ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

NOURI KAMOUN

Fonctions indéfiniment différentiables invariantes sur l'espace tangent d'un espace symétrique

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 7, nº 2 (1998), p. 293-311

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1998_6_7_2_293_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. VII, n° 2, 1998

Fonctions indéfiniment différentiables invariantes sur l'espace tangent d'un espace symétrique(*)

NOURI KAMOUN(1)

RÉSUMÉ. — Soit G un groupe de Lie connexe réductif, σ une involution de G, H la composante neutre du groupe des points fixes de σ. Soient $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G et $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{q}$ la décomposition de $\mathfrak{h}\mathfrak{g}$ en espaces propres associés à σ. Nous donnons une condition nécessaire et suffisante qui porte sur les restrictions aux différents sous-espaces de Cartan de $\mathfrak{q}$, pour qu'une fonction continue et H-invariante sur $\mathfrak{q}$ soit $\mathcal{C}^\infty$.

ABSTRACT. — Let G be a real connected reductive Lie group, σ an involution of G, and H the identity component of the group of its fixed points. Let $\mathfrak{g}$ denote the Lie algebra of G and $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{q}$ its decomposition into ∓ 1-eigenspaces for σ. In order to characterize $\mathcal{C}^\infty$ functions in the space of H-invariant continuous functions on $\mathfrak{q}$, we give a necessary and sufficient condition on their restrictions to the different Cartan subspaces of $\mathfrak{q}$.

Introduction

Soit G un groupe de Lie connexe réductif, σ une involution de G, H la composante neutre du groupe des points fixes de σ. Alors la paire (G, H) est dite paire symétrique. Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G. On notera σ l'involution de $\mathfrak{g}$ obtenue en différenciant σ et $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{q}$ la décomposition de $\mathfrak{g}$ en espaces propres associés à σ. Soit $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{q}$ un sous-espace de Cartan de $\mathfrak{q}$, c'est-à-dire $\mathfrak{a}$ est un sous-espace abélien maximal de $\mathfrak{q}$ formé d'éléments semi-simples; on notera $W(H, \mathfrak{a})$ le groupe de Weyl de H dans $\mathfrak{a}$. Il est clair que $\mathfrak{q}$ peut être identifié avec l'espace tangent de l'espace symétrique G/H. De plus, le groupe H agit sur $\mathfrak{q}$ par la restriction à $\mathfrak{q}$ de la représentation adjointe.

(*) Reçu le 20 mai, accepté le 17 juin

(1) Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, TN-5019 Monastir (Tunisie) e-mail : Harn@fsm.rnu.tn

Rappelons que l'action adjointe d'un groupe de Lie réductif et connexe G' sur son algèbre de Lie $\mathfrak{g}'$ entre dans ce cadre en prenant $G = G' \times G'$ et $\sigma(x,y) = (y,x)$. Il est bien connu [D] que si σ est une involution de Cartan, l'application de restriction est un isomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{q})^H$ sur $\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{h}\mathfrak{a})^{W(H,\mathfrak{a})}$. Cet isomorphisme n'est pas vrai pour une paire symétrique quelconque. Dans le cadre des algèbres de Lie réductives, A. Bouaziz [B] a donné une caractérisation des fonctions indéfiniment différentiables et G-invariantes sur $\mathfrak{g}$ en fonction de leurs restrictions aux sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$. C'est ce résultat qu'on se propose de généraliser aux espaces symétriques réductifs. Étant donnée f une fonction continue et H-invariante sur $\mathfrak{q}$, on donne une condition nécessaire et suffisante (portant sur les restrictions de f aux sous-espaces de Cartan de $\mathfrak{q}$) pour que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{q})^H$ (théorème 5.1). La démonstration de ce théorème a nécessité une adaptation de la méthode de descente d'Harish-Chandra pour les algèbres de Lie réductives à l'espace tangent d'un espace symétrique réductif (prop. 3.1). Dans la démonstration du théorème 5.1, on utilise aussi des techniques de [B].

1. Notations

Si V est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, on notera $V_\mathbb{C}$ son complexifié. On notera V^* et $V_\mathbb{C}^*$ les duaux respectifs de V et de $V_\mathbb{C}$. On note $S(V_\mathbb{C})$ l'algèbre symétrique de $V_\mathbb{C}$. On l'identifiera avec l'algèbre des opérateurs différentiels à coefficients constants complexes sur V. On notera $\delta(u)$ l'opérateur différentiel correspondant à $u \in S(V_\mathbb{C})$.

On notera $\mathcal{P}(V_\mathbb{C})$ l'algèbre des fonctions polynomiales (à coefficients complexes) sur $V_\mathbb{C}$.

Si G est un groupe opérant dans un ensemble X, si H est une partie de G et si Y est une partie de X, on notera

$$N(H,Y) = \{h \in H \mid h \cdot Y \subset Y\}$$

$$Z(H,Y) = \{h \in H \mid h \cdot y = y\,,\ \forall\, y \in Y\}\,.$$

Si $N(H,Y)$ est un groupe, on notera $W(H,Y)$ le groupe quotient $N(H,Y)/Z(H,Y)$.

On notera X^H l'ensemble des éléments de X fixés par tout $h \in H$. Si $x \in X$, on notera $H \cdot x$ l'orbite de x sous H.

Si E est un espace vectoriel topologique, on notera E' son dual topologique. Si $A \subset E$, on notera $A^{\perp}$ l'orthogonal de A dans E'. De même, on notera $B^{\perp}$ l'orthogonal dans E d'une partie B de E'.

Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie, si $X \in \mathfrak{g}$ et si V est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$, on note

$$V^X = \{Z \in V \mid [Z, X] = 0\}.$$

2. Structure de l'espace tangent à un espace symétrique

2.1 Décomposition de Jordan

Soit G un groupe de Lie connexe réductif d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soit σ une involution de G. L'involution de $\mathfrak{g}$ obtenue par différentiation sera notée aussi σ. On note $G^\sigma = \{g \in G \mid \sigma(g) = g\}$, $\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \sigma(x) = X\}$, $\mathfrak{q} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \sigma(x) = -X\}$, H la composante neutre de G^σ dans G.

On a alors $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{q}$, $\mathfrak{h}$ est l'algèbre de Lie de H et, puisque $H \subset G^\sigma$, le groupe H agit sur $\mathfrak{q}$.

On appellera (G, H) une paire symétrique réductive.

On dira que $X \in \mathfrak{g}$ est semi-simple si l'endomorphisme $\operatorname{ad} X$ est semi-simple, c'est-à-dire diagonalisable sur $\mathbb{C}$. On dira que $X \in \mathfrak{g}$ est nilpotent si $X \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ et si l'endomorphisme $\operatorname{ad} X$ est nilpotent. On sait que tout $X \in \mathfrak{g}$ admet une décomposition de Jordan unique sous la forme $X = X_s + X_n$ où X_s est semi-simple, X_n nilpotent et $[X_s, X_n] = 0$. Si $X \in \mathfrak{q}$, la décomposition de Jordan donne $\sigma(X_s) = -X_s$, $\sigma(X_n) = -X_n$, et donc X_s et X_n appartiennent à $\mathfrak{q}$. On notera $\mathcal{S}$ l'ensemble des éléments semi-simples de $\mathfrak{q}$ et $\mathcal{N}$ l'ensemble des éléments nilpotents de $\mathfrak{q}$.

