ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

BRUNO SÉVENNEC

Normes invariantes par difféomorphismes sur $C^k(X)$

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 7, nº 2 (1998), p. 335-355

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1998_6_7_2_335_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. VII, n° 2, 1998

Normes invariantes par difféomorphismes sur $C^k(X)$(*)

BRUNO SÉVENNEC[1]

RÉSUMÉ. — On étudie les semi-normes invariantes par difféomorphismes sur les espaces de fonctions C^k d'une variété compacte X. En particulier, on montre que pour $k \geq 1$, si X est connexe, sans bord et de dimension au moins 2, toutes ces semi-normes sont continues pour la topologie de la convergence uniforme et sont décrites explicitement.

ABSTRACT. — One studie diffeomporphism invariant seminorms on the C^k functions spaces of a compact manifold X. In particular, it is proved that for $k \geq 1$, if X is connected, without boundary and of dimension at least 2, these seminorms are continuous for the uniform convergence topology, and are explicitely described.

Introduction

L'objet de ce travail est de répondre à la question suivante.

Si X est une variété compacte, et $k \geq 0$ un entier, quelles sont les (semi-)normes sur $C^k(X)$ (espace des fonctions C^k sur X) invariantes par difféomorphismes, et plus précisément par la composante neutre $\mathrm{Diff}_0(X)$ *du groupe des difféomorphismes de X ?*

Cette question n'est que la plus simple d'une famille de questions analogues. On pourrait en effet remplacer les fonctions sur X par les sections d'un fibré vectoriel "naturel" associé au fibré tangent de X (via une représentation linéaire de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$), l'exemple le plus naturel étant probablement celui des *demi-densités*, qui fournit un espace de Hilbert sur lequel

(*) Reçu le 26 février 1996, accepté le 6 mai 1996

(1) Unité de Mathématiques Pures et Appliquées, U.M.R. 128 du C.N.R.S., École Normale Supérieure de Lyon, 46 allée d'Italie, F-69364 Lyon Cedex 07 (France)
E-mail : sevennec@umpa.eps-lyon.fr

les difféomorphismes agissent par isométries. Une modification certainement plus profonde consiste à remplacer le groupe des difféomorphismes par le sous-groupe de ceux qui préservent une structure supplémentaire “peu rigide” donnée sur X, par exemple une forme volume, une forme symplectique, etc. (cf. [H], [LM]).

Ces généralisations ne sont pas abordées ici, l'une des motivations de cette étude ayant été de vérifier que la (semi-)norme “variation totale d'une fonction” sur une variété de dimension 1 ne possède pas d'analogue en dimension supérieure. En fait, quitte à écarter d'éventuels exemples pathologiques, on arrive à décrire complètement toutes les semi-normes possibles lorsque X est compacte, connexe sans bord et de dimension au moins 2 (corollaires 12 et 16) : essentiellement, il n'y a que la norme C^0. Dans le cas général, on obtient une classification à équivalence de semi-normes près sur $C^0(X)$ (théorème 7, corollaire 8).

Trois appendices regroupent des résultats reliés de façon plus ou moins marginale à la question ci-dessus, comme la mesurabilité et ses liens avec l'axiome du choix, ou l'approximation des homéomorphismes par des difféomorphismes dans le cas de la dimension 4.

Semi-normes mesurables sur un Banach

Sur un Banach $(E, \|\cdot\|)$ de dimension infinie, il existe des formes linéaires discontinues, et donc des (semi-)normes discontinues. Cependant, elles sont nécessairement pathologiques, comme le montre le lemme suivant.

LEMME 1.— *Toute semi-norme Baire-mesurable sur un Banach est continue.*

Démonstration.— (Directement inspirée de [O, p. 21]) Rappelons qu'une partie d'un espace topologique est Baire-mesurable (Bourbaki [B, p. 69] dit “approchable”) si elle est différence symétrique d'un ouvert et d'une partie maigre. Les parties Baire-mesurables forment une tribu (engendrée par les boréliens et les parties maigres). On définit comme d'habitude la notion d'application Baire-mesurable.

Soit alors $(E, \|\cdot\|)$ un Banach, et N une semi-norme Baire-mesurable sur E. Par définition, l'ensemble $C = \{x : N(x) < 1\}$ est Baire-mesurable, c'est-à-dire $C = U \Delta M$, avec U ouvert et M maigre. L'ouvert U ne peut être vide, car sinon $C = M$ serait maigre, ce qui contredirait le théorème de Baire puisque $E = \bigcup_n nC$. Soit donc $B = B_\varepsilon \subset U$ une boule ouverte de rayon $\varepsilon > 0$ (pour la norme initiale $\|\cdot\|$). Alors si $\|x\| < \varepsilon$,

$$(x + C) \cap C \supset (x + B) \cap B \setminus \big((x + M) \cup M\big) .$$

Mais comme $(x+B) \cap B$ est un ouvert non vide et $(x+M) \cup M$ est maigre, ceci entraîne $(x+C) \cap C \neq \emptyset$, et donc $B \subset C+(-C) = 2C$, d'où la continuité de N ($N \leq 2/\varepsilon \|\cdot\|$). □

Dans la suite, on qualifiera simplement de mesurable une semi-norme Baire-mesurable.

Notons que l'on peut donner un sens mathématique précis à l'intuition selon laquelle toute partie "raisonnable" ou "explicitement définissable" d'un espace métrique complet séparable est Baire-mesurable (appendice B).

Invariance par homéomorphismes

Sur l'espace $C^0(X)$, une semi-norme N mesurable (donc continue pour la topologie C^0) et invariante par $\mathrm{Diff}_0(X)$ l'est aussi par tout homéomorphisme qui est limite uniforme de difféomorphismes isotopes à l'identité. Il résulte de [KS, théorème 2.7, p. 78] que si X et ∂X n'ont pas de composante de dimension 4, c'est le cas pour tout homéomorphisme isotope à l'identité (en particulier pour ceux qui sont proches de l'identité, d'après [EK] et [Ci]). Dans ces cas, on pourrait donc aussi bien supposer N invariante par $\mathrm{Homéo}_0(X) = \mathrm{Diff}_0^0(X)$.

En revanche si X est de dimension 4, $\mathrm{Diff}_0(X)$ (ou même $\mathrm{Diff}(X) \cap \mathrm{Homéo}_0(X)$) *n'est pas dense* dans $\mathrm{Homéo}_0(X)$! (appendice C). De toutes façons, on verra a posteriori que, au moins si X est connexe, sans bord et de dimension ≥ 2, toute semi-norme mesurable Diff_0-invariante sur $C^0(X)$ est aussi invariante par $\mathrm{Homéo}_0$, en explicitant toutes ces semi-normes.

Support d'une semi-norme sur $C^k(X)$

Soit N une semi-norme sur $C^k(X)$. Son *support* est par définition le plus petit fermé F de X tel que $\mathrm{supp}(f) \subset X \setminus F$ entraîne $N(f) = 0$. Il est clair qu'il existe (sous-additivité de N, compacité de X) et on le note $\mathrm{supp}(N)$. Noter que $\ker(N)$ détermine $\mathrm{supp}(N)$.

Si N est Diff_0-invariante, $\mathrm{supp}(N)$ est une sous-variété de X, et plus précisément une réunion de composantes connexes de X et de ∂X (transitivité de $\mathrm{Diff}_0(X)$ sur toute composante connexe de $\mathrm{int}\, X$ et de ∂X).

