \frac{(\alpha+n)^2}{4\pi^2c^4} R_{n-1}^\alpha(X)$$

et les conditions initiales

$$P_0^\alpha = 1\,,\ P_1^\alpha = 0 \quad et \quad Q_0^\alpha = 0\,,\ Q_1^\alpha = 1\,.$$

On a alors, pour n entier ≥ 0,

$$L_{\alpha+n} = P_n^\alpha(L_1)L_\alpha + Q_n^\alpha(L_1)L_{\alpha+1}$$
$$L'_{\alpha+n} = P_n^\alpha(L_1)L'_\alpha + Q_n^\alpha(L_1)L'_{\alpha+1}\,.$$

Inversement

$$Q_n^\alpha(L_1) = L_{\alpha+n}L_{-\alpha-1} - \frac{1}{(4\pi^2c^4)^n}\left(\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+1)}\right)^2 L_\alpha L_{-\alpha-n-1}\,,$$

$$P_n^\alpha(L_1) = -\frac{1}{(4\pi^2c^4)^n}\left(\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+1)}\right)^2 L_{\alpha+1}L_{-\alpha-n-1} + \\ - \frac{(\alpha+1)^2}{4\pi^2c^4} L_{-\alpha-2}L_{\alpha+n}\,.$$

Le premier point se vérifie par récurrence en utilisant la forme de composition (1.8). Pour exprimer les opérateurs $Q_n^\alpha(L_1)$ et $P_n^\alpha(L_1)$ en fonction des L_α, on résout le système d'équations obtenu dont le déterminant est donné par le théorème 2.7. □

On a enfin le résultat suivant.

THÉORÈME 2.10.— *Soit ν un nombre complexe différent de $-1/2$ tel que $\Re\nu[-1/2\,,\,1/2[$. Avec la notation (2.9), les coefficients v_n et v_{-n} sont donnés pour $n \in \mathbb{N}$ par les formules*

$$v_n = (-2\pi c^2)^n \frac{\Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(n+\nu+1/2)}\left(v_0 P_n^{\nu-1/2}(\mu) - \frac{\nu+1/2}{2\pi c^2} v_1 Q_n^{\nu-1/2}(\mu)\right)$$

$$v_{-n} = (2\pi c^2)^n \frac{\Gamma(1/2-\nu)}{\Gamma(n+1/2-\nu)}\left(v_0 P_n^{-\nu-1/2}(\mu) + \left(\left(\mu + \frac{\nu^2-1/4}{2\pi^2c^4}\right)v_0 + \right.\right. \\ \left.\left. + \frac{\nu+1/2}{2\pi c^2} v_1\right) Q_n^{-\nu-1/2}(\mu)\right)\,.$$

Preuve.— La suite de terme général $z_n = (-2\pi c^2)^{-n}\Gamma(n+\nu+1/2)v_n$ (resp. $y_n = (2\pi c^2)^{-n}\Gamma(n-\nu+1/2)v_{-n}$) vérifie la relation de récurrence que vérifient les suites numériques $(P_n^{\nu-1/2}(\mu))$ et $(Q_n^{\nu-1/2}(\mu))$ (resp. les suites numériques $(P_n^{-\nu-1/2}(\mu))$ et $(Q_n^{-\nu-1/2}(\mu))$), à savoir

$$\left(\mu + \frac{1}{4\pi^2 c^4}\left(n+\nu-\frac{1}{2}\right)\left(n+\nu+\frac{1}{2}\right)\right) z_n = \\ = \frac{1}{4\pi^2 c^4}\left(n+\nu-\frac{1}{2}\right)^2 z_{n-1} + z_{n+1}$$

et respectivement

$$\left(\mu + \frac{1}{4\pi^2 c^4}\left(n-\nu-\frac{1}{2}\right)\left(n-\nu+\frac{1}{2}\right)\right) y_n = \\ = \frac{1}{4\pi^2 c^4}\left(n-\nu-\frac{1}{2}\right)^2 y_{n-1} + y_{n+1}$$

comme on le voit en partant de l'équation différentielle (2.5). Dans chacun des deux cas, ces deux suites sont linéairement indépendantes et l'on peut écrire z_n sous la forme

$$z_n = z_0 P_n^{\nu-1/2}(\mu) + z_1 Q_n^{\nu-1/2}(\mu)$$

et de même

$$y_n = y_0 P_n^{-\nu-1/2}(\mu) + y_1 Q_n^{-\nu-1/2}(\mu)\,.$$

Il suffit de calculer z_0, z_1, y_0 et y_1 en fonction de v_0 et v_1 pour conclure.