LEMME 2.1.— ([OM], prop. 5.2) *Si $X \in \mathfrak{q}$, alors X_s appartient à l'adhérence $\overline{H \cdot X}$ de $H \cdot X$.*

2.2 Sous-espaces de Cartan et ouverts invariants

On rappelle qu'un sous-espace $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{q}$ est appelé sous-espace de Cartan s'il est abélien formé d'éléments semi-simples de $\mathfrak{q}$ et maximal pour ces deux propriétés. Tous les sous-espaces de Cartan de $\mathfrak{q}$ ont la même dimension qu'on appelle le rang de $\mathfrak{q}$ et le nombre de classes de conjugaison sous H de sous-espaces de Cartan est fini [Se, sect.. 1]).

DÉFINITION 2.2.— *Un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathfrak{q}$ est dit complètement H-invariant si :*

1) $\mathcal{U}$ est H-invariant;

2) $X \in \mathcal{U}$, alors $X_s \in \mathcal{U}$.

3. Méthode de descente pour les espaces symétriques réductifs

Si $X \in \mathfrak{q}$ est semi-simple, G_0^X et H_0^X désigneront les composantes neutres de G^X et H^X, $\mathfrak{g}^X$ (resp. $\mathfrak{h}^X$) s'identifie avec l'algèbre de Lie de G_0^X (resp. H_0^X). Le groupe G_0^X est invariant par σ et (G_0^X, H_0^X) est une paire symétrique réductive.

Soit X un élément semi-simple de $\mathfrak{q}$. Un ouvert de $\mathfrak{q}^X$ est dit complètement H^X-invariant s'il est H^X-invariant et complètement H_0^X-invariant.

PROPOSITION 3.1.— *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert complètement H-invariant dans $\mathfrak{q}$. Soit X un élément semi-simple de $\mathcal{U}$. Il existe alors un voisinage ouvert V de X dans $\mathfrak{q}^X$ complètement H^X-invariant contenu dans $\mathcal{U} \cap \mathfrak{q}^X$ tel que :*

i) l'application $\pi : H \times V \longrightarrow \mathfrak{q}$ définie par $(h, Y) \longmapsto h \cdot Y$ est une submersion et $W = \pi(H \times V)$ est un ouvert complètement H-invariant de $\mathfrak{q}$;

ii) les fibres de π sont exactement les H^X-orbites dans $H \times V$ pour l'action

$$m \cdot (h, Y) = (h \cdot m^{-1}, m \cdot Y),$$

iii) l'application

$$\mathcal{C}^\infty(W)^H \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(V)^{H^X}$$
$$f \longmapsto f|_V$$

est un isomorphisme.

Démonstration.— Notons $\mathfrak{c}$ le centre de $\mathfrak{g}^X$ et $\mathfrak{l}$ son algèbre dérivée. On a $\mathfrak{g}^X = \mathfrak{c} \oplus \mathfrak{l}$, $\mathfrak{g}^X = (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}^X) \oplus (\mathfrak{q} \cap \mathfrak{g}^X)$, $\mathfrak{l} = (\mathfrak{l} \cap \mathfrak{h}) \oplus (\mathfrak{l} \cap \mathfrak{q})$, $\mathfrak{c} = (\mathfrak{c} \cap \mathfrak{h}) \oplus (\mathfrak{c} \cap \mathfrak{q})$.

On se donne : $V_1(0)$ un voisinage ouvert de 0, H^X-invariant dans $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{q}$ et $\gamma_1(X)$ un voisinage ouvert de X dans $\mathfrak{c} \cap \mathfrak{q}$ tels que $\gamma_1(X) + V_1(0)$ soit contenu dans $\mathcal{U} \cap \mathfrak{q}^X$.

Notons $L_{\mathbb{C}}$ le groupe adjoint de $\mathfrak{l}_{\mathbb{C}}$ et soient $P_1, \ldots, P_r$ des polynômes homogènes algébriquement indépendants de $\mathcal{P}(\mathfrak{l}_{\mathbb{C}})^{L_{\mathbb{C}}}$ tels que $\mathcal{P}(\mathfrak{l}_{\mathbb{C}})^{L_{\mathbb{C}}} = \mathbb{C}(P_1, \ldots, P_r)$ ([V2, p. 336]).

Pour $t > 0$, notons

$$\mathfrak{l}(t) = \{Z \in \mathfrak{l} \mid |P_i(Z)| < t\,,\ \forall\, i = 1, \ldots, r\}\,.$$

Remarquons que $\mathfrak{l}(t)$ est un ouvert H^X-invariant. On a besoin du lemme suivant.

LEMME 3.2.— *Pour tout sous-espace de Cartan $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{q} \cap \mathfrak{l}$, il existe $t > 0$ tel que*

$$\mathfrak{l}(t) \cap \mathfrak{a} \subset V_1(0) \cap \mathfrak{a}\,.$$

Démonstration.— En effet, sinon, il existe un sous-espace de Cartan $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{q}$ et il existe une suite $(Y_n)_{n \geq 1}$ dans $\mathfrak{a}$ telle que, pour tout $i = 1, \ldots, r$, on a

$$\lim_{n \to \infty} P_i(Y_n) = 0 \quad \text{et} \quad Y_n \notin V_1(0)\,.$$

Alors, si on se donne $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{l}$ qui contient $\mathfrak{a}$, l'application

$$\begin{aligned} \mathfrak{b} &\longrightarrow \mathbb{C}^r \\ Y &\longmapsto (P_1(Y), \ldots, P_r(Y)) \end{aligned}$$

étant propre [V1, lemme I.1.6], on pourra extraire de (Y_n) une suite convergente $(Y_{n_k})_{k \geq 1}$, sa limite que l'on note Y_0 appartient à $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{l}$. Or, puisque $P_i(Y_0) = 0, \forall\, i = 1, \ldots, r$, et Y_0 est semi-simple, on aura $Y_0 = 0$. Donc, les Y_{n_k} doivent être dans $V_1(0)$ pour k assez grand. Or ceci est en contradiction avec le choix de la suite (Y_n).

Revenons à la démonstration de la proposition 3.1. Notons $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m$ des représentants des classes de conjugaison sous H^X des sous-espaces de Cartan de $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{q}$. On a alors d'après le lemme 3.2, pour tout $i = 1, \ldots, m$, il existe $t_i > 0$ tel que

$$\mathfrak{l}(t_i) \cap \mathfrak{a}_i \subset V_1(0) \cap \mathfrak{a}_i\,.$$

Donc, il existe $t_0 > 0$ tel que $\mathfrak{l}(t_0) \cap \mathfrak{a}_i \subset V_1(0) \cap \mathfrak{a}_i \ \forall\, i = 1, \ldots, m$.

Si Y est un élément semi-simple de $\mathfrak{l}(t_0) \cap \mathfrak{q}$, il existe $h \in H^X$ tel que $h \cdot Y \in \bigcup_{i=1}^{i=m} \mathfrak{a}_i$; par suite $h \cdot Y$ est dans $V_1(0)$ et donc Y est dans

$V_1(0)$. Donc $\mathfrak{l}(t_0) \cap \mathfrak{q}$ est contenu dans $V_1(0)$; en effet, sinon il existe $X_0 \in \mathfrak{l}(t_0) \cap \mathfrak{q} \cap (V_1(0))^c$ où $(V_1(0))^c$ désigne le complémentaire de $V_1(0)$ dans $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{q}$. Or, d'une part, $(X_0)_s \in l(t_0) \cap \mathfrak{q}$ contenu dans $V_1(0)$ et, d'autre part, $(X_0)_s \in \overline{H^X \cdot X_0}$ contenu dans $[V_1(0)]^c$, d'où une contradiction.