Si N est une semi-norme mesurable sur $C^0(X)$ et $f \in C^0(X)$ est nulle sur $\mathrm{supp}(N)$, on a $N(f) = 0$, car $f = \lim f_n$ (uniforme) avec $\mathrm{supp}(f_n) \subset X \setminus \mathrm{supp}(N)$, et N est continue.

Réduction (sur $C^0(X)$) au cas $\mathrm{supp}(N) = X$

LEMME 2.— *Si N est une semi-norme mesurable* Diff_0*-invariante sur $C^0(X)$ et $Y = \mathrm{supp}(N)$, on a $N = \overline{N} \circ \rho$, où $\overline{N}$ est une semi-norme* Diff_0*-invariante sur $C^0(Y)$ et $\rho : C^0(X) \to C^0(Y)$ est l'application "restriction".*

Démonstration.— L'existence de $\overline{N}$ vérifiant $N = \overline{N} \circ \rho$ résulte de ce qui précède, et il suffit de voir que $\overline{N}$ est Diff_0-invariante. Or, Y étant réunion de composantes de X et de ∂X, tout difféomorphisme de Y isotope à l'identité se prolonge en un élément de $\mathrm{Diff}_0(X)$: il suffit de l'écrire comme temps 1 d'un champ de vecteurs (sur Y) dépendant du temps et d'étendre ce champ à X. $\square$

L'étude des semi-normes mesurables Diff_0-invariantes sur $C^0(X)$, se ramène donc au cas "non-dégénéré" $\mathrm{supp}(N) = X$.

Régularisation des mesures N-continues

Si N est une semi-norme continue (c.-à-d. mesurable) sur $C^0(X)$, le dual de l'espace semi-normé $E = \big(C^0(X), N\big)$ s'identifie au sous-espace E' de l'espace $M(X) = C^0(X)'$ des mesures (de Radon) μ sur X qui sont N-continues, c'est-à-dire vérifient $\forall\, f \in C^0(X)$, $\mu(f) \leq \mathrm{const}\, N(f)$. On note N' la norme duale sur E' (cas de la plus petite constante dans l'inégalité).

Pour toute mesure μ sur X, μ_{int} désigne l'extension à X de la restriction de μ à $\mathrm{int}\, X$, c'est-à-dire pour $f \in C^0(X)$, on a $\mu_{\mathrm{int}}(f) = \lim \mu(\chi_n f)$, où χ_n converge uniformément vers 1 sur tout compact de $\mathrm{int}\, X$ et est nulle sur ∂X. On pose $\mu_\partial = \mu - \mu_{\mathrm{int}}$. C'est une mesure à support dans ∂X.

On suppose désormais N invariante par $\mathrm{Diff}_0(X)$. Pour étudier N, on va exhiber dans E' des mesures ayant des propriétés spéciales, en utilisant le fait que $\mathrm{Diff}_0(X)$ opère aussi (par isométries) sur E'.

DÉFINITION 3.— *Une famille* (ϕ^s) *de difféomorphismes de* X *est régularisante si :*

(i) *s varie dans un voisinage de* 0 *dans* $\mathbb{R}^p$, $\phi^0 = \mathrm{id}$ *;*

(ii) $(s, x) \mapsto \phi^s(x)$ *est lisse;*

(iii) *pour* $x \in \operatorname{int} X$ *(resp.* ∂X*),* $s \mapsto \phi^s(x)$ *est une submersion en* $0 \in \mathbb{R}^p$ *à valeurs dans* X *(resp.* ∂X*).*

On construit aisément une telle famille en composant les flots de suffisamment de champs de vecteurs tangents au bord.

LEMME 4.— *Soit* $\mu \in E'$, (ϕ^s) *une famille régularisante et* (ρ_ε) *une approximation de l'unité dans* $\mathbb{R}^p$*. Alors* $\mu_\varepsilon = \int \rho_\varepsilon(s)\, \phi^s_* \mu \, \mathrm{d}s$ *converge faiblement vers* μ *(pour* $\varepsilon \to 0$*),* $N'(\mu_\varepsilon) \leq N'(\mu)$*, et* $(\mu_\varepsilon)_{\mathrm{int}}$ *et* $(\mu_\varepsilon)_\partial$ *sont à densités lisses sur* $\operatorname{int} X$ *et* ∂X *respectivement.*

Démonstration.— La régularité et la convergence sont classiques, et la majoration de $N'(\mu_\varepsilon)$ résulte de l'invariance de N :

$$\begin{aligned}\mu_\varepsilon(f) &= \int \rho_\varepsilon(s)\mu(f \circ \phi^s)\,\mathrm{d}s \leq \\ &\leq \int \rho_\varepsilon(s) N'(\mu) N(f \circ \phi^s)\,\mathrm{d}s = N'(\mu)N(f)\,. \square\end{aligned} \tag{1}$$

De façon générale, l'adhérence faible dans $M(X)$ de toute partie bornée (en norme N') de E' est contenue dans E', fait que l'on utilisera souvent dans la suite.

Discrétisation

LEMME 5.— *Si* $\operatorname{supp}(N) = X$, E' *contient tous les "doublets"* $\delta_x - \delta_y$ *de masses de Dirac tels que* x *et* y *appartiennent à la même composante de* X*.*

Démonstration.— Soient $X_1, \ldots, X_k$ les composantes connexes de X. Pour tout i, il existe une mesure $\mu \in E'$ telle que $\mu|_{\operatorname{int} X_i} \neq 0$, puisque sinon $\operatorname{supp}(N) \subset X \setminus \operatorname{int} X_i$ (par Hahn–Banach). Alors il existe une boule $B \cong \mathbb{B}^n \subset \operatorname{int} X_i$ telle que $\mu(\operatorname{int} B) \neq 0$. Pour tout $x \in \operatorname{int} B$, il existe ξ, champs de vecteurs C^∞ sur X de support B, dont le flot est noté ϕ^t, tel que

$$\forall\ y \in \operatorname{int} B\,, \quad \phi^t(y) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} x\,.$$

Par convergence dominée, on a donc, en posant $\mu^t = \phi^t_* \mu$,

$$\forall\ f \in C^0(X)\,, \quad \mu^t(f) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \mu(\operatorname{int} B) f(x) + \int_{X\setminus \operatorname{int} B} f\,\mathrm{d}\mu\,,$$

c'est-à-dire μ^t converge faiblement vers une mesure $\mu^\infty_x = a\,\delta_x + \nu$, $a \neq 0$, $\operatorname{supp}\nu \subset \overline{X \setminus B}$. Comme $N'(\mu^t) = N'(\mu)$ reste bornée, on a aussi $\mu^\infty \in E'$ (et même $N'(\mu^\infty) \leq N'(\mu)$).

Choisissant un autre $x' \in \operatorname{int} B$, on obtient $\delta_x - \delta_{x'} = (\mu^\infty_x - \mu^\infty_{x'})/a \in E'$, et l'invariance de E' par $\operatorname{Diff}_0(X)$ fournit $\forall\ x,\ y \in \operatorname{int} X_i$, $\delta_x - \delta_y \in E'$. Enfin si par exemple y tend vers un point z de ∂X_i, $N'(\delta_x - \delta_y)$ reste bornée (constante) et la limite faible $\delta_x - \delta_z$ de $\delta_x - \delta_y$ appartient aussi à E', ce qui achève de démontrer le lemme. □

LEMME 6.— *Si* $\operatorname{supp}(N) = X$, *et* $X_1, \ldots, X_k$ *sont les composantes de* X, *pour toute mesure* $\mu \in E'$, *les mesures* $\sum \mu(X_i)\,\delta_{x_i}$ $(x_i \in X_i)$ *appartiennent à* E'.

