ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

VINCENT BLANLŒIL

Cobordisme des entrelacs

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 7, nº 2 (1998), p. 185-205

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1998_6_7_2_185_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. VII, n° 2, 1998

Cobordisme des entrelacs(*)

VINCENT BLANLŒIL(1)

RÉSUMÉ. — Dans [BM], nous avons défini une relation d'équivalence sur l'ensemble des formes bilinéaires entières, appelée *cobordisme algébrique*, qui permet de classifier les entrelacs fibrés simples à cobordisme près. Ici, nous montrons que tout entrelacs K est cobordant à un entrelacs simple K' et les entrelacs K et K' ont des formes de Seifert algébriquement cobordantes. Nous déduisons de ce résultat une classification complète à cobordisme près des entrelacs fibrés à l'aide de leurs formes de Seifert. Ensuite nous construisons un représentant de chaque classe de cobordisme des entrelacs à homologie sans torsion qui se décompose en la somme connexe d'un entrelacs de forme de Seifert identiquement nulle avec un entrelacs de forme de Seifert non dégénérée.

ABSTRACT. — In [BM] we define an equivalence relation on the set of integral bilinear forms called *algebraic cobordism*, which allow us to classify simple fibered links up to cobordism (where a link is a $(2n-1)$-dimensional, $(n-2)$-connected, oriented, smooth and closed submanifold of the $(2n+1)$-dimensional sphere). Here we prove that every link K is cobordant to a simple link K' and the two links K and K' have algebraically cobordant Seifert forms. According to this result we obtain a complete classification of fibered links up to cobordism using their Seifert forms. We also construct an element for each cobordism class of torsion free links, this element is given by the connected sum of a link with an identically zero Seifert form together with a link with a non degenerate Seifert form.

(*) Reçu le 20 mai 1996, accepté le 27 janvier 1998

(1) Université Louis-Pasteur Strasbourg, I.R.M.A., 7, rue René-Descartes, F-67084 Strasbourg Cedex (France)
e-mail : blanloei@math.u-strasbg.fr

0. Introduction

Dans leur théorie des nœuds, M. Kervaire et J. Levine ont obtenu une classification complète des nœuds de grandes dimensions à cobordisme près à l'aide de la forme de Seifert (cf. [K2], [L1]). Ensuite les résultats algébriques de N. Stoltzfus ont permis de classifier les classes d'équivalences des formes de Seifert qui correspondent aux classes de cobordisme des nœuds. Nous étudions ici le cobordisme des *entrelacs*, la définition des entrelacs généralise celle des nœuds (cf. définition 1.1).

L'étude de la topologie des singularités isolées d'hypersurfaces complexes se ramène à l'étude topologique des entrelacs algébriques qui leur sont associés (cf. [M]) ; de plus, les entrelacs algébriques sont des entrelacs fibrés simples (cf. définition 1.2), c'est ce qui a motivé l'étude du cobordisme des entrelacs fibrés simples dans [BM]. Nous avons défini, dans [BM], une nouvelle relation d'équivalence sur les formes bilinéaires entières appelée *cobordisme algébrique* (cf. définition 1.5). Nous avons montré dans ce même article que les classes de cobordisme des entrelacs fibrés simples sont en bijection avec les classes de cobordisme algébrique de leurs formes de Seifert.

Dans cet article, nous étudions le cobordisme des entrelacs dans un cadre très général. Nous montrons tout d'abord que chaque classe de cobordisme d'entrelacs contient un entrelacs simple, ce qui permet de restreindre l'étude du cobordisme des entrelacs au cas des entrelacs simples et, de ce résultat, nous déduisons une classification complète des entrelacs fibrés, de dimension supérieure à 3, à cobordisme près (cf. théorème A).

Contrairement au cas des nœuds, nous n'avons pas de structure de groupe sur l'ensemble des entrelacs avec la somme connexe comme opération, mais dans le cas des entrelacs (avec $n \geq 2$) nous montrons que nous avons une structure de monoïde commutatif avec la somme connexe comme opération.

Nous construisons de plus un élément remarquable dans chaque classe de cobordisme des entrelacs à homologie sans torsion qui se décompose en la somme connexe d'un entrelacs de forme de Seifert identiquement nulle avec un entrelacs de forme de Seifert non dégénérée. Cette décomposition, et la décomposition de la forme de Seifert correspondante, laisse supposer qu'une étude algébrique analogue à celle de N. Stoltzfus peut être effectuée sur les classes de cobordisme algébrique, ceci bien que la définition du cobordisme algébrique soit beaucoup plus compliquée que celle de la Witt-équivalence.

1. Définitions et notations

DÉFINITION 1.1.— *On appelle entrelacs l'image du plongement d'une variété de dimension* $2n-1$*, compacte, orientée, sans bord, et* $(n-2)$*-connexe dans une sphère* S^{2n+1}*. Un nœud est un entrelacs qui est abstraitement homéomorphe à une sphère. Nous dirons qu'un entrelacs est à homologie sans torsion si son homologie entière est constituée de* $\mathbb{Z}$*-modules libres.*

Pour tout entrelacs K, il existe une sous-variété orientée F de S^{2n+1}, de dimension $2n$, qui a pour bord K ; une telle variété F est appelée *surface de Seifert* pour K.

Un entrelacs *simple* est un entrelacs qui possède une surface de Seifert $(n-1)$-connexe.

DÉFINITION 1.2.— *Un entrelacs* K *est fibré s'il existe une fibration* C^∞ $\Psi : S^{2n+1} \setminus K \to S^1$ *telle que* Ψ *est triviale sur* $T \setminus K$ *où* T *est un voisinage tubulaire de* K*. Un entrelacs fibré simple est un entrelacs fibré, dont les fibres sont* $(n-1)$*-connexes. Un entrelacs fibré possède une forme de Seifert unimodulaire (cf. [D, § 2, p. 50]).*

DÉFINITION 1.3.— *Comme dans [K1], nous dirons que deux entrelacs* K_0 *et* K_1*, abstraitement difféomorphes à la même variété* $\mathcal{K}$*, sont cobordants s'il existe un plongement* $\Phi : \mathcal{K} \times [0,1] \to S^{2n+1} \times [0,1]$ *tel que*

$$\Phi(\mathcal{K} \times \{0\}) = K_0 \quad \textit{et} \quad \Phi(\mathcal{K} \times \{1\}) = -K_1,$$

où $-K_1$ *est l'entrelacs* K_1 *avec l'orientation opposée.*

Notations

- Étant donnée une variété différentiable X, on note ∂X son bord, $\mathring{X}$ son intérieur et $\mathrm{H}_k(X)$ le k-ième groupe d'homologie à coefficient dans $\mathbb{Z}$. Si x est un k-cycle de X on note $[x]$ sa classe d'homologie dans $\mathrm{H}_k(X)$.
- Étant donné un groupe abélien G, on note $\mathrm{rg}(G)$ le rang de G et $\mathrm{Tors}(G)$ le sous-groupe de torsion de G. Pour tout sous-ensemble m d'un $\mathbb{Z}$-module M, on note $\langle m\rangle$ le sous-module de M engendré par m.

Soit F une sous-variété orientée de dimension $2n$ de S^{2n+1}, et soit G le quotient de $\mathrm{H}_n(F)$ par sa $\mathbb{Z}$-torsion. La forme de Seifert associée à F est la forme bilinéaire $A : G \times G \to \mathbb{Z}$ définie comme suit (cf. [K2, p. 88], [L2, p. 185], [BM, p. 2]) : à (x, y) dans $G \times G$, on associe $A(x, y)$ le nombre d'enlacement dans S^{2n+1} entre x et $i_+(y)$ où $i_+(y)$ est le cycle y “poussé” dans $S^{2n+1} \setminus F$ par le champ de vecteur normal positif à F dans S^{2n+1}.

