

SOPHIE GÉRARDY

Le système de Hénon-Heiles

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6^e série, tome 6, n° 4
(1997), p. 633-652

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1997_6_6_4_633_0

© Université Paul Sabatier, 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Le système de Hénon–Heiles^(*)

SOPHIE GÉRARDY⁽¹⁾

RÉSUMÉ. — Nous décrivons les niveaux du système de Hénon–Heiles grâce aux propriétés des courbes spectrales.

ABSTRACT. — We describe the level sets of the Hénon–Heiles system by using the spectral curves properties.

1. Introduction

Le système différentiel associé au hamiltonien de Hénon–Heiles,

$$H_1 = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - q_1^2 q_2 - 2q_2^2,$$

où p_1, p_2, q_1, q_2 sont des réels, est complètement intégrable au sens de Liouville : il possède une deuxième intégrale première

$$H_2 = q_1^4 + 4q_1^2 q_2^2 + 4p_1(p_1 q_2 - p_2 q_1).$$

L'application (H_1, H_2) n'étant pas propre, le théorème de Liouville ne permet pas de conclure que les composantes connexes des niveaux réguliers sont des tores. Mais ils sont munis d'une action locale de \mathbb{R}^2 et donc d'une structure affine locale pour laquelle les flots sont linéaires.

Quant à la nature topologique exacte de ces niveaux, elle a été décrite par L. Gavrilov dans un cas un peu plus général [6], notamment à partir des équations de Hamilton–Jacobi et de l'analyse de Kowalevski–Painlevé.

(*) Reçu le 23 octobre 1995

(1) Université Louis-Pasteur, Département de Mathématiques, 7 rue René-Descartes, F-67084 Strasbourg Cedex (France)
e-mail : gerardy@math.u-strasbg.fr

La topologie de plusieurs exemples de systèmes intégrables a été étudiée par A. T. Fomenko et ses élèves [5], mais le travail de L. Gavrilov sur le système de Hénon–Heiles a été le premier où les bifurcations ont été décrites complètement dans un exemple non compact.

Dans cet article, nous proposons d'étudier cette question à l'aide d'une méthode assez systématique, la méthode "équation de Lax-courbe spectrale" (voir par exemple [1], [2]). Nous obtiendrons ainsi, grâce à l'application de vecteurs propres, un revêtement double de la surface de niveau sur une partie affine de la jacobienne de la courbe spectrale. Ce revêtement se prolongeant à toute la jacobienne, nous permettra ensuite de déterminer la topologie des niveaux. Nous en profiterons aussi pour faire le bilan des courbes apparaissant dans la littérature concernant ce sujet ([4], [6]).

2. Forme de Lax et courbe spectrale

2.1 Forme de Lax

Grâce à l'analyse de Kowalevski–Painlevé, Newel, Tabor et Zeng [8] ont mis le système différentiel de Hénon–Heiles

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= p_1, & \dot{p}_1 &= 2q_1q_2 \\ \dot{q}_2 &= p_2, & \dot{p}_2 &= q_1^2 + 6q_2^2, \end{aligned}$$

sous forme de Lax en

$$\dot{A}(\lambda) = [B_1(\lambda), A(\lambda)],$$

où

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} -\lambda p_2 + p_1 q_1 & \lambda^2 + 2\lambda q_2 - q_1^2 \\ -\frac{\lambda^3}{2} + \lambda^2 q_2 - \lambda \left(2q_2^2 + \frac{q_1^2}{2} \right) + p_1^2 & \lambda p_2 - p_1 q_1 \end{pmatrix}$$

et

$$B_1(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda/2 + 2q_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les coefficients du polynôme caractéristique de la matrice $A(\lambda)$,

$$\mu^2 + \frac{\lambda^5}{2} - 2\lambda^2 H_1(p_i, q_i) - \frac{\lambda}{2} H_2(p_i, q_i),$$

nous redonnent les intégrales premières de l'introduction. C'est d'ailleurs le premier intérêt de l'équation de Lax que d'en fournir.

2.2 La courbe spectrale

Notons $T_h^{\mathbb{C}}$ le niveau $h = (h_1, h_2)$ de la fonction vectorielle complexe $(H_1(p_i, q_i), H_2(p_i, q_i))$. En d'autres termes $T_h^{\mathbb{C}}$ représente l'ensemble des matrices $A(\lambda)$ ayant pour polynôme caractéristique

$$\mu^2 + \frac{\lambda^5}{2} - 2\lambda^2 h_1 - \frac{\lambda}{2} h_2.$$

À chaque niveau, on associe donc une courbe algébrique $X_h = X$:

$$\mu^2 - \lambda P(\lambda) = 0, \quad P(\lambda) = \frac{-\lambda^4}{2} + 2\lambda h_1 + \frac{h_2}{2}$$

appelée courbe spectrale puisqu'elle décrit le spectre des matrices $A(\lambda)$.

On désignera encore par X la courbe complétée et normalisée au-dessus de $\lambda = \infty$. Comme la partie affine de X n'a qu'une branche en l'infini, il suffit pour la compléter de rajouter un point : $Q_\infty = (\infty, \infty)$. Le diviseur de λ est ainsi

$$(\lambda) = 2Q_0 - 2Q_\infty.$$

L'application $\lambda : X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est le revêtement double qui correspond à l'involution $\tau : (\lambda, \mu) \mapsto (\lambda, -\mu)$. Les points de ramification sont les cinq racines de $\lambda P(\lambda)$ et Q_∞ . Remarquons aussi que la courbe X (hyperelliptique de genre 2) est lisse lorsque le polynôme $\lambda P(\lambda)$ n'a pas de racines multiples, c'est-à-dire lorsque h_2 est non nul et différent de $-3h_1^{4/3}$.

3. Application de vecteurs propres

Lorsque X est lisse, chacun de ses points (λ, μ) (hormis les points de ramification de X sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$) décrit une valeur propre simple μ de la matrice $A(\lambda)$, donc une droite. On a ainsi une application $(X \setminus 6 \text{ points}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, que l'on peut prolonger à la courbe toute entière puisqu'elle est lisse [7]. Par conséquent à tout élément (p_1, p_2, q_1, q_2) de $T_h^{\mathbb{C}}$, on peut associer un fibré en droites complexes sur X .