On a donc montré que pour tout ouvert H^X-invariant $V \subset \mathfrak{q}^X$ contenant X, il existe $t > 0$ et un voisinage ouvert γ_1 de X dans $\mathfrak{c} \cap \mathfrak{q}$ tels que $\gamma_1 + (\mathfrak{l}(t) \cap \mathfrak{q}) \subset V$. Notons

$$(\mathfrak{g}^X)' = \left\{Y \in \mathfrak{g}^X \mid \det(\operatorname{ad} Y)_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}^X} \neq 0\right\}.$$

L'application

$$\begin{aligned} \pi : H \times \left((\mathfrak{g}^X)' \cap \mathfrak{q}\right) &\longrightarrow \mathfrak{q} \\ (h, Y) &\longmapsto h \cdot Y \end{aligned}$$

est une submersion.

D'après [V1, théorème I.20], il existe un voisinage $\mathcal{O}$ de X dans $\mathfrak{c}$ et $\tau > 0$ tels que, pour tout $g \in G$,

$$g \cdot (\mathcal{O} + \mathfrak{l}(\tau)) \cap (\mathcal{O} + \mathfrak{l}(\tau)) \neq \emptyset \Longrightarrow g \in G^X .$$

On choisit alors $0 < t < \inf(t_0, \tau)$ et γ un voisinage ouvert de X dans $\mathfrak{c} \cap \mathfrak{q}$ tels que

$$\gamma \subset (\gamma_1 \cap \mathcal{O}) \quad \text{et} \quad \gamma + (\mathfrak{l}(t) \cap \mathfrak{q}) \subset \left((\mathfrak{g}^X)' \cap \mathfrak{q}\right).$$

Posons $V = \gamma + (\mathfrak{l}(t) \cap \mathfrak{q})$. Alors

$$h \in H \quad \text{et} \quad h \cdot V \cap V \neq \emptyset \Longrightarrow h \in H^X \tag{3.1}$$

L'ouvert V ainsi défini vérifie i) de la proposition 3.1. En effet, l'application

$$\begin{aligned} \pi : H \times V &\longrightarrow \mathfrak{q} \\ (h, Y) &\longmapsto h \cdot Y \end{aligned}$$

est une submersion. Par suite $W = \pi(H \times V)$ est un ouvert et il est clair que W est complètement H-invariant, car V est un ouvert complètement H^X-invariant et car la décomposition de Jordan d'un élément de $\mathfrak{g}^X$ est la même que sa décomposition en tant qu'élément de $\mathfrak{g}$.

La propriété ii) découle de (3.1).

Montrons iii). L'application en question étant clairement injective, il suffit de montrer qu'elle est surjective. Soit $g \in \mathcal{C}^\infty(V)^{H^X}$. Posons, pour $h \in H$ et $Z \in V$, $f(h \cdot Z) = g(Z)$; alors la propriété ii) assure que f est bien définie; de plus, elle c'est l'unique fonction H-invariante dont la restriction à V est g. Elle est $\mathcal{C}^\infty$, car l'application $\pi : H \times V \longrightarrow W$ définie par $(h, Y) \longmapsto h \cdot Y$ est une submersion surjective et la fonction $f \circ \pi : (h, Y) \longrightarrow g(Y)$ est $\mathcal{C}^\infty$.

4. Lemme technique

Le lemme 4.2 suivant et le corollaire 4.3 qui en découle généralisent à notre situation le lemme 3 et la proposition 2 de [V1, § I.9]. Les démonstrations sont analogues.

Ici on suppose $\mathfrak{g}$ semi-simple, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{q}$ la décomposition associée à l'involution σ. Soit θ une involution de Cartan qui commute avec σ et $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ la décomposition associée. Soit $K = \{x \in G \mid \theta(x) = x\}$ le sous-groupe des points fixes de θ. On note $\langle \cdot , \cdot \rangle$ la forme de Killing de $\mathfrak{g}$, alors la forme bilinéaire $(X, Y) = -\langle X , \theta(Y) \rangle$ est définie positive. On pose $\|X\|^2 = (X, X)$.

Si u est un endomorphisme de $\mathfrak{g}$, on notera u^* l'endomorphisme adjoint de u pour le produit scalaire $(\cdot , \cdot)$. On pose $\|u\|^2 = \operatorname{tr} uu^*$. Pour $x \in G$, on pose $\|x\| = \|\operatorname{Ad} x\|$, alors $\| \cdot \|$ est K-invariante sur G et les éléments de K sont unitaires.

On rappelle que $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^\sigma$ est une algèbre de Lie réductive stable par θ. Soit $\mathfrak{b}$ un sous-espace abélien maximal de $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$.

Pour $\alpha \in \mathfrak{b}^*$, on note :

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{Y \in \mathfrak{g} \mid [Z , Y] = \alpha(Z)Y , \forall Z \in \mathfrak{b}\}$$

On note $\Sigma = \Sigma(\mathfrak{b}, \mathfrak{g})$ l'ensemble des $\alpha \in \mathfrak{b}^*$ non nuls tels que $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$.

Lemme 4.1.— ([R] ou [S, prop. 7.2.1) Σ *est un système de racines.*

Fixons un système Σ^+ de racines positives dans Σ et soit $S = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\ell)$ le système de racines simples de Σ^+. Soit $\mathfrak{b}^+$ la chambre de Weyl positive et fermée de $\mathfrak{b}$ définie par $Z \in \mathfrak{b}^+$ si et seulement si, pour tout $i = 1, \ldots, \ell$, on a $\alpha_i(Z) \geq 0$.

On notera log la réciproque de l'application $\exp : \mathfrak{b} \longrightarrow \exp(\mathfrak{b})$.

LEMME 4.2.— *Pour tout système Σ^+ de racines positives de Σ et tout $r > 0$, il existe $r' \geq r$ et il existe $c \geq 1$ tels que, pour tout $X \in \mathfrak{g}$ vérifiant $\|X\| \leq r$ et pour $t \in \exp(\mathfrak{b}^+)$, il existe $t_0 \in \exp(\mathfrak{b}^+)$ tel que :*

i) $t_0^{-1} \cdot t \in \exp(\mathfrak{b}^+)$;

ii) $\|t_0^{-1} \cdot t \cdot X\| \leq r'$;

iii) $\max\limits_{1 \leq i \leq \ell} e^{\alpha_i(\log t_0)} \leq c\Big(1 + \|t \cdot X\|\Big)$.

Avant de démontrer ce lemme, donnons le corollaire suivant.

COROLLAIRE 4.3.— *Si on désigne par $B_{\mathfrak{q}}\ (0, r) = \Big\{Y \in \mathfrak{q} \mid \|Y\| \leq r\Big\}$, il existe un entier $m \geq 1$ tel que pour tout $r > 0$, il existe $r' \geq r$ et $c \geq 1$ tels que, pour tout $X \in H \cdot B_{\mathfrak{q}}(0, r)$, il existe $h \in H$ tel que :*

i) $\|h^{-1} \cdot X\| \leq r'$;

ii) $\|h\| \leq c\Big(1 + \|X\|\Big)^m$.