Une *forme de Seifert* pour un entrelacs K est alors une forme de Seifert associée à une surface de Seifert pour K.

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des formes bilinéaires définies sur des $\mathbb{Z}$-modules de rangs finis. Soit ε l'entier $+1$ ou -1. Pour $A : G \times G \to \mathbb{Z}$ une forme bilinéaire de $\mathcal{A}$ on note A^T la transposée de A, et S la forme ε-symétrique $A + \varepsilon A^T$ associée à A. De plus, on notera $S^* : G \to G^*$ l'adjointe de S (où $G^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G; \mathbb{Z})$ est le dual de G). Si M est un sous-module de G, on note $M^\wedge = (M \otimes \mathbb{Q}) \cap G$ le plus petit sous-module pur de G qui contient M. On note $\overline{G}$ le quotient $G/\operatorname{Ker} S^*$, et si M est un sous-module de G on note $\overline{M}$ la projection de M dans $\overline{G}$. Rappelons les définitions de *métaboliseur* et du *cobordisme algébrique* déjà énoncées dans [BM].

DÉFINITION 1.4.— *Soit $A : G \times G \to \mathbb{Z}$ une forme bilinéaire de $\mathcal{A}$. La forme A est Witt associée à 0 si m, le rang de G, est pair et s'il existe un sous-module pur M de G, de rang $m/2$, tel que A s'annule sur M. Un tel module M est appelé* métaboliseur *pour A.*

DÉFINITION 1.5.— *Soient $A_i : G_i \times G_i \to \mathbb{Z}$, $i = 0, 1$, deux formes bilinéaires de $\mathcal{A}$. Soient $G = G_0 \oplus G_1$ et $A = A_0 \oplus -A_1$. La forme A_0 est* algébriquement cobordante *à la forme A_1 s'il existe un métaboliseur M pour A tel que $\overline{M}$ est un sous-module pur de $\overline{G}$, un isomorphisme φ entre* $\operatorname{Ker} S_0^*$ *et* $\operatorname{Ker} S_1^*$ *et un isomorphisme θ entre* $\mathrm{Tors}(\operatorname{Coker} S_0^*)$ *et* $\mathrm{Tors}(\operatorname{Coker} S_1^*)$ *qui satisfont :*

(C1) $M \cap \operatorname{Ker} S^* = \Big\{ (x, \varphi(x)) \,|\, x \in \operatorname{Ker} S_0^* \Big\}$,

(C2) $d(S^*(M)^\wedge) = \Big\{ (x, \theta(x)) \mid x \in \mathrm{Tors}(\operatorname{Coker} S_0^*) \Big\}$,

où d est la projection de G^* dans le quotient $\operatorname{Coker} S^* = G^*/\operatorname{Im} S^*$.

Être algébriquement cobordant est une relation d'équivalence sur $\mathcal{A}$ (cf. [BM, théorème 1, p. 4]).

On appelle entrelacs *non dégénéré* un entrelacs qui possède une forme de Seifert non dégénérée.

2. Énoncés des résultats

J. Levine [L1, lemme 4, p. 234] a montré : *Tout nœud est cobordant à un nœud simple.* Nous montrons ici la proposition suivante (§ 3.1).

PROPOSITION 2.1.— *Soient un entrelacs K et A une forme de Seifert pour K. Alors K est cobordant à un entrelacs simple K' ayant une forme de Seifert A' algébriquement cobordante à A.*

Du fait que l'on peut toujours réaliser la matrice d'une forme bilinéaire entière comme étant la matrice de la forme de Seifert d'un entrelacs simple (sect. 6), nous avons de même la proposition suivante.

PROPOSITION 2.2.— *Soit $n \geq 3$. Soient un entrelacs K de dimension $2n-1$ et A une forme de Seifert pour K. Alors K est cobordant à un entrelacs simple K' ayant A pour forme de Seifert.*

Remarque 2.1.— Si K est un entrelacs de dimension $2n-1$, de forme de Seifert A associée à une surface de Seifert F pour K, alors $S = A + (-1)^n A^T$ est la forme d'intersection définie sur $\mathrm{H}_n(F)/\operatorname{Tors}(\mathrm{H}_n(F))$. De plus, $\operatorname{Ker} S^*$ est l'image de $\mathrm{H}_n(K)$ dans $\mathrm{H}_n(F)$ et $\operatorname{Tors}(\operatorname{Coker} S^*) \subset \operatorname{Tors}(\mathrm{H}_{n-1}(K))$ (l'inclusion est une égalité dès que la surface de Seifert F considérée est $(n-1)$-connexe et donc dès que l'entrelacs est simple).

La proposition 2.1, nous permet de démontrer les théorèmes suivants qui sont les analogues des théorèmes 3 et 4 de [BM] sans l'hypothèse entrelacs simples (§ 3.3 et 3.4).

THÉORÈME 1.— *Soit $n \geq 3$. Soient K_0 et K_1 deux entrelacs de dimension $2n-1$. Si K_0 et K_1 possèdent des formes de Seifert algébriquement cobordantes, alors K_0 et K_1 sont cobordants.*

THÉORÈME 2.— *Soit $n \geq 3$. Soient K_0 et K_1 deux entrelacs fibrés, de dimension $2n-1$, et A_0 et A_1 deux formes de Seifert pour K_0 et K_1. Si K_0 et K_1 sont cobordants, alors A_0 est algébriquement cobordante à A_1.*

De plus, les théorèmes 1 et 2 permettent d'énoncer le résultat suivant.

THÉORÈME A.— *Soit $n \geq 3$. Soient K_0 et K_1 deux entrelacs fibrés de dimension $2n-1$. Les entrelacs K_0 et K_1 sont cobordants si et seulement si leurs formes de Seifert sont algébriquement cobordantes.*

Soit $\mathbf{K}$ l'ensemble des entrelacs qui sont à homologie sans torsion. Notons $\mathcal{B}$ le sous-ensemble de $\mathcal{A}$ constitué des éléments A de $\mathcal{A}$ tels que si S^* est l'adjointe de $S = A + \varepsilon A^T$ (cf. définition 1.5), alors $\mathrm{Tors}(\mathrm{Coker}\, S^*) = \{0\}$. D'après la remarque 2.1, les formes de Seifert des entrelacs de $\mathbf{K}$ sont des éléments de $\mathcal{B}$.

Dans une classe de cobordisme algébrique de $\mathcal{A}$ donnée, les formes bilinéaires de cette classe ont des restrictions aux noyaux des adjointes de leurs ε-symétrisées qui sont toutes isomorphes. Donc, si une de ces formes est dégénérée sur $\mathrm{Ker}\, S^*$, elles le sont toutes. De plus, si pour x dans $\ker S^*$, nous avons $A(x,y) = 0$ pour un certain y, alors $A(y,x) = 0$ du fait que $S = A \pm A^T$. Donc dans le cas où une forme bilinéaire ne dégénère à droite (resp. à gauche) que sur un sous-module de $\mathrm{Ker}\, S^*$, on peut parler de dégénérescence sur ce sous-module. Dans le cas ou une forme bilinéaire de $\mathcal{A}$ dégénère en dehors de $\mathrm{Ker}\, S^*$, nous devons distinguer la dégénérescence à droite et à gauche de A. Posons

$$A^* : G \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G;\mathbb{Z})\,, \quad x \mapsto A(x,\cdot)$$

et

$$^*\!A : G \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G;\mathbb{Z})\,, \quad x \mapsto A(\cdot,x)\,.$$

Comme $^*\!A = \left(A^T\right)^*$, nous avons

$$\mathrm{rg}(\mathrm{Ker}\, A^*) = \mathrm{rg}(\mathrm{Ker}\, {}^*\!A) \quad \text{et} \quad \mathrm{Ker}\, A^* \cap \mathrm{Ker}\, S^* = \mathrm{Ker}\, {}^*\!A \cap \mathrm{Ker}\, S^*\,.$$

Nous montrons de plus les deux propositions suivantes (§ 4.1 et 4.2).