Démonstration.— On munit X d'une métrique riemannienne auxiliaire. Considérons sur X une fonction de Morse F telle que :

(i) $F|_{\partial X} = 0$, $\mathrm{d}F \neq 0$ sur ∂X, $F > 0$ sur $\operatorname{int} X$,

(ii) F a un seul maximum x_i par composante X_i de X.

Le champ de vecteurs $\xi = F\nabla F$ a un flot ϕ^t sur X (qui fixe ∂X), dont les points fixes dans $\operatorname{int} X$ sont les points critiques de F. Si $\mu \in E'$, on peut régulariser μ sans changer les $\mu(X_i)$. Les variétés stables des points critiques $\neq x_i$ de $F|_{\operatorname{int} X_i}$ sont alors μ-négligeables, de sorte que $\phi^t(x) \to x_i$ $(t \to \infty)$ pour μ-presque tout point $x \in \operatorname{int} X_i$. Ainsi, $\mu^t = \phi^t_*\mu$ converge faiblement (pour $t \to \infty$) vers $\mu^\infty \in E'$ vérifiant

$$\mu^\infty|_{\operatorname{int} X} = \sum_i \mu(\operatorname{int} X_i)\,\delta_{x_i}\,, \quad \mu^\infty(X_i) = \mu(X_i)$$

et $(\mu^\infty)_\partial$ est à densité lisse sur ∂X.

On peut répéter le même argument sur la variété (sans bord) ∂X, c'est-à-dire construire un champ de vecteurs η (analogue à ξ) sur ∂X, l'étendre à X en un champ (C^∞) de flot noté ψ^t, dont le support ne contient aucun x_i, de façon à obtenir $\nu = \lim_{t\to\infty} \psi^t_* \mu^\infty \in E'$, mesure discrète (à support fini) telle que $\forall\, i$, $\nu(X_i) = \mu(X_i)$. Écrivant

$$\nu = \sum_i \left(a_i\, \delta_{x_i} + \sum_j b_{ij}\, \delta_{y_{ij}} \right) , \quad y_{ij} \in \partial X_i ,$$

on obtient grâce au lemme précédent $\nu' = \nu + \sum_{i,j} b_{ij}(\delta_{x_i} - \delta_{y_{ij}}) \in E'$; il est clair que $\nu' = \sum_i \mu(X_i)\, \delta_{x_i}$, d'où le lemme. □

Classification à équivalence près sur $C^0(X)$

THÉORÈME 7.— *Une semi-norme N mesurable et* Diff_0*-invariante sur $C^0(X)$ est caractérisée à équivalence près par son noyau* $\ker(N)$. *De plus,* $\ker(N)$ *est constitué de fonctions localement constantes sur* $\mathrm{supp}(N)$, *et N induit sur $C^0(X)/\ker(N)$ une norme équivalente à la norme quotient de $\|\cdot\|_\infty$.*

Démonstration.— On peut supposer que $\mathrm{supp}(N) = X$ (lemme 2; rappelons que $\ker(N)$ détermine $\mathrm{supp}(N)$). Ce qui précède montre alors que $\ker(N)$ est contenu dans le sous-espace $H^0(X) \cong \mathbb{R}^k$ des fonctions localement constantes sur X. Plus précisément, si $x_i \neq y_i \in X_i$ et $C = \sup_i N'(\delta_{x_i} - \delta_{y_i})$ (quantité finie d'après le lemme 5), on a

$$N(f) \geq \frac{1}{C} \sup_i \operatorname*{osc}_{X_i} f$$

où par définition $\operatorname{osc}_A f = \sup_A f - \inf_A f$.

Par ailleurs, si $t = (t_1, \ldots, t_k) \in \mathbb{R}^k$ et $\chi_t \in H^0(X)$ est la fonction valant t_i sur X_i, on a $N(\chi_t) = 0$ si et seulement si $\forall\, \mu \in E'$, $\mu(\chi_t) = \sum \mu(X_i) t_i = 0$. En posant

$$R = \Big\{ (\mu(X_1), \ldots, \mu(X_k)) \mid \mu \in E' \Big\} \subset \mathbb{R}^k ,$$

on a donc $\ker(N) = \{\chi_t \mid t \in R^\perp\}$. Pour simplifier, on munit $\mathbb{R}^k$ de sa norme euclidienne, notée $|\cdot|$. Si $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in R$, il existe $\mu \in E'$ vérifiant

$\mu(X_i) = \lambda_i$ et $N'(\mu) \leq \text{const}\,|\lambda|$ (cas trivial du théorème de l'application ouverte). On a donc pour toute $f \in C^0(X)$ (les $x_i \in X_i$ sont fixés)

$$N(f) \geq \text{const} \sup \left\{ \sum \lambda_i f(x_i) \;\Big|\; \lambda \in R\,,\; |\lambda| \leq 1 \right\} =$$

$$= \text{const}\left(\text{dist}\big(f(x_i)\big)_i\,,\; R^\perp\right) \geq \text{const} \inf_{t \in R^\perp} \sup_i \big|f(x_i) - t_i\big|\,.$$

Au total, il vient donc

$$N(f) \geq \text{const}\left(\sup_i \operatorname*{osc}_{X_i} f + \inf_{t \in R^\perp} \sup_i \big|f(x_i) - t_i\big|\right)\,.$$

Mais (rappelons que les x_i sont fixés)

$$\|f - \chi_t\|_\infty = \sup_i \sup_{y_i \in X_i} \big|f(y_i) - t_i\big| \leq \sup_i \big|f(x_i) - t_i\big| + \sup_i \operatorname*{osc}_{X_i} f$$

d'où finalement en prenant l'infimum sur $t \in R^\perp$

$$N(f) \geq \text{const} \inf \left\{ \|f - \chi\|_\infty \;\Big|\; \chi \in \ker(N) \right\}\,.$$

Comme l'inégalité inverse (avec une autre constante) résulte de la continuité de N, le théorème est démontré. □

COROLLAIRE 8.— *Si X est connexe, les semi-normes mesurables* Diff_0*-invariantes de support X sur $C^0(X)$ sont équivalentes à* $\|\cdot\|_\infty$ *ou à* $\text{osc} = \sup - \inf$.

En particulier si X est connexe et fermée, ce sont les seuls exemples non nuls à équivalence près. On verra que dans ce cas, et si $\dim X \geq 2$, on peut en fait décrire *tous* les exemples.

Notons que ce résultat donne aussi une description complète des sous-espaces fermés Diff_0-invariants de $C^0(X)$.

Classification sur $C^0(X)$ pour X fermée connexe, $\dim X \geq 2$

On suppose maintenant X fermée, connexe, et de dimension ≥ 2. Ceci équivaut à dire que pour tout n, le groupe $\text{Diff}_0(X)$ opère transitivement sur les n-uplets de points distincts dans X. On suppose aussi pour l'instant que N est une *norme* (mesurable et Diff_0-invariante sur $C^0(X)$). En particulier N est équivalente à $\|\cdot\|_\infty$ et $E' = M(X)$.