3. Calcul symbolique approché des puissances de L_1 Fonction zêta de l'oscillateur L_1

On propose dans cette section un encadrement de λ_k moins précis en ce qui concerne les puissances de k, mais prouvant que la limite non relativiste du spectre de L est celui de l'oscillateur harmonique. La démonstration repose sur la comparaison de l'opérateur $\mathcal{L}$, isospectral à $L - (16\,\pi c^2)^{-1}$, apparaissant dans la formule de composition (1.8), avec l'oscillateur de Laguerre qui a même spectre que l'oscillateur harmonique.

On donne ensuite un développement asymptotique du symbole de l'opérateur $L_1^{\beta}(\ln L_1)^d$ selon les classes de symboles du calcul de Klein–Gordon. On adapte ici la démonstration de [S] et [HR] basée sur la formule de Dunford et le choix d'un contour complexe approprié. On profite en outre du fait que l'ensemble des opérateurs dont le symbole (de Klein–Gordon) ne dépend que de ρ constitue une algèbre pour la composition.

Une application de ce calcul symbolique est l'étude de la fonction zêta de l'oscillateur L. On démontre qu'elle admet un prolongement méromorphe sur tout $\mathbb{C}$ dont les pôles sont tous d'ordre deux au plus et sont situés aux points $-n+1/2$ (n étant un entier ≥ 0).

THÉORÈME 3.1.— *La k-ième valeur propre λ_k de l'oscillateur L vérifie l'encadrement*

$$k+\frac{1}{2}\leq\lambda_k\leq k+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\pi c^2}\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right).$$

Preuve.— Bornons-nous à prouver l'inégalité de gauche car celle de droite est le résultat d'une démonstration analogue. L'opérateur L est est autoadjoint sur l'espace de Sobolev $H_c^{1/2}(\mathbb{R})$, dépendant de c, qui complique sa comparaison avec l'oscillateur harmonique. Mais il a le même spectre qu'un certain opérateur autoadjoint sur un espace de Hilbert fixe. Soit $\mathcal{L}$ l'oscillateur de "Mathieu–Laguerre" donné par

$$\mathcal{L}=\frac{-1}{4\pi}\left(r\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)+\pi r-\frac{-1}{4\pi c^2}\left(r^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}+2r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right),$$

initialement défini sur $C_0^\infty(]0,+\infty[)$. L'oscillateur $\mathcal{L}$ admet, d'après [U3], une extension autoadjointe à l'espace des

$$\left\{u\in L^2(\mathbb{R}^+,\mathrm{d}r)\mid \mathcal{L}u\in L^2(\mathbb{R}^+,\mathrm{d}r)\text{ et }ru'(r)\big|_{r=0}=0\right\}.$$

Avec cette condition initiale, il est à résolvante compacte et a même spectre que l'opérateur $L+\left(16\,\pi c^2\right)^{-1}$. Cet opérateur apparaît en effet dans la formule de composition par le symbole de L. Si les symboles r et ρ sont liés par $\rho=1+c^{-2}r$ et si la fonction g vérifie les conditions (1.9), alors l'opérateur $L\,\mathrm{Op}\big(g(r)\big)$ a pour symbole la fonction $\Big(\big(\mathcal{L}-\left(16\,\pi c^2\right)^{-1}\big)g\Big)(r)$. Notons

$$\mathcal{L}_\infty=-\frac{1}{4\pi}\left(r\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)+\pi r$$

l'oscillateur de Laguerre. Avec la même condition initiale que ci-dessus $\mathcal{L}_\infty$ est autoadjoint, à résolvante compacte et ses valeurs propres sont les nombres $k+1/2$ (pour k entier ≥ 0).