PROPOSITION 2.3.— *Toute classe de cobordisme algébrique de $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{B}$) contient une infinité de formes dégénérées (à droite où à gauche).*

PROPOSITION 2.4.— *Soit A une forme bilinéaire de $\mathcal{B}$. Si A est dégénérée, alors il existe une forme bilinéaire A_d de $\mathcal{B}$ telle que A et A_d sont algébriquement cobordantes et* $\mathrm{Ker}\, A_d^*$ *est un sous-module de* $\mathrm{Ker}\, S_d^*$.

Lorsque $n \geq 2$, la somme connexe de deux entrelacs est un entrelacs, de plus si $[K]$ désigne la classe de cobordisme d'un entrelacs K, on définit l'opération $\bullet$ sur l'ensemble des classes de cobordisme des entrelacs de même dimension par $[K_0] \bullet [K_1] := [K_0 \# K_1]$. Dans la section 5, nous vérifions que pour n fixé l'ensemble des entrelacs de dimension $2n-1$ quotienté par la relation d'équivalence "être cobordant" est un monoïde commutatif avec $\bullet$

comme opération. De même, les classes de cobordisme, d'entrelacs de même dimension, de **K** forment un monoïde commutatif.

Étant donné un entier n, on dit que $T = \varphi(S^{n-1} \times S^n)$ est un *entrelacs trivial* si le plongement φ s'étend à $\overline{\varphi} : D^n \times D^{n+1} \to S^{2n+1}$. La forme de Seifert associée à la surface de Seifert $\overline{\varphi}(D^n \times S^n)$ est identiquement nulle. De plus, on appelle *stabilisé* un entrelacs obtenu par somme connexe avec un ou plusieurs entrelacs triviaux.

À l'aide du théorème 1 et de la proposition 2.7, nous construisons un entrelacs particulier dans chaque classe de cobordisme d'entrelacs de **K** (§ 6.1).

PROPOSITION 2.5.— *Chaque classe de cobordisme d'entrelacs de* **K**, *de dimension $2n-1$ avec $n \geq 3$, contient le stabilisé d'un entrelacs non dégénéré.*

3. Tout entrelacs est cobordant à un entrelacs simple

3.1 Démonstration de la proposition 2.1

Soit K un entrelacs, de dimension $2n-1$, plongé dans une sphère $S^{2n+1} = \partial D$ avec D un disque de dimension $2n+2$.

Si $n = 1$, l'existence d'une surface de Seifert connexe pour K (cf. [R] par exemple) démontre la proposition.

Si $n \geq 2$, soit F une surface de Seifert pour K. Si F est $(n-1)$-connexe, K est un entrelacs simple. Sinon, effectuons la construction suivante.

1) Soit h un plongement de $F \times [0, 1]$ dans D tel que

$$h(F \times \{0\}) = F = h(F \times [0, 1]) \cap S^{2n+1}.$$

2) Soit p le plus petit entier positif ou nul tel que $\pi_p = \pi_p(F \times \{1\})$ soit non nul. Du fait que $h(F \times \{1\})$ est une sous-variété compacte orientée de D avec $p \leq n-1$, les éléments de base, notés $(b_i)_{i \in \mathcal{I}_p}$, de π_p peuvent être représentés par des plongements disjoints $\psi_i : S^p \times D^{2n-p} \to h(F \times [0, 1])$ (cf. [M, théorème 2, p. 46]). Puisque $p+1 < n+1$,

nous pouvons étendre ces plongements à des plongements disjoints $\psi_i : D^{p+1} \times D^{2n-p} \to \overset{\circ}{D}$ tels que

$$\operatorname{Im}(\psi_i) \cap h\big(F \times [0\,,1]\big) = \psi_i(S^p \times D^{2n-p})\,.$$

Soit W_p la variété compacte orientée obtenue en recollant les anses $\psi_i(D^{p+1} \times D^{2n-p})$ à $h\big(F \times [0\,,1]\big)$:

$$W_p = h\big(F \times [0\,,1]\big) \cup \left(\bigcup_{i \in \mathcal{I}_p} \psi_i(D^{p+1} \times D^{2n-p}) \right).$$

Remarquons que $\partial W_p = F \cup h\big(K \times [0\,,1]\big) \cup F_p$ où F_p est une variété p-connexe.

Tant que $p \leq n-1$, l'étape 2) peut être à nouveau effectuée pour F_p (à la place de $h\big(F \times \{1\}\big)$). En poursuivant jusqu'à $p = n-1$, nous obtenons une sous-variété $W = W_{n-1}$ de D telle que $\partial W = F \cup h\big(K \times [0\,,1]\big) \cup F_{n-1}$ avec F_{n-1} qui est $(n-1)$-connexe.

Énonçons le théorème suivant qui est une adaptation à notre situation du théorème 2 de M. Hirsh [H, p. 364].

THÉORÈME.— *Soit V une variété de dimension $2n+2$ et X une sous-variété de V avec $X \subset \partial V$. Si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1) X est contractible sur une triangulation de dimension n,

2) $V \setminus X$ est 1-connexe,

alors il existe un plongement $\varphi : D^{2n+2} \to V$ avec $X \subset \partial\big(\varphi(D^{2n+2})\big)$.

Posons $T(W)$ un voisinage tubulaire ouvert de W dans D et V la variété $D \setminus T(W)$. Soit X la sous-variété de V identifiée avec l'image de l'inclusion de F_{n-1} dans V.

Comme F_{n-1} est $(n-1)$-connexe, on peut contracter X sur une triangulation de dimension n (cf. [PWZ, lemme 2.7, p. 620]). De plus, W est obtenue à partir de $h\big(F \times [0\,,1]\big)$ par attachement d'anses d'indices inférieurs à n, donc V est 1-connexe.

Le théorème que nous venons d'énoncer donne donc l'existence d'un plongement $\varphi : D^{2n+2} \to V$ tel que l'on a un h-cobordisme entre S^{2n+1} et $\partial\big(\varphi(D^{2n+2})\big)$. Comme $n \geq 2$, d'après [S] il existe un difféomorphisme

$$d : D \setminus \varphi(\overset{\circ}{D}{}^{2n+2}) \to S^{2n+1} \times [0\,,1]$$

tel que $d(h(\partial F \times [0,1]))$ soit un h-cobordisme entre K et l'entrelacs $d(h(K \times \{1\})) = K'$ qui est simple puisqu'il borde $d(F_{n-1}) = F'$ qui est $(n-1)$-connexe.

Soient A et A' les formes de Seifert associées à F et F', définies respectivement sur $\mathrm{H}_n(F)/\mathrm{Tors}(\mathrm{H}_n(F))$ et $\mathrm{H}_n(F')$. Nous allons montrer que A et A' sont algébriquement cobordantes.

Lors de la construction de F', les modifications par chirurgie sur les cycles de F de dimensions inférieures ou égale à $n-2$ n'ont aucune influence sur l'homologie de dimension n de F.