On remarque alors que pour tout entier $p > 0$, et $x_1, \ldots, x_p$ distincts dans X,

$$\forall\, v \in \mathbb{R}^p, \quad |v|_p = \inf\{N(f) \mid f(x_i) = v_i\,,\ i = 1, \ldots, k\}$$

définit une norme dans $\mathbb{R}^p$, *indépendante du choix des* x_i.

LEMME 9.— $|v|_p = |J(v)|_2$, *où* $J(v) = (\inf v, \sup v) \in \mathbb{R}^2$. *En particulier,* $|v|_p$ *ne dépend que de* $(\inf v, \sup v)$.

Démonstration.— C'est une simple application du théorème des valeurs intermédiaires (TVI). Par continuité, on peut supposer les v_i distincts. L'indépendance de $|v|_p$ vis-à-vis du choix des x_i permet d'écrire

$$\begin{aligned} |v|_p &= \inf\{N(f) \mid \exists\ x_i \text{ distincts}\,,\ f(x_i) = v_i\,,\ i = 1, \ldots, k\} \\ &= \inf\{N(f) \mid \exists\ x, y\,,\ f(x) = \inf v\,,\ f(y) = \sup v\} \end{aligned}$$

(la seconde égalité vient du TVI), ce qui démontre le lemme. Remarquons que (pour la même raison) $|(a, b)|_2$ est une fonction croissante de l'intervalle $[a\,, b]$ $(a \le b)$. □

LEMME 10.— $\mu \in M(X)$ *est limite faible de mesures discrètes* μ_n *telles que* $N'(\mu_n) \le N'(\mu)$.

Démonstration.— Elle est analogue (en plus simple) à celle des lemmes 5 et 6. D'après le lemme 4, on peut supposer μ à densité lisse. Soit alors ϕ_n^t le flot de gradient descendant d'une fonction de Morse dont les minima sont $1/n$-denses dans X. Alors, μ étant lisse, l'image μ_n^t de μ par ϕ_n^t converge faiblement pour $t \to \infty$ vers une mesure discrète μ_n, avec $N'(\mu_n) \le N'(\mu)$. De plus si $f \in C^0(X)$,

$$|\mu_n(f) - \mu(f)| \le \|\mu\|\, \omega\left(\frac{1}{n}\right)\,,$$

où $\|\mu\| = |\mu|(1)$ est la norme usuelle de μ et ω est un module de continuité uniforme de f. Donc μ_n converge faiblement vers μ, et le lemme est démontré. □

THÉORÈME 11.— $N(f) = |(\inf f, \sup f)|_2$, *et en particulier* $N(f)$ *ne dépend que de* $(\inf f, \sup f)$.

Démonstration.— Le lemme précédent et Hahn–Banach entraînent

$$N(f) = \sup\{\mu(f) \mid \mu \text{ discrète}, \ N'(\mu) \le 1\}.$$

Soit dont μ_n une suite de mesures discrètes, $N'(\mu_n) \le 1$, avec $\lim \mu_n(f) = N(f)$. Comme $\mu_n(f)$ ne dépend que de f restreinte à $\operatorname{supp}(\mu_n) = \{x_1, \ldots, x_p\}$, le lemme 9 donne

$$\mu_n(f) \le \left|(\inf f(x_i), \sup f(x_i))\right|_2$$

et la remarque qui le suit majore ceci par $\left|(\inf f, \sup f)\right|_2$ qui est par définition majoré par $N(f)$. Il n'y a plus qu'à faire tendre n vers l'infini pour conclure. □

COROLLAIRE 12.— *Si X est fermée, connexe et de dimension ≥ 2, les semi-normes mesurables* Diff_0*-invariantes sur $C^0(X)$ sont données par $N(f) = \nu(\inf f, \sup f)$, où ν est une semi-norme sur $\mathbb{R}^2$ invariante par la symétrie $(a,b) \mapsto (b,a)$ et $\nu(a,b)$ est (pour $a \le b$) fonction croissante de l'intervalle $[a, b]$. En particulier, les seules "vraies" semi-normes (noyau $\ne 0$) sont proportionnelles à* $\sup - \inf$.

Démonstration.— Il sufit pour inclure le cas d'une *semi-norme* $N(f)$ d'ajouter à celle-ci $\|f\|_\infty$ (par exemple) pour en faire une norme (invariante). Le théorème appliqué à cette norme montre que $N(f)$ ne dépend que de $(\inf f, \sup f)$, et comme N s'annule sur les constantes si c'est une "vraie" semi-norme (corollaire 8), le résultat est alors immédiat. □

Norme Diff_0^k-invariante maximale sur $C^k(X)$, $k \ge 1$

On s'intéresse maintenant aux (semi-)normes invariantes sur $C^k(X)$, $k \ge 1$. Il est alors naturel de demander l'invariance par le groupe $\mathrm{Diff}_0^k(X) \supset \mathrm{Diff}_0^\infty(X) = \mathrm{Diff}_0(X)$ (on va voir que cela conduit aussi à des résultats plus complets). Pour éviter les contre-exemples triviaux, on suppose que X (variété C^∞ compacte) n'a pas de composante réduite à un point, de même que son bord ∂X (cela garantit l'existence de fonctions vérifiant les hypothèses de l'énoncé qui suit).

LEMME 13.— *Si $F \in C^k(X)$ n'est constante sur aucune composante de X ou de ∂X, l'orbite de F sous $\mathrm{Diff}_0^k(X)$ engendre l'espace vectoriel $C^k(X)$. En particulier, c'est le cas si X est fermée connexe et F est non constante.*

Démonstration.— On montre en fait que toute fonction $f \in C^k(X)$ est une combinaison linéaire de fonctions de la forme $F \circ \phi - F \circ \psi$, avec ϕ, $\psi \in \mathrm{Diff}_0^k(X)$. On peut alors supposer X connexe. On note d sa dimension, et $\mathcal{V}$ le sous-espace vectoriel Diff_0^k-invariant de $C^k(X)$ engendré par F.

Comme F n'est pas constante, il existe une (petite) boule ouverte $B \subset \mathrm{int}\, X$ et une carte $\chi : B \to \mathbb{R}^d$ telle que $\chi_1 = F$ dans B. Alors si $f \in C^k(X)$ est à support dans B et si ε est assez petit (précisément si $\varepsilon \partial f / \partial \chi_1 > -1$ dans B),

$$(\chi_1, \ldots, \chi_d) \longmapsto (\chi_1 + \varepsilon f, \chi_2, \ldots, \chi_d)$$

définit un difféomorphisme C^k à support compact dans B, qui se prolonge trivialement en $\phi \in \mathrm{Diff}_0^k(X)$. Par construction, on a $f = (F \circ \phi - F)/\varepsilon \in \mathcal{V}$. Si maintenant $\mathrm{supp}(f) \subset \mathrm{int}\, X$, on peut écrire f comme une somme $f = f_1 + \cdots + f_p$, où chaque f_i est à support dans $\psi_i(B)$, $\psi_i \in \mathrm{Diff}_0^k(X)$ (utiliser une partition de l'unité). On a donc aussi $f \in \mathcal{V}$ dans ce cas. Reste à traiter les fonctions f à support dans un voisinage collier du bord.