Soit E l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur $[\,0\,,+\infty\,[$, à décroissance rapide en l'infini. Soit f une fonction de E. On a

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}f,f) &= (\mathcal{L}_\infty f,f) - \frac{1}{4\pi c^2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\Big(r^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\Big)f\,,\,f\right) \\ &= (\mathcal{L}_\infty f,f) + \frac{1}{4\pi c^2}\left\|r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}f\right\|^2 .\end{aligned}$$

On vérifie que l'opérateur $r(\mathrm{d}/\mathrm{d}r)+1/2$ est antisymétrique sur $E \subset L^2(\mathbb{R}^{+*},\mathrm{d}r)$ et donc que

$$\left\|r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}f\right\|^2 = \left\|\Big(r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}+\frac{1}{2}\Big)f\right\|^2 + \frac{1}{4}\|f\|^2 \;;$$

on a établi sur E l'inégalité

$$(\mathcal{L}_\infty f,f) \leq \left(\Big(\mathcal{L}-\frac{1}{16\,\pi c^2}\Big)f\,,\,f\right) . \tag{3.1}$$

Pour déduire de (3.1) une inégalité portant sur les valeurs propres de $\mathcal{L}$ et de $\mathcal{L}_\infty$, nous utiliserons le lemme suivant.

LEMME 3.2.— *Soit H un espace de Hilbert dont on note $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ le produit scalaire et $\|\cdot\|$ la norme. Soit E un sous-espace de H, dense dans H pour la norme $\|\cdot\|$, soient A et B deux opérateurs définis dans H à domaine contenant E, autoadjoints. On suppose que le spectre de A est contenu dans $\mathbb{R}^{+*}$, que A^{-1} et B^{-1} sont compacts, que les opérateurs $A^{\pm 1}$, $A^{\pm 1/2}$ et $B^{\pm 1}$ conservent E et que l'on a pour $x \in E$ l'inégalité suivante*

$$(Bx,x) \geq (Ax,x) .$$

Si l'on note b_k (resp. a_k) la k-ième valeur propre de B (resp. A), on a alors

$$b_k \geq a_k .$$

Preuve. — On a, pour tout $x \in E$,

$$(A^{-1/2}BA^{-1/2}x\,,\,x) = (BA^{-1/2}x\,,\,A^{-1/2}x) \geq (A^{1/2}x\,,\,A^{-1/2}x) = \|x\|^2 .$$

L'opérateur $\left(A^{-1/2}BA^{-1/2}\right)^{-1}$ conserve E, donc

$$\left\|A^{1/2}B^{-1}A^{1/2}x\right\|^2 \leq (x\,,\,A^{1/2}B^{-1}A^{1/2}x) \leq \|x\|\,\left\|A^{1/2}B^{-1}A^{1/2}x\right\| ,$$

et $\left\|A^{1/2}B^{-1}A^{1/2}x\right\| \leq \|x\|$. Cela donne bien

$$0 \leq (x\,,\,A^{1/2}B^{-1}A^{1/2}x) \leq \|x\|^2 .$$

En remplaçant dans cette inégalité x par $A^{-1/2}x$, on obtient

$$0 \leq (B^{-1}x, x) \leq (A^{-1}x, x) ,$$

inégalité qui se prolonge à H tout entier; on conclut en utilisant le principe du minimax. □

Pour appliquer ce lemme (avec $H = L^2(\mathbb{R}^{+*}, \mathrm{d}r)$, $A = \mathcal{L}_\infty$ et $B = \mathcal{L} - \left(16\,\pi c^2\right)^{-1}$), nous devons d'abord prouver que les opérateurs $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}_\infty$ laissent l'espace E invariant. Nous utiliserons dans ce but la caractéristion de l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ par les produits scalaires (au sens de $L^2(\mathbb{R}^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y)$) avec les fonctions d'Hermite. La fonction d'Hermite

$$\Phi_{\alpha,\beta}(x,y) = \sqrt{\frac{(2\pi)^{\alpha+\beta}}{\alpha!\,\beta!}}\left(\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x} - x\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y} - y\right)^{\beta} e^{-\pi(x^2+y^2)}$$

est fonction propre, pour la valeur $1+\alpha+\beta$, de l'oscillateur harmonique standard sur $\mathbb{R}^2$ et le produit scalaire $(\Phi_{\alpha,\beta}, g)$ de la fonction $\Phi_{\alpha,\beta}$ avec une fonction g à décroissance rapide sur $\mathbb{R}^2$ vérifie

$$(\Phi_{\alpha,\beta}, g) = \mathrm{O}\Big(\left(1+\alpha+\beta\right)^{-N}\Big)$$

pour N arbitrairement grand. Réciproquement, une fonction g de carré intégrable et dont les produits scalaires avec les fonctions d'Hermite vérifient de telles estimations est à décroissance rapide. Soit donc f une fonction radiale appartenant à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ et posons $(\tau f)(r) = f(r^{1/2}, 0)$. La fonction τf appartient à E et l'on a

$$\tau^{-1}\mathcal{L}_\infty\tau = -\frac{1}{16\,\pi}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + \pi(x^2+y^2)$$

opérateur qui se ramène par un changement de variable élémentaire à l'oscillateur harmonique standard sur $\mathbb{R}^2$. Les puissances réelles de $\mathcal{L}_\infty$ conservent donc E.