De même, une chirurgie sur un $(n-1)$-cycle de F, qui est le générateur d'un facteur libre de l'homologie entière, n'a aucune influence sur l'homologie de dimension n de F. En effet, dans ce cas l'opération consiste à rendre nul-homologue le $(n-1)$-cycle et son dual, de dimension $n+1$, pour la forme d'intersection associée à F. Plus précisément, nous avons :

- soit a un $(n-1)$-cycle de F qui est générateur d'un facteur libre de $\mathrm{H}_{n-1}(F)$; effectuons une chirurgie plongée dans D sur a, pour cela on représente le cycle a par le plongement d'une sphère S^{n-1} tel que ce plongement, noté ψ_i, étendu à $S^{n-1} \times D^{n+1}$ soit un voisinage tubulaire de $\psi_i(S^{n-1})$ (cf. précédement); soit $F_T = F \setminus \psi_i(S^{n-1} \times D^{n+1})$, posons

$$F = F_T \cup \psi_i(S^{n-1} \times D^{n+1}), \quad F^\star = F_T \cup \psi_i(D^n \times S^n)$$

— la suite de Mayer–Vietoris associée à la première décomposition donne

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}_{n+1}(F_T) \longrightarrow \mathrm{H}_{n+1}(F) \xrightarrow{s} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}_n(F_T) \xrightarrow{\cong} \mathrm{H}_n(F) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathrm{H}_{n-1}(F_T) \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{H}_{n-1}(F) \longrightarrow 0$$

(l'homorphisme s est surjectif car le facteur libre $\mathbb{Z} = \langle \psi_i(\{1\} \times S^{n-1}) \rangle$ est engendré par l'intersection entre le $(n+1)$-cycle dual de a et $\psi_i(S^{n-1} \times S^n)$, de plus, i est injectif car il l'est sur le second facteur);

— la suite de Mayer–Vietoris associée à la seconde décomposition donne

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}_{n+1}(F_T) \longrightarrow \mathrm{H}_{n+1}(F^\star) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{a} \mathrm{H}_n(F_T) \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{H}_n(F^\star) \xrightarrow{b} 0$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{H}_{n-1}(F_T) \longrightarrow \mathrm{H}_{n-1}(F^\star) \longrightarrow 0$$

(l'homomorphisme a est de la forme : $\alpha(x) = 0 \oplus j(x)$ où l'injection j est induit par l'inclusion de $\psi_i(\{1\} \times S^n)$ dans $\psi_i(D^n \times S^n)$; l'homomorphisme b est nul car il est donné par l'intersection géométrique entre un n-cycle et $\langle \psi_i(S^{n-1} \times \{1\}) \rangle$, qui vaut toujours zéro à cause des dimensions) ;

de ces deux suites, nous pouvons déduire que $\mathrm{H}_n(F) \cong \mathrm{H}_n(F^\star)$, et nous avons bien qu'une chirurgie sur un $(n-1)$-cycle, de F, qui est le générateur d'un facteur libre de l'homologie entière, n'a aucune influence sur l'homologie de dimension n de F.

Étudions les effets de la chirurgie sur les générateurs de la torsion de $\mathrm{H}_{n-1}(F)$. Effectuons une chirurgie sur un $(n-1)$-cycle τ de F qui est un générateur de la torsion de $\mathrm{H}_{n-1}(F)$. Ceci équivaut à une chirurgie rationnelle sur un $(n-1)$-cycle nul-homologue. C'est pourquoi cette opération modifie l'homologie de dimension n de F. Comme ci-dessus, supposons τ représenté par le plongement d'une sphère S^{n-1} tel que ce plongement, noté ψ_i, étendu à $S^{n-1} \times D^{n+1}$ soit un voisinage tubulaire de $\psi_i(S^{n-1})$. Soit $F_T = F \setminus \psi_i(S^{n-1} \times D^{n+1})$, posons

$$F = F_T \cup \psi_i(S^{n-1} \times D^{n+1}), \quad F^\star = F_T \cup \psi_i(D^n \times S^n)$$

Écrivons la suite de Mayer–Vietoris pour les deux décompositions.

Première décomposition.— Nous avons

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \mathrm{H}_{n+1}(F_T;\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathrm{H}_{n+1}(F;\mathbb{Q}) \xrightarrow{\gamma=0} \underbrace{\mathrm{H}_n\big(\psi_i(S^{n-1} \times S^n);\mathbb{Q}\big)}_{=\mathbb{Q}} \\ &\longrightarrow \mathrm{H}_n(F_T;\mathbb{Q}) \oplus \underbrace{\mathrm{H}_n\big(\psi_i(S^{n-1} \times D^{n+1});\mathbb{Q}\big)}_{=0} \longrightarrow \mathrm{H}_n(F;\mathbb{Q}) \\ &\xrightarrow{\lambda=0} \underbrace{\mathrm{H}_{n-1}\big(\psi_i(S^{n-1} \times S^n);\mathbb{Q}\big)}_{=\mathbb{Q}} \\ &\longrightarrow \mathrm{H}_{n-1}(F_T;\mathbb{Q}) \oplus \underbrace{\mathrm{H}_{n-1}\big(\psi_i(S^{n-1} \times D^{n+1});\mathbb{Q}\big)}_{=\mathbb{Q}} \\ &\longrightarrow \mathrm{H}_{n-1}(F;\mathbb{Q}) \longrightarrow 0 \end{aligned} \tag{1}$$

($\gamma = 0$ car sinon le cycle repésenté par $\psi_i(S^{n-1})$ aurait un dual dans $\mathrm{H}_{n+1}(F;\mathbb{Q})$ et ne serait pas nul-homologue dans $\mathrm{H}_{n-1}(F;\mathbb{Q})$; de plus,

$\mathrm{H}_{n-1}\big(\psi_i(S^{n-1}\times S^n);\mathbb{Q}\big)\to \mathrm{H}_{n-1}\big(\psi_i(S^{n-1}\times D^{n+1});\mathbb{Q}\big)$ est une injection et $\lambda=0$). Donc, de cette suite on déduit l'isomorphisme suivant :

$$\mathrm{H}_n(F_T;\mathbb{Q})\cong \mathrm{H}_n(F;\mathbb{Q})\oplus\mathbb{Q}\,.$$

Deuxième décomposition. — Nous avons

$$\begin{aligned}
0 &\longrightarrow \mathrm{H}_{n+1}(F_T;\mathbb{Q})\longrightarrow \mathrm{H}_{n+1}(F^\star;\mathbb{Q})\xrightarrow{\beta=0}\underbrace{\mathrm{H}_n\big(\psi_i(S^{n-1}\times S^n);\mathbb{Q}\big)}_{=\mathbb{Q}}\\
&\longrightarrow \mathrm{H}_n(F_T;\mathbb{Q})\oplus\underbrace{\mathrm{H}_n\big(\psi_i(D^n\times S^n);\mathbb{Q}\big)}_{=\mathbb{Q}}\longrightarrow \mathrm{H}_n(F^\star;\mathbb{Q})\\
&\longrightarrow \underbrace{\mathrm{H}_{n-1}\big(\psi_i(S^{n-1}\times S^n);\mathbb{Q}\big)}_{=\mathbb{Q}}\\
&\xrightarrow{\alpha=0}\mathrm{H}_{n-1}(F_T;\mathbb{Q})\oplus\underbrace{\mathrm{H}_{n-1}\big(\psi_i(D^n\times S^n);\mathbb{Q}\big)}_{=0}\longrightarrow \mathrm{H}_{n-1}(F^\star;\mathbb{Q})\to 0
\end{aligned}\tag{2}$$

($\beta=0$ du fait que $\mathrm{H}_n\big(\psi_i(S^{n-1}\times S^n);\mathbb{Q}\big)$ s'injecte dans $\mathrm{H}_n\big(\psi_i(D^n\times S^n);\mathbb{Q}\big)$; de plus, le $(n-1)$-cycle représenté par $\psi_i(S^{n-1})$ est nul-homologue donc $\alpha=0$). De cette suite, on déduit l'isomorphisme suivant :

$$\mathrm{H}_n(F^\star;\mathbb{Q})\cong \mathrm{H}_n(F_T;\mathbb{Q})\oplus\mathbb{Q}\,.$$

Finalement nous obtenons

$$\mathrm{H}_n(F^\star;\mathbb{Q})\cong \mathrm{H}_n(F;\mathbb{Q})\oplus\mathbb{Q}^2\,,$$

et donc une chirurgie sur un $(n-1)$-cycle de torsion augmente de 2 le rang de $\mathrm{H}_n(F)$.