Soit Y une composante de ∂X. Puisque F n'est pas constante sur Y, on peut trouver comme ci-dessus une "demi-boule" B_+, voisinage ouvert dans X d'un point de $Y \subset \partial X$, et une carte $\chi : B_+ \to \mathbb{R}^{d-1} \times [0, \infty[$ telle que $\chi_1 = F$ dans B_+ (noter que l'on a forcément ici $d > 1$). Le même argument donne $f \in \mathcal{V}$, d'abord pour $\mathrm{supp}(f) \subset B_+$ puis pour $\mathrm{supp}(f)$ contenu dans un collier de Y. Le lemme est démontré. □

Remarques

0) Cet énoncé est inspiré de l'exercice 2, de [G, p. 146] (exercice sur les sous-espaces Diff-invariants de $C^\infty(X)$).

1) Dans le cas (exclu par l'énoncé $X = I = [0, 1]$, une seule fonction F ne suffit *jamais* puisque si $aF(0) + bF(1) = 0$, tous les éléments de $\mathcal{V}$ satisfont la même relation. Cependant si on remplace $\mathrm{Diff}_0^k(I)$, par $\mathrm{Diff}^k(I)$, la conclusion redevient valable à condition de supposer que $F(1) \neq \pm F(0)$ et que $F'(0)$, $F'(1)$ ne sont pas tous deux nuls. On pourrait aussi prendre deux fonctions "modèles" F_1, F_2.

2) L'énoncé correspondant avec $k = 0$ ($\mathrm{Diff}_0^k = \mathrm{Homéo}_0$) est faux pour $X = \mathbb{S}^1$, et il n'y a même *aucune* fonction $F \in C^0(\mathbb{S}^1)$, dont l'orbite sous $\mathrm{Homéo}_0$ engendre l'espace vectoriel $C^0(\mathbb{S}^1)$ (appendice A).

3) La démonstration fournit pour toute $f \in C^k(X)$ une décomposition

$$f = \sum_1^p \lambda_i F \circ \phi_i\,, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}\,,\ \phi_i \in \mathrm{Diff}_0^k(X)$$

telle que $\sum |\lambda_i| \leq \mathrm{const}\|f\|_{C^1}$. En posant $V_F(f) = \inf\{\sum |\lambda_i|\}$ pour toutes ces décompositions, on obtient sur $C^k(X)$ une semi-norme, continue pour la topologie C^1, qui est clairement Diff_0^k-invariante.

LEMME 14.— *Pour toute fonction F vérifiant les hypothèses du lemme précédent, V_F est une norme Diff_0^k-invariante sur $C^k(X)$, et elle domine toutes les semi-normes Diff_0^k-invariantes sur $C^k(X)$. En particulier celles-ci sont automatiquement mesurables (en fait continues pour la topologie C^1), et V_F est, à équivalence près, indépendante du choix de F.*

Démonstration.— Il suffit d'observer que si $f = \sum \lambda_i F \circ \phi_i$ et N est une semi-norme Diff_0^k-invariante sur $C^k(X)$, on a

$$N(f) \leq N(F) \sum |\lambda_i|\,,$$

d'où $N(f) \leq N(F) V_F(f)$. Appliquant ceci à $N = \|\cdot\|_\infty$, on en déduit que V_F est une norme, et le reste est immédiat. □

La continuité de V_F (ou toute autre N) pour la topologie C^1 sur $C^k(X)$ permet de la prolonger à $C^1(X)$, et ce prolongement est Diff_0^1-invariant (Diff_0^k est dense dans Diff_0^1). On ne perd donc rien à supposer $k = 1$.

Si $X = \mathbb{S}^1$, on peut montrer que V_F est équivalente à la norme $\mathrm{Var} + \|\cdot\|_\infty$ (où $\mathrm{Var}(f) = \int |\mathrm{d}f|$ est la variation totale de $f \in C^1(\mathbb{S}^1)$). En particulier V_F n'est pas continue pour la topologie C^0. On va voir que ce fait est spécial à la dimension 1.

Classification sur $C^1(X)$ pour X fermée connexe, $\dim X \geq 2$

On va montrer que si X est connexe, fermée (compacte sans bord) et de dimension au moins 2 “la” norme V_F est continue pour la topologie C^0

(sur $C^1(X)$). Il en résultera dans ce cas une classification complète des (semi-)normes Diff_0^1-invariantes sur $C^1(X)$ vu la classification obtenue auparavant sur $C^0(X)$.

Soit F une fonction C^1 à support compact dans $]-2\,,2\,[^d$, $d \geq 2$, telle que $F(x) = 1 + \cos(\pi x_1)$ dans $C = [-1\,,1]^d$ et $F(x) = 0$ si $x_1 \geq 1$ (tas de sable). Soit $n > 0$ un entier *pair*. Par un difféomorphisme $\phi_{1,n,\varepsilon}$ à support compact de $]-2\,,2\,[^d$, on peut faire en sorte que $F_{1,n,\varepsilon} = F \circ \phi_{1,n,\varepsilon}$ vérifie, pour

$$k \in \mathbb{Z}\,,\ |k| \leq \frac{n}{2}\,, \quad |y_1| \leq \frac{1}{n} \text{ et } \sup|x_i| \leq 1 + \frac{1}{100}$$

$$F_{1,n,\varepsilon}\left(\frac{2k}{n} + y_1\,,\, x_2,\, \ldots,\, x_d\right) = F\big((n+\varepsilon)y_1\,,\, x_2,\, \ldots\, x_n\big)\,.$$

Lorsque $\varepsilon \to 0$, $F_{1,n,\varepsilon}$ converge dans C^1 vers une fonction $F_{1,n}$ qui est C^∞ au voisinage de $C = [-1\,,1]^d$, et coïncide en fait avec $1 + \cos(n\pi x_1)$ dans ce voisinage. Notons que $V_F(F_{1,n}) \leq 1$, puisque V_F est continue pour la topologie C^1.

De même, on construit des fonctions $F_{2,n}, \ldots, F_{d,n}$ telles que $F_{i,n}(x) = 1 + \cos(n\pi x_i)$ au voisinage de C et $V_F(F_{i,n}) \leq 1$. On pose alors $G = G_n = F_{1,n} + \cdots + F_{d,n}$ d'où, en particulier, $V_F(G) \leq d$ et $V_G \leq dV_F$ (on supprime l'indice n pour alléger les notations). On ne s'intéresse à G qu'au voisinage de C, où elle vaut $G(x) = \sum_i\big(1 + \cos(n\pi x_i)\big)$. En particulier, les points critiques de G dans ce voisinage sont les $x = (x_i)$ tels que $x_i = k_i/n$, $|k_i| \leq n$. On note S leur ensemble. Ils sont non dégénérés, d'indice égal au nombre de k_i pairs.