Démonstration du corollaire 4.3.— Le groupe H étant réductif, on a la décomposition

$$H = (K \cap H) \exp(\mathfrak{b}) \cdot (K \cap H).$$

Soit $X \in H \cdot B_{\mathfrak{q}}(0, r)$; on l'écrit $X = h' \cdot X'$ avec $h' \in H$ et $\|X'\| \leq r$. Il existe k, k' dans $K \cap H$ et $t \in \exp(\mathfrak{b})$ tels que $h' = k \cdot t \cdot k'$. Il existe un système $\Sigma^+(t)$ de racines positives dans Σ tel que si $S(t) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ est le système des racines simples associé et si $\mathfrak{b}^+(t)$ est la chambre de Weyl positive et fermée dans $\mathfrak{b}$ associée, on ait $t \in \exp(\mathfrak{b}^+(t))$. Alors $k^{-1} \cdot X = t \cdot (k' \cdot X') = t \cdot X''$ et on a $\|X''\| \leq r$.

D'après le lemme 4.2, il existe $r' \geq r$, $c \geq 1$ et $t_0 \in \exp\big(\mathfrak{b}^+(t)\big)$ tels que :

i) $t_0^{-1} \cdot t \in \exp\big(\mathfrak{b}^+(t)\big)$;

ii) $\|t_0^{-1} \cdot t \cdot X''\| \leq r'$;

iii) $\max\limits_{1 \leq i \leq \ell} e^{\alpha_i(\log t_0)} \leq c\Big(1 + \|t \cdot X''\|\Big)$.

Soit $h = k \cdot t_0$, alors $h \in H$. On a

$$\|h^{-1} \cdot X\| = \|t_0^{-1} \cdot k^{-1} \cdot k \cdot t \cdot k' \cdot X'\| = \|t_0^{-1} \cdot t \cdot X''\| \leq r'$$

$$\|h\| = \|k \cdot t_0\| = \|t_0\|.$$

Or il existe $c_1 \geq 1$, $m \geq 1$ tels que pour tout $y \in \exp\ \mathfrak{b}^+(t)$ on a

$$\|y\| \leq c_1 \max_{1 \leq i \leq \ell} \left(e^{\alpha_i(\log y)}\right)^m$$

donc

$$\begin{aligned} \|t_0\| &\leq c_1 c^m \Big(1 + \|t \cdot X''\|\Big)^m \\ &\leq c_1 c^m \Big(1 + \|X\|\Big)^m \end{aligned}$$

car

$$\|t \cdot X''\| = \|k^{-1} \cdot X\| = \|X\| .$$

Démonstration du lemme 4.2.— La démonstration se fait par récurrence sur $\dim \mathfrak{b}$ où $\mathfrak{b}$ est un sous-espace abélien maximal de $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$. Le lemme étant évident pour le cas $\dim \mathfrak{b} = 1$, supposons qu'il soit vrai pour tout couple $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ tel que $\dim \mathfrak{b} \leq \ell - 1$. D'après le lemme 4.1, $\Sigma = \Sigma(\mathfrak{b}, \mathfrak{g})$ est un système de racines. On notera $\mathfrak{g}_\lambda$ le sous-espace poids correspondant à λ dans Σ. Comme si $H \in \mathfrak{b}$, on a $(\mathrm{ad}\, H)^* = -\mathrm{ad}\ \theta(H) = \mathrm{ad}\, H$, alors $\mathrm{ad}\, H$ est autoadjoint et donc les espaces $\mathfrak{g}_\lambda$ sont orthogonaux.

Notons $\{H_1, \ldots, H_\ell\}$ la base duale dans $\mathfrak{b}$ de $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$. L'élément H_ℓ étant semi-simple, $\mathfrak{g}^{H_\ell}$ est alors une algèbre de Lie réductive. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^{H_\ell}$ est aussi (σ, θ)-stable. Notons $\mathfrak{g}_\ell = [\mathfrak{g}^{H_\ell}, \mathfrak{g}^{H_\ell}]$, $\mathfrak{g}_\ell$ est semi-simple et la restriction de θ à $\mathfrak{g}_\ell$ est une involution de Cartan de $\mathfrak{g}_\ell$. De plus, $\mathfrak{g}^{H_\ell} = \mathrm{centre}\,(\mathfrak{g}^{H_\ell}) \oplus \mathfrak{g}_\ell$: somme directe orthogonale pour le produit scalaire $(\cdot, \cdot)$.

Notons $\mathfrak{b}'$ le sous-espace de $\mathfrak{b}$ orthogonal à H_ℓ. On a $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}' \oplus \mathbb{R}H_\ell$ (somme directe orthogonale). Alors $\mathfrak{b}'$ est un sous-espace abélien maximal de $\mathfrak{g}_\ell \cap \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$. En effet, si $\mathfrak{b}''$ est un sous-espace abélien de $\mathfrak{g}_\ell \cap \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ contenant $\mathfrak{b}'$, le sous-espace $\mathfrak{b}'' + \mathbb{R}H_\ell$ de $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ est abélien et contient $\mathfrak{b}$, donc égal à $\mathfrak{b}$. Mais H_ℓ n'appartient pas à $\mathfrak{g}_\ell$, donc $\dim \mathfrak{b}'' = \dim \mathfrak{b}'$ et donc $\mathfrak{b}'' = \mathfrak{b}'$.

Alors, l'hypothèse de récurrence s'applique à la paire symétrique $(\mathfrak{g}_\ell, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_\ell)$. Les arguments de la démonstration de [V1, § I.9.3] permettent alors de conclure.

5. Théorème principal

On notera $G_{\mathbb{C}}$ le groupe adjoint de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, l'involution σ se prolonge à $G_{\mathbb{C}}$. On notera $H_{\mathbb{C}}$ la composante neutre de $G_{\mathbb{C}}^{\sigma}$.

THÉORÈME 5.1.— *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert complètement H-invariant de $\mathfrak{q}$ et soit $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue et H-invariante, alors $f \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathcal{U})^{H}$ si et seulement si f vérifie les deux propriétés suivantes :*

i) pour tout sous-espace de Cartan $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{q}$,

$$f|_{\mathfrak{a}\cap\mathcal{U}} \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathfrak{a}\cap\mathcal{U})^{W(H,\mathfrak{a})} ;$$

ii) pour tout élément semi-simple X de $\mathcal{U}$, si $\mathfrak{a}_1$ et $\mathfrak{a}_2$ sont deux sous-espaces de Cartan de $\mathfrak{q}$ qui contiennent X et si $h \in H_{\mathbb{C}}$ vérifie $h \cdot X = X$ et $h \cdot \mathfrak{a}_{1\mathbb{C}} = \mathfrak{a}_{2\mathbb{C}}$, alors $\forall\, u \in S(\mathfrak{a}_{1\mathbb{C}})$,

$$(\partial(u) \cdot f|_{\mathfrak{a}_1\cap\mathcal{U}})(X) = (\partial(h \cdot u) f|_{\mathfrak{a}_2\cap\mathcal{U}})(X) .$$

Démonstration.— Commençons par voir que si $f \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathcal{U})^{H}$, alors f vérifie les propriétés i) et ii). La propriété i) est évidente. Soit X un élément semi-simple de $\mathcal{U}$ et soit $h \in H_{\mathbb{C}}$ vérifiant $h \cdot X = X$ et $h \cdot \mathfrak{a}_{1\mathbb{C}} = \mathfrak{a}_{2\mathbb{C}}$; il suffit de vérifier ii) pour les éléments u homogènes de $S(\mathfrak{a}_{1\mathbb{C}})$. On notera $\mathfrak{l} = [\mathfrak{g}^X , \mathfrak{g}^X]$. Soit k un entier positif; considérons sur $\mathfrak{l}_{\mathbb{C}}$ la fonction polynomiale P_k définie sur $\mathfrak{l}$ par

$$P_k(Y) = \frac{1}{k!} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\bigg|_{t=0} f(X + t \cdot Y) .$$

P_k est une fonction polynomiale H^X-invariante, donc $H_{\mathbb{C}}^X$-invariante et donc pour tout u homogène de degré k dans $S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$, où $\mathfrak{a}$ est un sous-espace de Cartan de $\mathfrak{q}$ qui contient X, on a

$$(\partial(u) \cdot f|_{\mathfrak{a}\cap\mathcal{U}})(X) = (\partial(u) \cdot P_k|_{\mathfrak{a}\cap\mathcal{U}})(0)$$

donc ii) est vérifiée.