Montrons que $\left(\mathcal{L} - \left(16\,\pi c^2\right)^{-1}\right)^{-1}$ conserve E. On a rappelé plus haut que l'opérateur $L\,\mathrm{Op}\big(g(r)\big)$ a pour symbole la fonction $\left(\mathcal{L} - \left(16\,\pi c^2\right)^{-1}\right)g$. Nous admettons ici, provisoirement, que l'opérateur L^{-1} admet un symbole de poids ρ^{-1} et de type $\rho^{1/2}$ et conserve donc $\mathcal{S}(\mathbb{R})$; c'est un corollaire du théorème 3.3 dont la démonstration ne repose pas, bien entendu, sur le présent résultat. L'opérateur $\left(\mathcal{L} - \left(16\,\pi c^2\right)^{-1}\right)$ est donc inversible et l'on a

$$L^{-1}\,\mathrm{Op}\big(g(r)\big) = \mathrm{Op}\left(\left(\left(\mathcal{L} - \left(16\,\pi c^2\right)^{-1}\right)^{-1} g\right)(r)\right) .$$

Si, de plus, la fonction g est à décroissance rapide, l'opérateur $\mathrm{Op}\big(g(r)\big)$ est continu de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Le calcul de Klein–Gordon ayant, comme le calcul de Weyl, la propriété que les opérateurs faiblement continus de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sont ceux dont le symbole appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, la fonction $\left(\mathcal{L} - \left(16\,\pi c^2\right)^{-1}\right)^{-1} g$ est à décroissance rapide. On peut alors appliquer le lemme 3.2 avec $\mathcal{L}_\infty = A$ et $\mathcal{L} - \left(16\,\pi c^2\right)^{-1} = B$, ce qui achève la preuve du théorème 3.1. □

Le résultat suivant donne un calcul symbolique approché des puissances de L_1.

THÉORÈME 3.3. — *Soient $\beta \in \mathbb{C}$ et d un entier ≥ 0. Il existe un unique opérateur linéaire continu de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ que l'on notera $L_1^\beta\left(\ln L_1\right)^d$ caractérisé par les équations*

$$L_1^\beta\left(\ln L_1\right)^d \psi_k = \mu_k^\beta\left(\ln \mu_k\right)^d \psi_k \quad \textit{pour } k = 0,\, 1,\, \ldots$$

Cet opérateur admet un symbole actif $h_{\beta,d}\big(\rho(x,p)\big)$ de poids $\rho^{\Re(\beta)}\left(1+\ln\rho\right)^d$ et de type $\rho^{1/2}$. En outre, on a le développement asymptotique suivant :

$$h_{\beta,d}(\rho) = \rho^\beta\left(\ln\rho\right)^d + \sum_{j=1}^{k} \rho^{\beta-j} R_j^d(\beta, \ln\rho) + g_{k+1}(\rho, \beta, d)$$

où les R_j^d sont des polynômes de degré $3j$ au plus en β, de degré d au plus en $\ln\rho$ et où $g_{k+1}(\rho,\beta,d)$ est un symbole de poids $\rho^{\Re(\beta)-k-1}\left(1+\ln\rho\right)^d$. Si $d = 0$, on note ainsi ce développement

$$h_\beta(\rho) \sim \rho^\beta + \sum_{j=1}^{+\infty} a_j(\beta)\,\rho^{\beta-j}$$

où a_j est un polynôme de degré $3j$ au plus.

Preuve du théorème 3.3

On note Γ le contour complexe (déjà utilisé par [HR]) composé du segment $\{\Re(z) = 1/2 \mid |\Im(z)| \leq 1/2\}$ et des deux demi-droites $\{\Re(z) = \pm\Im(z) \mid \Re(z) \geq 1/2\}$, parcouru dans le sens des $\Im(z)$ décroissants.