DÉFINITION. — *L'ensemble des classes d'isomorphismes de fibrés en droites complexes de degré d sur X est noté $\text{Pic}^d(X)$. C'est aussi l'ensemble des classes de diviseurs de degré d sur X pour l'équivalence linéaire.*

On désignera par $\text{Div}^d(X)$ l'ensemble des diviseurs de degré d sur X .

On a ainsi défini, pour un certain entier d , une application

$$\varphi : T_h^{\mathbb{C}} \longrightarrow \text{Pic}^d(X),$$

qui fait correspondre à chaque point d'un niveau donné des intégrales premières, le fibré dual (pour avoir d positif) de celui des vecteurs propres.

3.1 La jacobienne de la courbe spectrale

Nous allons maintenant déterminer explicitement l'image de φ . Pour cela, dans un premier temps, considérons le vecteur propre

$$v(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} 1 \\ z(\lambda, \mu) \end{pmatrix}$$

(nous sommes sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$) de $A(\lambda)$ associé à la valeur propre μ . C'est une section partout non nulle du fibré des vecteurs propres, dont il s'agit de trouver les pôles. Un calcul direct donne

$$z(\lambda, \mu) = \frac{\mu + \lambda p_2 - p_1 q_1}{\lambda^2 + 2\lambda q_2 - q_1^2} = \frac{-\lambda^3 + 2\lambda^2 q_2 - \lambda(4q_2^2 + q_1^2) + 2p_1^2}{2(\mu - \lambda p_2 + p_1 q_1)}.$$

Comme la courbe spectrale est lisse et qu'elle a pour équation

$$\begin{aligned} \mu^2 - (\lambda p_2 - p_1 q_1)^2 &= \\ &= (\lambda^2 + 2\lambda q_2 - q_1^2) \left(-\frac{1}{2} \lambda^3 + \lambda^2 q_2 - \lambda \left(2q_2^2 + \frac{1}{2} q_1^2 \right) + p_1^2 \right), \end{aligned}$$

la fonction $z(\lambda, \mu)$ est infinie pour les points (λ, μ) de X vérifiant

$$\begin{cases} \lambda^2 + 2\lambda q_2 - q_1^2 = 0 & \text{et } \mu = \lambda p_2 - p_1 q_1 \\ \text{ou } \lambda = \infty. \end{cases}$$

Nous avons donc trois pôles Q_1, Q_2, Q_∞ , et le fibré est de degré 3.

Remarque. — La courbe X étant lisse, Q_1 est nécessairement différent de τQ_2 . Deux diviseurs distincts de la forme $Q_1 + Q_2 + Q_\infty$ représentent donc deux classes distinctes de $\text{Pic}^3(X)$. De plus, comme Q_∞ est indépendant des variables p_1, p_2, q_1, q_2 , on peut se ramener à $\text{Pic}^0(X)$ par une translation de $-3Q_\infty$. L'image de φ est ainsi incluse dans

$$\{Q_1 + Q_2 - 2Q_\infty \mid Q_1 \neq \tau Q_2, Q_i \neq Q_\infty, Q_i \in X\}.$$

RAPPELS ET DÉFINITION

Notons Ω_X^1 le faisceau des 1-formes holomorphes sur X . L'espace vectoriel $H^0(X, \Omega_X^1)$ est celui des 1-formes holomorphes (globales) sur X . Le groupe $H_1(X, \mathbb{Z})$ s'injecte par intégration des formes dans le dual $H^0(X, \Omega_X^1)^*$. On appelle jacobienne de X , et on note $\text{Jac}(X)$ le groupe $H^0(X, \Omega_X^1)^*/H_1(X, \mathbb{Z})$.

THÉORÈME 3.1. — L'application d'Abel–Jacobi

$$\begin{aligned} \text{Div}^0(X) &\longrightarrow \text{Jac}(X) \\ \sum_{i=1}^r (P_i - Q_i) &\longmapsto \left(\omega \mapsto \sum_{i=1}^r \int_{Q_i}^{P_i} \omega \right) \end{aligned}$$

est surjective et induit un isomorphisme de $\text{Pic}^0(X)$ sur $\text{Jac}(X)$.

L'image de φ est donc incluse dans $\text{Jac}(X) \setminus \Theta$ où $\Theta = \{Q - Q_\infty \mid Q \in X\}$ est isomorphe à X .

3.2 L'image de φ

Relever un élément $Q_1 + Q_2 - 2Q_\infty$ de $\text{Jac}(X) \setminus \Theta$ consiste à résoudre le système suivant.

$$\begin{cases} \lambda_1 = -q_2 + \sqrt{q_1^2 + q_2^2} \\ \mu_1 = \lambda_1 p_2 - p_1 q_1 \\ \lambda_2 = -q_2 - \sqrt{q_1^2 + q_2^2} \\ \mu_2 = \lambda_2 p_2 - p_1 q_1. \end{cases}$$

1) Lorsque Q_0, Q_1 et Q_2 sont distincts, le système devient

$$\begin{cases} q_2 = -\frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) \\ p_2 = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ q_1^2 = -\lambda_1 \lambda_2 \neq 0 \\ p_1 q_1 = \lambda_1 p_2 - \mu_1. \end{cases}$$

- 2) Lorsque Q_0 et Q_1 sont confondus, Q_2 est différent de Q_0 et nous obtenons

$$\begin{cases} q_2 = -\frac{1}{2}\lambda_2 \\ p_2 = \frac{\mu_2}{\lambda_2} \\ q_1^2 = 0 \\ p_1q_1 = 0. \end{cases}$$

Comme X est lisse, $h_2 = 4p_1^2q_2$ est non nul et p_1^2 vaut $-h_2/2\lambda_2$.

- 3) Lorsque Q_1 et Q_2 sont confondus (donc distincts de Q_0), le système est équivalent à

$$\begin{cases} q_2 = -\lambda_1 \\ q_1^2 = -\lambda_1^2 \neq 0 \\ p_1q_1 = \lambda_1p_2 - \mu_1. \end{cases}$$

La donnée de h_1 et h_2 nous permet alors de calculer p_2 et p_1q_1 .