Avec les notations choisies, nous avons représenté τ par un plongement $\psi_i\big(S^{n-1}\times\{1\}\big)$. De la suite (1), nous déduisons que le n-cycle ℓ défini par

$$\ell := \Big[\psi_i\big(\{1\}\times S^n\big)\Big]$$

est générateur d'un facteur libre de $\mathrm{H}_n(F^\star)$ ajouté par la chirurgie sur τ. Si τ est de p-torsion, alors $p\,\tau$ borde un disque d dans F; et de la suite (2), nous déduisons que le n-cycle $\ell^\star$ tel que

$$p\,\ell^\star := \Big[p\,\psi_i\big(D^n\times\{1\}\big)\cup d\Big]\,,$$

est générateur de l'autre facteur libre de $\mathrm{H}_n(F^\star)$ ajouté par la chirurgie sur τ.

La variété F' a été obtenue avec des modifications par chirurgie sur tous les cycles de dimensions inférieures ou égales à $n-1$ (et donc après avoir effectué les chirurgies sur tous les cycles d'un système de générateurs de la $\mathbb{Z}$-torsion de $\mathrm{H}_{n-1}(F)$). D'après les calculs que nous venons de faire, nous avons construit des n-cycles tels que

$$\mathrm{H}_n(F') \cong \mathrm{H}_n(F)/\operatorname{Tors}(\mathrm{H}_n(F)) \bigoplus_{i\in\mathcal{N}} \langle \ell_i\,,\, \ell_i^\star \rangle$$

(on note d_i le disque se rapportant à τ_i utilisé dans la construction de $\ell_i^\star$).

En collant un $(2n+2)$-disque sur le bord de $S^{2n+1}\times\{0\}$, nous construisons $B = S^{2n+1}\times[\,0\,,\,1\,]\cup D^{2n+2}$. Soient $[\alpha_i]_{i\in\mathcal{J}}$ et $[\beta_i]_{i\in\mathcal{J}}$ des bases respectivement de $\mathrm{H}_n(F)/\operatorname{Tors}(\mathrm{H}_n(F))$ et de $\mathrm{H}_n(F')$, telles que pour tout i de $\mathcal{J}$ on a

$$\Big[d\Big(h\big(\alpha_i\times\{1\}\big)\Big)\Big] = [\beta_i]\,.$$

On étend i_+ à W dans B. La classe d'homologie du bord de la chaîne $d\big(h\big(\alpha_i\times[\,0\,,\,1\,]\big)\big)$ est $[\alpha_i-\beta_i]$ dans W et, comme les α_j (resp. $i_+(\alpha_j)$) bordent δ_j (resp. δ_j^+) dans D^{2n+2}, on a les β_j (resp. $i_+(\beta_j)$) qui bordent $d\big(h\big(\alpha_j\times[\,0\,,\,1\,]\big)\big)\cup\delta_j$ (resp. $i_+\big(d\big(h\big(\alpha_j\times[\,0\,,\,1\,]\big)\big)\big)\cup\delta_j^+$) dans B.

Pour i et j dans $\mathcal{J}$, les deux chaînes

$$d\Big(h\big(\alpha_i\times[\,0\,,\,1\,]\big)\Big) \quad \text{et} \quad i_+\left(d\Big(h\big(\alpha_j\times[\,0\,,\,1\,]\big)\Big)\right)$$

sont disjointes dans $S^{2n+1}\times[\,0\,,\,1\,]$. Et nous obtenons pour tout i, j dans $\mathcal{J}$:

$$A\big([\alpha_i]\,,\,[\alpha_j]\big) = \operatorname{Int}_B(\delta_i,\delta_j^+) = A'\big([\beta_i]\,,\,[\beta_j]\big)$$

où Int_B est le nombre d'intersection algébrique entre les $(n+1)$-chaînes de B.

Le cycle ℓ_i borde le disque $\psi_i\big(\{1\}\times D^{n+1}\big)$ dans W, donc $A'\big([\beta_j]\,,\,\ell_i\big)$ est donné par le nombre d'intersection entre $d\big(\alpha_j\times[\,0\,,\,1\,]\big)\cup\delta_j$ et $i_+\big(\psi_i\{1\}\times D^{n+1}\big)$ qui sont deux chaînes disjointes; nous avons donc $A'\big([\beta_j]\,,\,\ell_i\big)=0$. De la même manière, nous obtenons $A'\big(\ell_i\,,\,[\beta_j]\big)=0$. De plus,

$$A'(\ell_i,\ell_i^\star) = \frac{1}{p}\operatorname{Int}_B\big(\ell_i\,,\,p\psi_i(D^n\times\{1\}\cup d_i\big) = \pm1 \quad \text{et} \quad A'(\ell_i^\star,\ell_i)=0$$

(ou bien $A'(\ell_i,\ell_i^\star)=0$ et $A'(\ell_i^\star,\ell_i)=\pm1$ suivant les orientations des variétés). Les plongements ψ_i qui ont permis de construire W sont disjoints, donc

$$A'(\ell_i,\ell_j) = A'(\ell_j,\ell_i) = A'(\ell_i,\ell_j^\star) = A'(\ell_j^\star,\ell_i) = 0 \quad \text{pour } i\neq j\,.$$

Finalement avec les cycles $(\ell_i)_{i\in\mathcal{N}}$, $(\ell_i^*)_{i\in\mathcal{N}}$ et $([\beta_j])_{j\in\mathcal{J}}$, la forme de Seifert A' associée à F' est de la forme

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \varepsilon_2 & * & 0 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3 & \dots & 0 \\ 0 & * & \varepsilon_4 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & * & 0 & * & \dots & A \end{pmatrix}$$

avec $*$ des entiers et $(\varepsilon_{2k+1}, \varepsilon_{2k+2}) = (\pm 1, 0)$ ou bien $(\varepsilon_{2k+1}, \varepsilon_{2k+2}) = (0, \pm 1)$.

Comme F' est $(n-1)$-connexe, nous avons $\operatorname{Tors}(\mathrm{H}_n(F')) = 0$. Posons

$$M = \bigoplus_{j\in\mathcal{J}} \langle [\alpha_j] \rangle \bigoplus_{j\in\mathcal{J}} \langle [\beta_j] \rangle \bigoplus_{i\in\mathcal{N}} \langle \ell_i \rangle \subset \mathrm{H}_n(F)/\operatorname{Tors}(\mathrm{H}_n(F)) \oplus \mathrm{H}_n(F')$$

et

$$B = A \oplus -A' .$$

Les éléments ℓ_i de M ne sont pas dans $\operatorname{Ker} S_B^*$, et comme ℓ_i n'intersecte que ℓ_i^* avec $S_B(\ell_i, \ell_i^*) = \pm 1$ les sous-modules $S_B^*(\langle \ell_i \rangle)$ sont purs (on peut remarquer que l'apparition des cycles ℓ_i et ℓ_i^*, obtenus par chirurgie sur des $(n-1)$-cycles de torsion, n'a pas modifié la topologie de l'entrelacs; donc ces cycles ne sont pas dans $\operatorname{Ker} S_{A'}^*$ et ne participent pas à donner de la torsion dans $\operatorname{Coker} S_{A'}^*$). Le sous-module pur M est un métaboliseur pour la forme $B = A \oplus -A'$ et comme $\overline{\ell_i} = [\psi_i(\{1\} \times S^n)]$, nous avons $\overline{M}$ est un sous-module pur de $\mathrm{H}_n(F)/\operatorname{Tors}(\mathrm{H}_n(F)) \oplus \mathrm{H}_n(F')$ par construction.