On démontre la réciproque par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$. Pour les algèbres de Lie abéliennes, le théorème est évident. On supposera que le théorème est vrai pour les algèbres de Lie réductives dont la dimension est strictement inférieure à celle de $\mathfrak{g}$.

Soit f une fonction de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{C}$ continue, H-invariante et vérifiant les deux propriétés i) et ii). Soit X semi-simple dans $\mathcal{U}$ et soit V un voisinage ouvert de X dans $\mathfrak{g}^X \cap \mathfrak{q}$ vérifiant la proposition 3.1. Il est clair que la restriction de f à V est continue, H^X-invariante et vérifie les propriétés i) et ii) du théorème pour la paire (G_0^X, H_0^X) (notations introduites à la section 3). Notons $\mathfrak{c}$ le centre de $\mathfrak{g}$.

Si $X \notin \mathcal{U} \cap \mathfrak{c}$, on a $\dim \mathfrak{g}^X < \dim \mathfrak{g}$. Alors, d'après l'hypothèse de récurrence, $f|_V \in \mathcal{C}^\infty(V)^{H^X}$, et donc d'après l'isomorphisme de la proposition 3.1 iii), $f|_W \in \mathcal{C}^\infty(W)^H$, en particulier f est $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de X. On en déduit que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{U} \setminus (\mathfrak{c} \cap \mathfrak{q}) + \mathcal{N}$.

Distinguons maintenant deux cas.

Premier cas : $\mathfrak{c} = (0)$

Alors si $0 \notin \mathcal{U}$, f est déjà $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{U}$ puisque $\mathcal{U}$ est complètement H-invariant, donc $\mathcal{U} = \mathcal{U} \setminus (\mathfrak{c} \cap \mathfrak{q}) + \mathcal{N}$. On va supposer donc que $0 \in \mathcal{U}$ et il reste à montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de tout élément nilpotent de $\mathcal{U}$.

On fixe sur $\mathfrak{q}$ une fonction polynomiale positive homogène et H-invariante dont l'ensemble des zéros coïncide avec $\mathcal{N}$. On la notera q et on notera d son degré. On peut en construire de la façon suivante : d'après [VD, § 6], il existe des polynômes homogènes $P_1, \ldots, P_\ell$ ($\ell = \operatorname{rang} \mathfrak{q}$) réels sur $\mathfrak{q}$ tels que

$$\mathcal{P}(\mathfrak{q}_{\mathbb{C}})^H = \mathbb{C}[P_1, \ldots, P_\ell].$$

Notons

$$d_i = \text{degré de } P_i, \quad d = \underset{1 \leq i \leq \ell}{\operatorname{ppcm}}(2d_i), \quad n_i = \frac{\mathrm{d}}{2\mathrm{d}_i}$$

et posons $q = \sum_{i=1}^{\ell} P_i^{2n_i}$. Cette fonction q vérifie les propriétés requises.

Pour tout $\varepsilon > 0$, posons $\mathcal{O}_\varepsilon = \{X \in \mathfrak{q} \mid q(X) < \varepsilon\}$. Soit $\varepsilon > 0$ fixé tel que $\mathcal{O}_\varepsilon \subset \mathcal{U}$. Nous avons à montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur l'ouvert $\mathcal{O}_\varepsilon$. On fixe $\mathfrak{a}$ un sous-espace de Cartan de $\mathfrak{q}$. Considérons l'application $P : \mathfrak{a} \longrightarrow \mathbb{C}^\ell$ définie par $P(Y) = (P_1(Y), \ldots, P_\ell(Y))$ et l'application $P_* : S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^\ell)_0'$, l'espace des distributions sur $\mathbb{R}^\ell$ dont le support est réduit à $\{0\}$, définie par

$$P_*(u)\cdot\varphi = \partial(u)(\varphi\circ P)(0) \quad \text{pour } \varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^\ell)\,.$$

Alors on a le lemme suivant analogue au lemme 1 de [B].

LEMME 5.2.— *L'application P_* induit un isomorphisme d'espaces vectoriels entre $S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})^{W(H_\mathbb{C},\mathfrak{a}_\mathbb{C})}$ et $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^\ell)'_0$. Son noyau est le sous-espace de $S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})$ engendré par les élements de la forme $u-w\cdot u$, $u\in S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})$ et $w\in W(H_\mathbb{C},\mathfrak{a}_\mathbb{C})$.*

Considérons la forme linéaire θ définie sur $S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})$ par

$$\theta(u) = \big(\partial(u)\cdot f|_{\mathfrak{a}\cap\mathcal{U}}\big)(0)\,.$$

Le fait que f vérifie la propriété ii) du théorème 5.1 entraîne que $\big(\partial(u-w\cdot u)f|_{\mathfrak{a}\cap\mathcal{U}}\big)(0)=0$ pour tout $u\in S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})$, pour tout $w\in W(H_\mathbb{C},\mathfrak{a}_\mathbb{C})$ et pour tout $\mathfrak{a}$ sous-espace de Cartan de $\mathfrak{q}$. Alors, d'après le lemme 5.2, θ est nulle sur Ker P_*, donc $\theta\in\big[\mathrm{Ker}\,P_*\big]^\perp$.

L'application $P_*: S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})\longrightarrow\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^\ell)'_0$ étant surjective et θ étant nulle sur son noyau, il existe une unique forme linéaire $\widetilde{\theta}$ sur $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^\ell)'_0$ telle que

$$\widetilde{\theta}\big(P_*(u)\big)=\theta(u)\,,\quad \forall\, u\in S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})\,.$$

Il existe alors, d'après le théorème de Borel [T, théorème 38.1], une fonction $\chi\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^\ell)$ telle que $\widetilde{\theta}(T)=T(\chi)$ pour tout $T\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^\ell)'_0$. Donc

$$\theta(u)=P_*(u)(\chi)\,,\quad \forall\, u\in S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})\,.$$

D'où

$$\partial(u)\cdot\big(\chi\circ P - f|_{\mathfrak{a}\cap\mathcal{U}}\big)(0)=0\,,\quad \forall\, u\in S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})\,.$$

Si on note $\widetilde{P}$ l'application de $\mathfrak{q}$ dans $\mathbb{R}^\ell$ définie par

$$\widetilde{P}(Y)=\big(P_1(Y),\,\cdots,\,P_\ell(Y)\big)\,.$$

Alors, la fonction $\psi=f-\chi\circ\widetilde{P}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{O}_\varepsilon\setminus\mathcal{N}$ et vérifie les propriétés i) et ii). Comme $\chi\circ\widetilde{P}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur tout $\mathcal{O}_\varepsilon$, on voit que l'on a réduit le problème aux fonctions vérifiant i) et ii) telles que, $\forall\, u\in S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})$, $\big(\partial(u)\cdot f|_{\mathfrak{a}\cap\mathcal{U}}\big)(0)=0$ pour tout $\mathfrak{a}$ sous-espace de Cartan de $\mathfrak{q}$. C'est ce qu'on supposera dans la suite. .