Par le procédé classique d'inversion des opérateurs elliptiques, on construit deux suites $\big(b_k(\rho,t)\big)_k$ et $\big(r_k(\rho,t)\big)_k$ de symboles ne dépendant que de $\rho \in [\,1\,,+\infty\,[$ et $t \in \Gamma$ définies par

$$b_0(\rho,t) = (t-\rho)^{-1}\,, \quad r_0(\rho,t) = 1\,.$$

et pour $k \geq 1$ par

$$\begin{aligned} r_k(\rho,t) &= r_{k-1}(\rho,t) - (t-\rho)\sharp b_{k-1}(\rho,t) \\ b_k(\rho,t) &= r_k(\rho,t)(t-\rho)^{-1}\,, \end{aligned} \tag{3.2}$$

et l'on a bien sûr

$$\mathrm{Op}(b_0 + \cdots + b_k)(t - L_1) - I = -\,\mathrm{Op}(r_{k+1})\,.$$

En utilisant la formule (1.8), on vérifie que le reste $r_k(\rho,t)$ s'écrit, pour $k > 0$, sous la forme

$$r_k(\rho,t) = \sum_{m=k+1}^{3k} P_m^k(t)(t-\rho)^{-m} \tag{3.3}$$

où P_m^k est un polynôme de degré $m-k$ au plus en t; cela se démontre par récurrence. On en déduit que r_k vérifie les inégalités suivantes dans lesquelles la constante C ne dépend que des indices k, m et j (et non de $t \in \Gamma$) :

$$\left|\Big(\langle p\rangle\frac{\partial}{\partial p}\Big)^j \Big(\langle p\rangle^{-1}\frac{\partial}{\partial x}\Big)^m r_k\big(\rho(x,p)\,,t\big)\right| \leq C\big|\rho - t\big|^{-k}\rho^{-m/2}\,. \tag{3.4}$$

On vérifie que, pour le contour choisi, les fonctions $|t-\rho|$ sont des fonctions poids d'une façon uniforme par rapport à t, c'est-à-dire que les constantes $C\big(|t-\rho|\big)$ et $N\big(|t-\rho|\big)$ de la formule (1.3) peuvent être choisies indépendantes de t. On dit alors que le reste $r_k(\rho,t)$ (ou la famille $\big(r_k(\rho,t)\big)_{t\in\Gamma}$) est un *symbole de poids* $|t-\rho|^{-k}$ *et de type* $\rho^{1/2}$ *indépendamment de* t. Le symbole b_{k-1} possède la même propriété.

On peut alors énoncer le résultat suivant.

LEMME 3.4.— *Pour* $t \in \Gamma \cup \{0\}$, *l'opérateur* $(L_1 - t)^{-1}$ *a un symbole de poids* $|t-\rho|^{-1}$ *et de type* $\rho^{1/2}$ *indépendamment de* t. *Ce symbole est noté* $f(\rho, t) = f(\rho(x,p), t)$.

Preuve du lemme 3.4

D'après (3.2), on a

$$(t - L_1)^{-1} = \mathrm{Op}(b_0(\rho,t) + \cdots + b_k(\rho,t)) + (t-L_1)^{-1}\,\mathrm{Op}(r_{k+1}(\rho,t))\,. \quad (3.5)$$

D'après (3.4), la partie régulière de ce développement admet un symbole de poids $|t-\rho|^{-1}$ et de type $\rho^{1/2}$ indépendamment de t. Il faut maintenant traiter le reste $(t-L_1)^{-1}\,\mathrm{Op}(r_{k+1}(\rho,t))$, c'est l'objet du lemme qui suit.

LEMME 3.5.— *Soit* R *un opérateur à trace dans* $H_c^{1/2}(\mathbb{R})$ *commutant avec* L. *Soit* N *un entier assez grand. Supposons que, pour* $N' \geq (N+4)/2$, *l'opérateur* $RL^{N'}$ *soit à trace dans* $H_c^{1/2}(\mathbb{R})$. *Il existe un symbole* $h(\rho(x,p))$ *de poids* 1 *et de type* $\rho^{1/2}$ *jusqu'à l'ordre de différentiabilité* N, *ne dépendant que de* ρ, *tel que l'on ait*

$$R = \mathrm{Op}\Big(h\big(\rho(x,p)\big)\Big)\,.$$

Preuve.— Procédons à quelques rappels [U1, chap. 2]. Soit un opérateur A admettant pour symbole une fonction h de poids 1 jusqu'à un ordre de différentiabilité N suffisamment grand. On définit alors le *symbole passif* g de l'opérateur A par l'identité