Dans tous les cas, résoudre le système revient à prendre la racine carrée d'un nombre non nul. On obtient ainsi, à chaque fois, deux points de $T_h^{\mathbb{C}}$. Nous avons donc la proposition suivante.

PROPOSITION 3.2. — *Si $h = (h_1, h_2)$ est une valeur régulière, l'application de vecteurs propres*

$$\varphi : T_h^{\mathbb{C}} \longrightarrow \text{Jac}(X)$$

est un revêtement double étale sur son image $\text{Jac}(X) \setminus \Theta$. Le niveau $T_h^{\mathbb{C}}$ est donc lisse.

4. Un revêtement double de $\text{Jac}(X)$

Il est temps de rappeler quel est notre but : la description des niveaux réels $T_h^{\mathbb{R}}$. Pour l'instant, l'étude de la courbe spectrale et le théorème de Comessatti nous permettent de calculer le nombre de composantes connexes de la partie réelle de $\text{Jac}(X)$, donc de $\text{Jac}(X) \setminus \Theta$. Mais les renseignements que nous avons sur l'application de vecteurs propres sont insuffisants pour en déduire la topologie de $T_h^{\mathbb{R}}$.

4.1 Les groupes $H^1(\text{Jac}(X) \setminus \Theta; \mathbb{Z}/2)$ et $H^1(\text{Jac}(X); \mathbb{Z}/2)$

S'il était possible de prolonger l'application φ de vecteurs propres en une application

$$\tilde{\varphi} : \widetilde{T}_h^{\mathbb{C}} \longrightarrow \text{Jac}(X), \quad \widetilde{T}_h^{\mathbb{C}} = T_h^{\mathbb{C}} \cup C,$$

qui soit un revêtement double étale de $\text{Jac}(X)$ cela résoudrait notre problème. En effet, l'étude de la courbe C , dont l'image par $\tilde{\varphi}$ serait Θ , nous permettrait de conclure.

Pour savoir si un tel revêtement double existe, nous allons d'abord comparer les groupes $H^1(\text{Jac}(X) \setminus \Theta; \mathbb{Z}/2)$ et $H^1(\text{Jac}(X); \mathbb{Z}/2)$.

4.1.1. — Soit W un voisinage tubulaire de Θ dans $\text{Jac}(X)$ et considérons les suites exactes suivantes

$$\begin{aligned} \dots H^0(W \setminus \Theta; \mathbb{Z}/2) &\longrightarrow H^1(\text{Jac}(X) \setminus \Theta, W \setminus \Theta; \mathbb{Z}/2) \\ &\longrightarrow H^1(\text{Jac}(X) \setminus \Theta; \mathbb{Z}/2) \longrightarrow H^1(W \setminus \Theta; \mathbb{Z}/2) \dots \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \dots H^0(\text{Jac}(X); \mathbb{Z}/2) &\longrightarrow H^0(W; \mathbb{Z}/2) \longrightarrow H^1(\text{Jac}(X), W; \mathbb{Z}/2) \\ &\longrightarrow H^1(\text{Jac}(X); \mathbb{Z}/2) \longrightarrow H^1(W; \mathbb{Z}/2) \dots \end{aligned} \quad (2)$$

L'adhérence de Θ étant incluse dans $\overset{\circ}{W}$, les groupes

$$H^1(\text{Jac}(X) \setminus \Theta, W \setminus \Theta; \mathbb{Z}/2) \quad \text{et} \quad H^1(\text{Jac}(X), W; \mathbb{Z}/2)$$

sont isomorphes. De plus, l'application d'Abel-Jacobi induit un isomorphisme entre

$$H^0(\text{Jac}(X); \mathbb{Z}/2) \quad \text{et} \quad H^0(X; \mathbb{Z}/2)$$

d'une part, et entre

$$H^1(\text{Jac}(X); \mathbb{Z}/2) \quad \text{et} \quad H^1(X; \mathbb{Z}/2)$$

d'autre part. Le groupe $H^1(\text{Jac}(X), W; \mathbb{Z}/2)$ est donc réduit à $\{0\}$. La suite (1) donne alors

$$H^1(\text{Jac}(X) \setminus \Theta; \mathbb{Z}/2) \hookrightarrow H^1(W \setminus \Theta; \mathbb{Z}/2).$$

4.1.2. — Il nous reste donc à comparer $H^1(W \setminus \Theta; \mathbb{Z}/2)$ et $H^1(X; \mathbb{Z}/2)$. Pour cela nous allons utiliser la suite exacte de Gysin

$$H^1(X; \mathbb{Z}/2) \hookrightarrow H^1(W \setminus \Theta; \mathbb{Z}/2) \longrightarrow H^0(X; \mathbb{Z}/2) \xrightarrow{\cup_e} H^2(X; \mathbb{Z}/2)$$

où \cup_e désigne le cup produit par la classe d'Euler du fibré.

Le voisinage tubulaire W est difféomorphe au fibré normal à X dans $\text{Jac}(X)$, c'est-à-dire au quotient du fibré tangent à $\text{Jac}(X)$ par le fibré ν tangent à X dans sa jacobienne. Les classes d'Euler de W et ν sont donc égales modulo 2, et $\chi[X]$ étant paire, $e(W)$ est nulle dans $\mathbb{Z}/2$. Nous obtenons ainsi

$$H^1(X; \mathbb{Z}/2) \xrightarrow{p^*} H^1(W \setminus \Theta; \mathbb{Z}/2) \xrightarrow{p_*} H^0(X; \mathbb{Z}/2) \longrightarrow 0.$$

où p est la projection de $W \setminus \Theta$ sur X dans $\text{Jac}(X)$. Le groupe de cohomologie $H^1(W \setminus \Theta; \mathbb{Z}/2)$ est isomorphe à $H^1(X; \mathbb{Z}/2) \times \mathbb{Z}/2$ donc à $H^1(\text{Jac}(X); \mathbb{Z}/2) \times \mathbb{Z}/2$ en composant par l'application d'Abel-Jacobi. Le groupe de cohomologie $H^1(\text{Jac}(X) \setminus \Theta; \mathbb{Z}/2)$ est donc contenu dans $H^1(\text{Jac}(X); \mathbb{Z}/2) \times \mathbb{Z}/2$.