Si les isomorphismes φ entre $\operatorname{Ker} S_A^*$ et $\operatorname{Ker} S_{A'}^*$, et θ entre $\operatorname{Tors}(\operatorname{Coker} S_A^*)$ et $\operatorname{Tors}(\operatorname{Coker} S_{A'}^*)$ proviennent de l'isomorphisme $d \circ h$ entre K et $d(h(K \times \{1\}))$, alors :

- $$\begin{aligned} M \cap \operatorname{Ker} S_B^* &= \Big\{ ([\alpha_j], [\beta_j]) \;\Big|\; [\alpha_j] \in \operatorname{Ker} S_A^*,\ [\beta_j] \in \operatorname{Ker} S_{A'}^* \Big\} \\ &= \Big\{ \big([\alpha_j], [d \circ h(\alpha_j)]\big) \;\Big|\; [\alpha_j] \in \operatorname{Ker} S_A^* \Big\} \\ &= \Big\{ \big([\alpha_j], \varphi([\alpha_j])\big) \;\Big|\; [\alpha_j] \in \operatorname{Ker} S_A^* \Big\} \ ; \end{aligned}$$

- posons

$$\pi : \Big(\mathrm{H}_n(F)/\operatorname{Tors}(\mathrm{H}_n(F)) \oplus \mathrm{H}_n(F')\Big)^* \longrightarrow \operatorname{Coker} S_B^* ,$$

$$\pi_A : \Big(\mathrm{H}_n(F)/\operatorname{Tors}(\mathrm{H}_n(F))\Big)^* \longrightarrow \operatorname{Coker} S_A^* ,$$

$$\pi_{A'} : (\mathrm{H}_n(F'))^* \longrightarrow \operatorname{Coker} S_{A'}^* ,$$

les projections dans les quotients. Nous avons alors $\pi = \pi_A \oplus \pi_{A'}$. Posons a_j un générateur de $\Big\langle \pi_A\big(S_A^*([\alpha_j])^\wedge\big)\Big\rangle$ et b_j un générateur de $\Big\langle \pi_{A'}\big(S_{A'}^*([\beta_j])^\wedge\big)\Big\rangle$, alors $\big(a_j, b_j\big)_{j\in\mathcal{J}}$ est un système générateur de Tors(Coker S_B^*) (nous avons éventuellement a_i et b_i nuls). De plus, comme $[\beta_j] = \big[d \circ h\big(\alpha_j \times \{1\}\big)\big]$ nous avons $b_j = \theta(a_j)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\pi(S_B^*(M)^\wedge) &= \Big\langle \pi \circ S_B^*\Big(\big([\alpha_j], [\beta_j]\big)\Big)^\wedge \Big\rangle_{j\in\mathcal{J}} \\ &= \big\langle (a_j, b_j)\big\rangle_{j\in\mathcal{J}} = \Big\langle \big(a_j, \theta(a_j)\big)\Big\rangle_{j\in\mathcal{J}}\end{aligned}$$

Finalement M satisfait les hypothèses de la définition 1.5 et les formes A et A' sont algébriquement cobordantes. □

3.2 Démonstration de la proposition 2.2

Comme nous le verrons dans la section 6, on peut toujours réaliser une forme bilinéaire entière comme étant une forme de Seifert pour un entrelacs; ceci en construisant une surface de Seifert par attachement d'anses sur un disque D^{2n}. Les anses utilisées sont toutes d'indice n, donc la surface de Seifert ainsi construite est $(n-1)$-connexe et l'entrelacs est simple. □

3.3 Démonstration du théorème 1

Soient K_0 et K_1 deux entrelacs, de dimension $2n-1$ avec $n \geq 3$, de formes de Seifert respectives A_0 et A_1 algébriquement cobordantes. D'après la proposition 2.1, il existe deux entrelacs K_0' et K_1' de formes de Seifert respectives A_0' et A_1', tels que

- K_i' est cobordant à K_i, $i = 0, 1$,
- A_i' est associée à une surface de Seifert $(n-1)$-connexe pour K_i', $i = 0, 1$,
- A_i' est algébriquement cobordante à A_i, $i = 0, 1$.

Ainsi, les formes A'_0 et A'_1 sont algébriquement cobordantes par transitivité. Donc d'après le théorème 3 de [BM, p. 5], K'_0 et K'_1 sont cobordants et finalement, par transitivité du cobordisme, les entrelacs K_0 et K_1 sont cobordants. □

3.4 Démonstration du théorème 2

Soient K_0 et K_1 deux entrelacs cobordants de dimension $2n-1$ avec $n \geq 3$. Soient A_0 et A_1 des formes de Seifert pour K_0 et K_1. D'après la proposition 2.1, il existe deux entrelacs K'_0 et K'_1 de formes de Seifert respectives A'_0 et A'_1, tels que

- K'_i est cobordant à K_i, $i = 0,\ 1$,
- A'_i est associée à une surface de Seifert $(n-1)$-connexe pour K'_i, $i = 0,\ 1$,
- A'_i est algébriquement cobordante à A_i, $i = 0,\ 1$.

Construisons deux entrelacs simples K^*_0 et K^*_1 qui ont A_0 et A_1 pour forme de Seifert comme dans la proposition 2.2. Du fait que K_0 et K_1 sont fibrés, les formes A_0 et A_1 sont unimodulaires; ainsi les entrelacs K^*_0 et K^*_1 sont fibrés simples (cf. [KW, chap. V, § 3, p. 118]).

Les formes A'_i et A_i sont algébriquement cobordantes, donc les entrelacs K'_i et K^*_i $(i = 0,\ 1)$ sont cobordants par le théorème 3 de [BM, p. 5]. Comme K_0 et K_1 sont cobordants les entrelacs K^*_0 et K^*_1 sont cobordants par transitivité du cobordisme. Donc, par le théorème 2 de [BM, p. 4], les formes A_0 et A_1 sont algébriquement cobordantes. □

4. Dégénérescence des formes bilinéaires de $\mathcal{B}$

Comme conséquence directe de la définition 1.5 et de la remarque 2.1, nous avons le résultat suivant.

PROPOSITION 4.1.— *Soient A_0 et A_1 deux formes bilinéaires de $\mathcal{B}$. Les deux formes A_0 et A_1 sont algébriquement cobordantes si et seulement si il existe un métaboliseur M pour $A = A_0 \oplus -A_1$, avec $\overline{M}$ est pur dans $\overline{G}$ et un isomorphisme φ entre* Ker S^*_0 *et* Ker S^*_1 *tels que*

$$M \cap \operatorname{Ker} S^* = \big\{(x,x) \mid x \in \operatorname{Ker} S^*_0\big\}\,.$$

Remarquons qu'ainsi le cobordisme algébrique des formes bilinéaires de $\mathcal{B}$ et donc des formes de Seifert des entrelacs de $\mathbf{K}$ devient beaucoup plus maniable que dans le cas général.

4.1 Démonstration de la proposition 2.3

Soit A une forme bilinéaire de $\mathcal{A}$ qui est non dégénérée. Supposons A définie sur un $\mathbb{Z}$-module libre de rang fini noté G. Soit C la forme bilinéaire de $\mathcal{A}$ définie sur un $\mathbb{Z}$-module libre de rang 2, noté H, de base (e_1, e_2) dont la matrice dans la base (e_1, e_2) est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Considérons la forme bilinéaire dégénérée à droite $B = A \oplus C$ définie sur $G \oplus H$. Nous allons montrer que A et B sont algébriquement cobordantes.