On considère maintenant le champ de vecteurs "singulier" défini dans $C' = C \setminus S$ par

$$\xi = \nabla G / |\nabla G|^2\,.$$

On a bien sûr $\langle \mathrm{d}G\,,\xi\rangle = 1$, et voit aisément que ξ vérifie dans C' les estimations

$$|\xi(x)| \leq \frac{c_1}{n^2 \mathrm{dist}(x,S)}\,, \quad c_1 = \frac{1}{2\pi}$$

$$\|\mathrm{D}\xi(x)\| = \frac{\|\mathrm{D}^2 G\|}{|\nabla G|^2} \leq \frac{c_2}{n^2 \mathrm{dist}(x,S)^2}\,, \quad c_2 = \frac{1}{4}\,.$$

Soit ϕ^t le "flot local" de ξ. Il n'est pas partout défini, et on note $T^*(x)$ la borne supérieure des T tels que $\phi^t(x)$ existe pour $|t| < T$. On a alors l'estimation

$$T^*(x) \geq c_3\, n^2 \operatorname{dist}\big(x, S\big)^2\,, \quad c_3 = \frac{1}{2c_1} \text{ ou même } c_3 = 4\,.$$

En effet, $\rho(t) = \operatorname{dist}\big(\phi^t(x), S\big)$ vérifie (ρ est lipschitzienne, ce qui suffit pour le calcul qui suit) :

$$\left|\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\right| \leq \left|\xi\big(\phi^t(x)\big)\right| \leq \frac{c_1}{n^2\rho}\,,$$

le seconde inégalité résultant de l'estimation de $|\xi|$. On en déduit alors $\rho(t)^2 \geq \rho(0)^2 - 2c_1|t|/n^2$, et l'estimation de T^* en découle.

Fixons maintenant un réel $\delta > 0$, qui sera choisi explicitement plus tard. Alors si $\operatorname{dist}(x, S) \geq \delta/n$, on obtient $\operatorname{dist}\big(\phi^t(x), S\big) \geq \delta/2n$ pour $|t| \leq 3c_3\delta^2/4$ (noter que $T^*(x) \geq c_3\delta^2$). En particulier, pour ces valeurs de t, on a

$$\left\|\mathrm{D}\xi\big(\phi^t(x)\big)\right\| \leq \frac{4c_2}{\delta^2}$$

et donc aussi

$$\left\|\mathrm{D}\phi^t(x)^{\pm 1}\right\| \leq \exp\left(\frac{4c_2|t|}{\delta^2}\right)\,.$$

Si f est une fonction C^1 telle que $\operatorname{supp}(f) \subset C'$, $\operatorname{dist}\big(\operatorname{supp}(f), S\big) \geq \delta/n$, et $\|f\|_\infty \leq 3c_3\delta^2/4$, on peut définir pour tout $x \in \,]-2\,,2\,[^d$,

$$\psi(x) = \begin{cases} \phi^{f(x)}(x) & \text{si } f(x) \neq 0 \\ x & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors ψ est une application C^1 de $]-2\,,2\,[^d$ dans lui-même, qui vérifie (tout a été fait pour cela!)

$$G\big(\psi(x)\big) - G(x) = f(x)\,.$$

Pour que ψ soit un difféomorphisme de $]-2\,,2\,[^d$ (à support compact), il suffit que ce soit un difféomorphisme *local*. Or si $x \in \operatorname{supp}(f)$, on a

$$\mathrm{D}\psi(x) = \mathrm{D}\phi^{f(x)}(x) + \xi\big(\psi(x)\big) \otimes \mathrm{d}f(x)$$

de sorte que pour que $\mathrm{D}\psi(x)$ soit inversible, il suffit que

$$\left|\xi\big(\psi(x)\big)\right| \cdot \left|\mathrm{d}f(x)\right| < \left\|\mathrm{D}\phi^{f(x)}(x)^{-1}\right\|^{-1}$$

et donc (puisque $\operatorname{dist}(\psi(x), S) \geq \delta/2n$) que

$$\frac{2c_1}{n\delta}\|\mathrm{d}f\|_\infty < \exp\left(-\frac{4c_2\|f\|_\infty}{\delta^2}\right)$$

ou encore que

$$\|\mathrm{d}f\|_\infty < \frac{n\delta}{2c_1}\exp(-3c_2c_3)\,.$$

Tout l'intérêt de cette inégalité vient du petit n, qui peut être choisi aussi grand que l'on veut. Seule la norme C^0 de f est réellement contrainte et pas sa norme C^1. Plus précisément, on a montré que si $f \in C_0^1(\,]-1\,,\,1\,[^d)$ vérifie

$$\operatorname{dist}(\operatorname{supp}(f), S) \geq \frac{\delta}{n}\,, \quad \|f\|_\infty \leq \frac{3c_3\delta^2}{4}$$

et

$$\|\mathrm{d}f\|_\infty < \frac{n\delta}{2c_1}\exp(-3c_2c_3)\,,$$

on a $V_G(f) \leq 2$ et donc $V_F(f) \leq 2d$.

Avant de conclure, il reste à choisir δ de façon à se débarrasser de l'hypothèse gênante $\operatorname{dist}(\operatorname{supp}(f), S) \leq \delta/n$ (c.-à-d. à support "loin" de S). Pour ce faire, on observe qu'il suffit de pouvoir décomposer *toute* fonction $f \in C^1$, à support dans $]-3/4\,,\,3/4\,[^d$ par exemple, en $f = f_1 + f_2$, avec f_1 à support "loin" de S (comme f ci-dessus) et f_2 à support "loin" d'un *translaté* de S, par exemple son image S_2 par un difféomorphisme à support compact de $]-2\,,\,2\,[^d$ qui coïncide dans C avec la translation de vecteur $(1/2n, \ldots, 1/2n)$ (rappelons que $S \subset (1/n)\mathbb{Z}^d$). On doit de plus contrôler les normes C^0 et C^1 des f_i.

Or si $4\delta \leq \sqrt{d}$, il existe une fonction $\chi \in C^1$ telle que $0 \leq \chi \leq 1$, $\chi = 0$ dans le δ/n-voisinage de S, $\chi = 1$ dans le δ/n-voisinage de S_2, et enfin

$$|\nabla\chi| \leq \frac{2n}{\sqrt{d} - 4\delta - \varepsilon}\,,$$

$\varepsilon > 0$ étant arbitrairement petit, par exemple $\varepsilon = (\sqrt{d} - 4\delta)/2$. Alors si $f \in C_0^1(\,]-3/4\,,\,3/4\,[^d)$ est telle que $\|f\|_\infty \leq 3c_3\delta^2/4$, les fonctions $f_1 = \chi f$ et $f_2 = (1-\chi)f$ vérifient la même estimation et

$$\|\mathrm{d}f_i\|_\infty \leq \|\mathrm{d}f\|_\infty + \frac{3c_3\delta^2}{4}\,\frac{4n}{\sqrt{d} - 4\delta}\,.$$

On aura donc $V_F(f) \leq 4d$, pour peu qu'il existe un $\delta > 0$ vérifiant

$$\frac{3c_3\delta^2}{\sqrt{d}-4\delta} < \frac{\delta}{2c_1}\exp(-3c_2c_3)\,,$$

ce qui est clair.

En conclusion, et avec le δ ci-dessus, on obtient

$$\forall\, f \in C_0^1\left(\left]\frac{-3}{4},\frac{3}{4}\right[^d\right), \quad V_F(f) \leq \frac{4}{3c_3\delta^2}\,\|f\|_\infty\,.$$

Par partition de l'unité, on en déduit aussitôt le théorème suivant.