4.2 Complétion des niveaux réguliers

Nous allons maintenant regarder la restriction de φ à une fibre. Si elle est triviale au voisinage de Θ , c'est que le revêtement provient d'un revêtement double étale de $\text{Jac}(X)$, ou ce qui revient au même qu'il se prolonge.

Pour cela prenons un point quelconque $Q(\lambda, \mu)$ de X différent de Q_0 et Q_∞ , et désignons par Γ_Q la courbe de $\text{Jac}(X)$ définie par $\Gamma_Q = \{Q + R - 2Q_\infty \mid R \in X\}$. Cette courbe et Θ sont transverses et se coupent en deux points $Q - Q_\infty$ et $L = \{[R + \tau R - 2Q_\infty] \mid R \in X\}$.

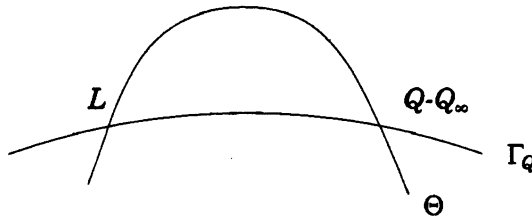


Fig. 1

Un point $Q + R - 2Q_\infty$ de Γ_Q , où $R(x, y)$ est différent de $Q_0, Q_\infty, Q, \tau Q$, se relève en deux éléments de $T_h^{\mathbb{C}}$ vérifiant

$$\begin{cases} q_2 = -\frac{1}{2}(\lambda + x) \\ p_2 = \frac{\mu - y}{\lambda - x} \\ q_1^2 = -\lambda x \neq 0 \\ p_1 q_1 = \lambda p_2 - \mu. \end{cases}$$

Lorsque R est au voisinage de Q_∞ , nous avons une coordonnée locale z telle que $x = -1/z^2$. Comme Q est différent de Q_0 , $q_1^2 = \lambda/z^2$ est non nul, et il y a encore deux points au-dessus de $Q + R - 2Q_\infty$ au voisinage de $Q - Q_\infty$.

THÉORÈME 4.1. — *Lorsque $h = (h_1, h_2)$ est une valeur régulière, φ peut être prolongée en un revêtement double étale de toute la jacobienne :*

$$\tilde{\varphi} : \widetilde{T_h^{\mathbb{C}}} \longrightarrow \text{Jac}(X).$$

Lorsque $Q(\lambda, \mu)$ varie dans X , relever un point $Q - Q_\infty$ de Θ consiste en fait à considérer les racines carrées de λ . La courbe lisse C qui complète $T_h^{\mathbb{C}}$ en le tore complexe $T_h^{\mathbb{C}}$ est donc la surface de Riemann de $\sqrt{\lambda}$ sur X . Elle a pour équation $\eta^2 = P(\xi^2)$; c'est une courbe de genre 3 qui possède deux involutions :

$$i_X : (\xi, \eta) \longmapsto (-\xi, -\eta) \quad \text{et} \quad i_E : (\xi, \eta) \longmapsto (-\xi, \eta).$$

Le quotient de C par i_X donne naturellement X . Celui de C par i_E est une courbe elliptique E d'équation $\eta^2 = P(x)$. Cette courbe est un revêtement double ramifié de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Notons aussi que le revêtement double π de E par C est ramifié en deux couples de points correspondants à Q_0 et Q_∞ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et invariants par i_E .

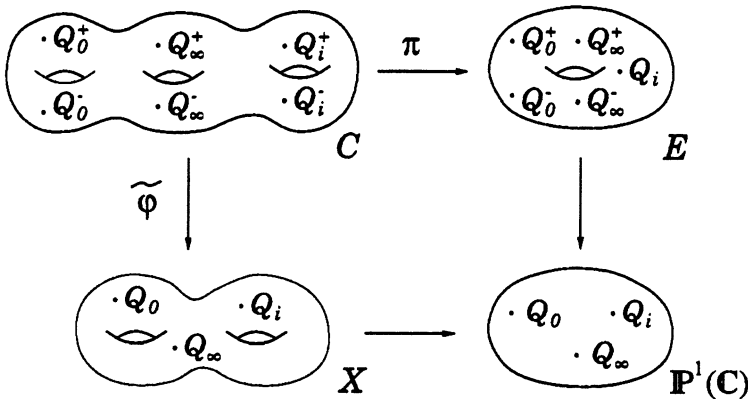


Fig. 2

5. Application tangente à φ

5.1 Linéarisation des flots

Pour montrer que les flots hamiltoniens correspondants à H_1 et H_2 sont linéaires, nous allons utiliser une méthode due à Griffiths [7] qui repose sur les paires de Lax $\dot{A} = [B_i, A]$ associées aux hamiltoniens H_i .

Si $A(\lambda)v = \mu v$, alors en dérivant par rapport au temps on voit que $B_i(\lambda)v - \dot{v}$ est un vecteur propre de $A(\lambda)$ pour μ . Comme les sous-espaces propres sont de dimension 1, on obtient

$$B_i(\lambda)v = \alpha_i(\lambda, \mu)v + \dot{v}.$$

Si de plus, au voisinage des pôles de λ (c'est-à-dire de Q_∞) les coefficients de la partie méromorphe de $\alpha_i(\lambda, \mu)$ sont indépendants du temps, l'image du flot considéré est linéaire.