Soit M le sous-module pur de $G \oplus (G \oplus H)$ défini par

$$M = \{(x, x, y) \mid x \in G\,,\ y \in \langle e_1 \rangle\}\,.$$

On a

$$\operatorname{rg}(M) = \frac{1}{2}\operatorname{rg}\big(G \oplus (G \oplus H)\big) \quad \text{et} \quad (A \oplus -B)\big|_M \equiv 0\,.$$

La matrice de S_C^*, l'adjointe de la ε-symétrisée de C, est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc S_C^* est unimodulaire et $\operatorname{Ker} S_C^* = \operatorname{Coker} S_C^* = \{0\}$. Par construction, nous avons $\overline{\langle e_1 \rangle}$ est un sous-module pur de $\overline{H}$ et, comme $\overline{\{(x, x) \mid x \in G\}}$ est pur dans $\overline{G} \oplus \overline{G}$, nous avons bien que $\overline{M}$ est pur dans $\overline{G} \oplus (\overline{G} \oplus \overline{H})$. Si S_A^* et S_B^* sont les adjointes des ε-symétrisées de A et B, nous avons $\operatorname{Ker} S_A^* = \operatorname{Ker} S_B^*$ et $\operatorname{Coker} S_A^* = \operatorname{Coker} S_B^*$. De ces deux égalités, nous déduisons immédiatement les deux égalités

$$M \cap (\operatorname{Ker} S_A^* \oplus \operatorname{Ker} S_B^*) = \{(x, x) \mid x \in \operatorname{Ker} S_A^*\}\,,$$
$$d(S^*(M)^\wedge) = \{(x, x) \mid x \in \operatorname{Tors}(\operatorname{Coker} S_A^*)\}\,,$$

où d est la projection dans le quotient $\operatorname{Coker} S_A^* \oplus \operatorname{Coker} S_B^*$.

Ainsi, les conditions (C1) et (C2) de la définition 1.6 sont vérifiées et les formes A et B sont algébriquement cobordantes. Il en est de même pour la dégénérescence à gauche en posant

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pour matrice de C.

Si A est une forme bilinéaire de $\mathcal{B}$, la forme bilinéaire B est aussi dans $\mathcal{B}$ du fait que C est dans $\mathcal{B}$. Dans ce cas, A et B sont algébriquement cobordantes par la proposition 4.1. □

4.2 Démonstration de la proposition 2.4

Supposons A définie sur un $\mathbb{Z}$-module libre G. Le sous-module $\operatorname{Ker} A^*$ est pur dans G et $\operatorname{Ker} S^* \subset \operatorname{Ker} A^*$, décomposons $\operatorname{Ker} A^*$ en $\operatorname{Ker} A^* = (\operatorname{Ker} A^* \cap \operatorname{Ker} S^*) \oplus D$ où D est un sous-module pur de G. Comme $\operatorname{Ker} S^*$ est un sous-module pur de $\operatorname{Ker} A^*$, nous avons

$$G/\operatorname{Ker} A^* \cong (G/\operatorname{Ker} S^*)/\overline{D}$$

est sans torsion, donc $\overline{D}$ est pur dans $\overline{G}$. Soit H un complémentaire de $\operatorname{Ker} S^*$ dans G qui contient D, ce qui permet d'écrire $G = \operatorname{Ker} S^* \oplus H$ avec $\operatorname{Ker} A^* \cap H = D$. Par construction, $A|_H$ dégénère à droite sur D. Notons $(d_i)_{i\in\mathcal{J}}$ une base de D. Du fait que A est dans $\mathcal{B}$, nous avons $\operatorname{Tors}(\operatorname{Coker} S^*) = \{0\}$. Donc $S|_H$ est unimodulaire et, pour tout i de $\mathcal{J}$, il existe d_i^* dans H tel que

$$S(d_i, d_i^*) = 1 \quad \text{et} \quad H = N \oplus \left(\bigoplus_{i\in\mathcal{J}} \langle d_i\,,\, d_i^* \rangle \right),$$

avec $S(d_i, n) = S(d_i^*, n) = 0$ pour tout n de N. Nous avons donc $A^*(d_i)|_N = {}^*A(d_i)|_N = 0$ (c'est-à-dire que, pour tout n de N et pour tout i de $\mathcal{J}$, $A(d_i, n) = A(n, d_i) = 0$). Soit A_d la restriction de A à $\operatorname{Ker} S^* \oplus N = L$.

Soit M le sous-module pur de $G \oplus L = (L \oplus D) \oplus L$ défini par

$$M = \left\{ (x, d, x) \mid x \in L\,,\ d \in \langle d_i \rangle_{i\in\mathcal{J}} \right\}.$$

On a

$$\operatorname{rg}(M) = \frac{1}{2} \operatorname{rg}(G \oplus L) \quad \text{et} \quad (A \oplus -A_d)|_M \equiv 0\,;$$

et comme $\overline{N}$ est pur dans $\overline{G}$ par construction, nous avons $\overline{M}$ est pur dans $\overline{G} \oplus \overline{L}$. De plus, $\operatorname{Ker} S_A^* = \operatorname{Ker} S_{A_d}^*$ donc

$$M \cap (\operatorname{Ker} S_A^* \oplus \operatorname{Ker} S_{A_d}^*) = \{(x, x) \mid x \in \operatorname{Ker} S_A^*\}$$

et les deux formes A et A_d sont algébriquement cobordantes par la proposition 4.1. De plus, $\operatorname{Ker} A_d^*$ est un sous-module de $\operatorname{Ker} S_d^*$ par construction. Le raisonnement est identique si l'on considère le sous-module sur lequel la forme A dégénère à gauche et, de plus, dans ce cas la forme A_d sera la même puisqu'elle ne dépend que du rang de D qui est invariant si l'on regarde la dégénérescence à droite ou à gauche. □

5. Monoïde

Étant donné un entier $n \geq 2$, on a muni l'ensemble des classes de cobordisme d'entrelacs de dimension $2n - 1$ d'une structure de monoïde commutatif en posant

$$[K_0] \bullet [K_1] := [K_0 \# K_1]$$

où $[K]$ désigne la classe de cobordisme d'un entrelacs K et $\#$ désigne la somme connexe de deux variétés de même dimension. (La variété $K_0 \# K_1$ est bien un entrelacs au sens de la définition 1.1 si K_0 et K_1 sont considérés comme des sous-variétés de la même sphère, après avoir disposé K_0 et K_1 dans deux hémisphères différentes.) Comme dans le cas des nœuds, l'entrelacs $K_0 \# K_1$ est muni de la forme de Seifert $A_0 \oplus A_1$.

Un élément neutre de chaque monoïde est donné par la classe de cobordisme du nœud trivial (au sens de Kervaire et Levine ([K2], [L1]). L'associativité de l'opération vient de l'associativité de la somme connexe des variétés. Dans le cas où l'on se restreint aux entrelacs de $\mathbf{K}$, on garde la structure de monoïde commutatif.

On munit l'ensemble des classes de cobordisme algébrique des formes bilinéaires entières d'une structure de monoïde commutatif en posant

$$\{A_0\} \bullet \{A_1\} := \{A_0 \oplus A_1\}$$

où $\{A\}$ désigne la classe de cobordisme algébrique de la forme bilinéaire entière A. L'élément neutre de ce monoïde est donné par la classe de la forme nulle définie sur le $\mathbb{Z}$-module de rang zéro $\{0\}$.