Posons $\eta = \left(1+\varepsilon^{1/d}\right)^d$. On considère la fonction Af définie sur l'ouvert $\mathcal{O}_\eta$ par

$$Af(Y) = \begin{cases} f\left(\left(1 - \dfrac{1}{q(Y)^{1/d}}\right)Y\right) & \text{si } q(Y) > 1 \\ 0 & \text{si } q(Y) \leq 1. \end{cases}$$

Il est clair que la fonction Af est continue et H-invariante et si $Y \in \mathcal{O}_\eta$, on a $Af(Y) = Af(Y_s)$; sa restriction à tout sous-espace de Cartan $\mathfrak{a}$ appartient à $\mathcal{C}^\infty\left(\mathcal{O}_\eta\mathfrak{a}\right)^{W(H,\mathfrak{a})}$. Elle vérifie donc i). Si on se fixe X semi-simple dans $\mathcal{O}_\eta$, alors si $q(X) \leq 1$, on a

$$\left(\partial(u)\cdot Af\big|_{\mathfrak{a}\cap\mathcal{U}}\right)(X) = 0\,, \quad \forall\, u \in S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$$

et pour tout $\mathfrak{a}$ sous-espace de Cartan de $\mathfrak{q}$. Alors ii) est vérifiée en X.

Si $q(X) > 1$, alors X appartient à l'ouvert $\{Y \mid q(Y) > 1\}$ sur lequel Af est $\mathcal{C}^\infty$ et donc ii) est aussi naturellement vérifiée. Alors Af étant une fonction continue, H-invariante sur l'ouvert complètement H-invariant $\mathcal{O}_\eta$ de $\mathfrak{q}$, d'après la première étape de la démonstration du théorème, on peut déduire que Af est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{O}_\eta \setminus \mathcal{N}$ et alors comme par définition Af est $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de $\mathcal{N}$, on déduit que Af est $\mathcal{C}^\infty$ sur tout l'ouvert $\mathcal{O}_\eta$.

PROPOSITION 5.3.— *Soit $\varphi \in \mathcal{C}^\infty\left(\mathcal{O}_\eta\right)^H$, nulle sur l'ensemble $\{Y \in \mathfrak{q} \mid q(Y) \leq 1\}$. On considère la fonction $B\varphi$ sur O_η définie comme suit :*

$$B\varphi(Y) = \begin{cases} \varphi\left(\left(1 + \dfrac{1}{q(Y)^{1/d}}\right)Y\right) & si\ q(Y) > 0 \\ 0 & si\ q(Y) = 0. \end{cases}$$

Alors $B\varphi \in \mathcal{C}^\infty\left(\mathcal{O}_\varepsilon\right)^H$.

Démonstration.— Tout ce que l'on a à démontrer est que $B\varphi$ est $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de tout élément $X_0 \in \mathcal{N}$. Pour ceci, il suffit de montrer que

$$\forall\, u \in S(\mathfrak{q}_{\mathbb{C}})\,, \qquad \lim_{\substack{X\to X_0 \\ X\in\mathcal{O}_\varepsilon\setminus\mathcal{N}}} \left(\partial(u)\cdot B\varphi\right)(X) = 0\,.$$

Un calcul simple montre que sur $\mathcal{O}_\varepsilon \setminus \mathcal{N}$, la fonction $\partial(u)\cdot B\varphi$ s'écrit comme somme finie de fonctions de la forme

$$Y \longmapsto R(Y)\cdot q(Y)^{-s/d}\left(\partial(v)\cdot\varphi\right)\left(\left(1 + \frac{1}{q(Y)^{1/d}}\right)Y\right)$$

où $s \in \mathbb{N}$, R est une fonction polynomiale et $v \in S(\mathfrak{q}_\mathbb{C})$. Donc on est amené à montrer que, $\forall\, s \in \mathbb{N}$, $\forall\, u \in S(\mathfrak{q}_\mathbb{C})$,

$$\lim_{\substack{X \to X_0 \\ X \in \mathcal{O}_\varepsilon \setminus \mathcal{N}}} q(X)^{-s/d} (\partial(u)\varphi)\left(\left(1 + \frac{1}{q(X)^{1/d}}\right) X\right) = 0 . \tag{5.1}$$

Soit $u \in S(\mathfrak{q}_\mathbb{C})$, comme φ est nulle ainsi que toutes ses dérivées partielles sur $\{Y \in \mathfrak{q} \mid q(Y) \leq 1\}$, en faisant le développement de Taylor en 0 de la fonction

$$t \longmapsto \varphi\left(\frac{Y}{q(Y)^{1/d}} + t\left(Y - \frac{Y}{q(Y)^{1/d}}\right)\right),$$

on peut déduire que $\forall\, N \in \mathbb{N}$, il existe une constante $c_N > 0$ telle que, $\forall\, Y \in \mathcal{O}_\varepsilon$, on a

$$\begin{aligned} \left|(\partial(u) \cdot \varphi)(Y)\right| &\leq c_N \left\| Y - \frac{Y}{q(Y)^{1/d}} \right\|^N \\ &\leq c_N \|Y\|^N \left| 1 - \frac{1}{q(Y)^{1/d}} \right|^N . \end{aligned} \tag{5.2}$$

Fixons-nous une base $(u_1, \cdots, u_k)$ d'un sous-espace V de dimension finie de $S(\mathfrak{q}_\mathbb{C})$ contenant u et stable sous l'action du groupe $H_\mathbb{C}$.

Pour $h \in H$, posons $h^{-1} \cdot u = \sum_{i=1}^k \beta_i(h) \cdot u_i$.

D'après [B], il existe une constante $c' > 0$ et un entier $r \geq 1$ tels que

$$\left|\beta_i(h)\right| \leq c' \|h\|^r , \quad \forall\, i = 1, \ldots, k \text{ et } \forall\, h \in H . \tag{5.3}$$

D'après le corollaire 4.3, il existe $R \geq 0$, $c \geq 1$ et un entier $m \geq 1$ tels que, pour tout $X \in \mathcal{O}_\varepsilon$, il existe $h \in H$ tel que

$$\|h^{-1} \cdot X\| \leq R \quad \text{et} \quad \|h\| \leq c\left(1 + \|X\|\right)^m . \tag{5.4}$$

Si $Y \in \mathcal{O}_\varepsilon$ et $h \in H$ vérifie (5.3), en écrivant

$$\begin{aligned} (\partial(u) \cdot \varphi)(Y) &= (\partial(h^{-1}u) \cdot \varphi)(h^{-1} \cdot Y) \\ &= \sum_{i=1}^k \beta_i(h) \cdot (\partial(u_i) \cdot \varphi)(h^{-1} \cdot Y) , \end{aligned}$$

on peut déduire des assertions (5.2), (5.3) et (5.4) que

$$\lim_{\substack{X \to X_0 \\ X \in \mathcal{O}_\varepsilon \setminus \mathcal{N}}} q(X)^{-s/d} (\partial(u) \cdot \varphi)\left(\left(1 + \frac{1}{q(X)^{1/d}}\right) X\right) = 0 .$$

Ceci achève la démonstration de la proposition 5.3. □

Revenons à la démonstration du théorème 5.1. La proposition 5.3 nous permet d'affirmer que la fonction $BAf \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}_\varepsilon)^H$. Or les fonctions BAf et f coïncident sur $\mathcal{O}_\varepsilon \setminus \mathcal{N}$, ouvert dense dans $\mathcal{O}_\varepsilon$ et comme f est continue, on a $BAf = f$ sur $\mathcal{O}_\varepsilon$ et donc f est une fonction $\mathcal{C}^\infty$.