Les paires de Lax associées à H_1 et H_2 sont respectivement $\dot{A}(\lambda) = [B_1(\lambda), A(\lambda)]$ et $\dot{A}(\lambda) = [B_2(\lambda), A(\lambda)]$ avec

$$B_2(\lambda) = \begin{pmatrix} -4p_2 & 4\lambda + 8q_2 \\ -2\lambda^2 + 4q_2\lambda - 4(2q_2^2 + q_1^2) & 4p_2 \end{pmatrix}.$$

On obtient ainsi

$$\alpha_1(\lambda, \mu) = \frac{\mu + \lambda p_2 - p_1 q_1}{\lambda^2 + 2\lambda q_2 - q_1^2}$$

$$\alpha_2(\lambda, \mu) = -4p_2 + 4(\lambda + 2q_2)\alpha_1(\lambda, \mu).$$

Au voisinage de Q_∞ , nous avons une coordonnée locale z telle que $\lambda = -1/z^2$, $\mu = 1/(\sqrt{2}z^5)$ et

$$\alpha_1(\lambda, \mu) = \frac{1}{\sqrt{2}z} + \text{termes holomorphes}$$

$$\alpha_2(\lambda, \mu) = \frac{-\sqrt{2}}{z^3} + \text{termes holomorphes.}$$

Les images des flots par φ sont linéaires.

5.2 Remarques

1. Nous venons de montrer que les flots de H_1 et H_2 sont linéarisés par l'application de vecteurs propres, mais aussi qu'ils se prolongent en des flots linéaires sur $\widetilde{T}_h^{\mathbb{C}}$.

2. Au voisinage de Q_∞ , les parties méromorphes de $\alpha_1(\lambda, \mu)$ et $\alpha_2(\lambda, \mu)$ s'écrivent aussi $\mu\lambda^{-2}$ et $\mu\lambda^{-1}$. De plus, la courbe X est recouverte par deux ouverts \mathcal{U}_+ et \mathcal{U}_- correspondant respectivement à $\lambda \neq \infty$ et $\lambda \neq 0$. Les courbes \mathcal{U}_\pm étant affines, elles sont acycliques pour \mathcal{O}_X . Ainsi $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ qui est l'espace tangent (en n'importe quel point) à $\text{Jac}(X)$, peut être considéré comme le H^1 associé à ce recouvrement. Les fonctions $\mu\lambda^{-2}$, $\mu\lambda^{-1}$ sont holomorphes sur $\mathcal{U}_+ \cap \mathcal{U}_-$, elles définissent donc des 1-cocycles de $H^1(X, \mathcal{O}_X)$.

5.3 Quelques propriétés des champs de vecteurs

PROPOSITION 5.1. — *La droite engendrée par la classe du cocycle $\mu\lambda^{-2}$ est tangente au diviseur Θ au point $L = \{[P + \tau P - 2Q_\infty] \mid P \in X\}$.*

Cette droite correspond à deux courbes de $\widetilde{T}_h^{\mathbb{C}}$ qui sont donc tangentes à $C = \widetilde{\varphi}^{-1}(\Theta)$.

PROPOSITION 5.2. — *Les 1-cocycles définis par les fonctions $\mu\lambda^{-1}$, $\mu\lambda^{-2}$ ont des classes de cohomologie indépendantes dans $H^1(X, \mathcal{O}_X)$.*

Démonstration de la proposition 5.1

Considérons l'application d'Abel–Jacobi ζ basée en \dot{Q}_0

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow H^0(X, \Omega_X^1)^* / \Lambda \\ Q &\longmapsto \left(\omega \mapsto \int_{Q_0}^Q \omega \right) \end{aligned}$$

(Λ désigne le réseau des périodes).

Le point Q_∞ de X correspondant au point L de Θ , la droite qui nous intéresse est l'image de l'application tangente en Q_∞ ,

$$\begin{aligned} T_{Q_\infty} X &\longrightarrow H^0(X, \Omega_X^1)^* \\ \xi &\longmapsto (\omega \mapsto \omega_{Q_\infty}(\xi)). \end{aligned}$$

Il s'agit donc d'identifier la droite d'équation $\omega_{Q_\infty} = 0$ de $H^0(X, \Omega_X^1)$ à celle engendrée par $\mu\lambda^{-2}$ dans $H^1(X, \mathcal{O}_X)$. Pour cela introduisons l'isomorphisme déduit de la forme bilinéaire non dégénérée :

$$\begin{aligned} H^0(X, \Omega_X^1) \times H^1(X, \mathcal{O}_X) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (\omega, f) &\longmapsto \text{Res}_{Q_\infty}(f\omega). \end{aligned}$$

D'après les calculs faits en paragraphe 5.1, $\sqrt{2}z = \lambda^2\mu^{-1}$ est une uniformisante au voisinage de Q_∞ et $\mu\lambda^{-2}\omega$ s'écrit $\alpha(z) dz/z$ avec α holomorphe et $\alpha(0) = 0$. Par conséquent $\omega_{Q_\infty} = 0 \Leftrightarrow \text{Res}_{Q_\infty}(\mu\lambda^{-2}\omega) = 0$, et les deux droites sont identifiées. \square

Démonstration de la proposition 5.2

Comme nous l'avons vu dans la démonstration précédente, $\mu\lambda^{-2}$ représente un élément non trivial de $H^1(X, \mathcal{O}_X)$. Il s'agit donc ici de démontrer qu'il n'existe aucun scalaire a tel que $\mu\lambda^{-2} - a\mu\lambda^{-1} \sim 0$, c'est-à-dire que pour une 1-forme holomorphe bien choisie (telle que $\omega_{Q_\infty} \neq 0$) $\text{Res}_{Q_\infty}[(\mu\lambda^{-2} - a\mu\lambda^{-1})\omega] \neq 0$.

Prenons par exemple $\omega = \lambda d\lambda/\mu$ qui est clairement holomorphe sur X . Au voisinage de Q_∞ , et en utilisant la même coordonnée locale que précédemment, cette forme s'écrit $-2 dz$. La somme des résidus cherchée vaut alors -2 . \square

Ainsi lorsque X est lisse, les champs de vecteurs hamiltoniens de H_1 et H_2 ont des images indépendantes dans $H^1(X, \mathcal{O}_X)$. Ces deux vecteurs sont donc indépendants. On redémontre ainsi que si X est lisse, le niveau $T_h^{\mathbb{C}}$ est régulier.