$$(\mathcal{F}_1 g)(\xi,p) = \left(1 + \frac{\xi^2}{4c^2\langle p\rangle^2}\right)^{-1/2} (\mathcal{F}_1 h)(\xi,p)\,, \quad (3.6)$$

formule dans laquelle $\mathcal{F}_1$ désigne la transformée de Fourier par rapport à la première variable. Si de plus l'opérateur A est à trace dans $H_c^{1/2}(\mathbb{R})$, on peut obtenir le symbole passif g directement par la formule

$$g(x,p) = 2\,\mathrm{Tr}\big(A\sigma(x,p)\big)\,,$$

dans laquelle $\sigma(x,p)$ est l'image, par la représentation de Bargmann–Wigner d'un certain opérateur unitaire involutif canoniquement attaché au point

(x,p). Il nous suffira ici de savoir que l'opérateur $\sigma(x,p)$ est unitaire dans $H_c^{1/2}(\mathbb{R})$ et que le symbole passif possède la même propriété de covariance à l'égard de la représentation de Bargmann–Wigner que le symbole actif.

Nous poserons donc, pour démontrer le lemme

$$g(x,p) = 2\,\mathrm{Tr}\big(R\sigma(x,p)\big)\,.$$

La fonction $s^{-1}\big(g(x-s,p)-g(x,p)\big)$ est le symbole passif de l'opérateur

$$\frac{e^{-2i\pi\,sD}R\,e^{2i\pi\,sD}-R}{s} = e^{-2i\pi\,sD}R\,\frac{e^{2i\pi\,sD}-I}{s} + \frac{e^{-2i\pi\,sD}-I}{s}R\,,$$

il s'agit ici d'un fait de covariance. Les hypothèses effectuées sur R (et plus particulièrement le fait que les opérateurs $R\langle D\rangle$ et $\langle D\rangle R$ sont à trace sur $H_c^{1/2}(\mathbb{R})$) prouvent que la famille de fonctions ci-dessus définies tend, lorsque s tend vers 0, à la fois vers $-(\partial g/\partial x)(x,p)$ et vers le symbole passif de $2i\pi\,RD$. En itérant le procédé et en définissant la fonction h par la formule (3.6), on obtient la régularité désirée pour h, ce qui termine la preuve du lemme 3.5. □

Nous appliquons ce lemme à l'opérateur $\big(t-L_1\big)^{-1}\,\mathrm{Op}\big(r_{k+1}(\rho,t)\big)$ qui commute avec L_1 et dont la j-ième valeur propre est majorée, en valeur absolue, par $C\big(\mu_j\big)^{-1}\big(\mu_j\big)^{-k-1}$ pour une constante C indépendante de $t\in\Gamma$. Cet opérateur reste à trace lorsqu'on le multiplie par L_1^{k+1} puisque, d'après le corollaire 2.4, μ_j est de l'ordre de $j^2\big(\ln j\big)^{-2}$. L'opérateur $\big(t-L_1\big)^{-1}$ admet donc un symbole de poids 1 jusqu'à un ordre de différentiabilité arbitrairement grand. En reportant ce résultat dans la formule (3.5), on obtient le poids annoncé et le lemme 3.4 est démontré. □

Fin de la preuve du théorème 3.3. — La formule de Dunford conduit, pour les nombres complexes β de partie réelle < -1, à la formule

$$h_{\beta,d}(\rho) = \frac{-1}{2i\pi}\int_\Gamma t^\beta\big(\ln t\big)^d f(\rho,t)\,\mathrm{d}t \tag{3.7}$$

dans laquelle on choisit la détermination principale du logarithme. En intégrant terme à terme, le long du contour Γ, le développement suivant du symbole de $\big(L_1-t\big)^{-1}$ fourni par (3.3) et (3.5)

$$f(\rho,t) \sim \big(\rho-t\big)^{-1} - \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=k+1}^{3k} P_m^k(t)\big(t-\rho\big)^{-m-1}\,, \tag{3.8}$$

on obtient la formule

$$h_{\beta,d}(\rho) = \rho^{\beta}(\ln\rho)^{d} - \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=k+1}^{3k}\frac{1}{m!}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\right)^{m}\left(P_m^k(\rho)\rho^{\beta}(\ln\rho)^{d}\right), \tag{3.9}$$

ce qui donne la forme des termes réguliers du développement de $h_{\beta,d}(\rho)$. Le signe $\sim$ apparaîssant dans (3.8) veut dire que le reste à l'ordre k est de poids $|t-\rho|^{-k-2}$. Intégré le long du contour Γ, ce reste donne un symbole de poids ρ^{-k-2} et de type $\rho^{1/2}$, ce que l'on vérifie par un calcul direct. On en déduit le poids du symbole noté g_{k+1} dans le théorème 3.3.