Deuxième cas : $\mathfrak{c} \neq (0)$

Comme $\mathfrak{g} = \mathfrak{c} \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, il suffit de considérer le cas où $\mathcal{U}$ est de la forme $\mathcal{O} \times \mathcal{U}'$ où $\mathcal{O}$ est un ouvert de $\mathcal{C} \cap \mathfrak{q}$ et $\mathcal{U}'$ est un ouvert complètement H-invariant de $\mathfrak{q} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ et contenant 0. Soit $Y \in \mathcal{U}'$, considérons la fonction $f_Y : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $f_Y(X) = f(X+Y)$. Alors, il est clair que si Y est semi-simple, $f_Y \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O})$ puisque la restriction de f à tout sous-espace de Cartan est $\mathcal{C}^\infty$. Mais, comme f est H-invariante, continue et que $X + Y_s$ est la composante semi-simple de $X + Y$, d'après le lemme 2.1, on a $f(X+Y) = f(X+Y_s)$ pour tout $X \in \mathcal{O}$ et donc $f_Y = f_{Y_s}$, d'où $f_Y \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O})$ pour tout $Y \in \mathcal{U}'$.

Montrons que l'application $\phi : \mathcal{U}' \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O})$ définie par $\phi(Y) = f_Y$ est $\mathcal{C}^\infty$. Pour ceci, il suffit de montrer que pour toute distribution T à support compact dans $\mathcal{O}$, la fonction $g_T : Y \longrightarrow T(f_Y)$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{U}'$. D'après le premier cas de la démonstration, il suffit de montrer que g_T vérifie les propriétés i) et ii) du théorème 5.1, ceci découle aisément de [Sc, chap. IV, théorème II]. Par suite, ϕ est $\mathcal{C}^\infty$; or, d'après le théorème 40.1 de [T], l'application $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{O} \times \mathcal{U}') \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}', \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}))$ définie par $g \longmapsto [Y \longmapsto \phi_Y]$ où $\phi_Y(X) = g(X,Y)$ est un isomorphisme. L'application $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}', \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}))$, par suite, f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{O} \times \mathcal{U}'$.

6. Description des fonctions continues H-invariantes sur $\mathfrak{q}$

Dans ce paragraphe, on va caractériser les fonctions continues H-invariantes sur $\mathfrak{q}$ par leurs restrictions aux sous-espaces de Cartan de $\mathfrak{q}$. Remarquons qu'une meilleure connaissance de ces fonctions est utile pour le théorème 5.1. En effet, ce théorème donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une telle fonction soit $\mathcal{C}^\infty$.

LEMME 6.1.— *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert complètement H-invariant de $\mathfrak{q}$. Notons $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r$ des représentants des classes de conjugaison sous H des sous-espaces de Cartan de $\mathfrak{q}$. Supposons que l'on ait $f_1, \ldots, f_r$ des fonctions continues respectivement sur $\mathfrak{a}_1 \cap \mathcal{U}, \ldots, \mathfrak{a}_r \cap \mathcal{U}$ et vérifiant, pour tout $i = 1, \ldots, r$, pour tout $X \in \mathfrak{a}_i \cap \mathcal{U}$ et tout $h \in H$ tels que $h \cdot X \in \mathfrak{a}_j \cap \mathcal{U}$, on* *a* $f_j(h \cdot X) = f_i(X)$ *(en particulier,* f_i *est supposée* $W(H, \mathfrak{a}_i)$*-invariante). Alors il existe une unique fonction* f H*-invariante continue sur* $\mathcal{U}$ *telle que*

$$\forall i = 1, \ldots, r, \quad f|_{\mathfrak{a}_i \cap \mathcal{U}} = f_i .$$

Démonstration. — Soit $X \in \mathcal{U}$. Il existe $h \in H$ et $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ tels que $h \cdot X_s \in \mathfrak{a}_i$, alors on pose $f(X) = f_i(h \cdot X_s)$, f est alors bien définie. Il reste à montrer sa continuité. On raisonne par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$.

Pour les algèbres de Lie abéliennes, le lemme est évident. On supposera que le lemme est vrai pour les algèbres de Lie réductives dont la dimension est strictement inférieure à celle de $\mathfrak{g}$. Il est clair qu'il suffit de regarder le cas où $\mathfrak{g}$ est semi-simple. Soit $X \in \mathcal{U}$ semi-simple et non nul, alors $\dim \mathfrak{g}^X < \dim \mathfrak{g}$. On choisit un ouvert $V \subset \mathfrak{q}^X$ vérifiant la proposition 3.1. On fixe $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_s$ des représentants des classes de conjugaison sous H_0^X des sous-espaces de Cartan de $\mathfrak{q}^X$. Pour chaque $i = 1, \ldots, s$, il existe $j \in \{1, \ldots, r\}$ et $h \in H$ tels que $h \cdot \mathfrak{a}_j = \mathfrak{b}_i$. On définit alors sur $\mathfrak{b}_i \cap V$ la fonction $g_i(Y) = f_j(h^{-1} \cdot Y)$; la définition de g_i ne dépend pas de $h \in H$ vérifiant $h \cdot \mathfrak{a}_j = \mathfrak{b}_i$. On voit facilement que les fonctions g_i vérifient les hypothèses du lemme pour la paire $(H_0^X, \mathfrak{q}^X)$. Alors, l'hypothèse de récurrence nous assure l'existence et l'unicité d'une fonction g sur V continue H_0^X-invariante qui prolonge les fonctions g_i, $i = 1, \ldots, s$. Il est clair que g est aussi H^X-invariante. Alors, la proposition 3.1 nous permet de déduire que la fonction f est continue sur l'ouvert $H^X \cdot V$ donc continue au voisinage de X. On voit ainsi que f est continue sur $\mathcal{U} \setminus \mathcal{N}$. Il nous reste à montrer que f est continue en tout point $X_0 \in \mathcal{N}$. La continuité des fonctions f_i en 0 montre que pour tout i et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe V_i un voisinage ouvert de 0, $V_i \subset \mathfrak{a}_i$ et $W(H, \mathfrak{a}_i)$-invariant tel que $|f_i(X) - f_i(0)| < \varepsilon$ pour tout X dans V_i.

D'après la démonstration du lemme 3.2, il existe $t > 0$ tel que pour tout $i = 1, \ldots, s$, $\mathfrak{g}(t) \cap \mathfrak{a}_i \subset V_i$. Alors si $X_0 \in \mathcal{N}$ et $X \in \mathfrak{g}(t) \cap \mathfrak{q}$, il existe $h \in H$ et $i \in \{1, \ldots, r\}$ tels que $h \cdot X_s \in \mathfrak{a}_i$ donc

$$\begin{aligned}|f(X) - f(X_0)| &= |f(X_s) - f(X_0)| = |f(h \cdot X_s) - f(X_0)| \\ &= |f_i(h \cdot X_s) - f_i(0)| < \varepsilon\end{aligned}$$

d'où la continuité de f en X_0. □

7. Cas d'une seule classe de conjugaison de sous-espaces de Cartan

Pour $\mathfrak{a}$ un sous-espace de Cartan dans $\mathfrak{q}$, notons $\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{a})^{\text{inv}}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathfrak{a} \to \mathbb{C}$ vérifiant :

i) $f \in \mathcal{C}^\infty$ et est $W(H, \mathfrak{a})$-invariante;

ii) $\forall X \in \mathfrak{a}$, si $h \in N(H_\mathbb{C}, \mathfrak{a}_\mathbb{C})$ et $h \cdot X = X$, alors $\forall u \in S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})$,

$$\big(\partial(h \cdot u) \cdot f\big)(X) = \big(\partial(u) \cdot f\big)(X).$$

COROLLAIRE 7.1.— *On suppose que dans $\mathfrak{q}$, il y a une seule classe de conjugaison de sous-espaces de Cartan. Soit $\mathfrak{a}$ un sous-espace de Cartan de $\mathfrak{q}$, alors l'application de restriction de $\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{q})^H$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{a})^{\text{inv}}$ est un isomorphisme.*

Démonstration.— Notons d'abord que la restriction d'une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{q})^H$ est bien dans $\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{a})^{\text{inv}}$ en vertu du théorème principal.