6. Topologie des niveaux réels : $T_h^{\mathbb{R}}$

Dans toute cette partie, nous considérerons le système différentiel de Hénon-Heiles comme un système d'équations réelles. La fonction vectorielle $(H_1(p_i, q_i), H_2(p_i, q_i))$ sera donc à valeurs dans \mathbb{R}^2 .

La partie réelle, $X_{\mathbb{R}}$, de la courbe spectrale est représentée dans la figure 3.

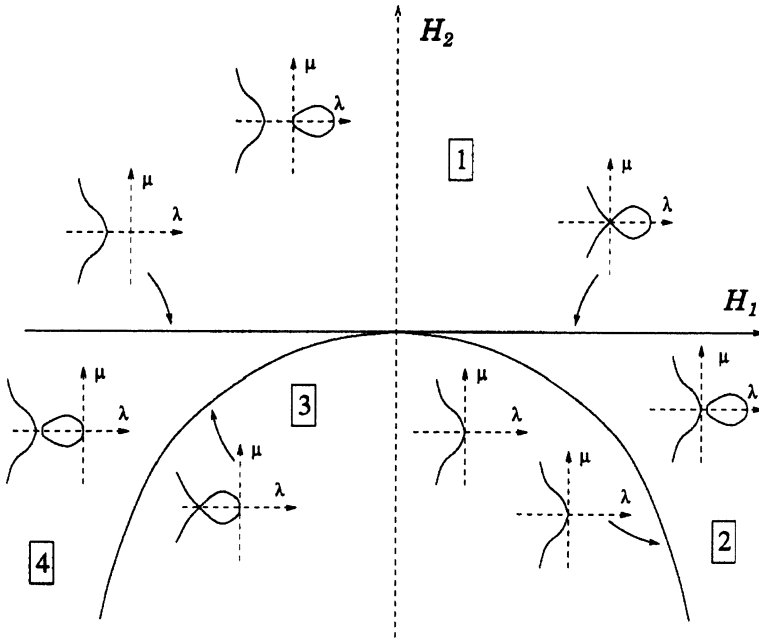


Fig. 3 $X_{\mathbb{R}}$ en fonction de (h_1, h_2)

6.1 Les niveaux réguliers

Ils correspondent aux valeurs réelles de $h = (h_1, h_2)$ pour lesquelles la courbe X est lisse : h_2 non nul et différent de $-3h_1^{4/3}$. Nous savons que l'image de $T_h^{\mathbb{R}}$ par l'application de vecteurs propres est incluse dans la partie réelle $\text{Jac}(X)_{\mathbb{R}}$ de la jacobienne de X . Plus précisément, d'après le paragraphe 3.2, elle est composée des diviseurs de la forme $Q_1 + Q_2 - 2Q_{\infty}$ où $Q_1(\lambda_1, \mu_1)$ et $Q_2(\lambda_2, \mu_2)$ sont des points de $X_{\mathbb{R}} \setminus \{Q_{\infty}\}$ tels que le produit $\lambda_1 \lambda_2$ soit négatif. Nous allons donc commencer par regarder $\tilde{\varphi}(T_h^{\mathbb{R}})$ en fonction de la position des composantes de $X_{\mathbb{R}}$ par rapport à l'axe $\mu = 0$.

6.1.1. — Dans les domaines (3) et (4), il est clair que les éléments de $\text{Jac}(X)_{\mathbb{R}}$ susceptibles d'être atteints par l'application $\tilde{\varphi}$ sont de la forme $Q_1 + Q_0 - 2Q_{\infty}$ avec $Q_1 \in X_{\mathbb{R}} \setminus \{Q_0, Q_{\infty}\}$. Mais dans ce cas $-h_2/2\lambda_1$ est strictement négatif et p_1 n'est pas réel (§ 3.2). Les niveaux réguliers n'ont donc pas de composante réelle.

PROPOSITION 6.1. — La fonction vectorielle réelle $(H_1(p_i, q_i), H_2(p_i, q_i))$ est à valeurs dans la partie hachurée du plan.

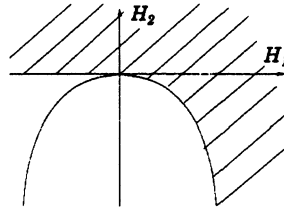


Fig. 4

6.1.2. — Dans les domaines (1) et (2), l'image $\tilde{\varphi}(T_h^{\mathbb{R}})$ est un cylindre (le produit des composantes de $X_{\mathbb{R}} \setminus \{Q_{\infty}\}$). De plus, la partie $\tilde{\varphi}(C_{\mathbb{R}})$ de $\Theta_{\mathbb{R}}$ atteinte par $\tilde{\varphi}$ étant homéomorphe à un cercle, l'image de la partie réelle du niveau complété est un tore.

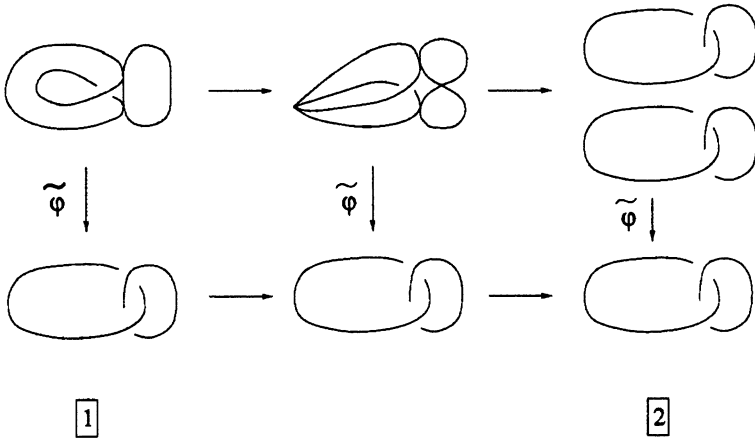


Fig. 5

Remarque. — Puisque $\lambda P(\lambda)$ est un polynôme de degré impair, $X_{\mathbb{R}}$ n'est pas vide. D'après le théorème de Comessatti, le nombre de composantes connexes de $\text{Jac}(X)_{\mathbb{R}}$ est donc donné par

$$|\pi_0(\text{Jac}(X)_{\mathbb{R}})| = 2^{|\pi_0(X_{\mathbb{R}})|}.$$

Il y en a donc deux et l'une d'elles seulement est atteinte par l'application $\tilde{\varphi}$.