Enfin lorsque β ne vérifie pas nécessairement $\Re(\beta) < -1$, on définit $h_{\beta,d}(\rho)$ en posant

$$h_{\beta,d}(\rho) = \rho^{N}\sharp h_{\beta-N,d}(\rho)$$

en choisissant l'entier N suffisamment grand pour que $\Re(\beta - N) < -1$ de sorte que $h_{\beta-N,d}(\rho)$ soit donnée par la formule (3.7). Le théorème 3.3 se déduit des résultats obtenus par le cas où $\Re(\beta) < -1$ et de la formule de composition par ρ. □

Le dernier résultat de cette section concerne la fonction zêta de l'oscillateur de Mathieu.

THÉORÈME 3.6.— *Soit $b \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(b) > -\mu_0$, où $(\mu_k)_k$ est la suite croissante des valeurs propres de L_1. Notons $\zeta_{L_1}(s,b)$ la fonction zêta de l'oscillateur relativiste définie sur $\{s \in \mathbb{C} \mid \Re(s) > 1/2\}$ par*

$$\zeta_{L_1}(s,b) = \sum_{k=0}^{+\infty}(\mu_k + b)^{-s}.$$

La fonction $s \mapsto \zeta_{L_1}(s,b)$ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ de pôles d'ordre deux au plus situés aux points $-n + 1/2$ (n est entier ≥ 0). La partie polaire en $1/2$ est

$$c^2\left(s - \frac{1}{2}\right)^{-2} + 4c^2\ln(2)\left(s - \frac{1}{2}\right)^{-1}.$$

Preuve.— La fonction $s \mapsto \zeta_{L_1}(s,b)$ est holomorphe pour $\Re s > 1/2$ d'après l'équivalent obtenu dans le corollaire 2.4 pour la valeur propre λ_k.

Traitons pour commencer le cas où $b = 0$. Lorsque le symbole a est de poids ρ^{-N} avec N assez grand, on a, comme dans le calcul de Weyl, l'identité

$$\mathrm{Tr}\big(\mathrm{Op}(a)\big) = \int_{\mathbb{R}^2} a(x,p)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}p\,. \tag{3.10}$$

Admettons-le provisoirement et supposons $\Re(s)t$ suffisamment grand. On a alors

$$\mathrm{Tr}(L_1^{-1}) = \int \mathrm{symb}(L_1^{-s})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}p\,.$$

Intégrons terme à terme le développement asymptotique du symbole de L_1^{-s} fourni par le théorème 3.3

$$h_{-s}(\rho) \sim \rho^{-s} + \sum_{j=1}^{+\infty} a_j(-s)\rho^{-s-j}\,.$$

Le reste d'ordre N donne une fonction holomorphe à droite de $1/2 - N$, et l'on peut calculer explicitement l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^2} \rho^{-s-j}(x,p)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}p = c^2\pi\left(\frac{\Gamma(s+j-1/2)}{\Gamma(s+j)}\right)^2$$

(voir par exemple, [MOS, p. 6]); ceci prouve le premier point du théorème 3.6 pour $\Re(s)$ suffisamment grand. Un argument de prolongement analytique prouve que ce résultat reste valable pour $\Re(s) > 1/2$. La partie polaire de $\zeta_{L_1}(s)$ en $1/2$ est égale à celle de $c^2\pi\big(\Gamma(s-1/2)/\Gamma(s)\big)^2$. On a

$$\lim_{s\to 1/2}\left(s-\frac{1}{2}\right)^2 \zeta_{L_1}(s) = c^2$$

et

$$\lim_{s\to 1/2}\left(s-\frac{1}{2}\right)\left(\zeta_{L_1}(s) - c^2\left(s-\frac{1}{2}\right)^2\right) =$$
$$= c^2\pi\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}\left(\left(\frac{\Gamma(h+1)}{\Gamma(h+1/2)}\right)^2\right)\Bigg|_{h=0} = 2c^2\pi\left(\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1/2)}\right)^2\big(\psi(1)-\psi(1/2)\big)\,,$$

formules dans lesquelles la fonction ψ désigne $\Gamma'\Gamma^{-1}$ dont [MOS] donne les valeurs en n et $n + 1/2$.