THÉORÈME 15.— *Si X est compacte connexe sans bord et de dimension ≥ 2, la norme V_F est équivalente à la norme C^0 sur $C^1(X)$, pour toute fonction C^1 non constante F sur X.*

COROLLAIRE 16.— *Sous les mêmes hypothèses sur X, toute semi-norme Diff_0^k-invariante sur $C^k(X)$, $k \geq 1$, est de la forne $N(f) = \nu(\inf f, \sup f)$ (cf. corollaire 12).*

En particulier, ce résultat montre qu'en dimension > 1 on ne peut mesurer les "oscillations" ou la "variation totale" d'une fonction C^1 de façon à la fois Diff-invariante et *sous-additive*. Pour une fonction f suffisamment régulière sur X, on peut généraliser la variation totale définie en dimension 1 en posant

$$\mathrm{Var}(f) = \int_{\mathbb{R}} b_0\big(f^{-1}(t)\big)\,dt\,,$$

où $b_0(E)$ est le nombre de composantes connexes de $E \subset X$. En effet, il résulte de [Y] que cette quantité est finie dès que $f \in C^{2d+\varepsilon}$, $d = \dim X$, et elle est clairement invariante par difféomorphismes. Ce qui précède implique que pour $d > 1$ cela ne peut pas être une norme, de même que toute quantité analogue (il est clair que $\mathrm{Var}(f)$ n'est pas majorée par $\mathrm{const}\sup|f|$).

Questions

(1) Une norme Diff_0^ℓ-invariante sur $C^k(X)$ est-elle nécessairement mesurable (donc continue) si $\ell > k$ ou si $\ell = k = 0$? En particulier, existe-t-il une semi-norme Diff_0-invariante non nulle sur $C^0(X)/C^1(X)$? (Cela paraît peu plausible.)

(2) Si $\dim X \geq 2$, $\partial X = \emptyset$, l'espace vectoriel $C^0(X)$ est-il engendré par l'orbite sous Homéo_0 d'un (ou même d'un nombre fini) de ses éléments F? (Voir ci-dessous pour le cas $\dim X = 1$. Une réponse positive résoudrait affirmativement le cas $\ell = k = 0$ e la question précédente.)

Appendice A.
Le $\text{Homéo}_0(\mathbb{S}^1)$-module $C^0(\mathbb{S}^1)$ n'est pas de type fini

Autrement dit, l'espace vectoriel ($C^0(\mathbb{S}^1)$ n'est pas engendré par l'orbite sous $\text{Homéo}_0(\mathbb{S}^1)$ d'un nombre fini de ses éléments. La démonstration de ce fait m'a été suggérée par A. Fathi. Si $f \in C^0(\mathbb{S}^1)$, posons

$$\text{Var}_n(f) = \sup \sum_1^n \left| f(x_{i+1}) - f(x_i) \right| ,$$

où $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{S}^1$ sont cycliquement ordonnés et $x_{n+1} = x_1$. L'observation essentielle est que, pour $n \to \infty$, $\text{Var}_n(f)/n \to 0$. En effet, si ω est le module de continuité uniforme de f, on a

$$\text{Var}_n(f) \leq \sup \left\{ \sum_1^n \omega(t_i) \,\middle|\, t_i > 0 \,,\ \sum t_i = 1 \right\} .$$

Mais pour tout $\delta > 0$,

$$\sum_1^n \omega(t_i) \leq \frac{C}{\delta} + n\omega(\delta) ,$$

puisque le nombre des $t_i > \delta$ est inférieur à $1/\delta$, $C = \sup \omega$. On a donc $\limsup \text{Var}_n(f)/n \leq \omega(\delta)$ pour tout $\delta > 0$, d'où le résultat.

Supposons maintenant que le résultat annoncé soit faux, c'est-à-dire qu'il existe $F_1, \ldots, F_p \in C^0(\mathbb{S}^1)$ telle que toute $f \in C^0(\mathbb{S}^1)$ s'écrive $f = \sum_{ij} \lambda_{ij} F_i \circ \phi_{ij}$ (somme finie, $\lambda_{ij} \in \mathbb{R}$, $\phi_{ij} \in \text{Homéo}_0(\mathbb{S}^1)$). On aurait alors évidemment

$$\text{Var}_n(f) = \sum_{ij} |\lambda_{ij}| \, \text{Var}_n(F_i) \leq n\varepsilon_n N(f) ,$$

où $N(f) = \inf \sum_{ij} |\lambda_{ij}|$ sur toutes les décompositions possibles, et $\varepsilon_n = \sup_i \text{Var}_n(F_i)/n$ tend vers 0.

Mais l'ensemble K des f telles que $\forall\, n$, $\mathrm{Var}_n(f)/n \leq \varepsilon_n$ est un convexe fermé symétrique de $C^0(\mathbb{S}^1)$, et il est d'intérieur vide. En effet pour tout $\alpha > 0$ et tout entier p fixé, on peut trouver f telle que $|f| \leq \alpha$ et $\mathrm{Var}_p(f) \geq p\alpha$ (prendre $f(x) = \alpha \sin(px)$ par exemple) et donc $f \notin K$ pour p assez grand ($\varepsilon_p < \alpha$).

Or l'inégalité $\mathrm{Var}_n(f)/n \leq \varepsilon_n N(f)$, $\forall\, f \in C^0(\mathbb{S}^1)$ entraîne $\bigcup_{c\geq 0} c \cdot K = C^0(\mathbb{S}^1)$, ce qui contredit $\mathrm{int}\,\overline{K} = \emptyset$ d'après le théorème de Baire.

Appendice B. Mesurabilité et axiome du choix

Il est bien connu que dans la théorie usuelle des ensembles ZFC, l'axiome du choix (C pour choix, ZF pour Zermelo-Fraenkel), permet de montrer l'existence dans $\mathbb{R}$ de parties non mesurables au sens de Lebesgue ou de Baire (via un bon ordre sur $\mathbb{R}$ ou une base de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{Q}$), ou encore de formes linéaires discontinues sur un espace de Banach de dimension infinie (via une base — algébrique — de celui-ci). Ces objets ne sont cependant jamais "explicitement construits".

Cette observation un peu vague a reçu un statut mathématique à la suite des travaux de R. Solovay (1970) et S. Shelah (1984). Plus précisément, soit ZF + ACD la théorie des ensembles où on a remplacé l'axiome du choix AC — *tout produit d'ensembles non vides est non vide* — par l'énoncé suivant, qui suffit à toute l'analyse "classique" (par définition?).

AXIOME DES CHOIX DÉPENDANTS (ACD)

Pour tout ensemble E et toute relation $R \subset E \times E$ vérifiant $R(x) \neq \emptyset$ pour tout x de E, il existe une suite (x_n) telle que $x_{n+1} \in R(x_n)$.

Le résultat de Solovay peut alors s'énoncer de la façon suivante.

THÉORÈME 17 ([So]).— *Dans* ZF + ACD, *on ne peut démontrer l'existence d'une partie de $\mathbb{R}$ non mesurable au sens de Lebesgue ou de Baire. De plus, on peut remplacer $\mathbb{R}$ dans cet énoncé par n'importe quel espace métrique complet séparable muni d'une mesure borélienne σ-finie (à laquelle se réfère alors la mesurabilité au sens de Lebesgue).*

Comme toujours dans ce domaine, le résultat provient de la construction d'un *modèle* de ZF + ACD, où toutes les parties de $\mathbb{R}$ sont mesurables. Malheureusement, cet énoncé était conditionnel à une "hypothèse technique", à savoir la cohérence de ZFC + I, où I affirme l'existance d'un "cardinal inaccessible". Cette hypothèse est plus forte que la théorie des ensembles : on ne peut déduire la cohérence de ZFC + I de celle de ZFC (supposée, par un acte de foi commun à la plupart des mathématiciens, mais notoirement indémontrable). En fait, c'est une des plus faibles parmi les hypothèses de "grands cardinaux" ([J], [St]).