Soient K_0 et K_1 deux entrelacs de forme de Seifert A_0 et A_1, la forme $A_0 \oplus A_1$ est alors une forme de Seifert pour l'entrelacs $K_0 \# K_1$ (la surface de Seifert correspondante est donnée par la somme connexe, sur leur bord, des deux surfaces de Seifert). Si $\mathbb{K}^{2n-1}$ désigne l'ensemble des entrelacs de dimension $2n-1$ et $\mathbf{K}^{2n-1}$ désigne l'ensemble des entrelacs à homologie sans torsion de dimension $2n-1$, pour $n \geq 3$, posons

$$\begin{aligned} \mathcal{C} : \mathbb{K}^{2n-1} &\longrightarrow \mathcal{A} \\ [K] &\longmapsto \{A\} \end{aligned}$$

l'application qui à un entrelacs K, dimension $2n-1$, de forme de Seifert A associe la classe de cobordisme algébrique de A. L'application $\mathcal{C}$ est bien définie par le théorème 1, de plus c'est un morphisme de monoïdes. De même, la restriction

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\mathbf{K}} : \mathbf{K}^{2n-1} &\longrightarrow \mathcal{B} \\ [K] &\longmapsto \{A\} \end{aligned}$$

est aussi un morphisme de monoïdes.

6. Construction

6.1 Démonstration de la proposition 2.5

Fixons $n \geq 3$. Étant donné un élément K de $\mathbf{K}$, de dimension $2n-1$, nous allons construire un représentant de la classe de cobordisme de K. Soit A une forme bilinéaire de $\mathcal{B}$ qui est une forme de Seifert pour K. D'après la proposition 2.4, il existe une forme bilinéaire A_d de $\mathcal{B}$ telle que A et A_d soient algébriquement cobordantes et A_d est non dégénérée en dehors de Ker S_d^*. Soit $\mathcal{D}$ le sous-module de Ker S_d^* sur lequel A_d dégénère. Remarquons que pour tout x de $\mathcal{D}$ et pour tout y nous avons $A(x,y) = A(y,x) = 0$. Donc si $\mathcal{D}$ est de rang δ, la forme A_d peut alors être décomposée en $A_d = O_\delta \oplus B$ où O_δ est une forme identiquement nulle définie sur un $\mathbb{Z}$-module libre de rang δ et B est une forme, de rang r, de $\mathcal{B}$ non dégénérée (δ est éventuellement nul si A_d est non dégénérée).

Dans [K1, chap. II, § 6], M. Kervaire montre comment attacher des anses (ψ_i) d'indice n à D^{2n} pour obtenir une variété $V = D^{2n} + (\psi_1) + \cdots + (\psi_{\delta+r})$, et comment plonger V dans S^{2n+1} par $F : V \to S^{2n+1}$ de telle sorte que la variété $F(V)$ soit une surface de Seifert pour l'entrelacs $K_d = \partial F(V)$ de forme de Seifert A_d. Lors de la construction de $F(V)$, les δ premières anses ont la particularité de n'enlacer aucune autre anse de la construction, ceci avant et après le plongement F.

De même, soient les variétés

$$V_1 = D^{2n} + (\psi_1) + \cdots + (\psi_\delta) \quad \text{et} \quad V_2 = D^{2n} + (\psi_{\delta+1}) + \cdots + (\psi_{\delta+r})$$

et les plongements

$$F_1 : V_1 \to S^{2n+1} \quad \text{et} \quad F_2 : V_2 \to S^{2n+1}$$

tels que les formes de Seifert associées aux surfaces de Seifert $F_1(V_1)$ et $F_2(V_2)$ soient respectivement O_d et B. Notons $\Delta_K = \partial F_1(V_1)$ l'entrelacs trivial de $\mathbf{K}$ de forme de Seifert identiquement nulle, et $\widetilde{K} = \partial F_2(V_2)$ l'entrelacs non dégénéré de forme de Seifert non dégénérée B. L'entrelacs $\Delta_K \# \widetilde{K}$ a pour forme de Seifert A_d par construction, de plus A et A_d sont algébriquement cobordantes donc K et $\Delta_K \# \widetilde{K}$ sont cobordants par le théorème 1. Ainsi, K est cobordant à un stabilisé de $\widetilde{K}$ qui est non dégénéré. □

Remarque 6.1.— L'entier δ dans le paragraphe 6.1 est un invariant de la classe de cobordisme considérée. Cet entier est égal au rang de la forme de Seifert de Δ_K obtenue à l'aide de proposition 2.4.

Remarque 6.2.— La forme de Seifert de Δ_K correspond à la restriction de la forme de Seifert pour K au sous-module de $\operatorname{Ker} S^*$ sur lequel elle dégénère. Comme dans une classe de cobordisme algébrique, les restrictions des formes bilinéaires aux noyaux des adjointes des ε-symétrisées sont isomorphes, nous avons le corollaire de la proposition 2.5 suivant.

COROLLAIRE 6.3.— *Si dans une classe de cobordisme donnée de* $\mathbf{K}$ *il existe un entrelacs K pour lequel une forme de Seifert A dégénère sur un sous-module de* $\operatorname{Ker} S^*$*, alors toutes les formes de Seifert des entrelacs de cette classe de cobordisme dégénèrent sur ce sous-module de* $\operatorname{Ker} S^*$.

Remerciements

Je tiens à remercier l'Université de Genève et le Fonds National Suisse de la Recherche Scientifique qui m'ont permis de commencer ce travail.

Je souhaite remercier les Professeurs N. Habegger, M. Kervaire, D. T. Lê, F. Michel, C. Weber pour les nombreuses discussions que nous avons eues. Et tout particulièrement le Professeur M. Kervaire qui m'a signalé le cas intéressant des entrelacs à homologie sans torsion.

Références

[BM] BLANLŒIL (V.) et MICHEL (F.) .— *A Theory of Cobordism for non Spherical Links*, Comment. Math. Helv. **72** (1997), pp. 30-51.

[DBM] DU BOIS (P.) et MICHEL (F.) .— *Cobordism of Algebraic Knots via Seifert Forms*, Invent. Math. **111** (1993), pp. 151-169.

[H] HIRSH (M.) .— *Embeddings and Compressions of Polyhedra and Smooth Manifolds*, Topology **4** (1966), pp. 361-369.

[K1] KERVAIRE (M.) .— *Les nœuds de dimension supérieure*, Bulletin de la Société Mathématique de France **93** 1965, pp. 225-271.

[K2] KERVAIRE (M.) .— *Knot Cobordism in Codimension Two*, Manifolds Amsterdam, Lecture Notes in Mathematics, Springer, **197** (1970), pp. 83-105.

[KW] KERVAIRE (M.) et WEBER (C.) .— *A Survey of Multidimensional knots*, Knot Theory, Proceedings, Plans-sur-Bex, Switzerland, Lecture Notes in Mathematics, Springer, **685** (1977), pp. 61-134.

[L1] LEVINE (J.) .— *Knot Cobordism in Codimension Two*, Comment Math. Helv. **44** (1969), pp. 229-244.

[L2] LEVINE (J.) .— *An Algebraic Classification of Some Knots of Codimension Two*, Comment. Math. Helv. **45** (1970), pp. 185-198.

[M] MILNOR (J.) .— *A Procedure for Killing Homotopy Groups of Differentiable Manifolds*, Proceedings of Symposia in Pure Math. (A.M.S.), **3** (1961), pp. 39-55.

[PWZ] PENROSE (R.), WHITEHEAD (H.) et ZEEMAN (E.) .— *Embeddings of Manifolds in Euclidian space*, Annals of Math. **73** (1961), pp. 613-623.

[R] ROLFSEN (D.) .— *Knots and Links*, Publish or perish (1976).

[S] SMALE (S.) .— *On the Structure of Manifolds*, Amer. J. of Math. **84** (1962), pp. 387-399.