Pour connaître la topologie de $\widetilde{T}_h^{\mathbb{R}}$, il suffit maintenant de relever une base de $H_1(\widetilde{\varphi}(\widetilde{T}_h^{\mathbb{R}}), \mathbb{Z})$.

Notons $X_{\mathbb{R}}^-$ et $X_{\mathbb{R}}^+$ les composantes de $X_{\mathbb{R}}$, $X_{\mathbb{R}}^-$ étant celle contenant Q_{∞} , et fixons Q_1 sur $X_{\mathbb{R}}^+$. Les courbes

$$\Delta_{Q_1} = \{Q_1 + Q_2 - 2Q_{\infty} \mid Q_2 \in X_{\mathbb{R}}^-\} \quad \text{et} \quad \widetilde{\varphi}(C_{\mathbb{R}})$$

représentent une base de 1-cycles de $\widetilde{\varphi}(\widetilde{T}_h^{\mathbb{R}})$. Elles se relèvent de la façon indiquée à la figure 5.

Le tore $\widetilde{\varphi}(\widetilde{T}_h^{\mathbb{R}})$ se relève donc en un tore (domaine (1)) ou deux tores (domaine (2)).

6.2 Le passage de (1) à (2)

Remarquons d'abord que toutes les courbes spectrales lisses (dans les domaines (1) et (2)) sont homéomorphes. On peut donc supposer, pour simplifier le problème, que la surface topologique est fixée, et que c'est la structure complexe qui varie avec h . Plus précisément, on va fixer h_1 dans \mathbb{R}_+^* , pour ensuite regarder l'évolution des cycles de $X_{(h_1, h_2)}$, que l'on notera X_{h_2} lors du passage de (1) à (2). On saura alors ce que devient la matrice des périodes de $\text{Jac}(X_{h_2})$, et le comportement de la fibration par les jacobiniennes au voisinage de $(h_1, 0)$.

D'après la figure 5, le passage de la courbe X_{h_2} de (1) à (2) se fait par contraction d'un cycle complexe. Nous allons donc considérer la structure complexe associée à $\sigma' : z \mapsto -\bar{z}$, pour laquelle ce cycle est réel, plutôt que celle donnée par $\sigma : z \mapsto \bar{z}$. Nous avons alors les situations de la figure 6.

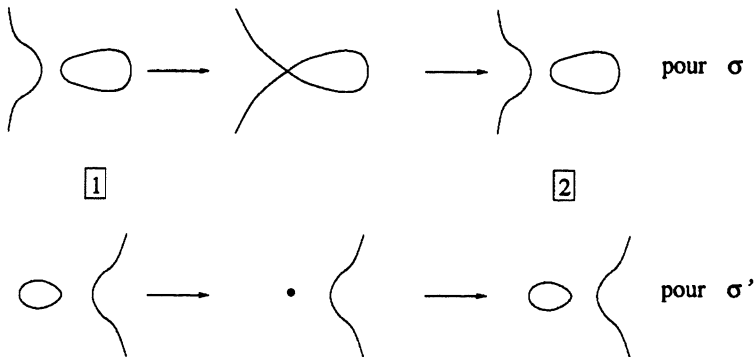


Fig. 6

Notons (a_i, b_i) une base symplectique liée à la surface topologique dans laquelle a_2 est le cycle contracté (fig. 7). Il est réel pour σ' .

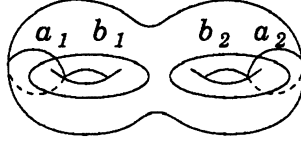


Fig. 7

Soit $(\omega_i(h_2))_i$, $h_2 \in \mathbb{R}^*$, une base de l'espace des 1-formes holomorphes $H^0(X_{h_2}, \Omega_{X_{h_2}}^1)$ normalisée, c'est-à-dire telle que $\int_{a_j} \omega_i(h_2) = \delta_{ij}$.

La jacobienne $\text{Jac}(X_{h_2})$ est le quotient $\mathbb{C}^2 / [I_2, Z(h_2)]$ où

$$Z(h_2) = \left(\int_{b_j} \omega_i(h_2) \right)_{ij}$$

est symétrique et $[I_2, Z(h_2)]$ est le réseau engendré par les colonnes de la matrice $(I_2, Z(h_2))$. Lorsque h est dans l'un des domaines (1) ou (2), le nombre de composantes connexes de $\text{Jac}(X_{h_2})_{\mathbb{R}}$ est 2. Comme $Z(h_2)$ est symétrique,

$$\Re(z_{12}(h_2)) = \Re(z_{21}(h_2)) = 0,$$

et

$$\text{soit } \Re(z_{22}(h_2)) = \frac{1}{2} \quad \text{ou soit } \Re(z_{11}(h_2)) = \frac{1}{2}.$$

Le passage de (1) à (2) se fait par contraction du cycle a_2 . La partie imaginaire de $z_{22}(h_2)$ tend alors vers l'infini : ce n'est plus \mathbb{Z}^4 , mais \mathbb{Z}^3 qui opère sur \mathbb{C}^2 . Pour faire opérer \mathbb{Z}^4 , il est nécessaire de remplacer la deuxième colonne de la matrice limite Z par des zéros.

On prolonge ainsi holomorphiquement la fibration par les jacobiniennes en prenant comme fibre au-dessus de $(h_1, 0)$,

$$\mathbb{C}^2 / [I_2, Z(0)] \quad \text{où} \quad Z(0) = \begin{pmatrix} z_{11} & 0 \\ z_{21} & 0 \end{pmatrix}$$

avec

$$z_{ij} = \lim_{h_2 \rightarrow 0} z_{ij}(h_2).$$

Regardons maintenant la normalisée, \tilde{X} , de la courbe singulière X_0 figure 8. Elle est de genre 1.