Soit $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{a})^{\text{inv}}$. Si $X \in \mathfrak{q}$ et $X_s = h \cdot X'$ avec $h \in H$ et $X' \in \mathfrak{a}$, on pose $\tilde{g}(X) = g(X')$, $\tilde{g}$ est alors bien définie sur tout $\mathfrak{q}$, H-invariante, continue d'après le lemme 6.1 et vérifie les propriétés i) et ii) du théorème 5.1. Donc $\tilde{g} \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{q})^H$.

Si $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{q})^H$ et si f est nulle sur $\mathfrak{a}$, il est clair que f est identiquement nulle.

7.1 L'isomorphisme de Dadok

Dans le cas où $W(H, \mathfrak{a}) = W\big(\Sigma(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{a}_\mathbb{C})\big)$, on a

$$\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{a})^{\text{inv}} = \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{a})^{W(H,\mathfrak{a})}$$

car la propriété ii) est vérifiée par toutes les fonctions $W(H, \mathfrak{a})$-invariantes. Ainsi, dans le cas d'une paire symétrique riemanienne, c'est-à-dire dans le cas où σ est une involution de Cartan, on retrouve l'isomorphisme bien connu de $\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{p})^K$ sur $\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{a})^{W(K,\mathfrak{a})}$ [D].

8. Remarques

Remarque 8.1.— Soit $\mathfrak{g}'$ une algèbre de Lie réductive et $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \times \mathfrak{g}'$ l'algèbre de Lie produit, G' un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}'$, $G = G' \times G'$. Soit $\sigma : G' \times G' \to G' \times G'$ définie par $\sigma(x, y) = (y, x)$, σ est une involution de G. On a

$$\mathfrak{h} = \{(X, X) \mid X \in \mathfrak{g}'\},$$
$$\mathfrak{q} = \{(X, -X) \mid X \in \mathfrak{g}'\}$$

et

$$H = \{(x, x) \mid x \in G'\}.$$

Le sous-espace $\mathfrak{q}$ sera identifié avec $\mathfrak{g}'$. L'action du groupe H dans $\mathfrak{q}$ est alors l'action de G' dans $\mathfrak{g}'$. Il est clair que dans ce cas le théorème 5.1 est le théorème de [B].

Remarque 8.2.— En général, l'inclusion $\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{a})^{\mathrm{inv}} \subset \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{a})^{W(H,\mathfrak{a})}$ est stricte. En effet, soit $\mathfrak{g} = \mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ et

$$\mathfrak{a} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. Le groupe de Weyl $W(G, \mathfrak{a}) = \{\mathrm{id}, -\mathrm{id}\}$ et on a

$$\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{a})^{W(G,\mathfrak{a})} = \{f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \mid \mathcal{C}^\infty \text{et vérifiant } f(-z) = f(z)\}.$$

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = z\bar{z}$, $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{a})^{W(G,\mathfrak{a})}$. On identifie $\mathfrak{a}_\mathbb{C}$ avec $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$ et on pose $u_1 = (1, 0)$, $u_2 = (0, 1) \in S(\mathfrak{a}_\mathbb{C}) = \mathbb{C}[u_1\,,\, u_2]$, $\partial(u_1) = \mathrm{d}/\mathrm{d}z$, $\partial(u_2) = \mathrm{d}/\mathrm{d}\bar{z}$, $W(G_\mathbb{C}, \mathfrak{a}_\mathbb{C}) \simeq W(G, \mathfrak{a}) \times W(G, \mathfrak{a}) = \{\mathrm{id}, -\mathrm{id}\} \times \{\mathrm{id}, -\mathrm{id}\}$, Soit $w = (\mathrm{id}, -\mathrm{id}) \in W(G_\mathbb{C}, \mathfrak{a}_\mathbb{C})$, on a

$$\Big(\partial\big(w \cdot (u_1 \cdot u_2)\big) f\Big)(0) = -1,$$

alors que $\big(\partial(u_1 \cdot u_2) \cdot f\big)(0) = 1$; donc $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{a})^{W(G,\mathfrak{a})}$ et $f \notin \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{a})^{\mathrm{inv}}$.

Ce même exemple associé au théorème 5.1, nous montre, qu'en général, la restriction des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ et H-invariantes sur $\mathfrak{q}$ à un sous-espace de Cartan $\mathfrak{a}$ ne nous donne pas toutes les fonctions $\mathcal{C}^\infty$ et $W(H, \mathfrak{a})$-invariantes sur $\mathfrak{a}$.

Remerciements

Mes vifs remerciements vont à A. Bouaziz pour ses encouragements et pour d'utiles conversations pendant l'élaboration de ce travail et à M. Duflo pour ses commentaires sur une première version de cet article.

Réferences bibliographiques

[B] BOUAZIZ (A.) .— *Fonctions indéfinement différentiables invariantes sur les algèbres de Lie réductive*, C.R. Acad. Sci. Paris Série I, **314** (1992), pp. 9-12.

[D] DADOK (J.) .— *On the C^∞ Chevalley's theorem*, Adv. in Math. **44** (1982), pp. 121-131.

[OM] OSHIMA (T.) and MATSUKI (T.), .— *Orbits on affine symmetric spaces under the action of the isotropy subgroups*, J. Math. Soc. Japan **32** (1980) pp. 399-414.

[R] ROSSMAN (W.) .— *The structure of semisimple symmetric spaces*, Canadian J. Math. **XXXI**, n° 1 (1979), pp. 157-180.

[S] SCHLICHTKRULL (H.) .— *Hyperfunctions and harmonic analysis on symmetric spaces*, Birkhaüser, Boston 1984.

[Sc] SCHWARTZ (L.) .— *Théorie des distributions*, Hermann, Paris 1978.

[Se] SEKIGUCHI (J.) .— *Invariant spherical hyperfunctions on the tangent space of a symmetric space*, in Advanced Studies in Pure Mathematics, Kinokuniya, Tokyo, **6** (1985), pp. 83-126.

[T] TRÈVES (F.) .— *Topological vector spaces, distributions and kernels*, Academic press, New-York, London 1967.

[V1] VARADARAJAN (V. S.) .— *Harmonic analysis on real reductive groups*, Lectures Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin – New-York **576** (1977).

[V2] VARADARAJAN (V. S.) .— *Lie Groups, Lie algebras, and their representations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New-Jersey, 1974.

[VD] VAN DIJK (G.) .— *Invariant eigendistributions on the tangent space of a rank one symmetric space*, Math. Ann. **268** (1984), pp. 405-416.