Cette situation quelque peu inconfortable a été complètement éclaircie par S. Shelah [Sh], qui a montré que la cohérence de ZFC + I n'est pas nécessaire pour la mesurabilité au sens de Baire, alors qu'elle l'est pour la mesurabilité au sens de Lebesgue. Cette asymétrie profonde entre mesure et catégorie est une des surprises apportées par ce résultat, puisque pour beaucoup de questions, les deux théories sont "parallèles" [O].

Une conséquence de ceci et du lemme 1 est qu'il est impossible dans ZF + ACD de démontrer l'existence d'une semi-norme discontinue sur un Banach séparable, sous peine de démontrer que ZF (ou ZFC) est incohérente! Remarquons que ceci entraîne l'impossibilité dans ZF + ACD de démontrer l'existence d'une forme linéaire discontinue sur un Banach, même non séparable, puisque la continuité se vérifie sur les suites, et donc sur les sous-espaces séparables (fermés).

Si on convient d'appeler "raisonnable" une semi-norme sur un Banach séparable lorsque sa construction est possible dans ZF + ACD, on arrive à la morale de cet appendice.

Toute (semi-)norme raisonnable sur un Banach séparable est continue.

Appendice C. Homéomorphismes en dimension 4

THÉORÈME 18.— (Résultat dû à R. D. Edwards) *Si X est une variété (C^∞) de dimension 4, $\mathrm{Diff}(X) \cap \mathrm{Homéo}_0(X)$ n'est pas dense dans* $\mathrm{Homéo}_0(X)$.

Ce fait provient de l'existence d'ouverts U de $\mathbb{R}^4$ (avec sa structure différentiable usuelle) qui sont homéomorphes mais non difféomorphes à $\mathbb{R}^4$ (cf. [DF], [Go]). Plus pécisément U contient un compact K qui ne peut être inclus dans l'image d'aucun plongement différentiable de $\mathbb{B}^4 = \{x \mid |x| \leq 1\}$ dans U. On en déduit facilement l'existence d'un plongement topologique (orienté, "topologiquement plat" au voisinage du bord) $h_1 : \mathbb{B}^4 \to \operatorname{int} 2\mathbb{B}^4$ qui n'est pas C^0-approchable par un plongement différentiable. En effet il existe un homéomorphisme $h_0 : \mathbb{R}^4 \to U$, dont on peut supposer qu'il préserve l'orientation et vérifie $K \Subset h_0(\mathbb{B}^4) \Subset U \subset 2\mathbb{B}^4$. On prend simplement pour h_1 la restriction de h_0 à $\mathbb{B}^4$. D'après le théorème de l'anneau en dimension 4 [E], il existe un homéomorphisme

$$\phi : \mathbb{S}^3 \times [1\,, 2] \xrightarrow{\sim} 2\mathbb{B}^4 \setminus \operatorname{int} h_1(\mathbb{B}^4)$$

(envoyant $2\mathbb{S}^3$ dans elle-même), ce qui permet d'étendre h_1 en $h_2 \in$ Homéo$^+(2\mathbb{B}^4)$, par

$$h_2(x) = \begin{cases} h_1(x) & \text{si } |x| \leq 1 \\ \phi\left(\phi_1^{-1}\left(h_1\left(\frac{x}{|x|}\right)\right)\,, |x|\right) & \text{si } 1 \leq |x| \leq 2, \end{cases}$$

avec $\phi_1 = \phi(\,\cdot\,, 1)$. Enfin la connexité par arcs de Homéo$^+(\mathbb{S}^3)$ (qui résulte de [Cf], [Ci] et [EK]), donne un homéomorphisme $h_3 \in$ Homéo$^+(3\mathbb{B}^4)$ qui vaut l'identité au bord (donc est isotope à l'identité par Alexander) mais n'est pas C^0-approchable par un plongement différentiable de $3\mathbb{B}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ (sinon h_1 le serait aussi). En transplantant h sur une variété quelconque X de dimension 4, on obtient le résultat, à savoir que l'adhérence (C^0) de Diff(X) dans Homéo(X) ne contient pas Homéo$_0(X)$.

Remerciements

Je remercie Larry Siebenmann de m'avoir indiqué la référence [KS] et aussi pour d'enrichissantes conversations. Je suis reconnaissant à R. D. Edwards de m'avoir expliqué son surprenant résultat.

Références

[B] Bourbaki (N.) .— *Topologie générale*, chap. IX, Hermann (1974).

[Cf] Cerf (J.) .— *Sur les difféomorphismes de la sphère de dimension trois*, Springer-Verlag, Lect. Notes in Math. **53**, (1968).

[Ci] Cernavskii (A. V.) .— *Local contractibility of the homeomorphism group of a manifold*, Soviet. Math. Dokl. **9** (1968), pp. 1171-1174; voir aussi T. B. Rushing, *Topological embeddings*, Academic Press (1973).

[DF] DEMICHELIS (S.) et FREEDMAN (M. H.) .— *Uncountably many exotic $\mathbb{R}^4$ in standard 4-space*, J. Diff. Geom. **35** (1992), pp. 219-254.

[E] EDWARDS (R. D.) .— *The solution of the 4-dimensional Annulus Conjecture (after Frank Quinn)*, "Four-manifolds theory" Gordon, Kirby eds, Contemporary Math. **35** (1984), pp. 211-264.

[EK] EDWARDS (R. D.) et KIRBY (R. C.) .— *Deformations of spaces of imbeddings*, Ann. of Math. **93** (1971), pp. 63-88.

[Go] GOMPF (R. E.) .— *An exotic menagerie*, J. Diff. Geom. **37** (1993), pp. 199-223.

[G] GROMOV (M.) .— *Partial Differential Relations*, Springer-Verlag (1986).

[H] HOFER (H.) et ZEHNDER (E.) .— *Symplectic invariants and hamiltonian dynamics*, Birkhäuser, (1994).

[J] JECH (T.) .— *Set theory*, Academic Press (1978).

[KS] KIRBY (R. C.) et SIEBENMANN (L. C.) .— *Foundational essays on topological manifolds, smoothings, and triangulations*, Ann. of Math. Studies, Princeton Univ. Press, **88** (1977).

[LM] LALONDE (F.) et MCDUFF (D.) .— *The geometry of symplectic energy*, Annals of Math. **141** (1995), pp. 349-371.

[O] OXTOBY (J. C.) .— *Measure and Category*, Springer-Verlag, 2ème édition (1980).

[Sh] SHELAH (S.) .— *Can you take Solovay's inaccessible away?* Israel J. Math. **48**, n° 1 (1984), pp. 1-47.

[So] SOLOVAY (R. M.) .— *A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue-measurable*, Annals of Math. **92** (1970), pp. 1-56.

[St] STERN (J.) .— *Ensembles (Théorie axiomatique)*, Encycl. Universalis, 2ème édition (1988).

[Y] YOMDIN (Y.) .— *Global bounds for the Betti numbers of regular fibers of differentiable mappings*, Topology **24**, n° 2 (1985), pp. 145-152.