Le cas général se déduit du raisonnement précédent en remarquant que

$$(L_1+b)^{-s} \sim L_1^{-s} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-s)(-s-1)\cdots(-s-j+1)}{j!} b^j L_1^{-s-j} \ ;$$

la partie polaire en 1/2 ne change pas.

Pour conclure justifions la formule (3.10). Soit $\mathcal{G}$ la transformation définie par

$$(\mathcal{G}u)(p) = \langle p \rangle \widehat{u}(p) \ ;$$

c'est une isométrie de $H_c^{1/2}(\mathbb{R})$ sur l'espace $L^2(\mathbb{R}, \langle p \rangle^{-1}\,\mathrm{d}p)$. On voit par la définition 1.1 du calcul de Klein–Gordon que le noyau de l'opérateur $\mathcal{G}\,\mathrm{Op}(f)\mathcal{G}^{-1}$, pour la mesure $\langle p \rangle^{-1}\,\mathrm{d}p$, est la fonction

$$K(p,q) = \mathrm{ch}\left(\frac{\mathrm{Argsh}(c^{-1}p) + \mathrm{Argsh}(c^{-1}q)}{2}\right) \times$$
$$\times \int_{\mathbb{R}} f\left(y, c\,\mathrm{sh}\left(\frac{\mathrm{Argsh}(c^{-1}p) + \mathrm{Argsh}(c^{-1}q)}{2}\right)\right) e^{-2i\pi y(p-q)}\,\mathrm{d}y$$

(on a posé, dans la définition 1.1, $p = c\,\mathrm{sh}\,\eta$ et $q = c\,\mathrm{sh}\,\xi$). Si le symbole f est de poids ρ^{-N} avec N assez grand, on a

$$K(p,p) = \langle p \rangle \int_{\mathbb{R}} f(y,p)\,\mathrm{d}y$$

et

$$\mathrm{Tr}\big(\mathrm{Op}(f)\big) = \mathrm{Tr}\big(\mathcal{G}\,\mathrm{Op}(f)\mathcal{G}^{-1}\big) = \int_{\mathbb{R}} K(p,p)\frac{\mathrm{d}p}{\langle p \rangle} = \int_{\mathbb{R}^2} f(y,p)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}p\,,$$

ce qui achève la preuve du théorème 3.6 □

Bibliographie

[Ca] CAMPBELL (R.) .— *Théorie générale de l'équation de Mathieu et de quelques autres équations différentielles de la mécanique*, Masson, Paris, 1955.

[D] DIEUDONNÉ (J.) .— *Calcul infinitésimal*, Hermann, Paris, 1980.

[HR] HELFFER (B.) et ROBERT (D.) .— *Propriétés asymptotiques du spectre d'opérateurs pseudo-différentiels sur* $\mathbb{R}^N$, Comm. in P.D.E. **7** (1982), pp. 795-882.

[J] JAGER (L.) .— *Fonctions de Mathieu et calcul de Klein–Gordon*, Thèse, Univ. de Reims-Champagne-Ardenne (1994).

[MOS] MAGNUS (W.), OBERHETTINGER (F.) et SONI (R. P.) .— *Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics*, Springer-Verlag, Berlin, 3e éd. (1966).

[S] SEELEY (R.) .— *Complex powers of an elliptic operator*, Proc. Symp. A.M.S. Pure Math. **10** (1967), pp. 288-307.

[T] TITCHMARSH (E. C.) .— *Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations*, Clarendon Press, Oxford, Part. 1, 2e éd. (1962).

[U1] UNTERBERGER (A.) .— *Quantification relativiste*, Mémoires de la Soc. Math. de France (nouvelle série **44-45**), 1991.

[U2] UNTERBERGER (A.) .— *L'oscillateur relativiste et les fonctions de Mathieu*, Bull. Soc. Math. de France **121**, n° 4 (1993), pp. 479-508.

[U3] UNTERBERGER (A.) .— *Relativity, spherical functions and the hypergeometric equation*, Ann. Inst. Henri-Poincaré, Phys. Théor. **62**, n° 2 (1995), pp. 103-144.

[WW] WHITTAKER (E. T.) et WATSON (G. N.) .— *A course of modern analysis*, Cambridge Univ. Press, 4e éd. (1965).