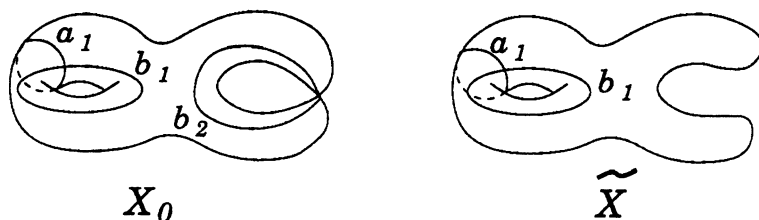


Fig. 8

Sa jacobienne est le quotient $\mathbb{C}/[I_1, \tilde{z}_{11}]$. Comme $\tilde{X}_{\mathbb{R}}$ n'a qu'une composante connexe, $\text{Jac}(\tilde{X})_{\mathbb{R}}$ n'en a qu'une. Autrement dit, la partie réelle de \tilde{z}_{11} est $1/2$.

Le passage à la limite, lorsque h_2 tend vers 0, et la normalisation étant des opérations continues sur $z_{11}(h_2)$, sa partie réelle vaut $1/2$. Celle de $z_{22}(h_2)$ est donc nulle.

Remarquons, par ailleurs, que nous pouvons déformer la fibration par les jacobienes en faisant tendre $z_{21}(h_2)$ vers 0. La matrice des périodes est alors celle du produit d'une courbe elliptique à une composante réelle et d'une courbe elliptique qui dégénère comme cela est montré sur la figure 9.

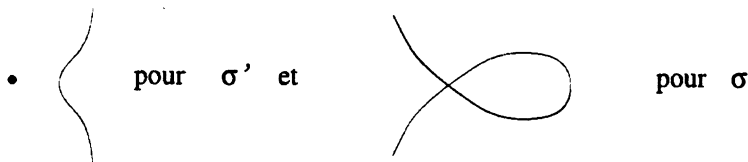


Fig. 9

La déformation respectant la structure réelle, la fibre limite, lorsque h_2 tend vers 0, est homéomorphe (pour σ) au produit d'un huit et d'un cercle. Ici encore $\tilde{\varphi}(T_h^{\mathbb{R}})$ est un tore, et une partie seulement de la fibre est atteinte.

La partie réelle de la courbe spectrale X_0 étant maintenant connexe, fixons Q_1 d'abscisse positive sur $(X_0)_{\mathbb{R}}$. Les courbes

$$\Delta_{Q_1} = \{Q_1 + Q_2 - 2Q_{\infty} \mid Q_2(\lambda_2, \mu_2) \in (X_0)_{\mathbb{R}}, \lambda_2 \leq 0\} \quad \text{et} \quad \tilde{\varphi}(C)$$

représentent une base de $H_1(\tilde{\varphi}(\widetilde{T_h^{\mathbb{R}}}), \mathbb{Z})$, dont le relèvement a été donné dans la figure 5. La partie réelle du niveau complété est donc homéomorphe au produit d'un huit et d'un cercle.

Pour résumer, nous avons les situations de la figure 10. Les parties grisées de $\text{Jac}(X)_{\mathbb{R}}$ représentent $\varphi(\widetilde{T_h^{\mathbb{R}}})$.

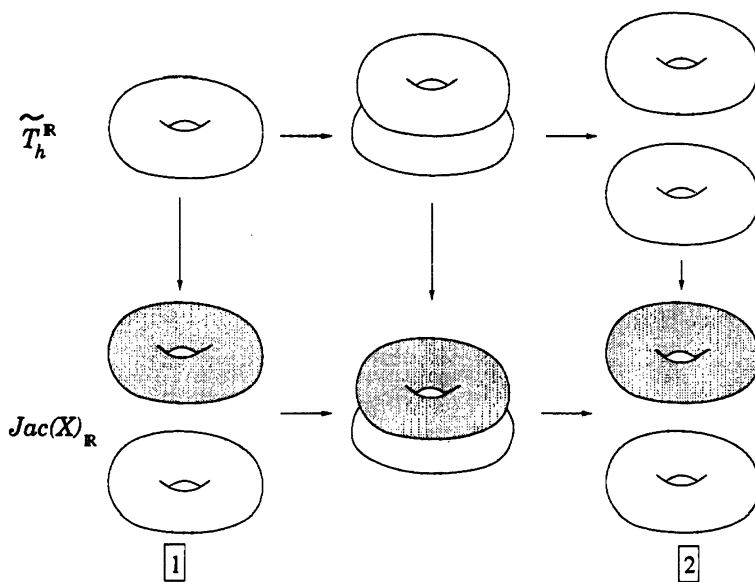


Fig. 10

7. En prime

Revenons un peu aux courbes du paragraphe 4.2. Nous y avons défini la courbe C comme étant la surface de Riemann de $\sqrt{\lambda}$ sur X . Le revêtement double étale $\tilde{\varphi} : C \rightarrow X$ induit donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{j} \text{Jac}(X) \xrightarrow{\tilde{\varphi}^*} \text{Jac}(C)$$

où j est l'inclusion du sous-groupe engendré par $Q_0 - Q_\infty$. L'image de $\tilde{\varphi}^*$ est donc isomorphe à une variété abélienne, $\text{Jac}(X)/\langle Q_0 - Q_\infty \rangle$.

Par ailleurs, le quotient de C par l'involution elliptique i_E étant la courbe E , nous avons un revêtement double π de E par C . Comme E est de genre 1, on peut l'identifier à $\text{Jac}(E)$, et, sous ces conditions, nous avons une inclusion naturelle $\pi^* : E \rightarrow \text{Jac}(C)$ dont l'image est la composante neutre du groupe des invariants par i_E^* .

DÉFINITION. — *La variété abélienne, supplémentaire à E dans $\text{Jac}(C)$, est notée $\text{Prym}(C/E)$.*

Remarquons que $\text{Prym}(C/E)$ est donc définie par les formes différentielles holomorphes anti-invariantes par l'involution i_E^* . De plus, comme i_E relève à C l'involution τ de X , nous avons le résultat suivant.

PROPOSITION 7.1. — *$\text{Prym}(C/E)$ est isomorphe à l'image de $\tilde{\varphi}^*$.*

Nous avons donc

$$\widetilde{T}_h^{\mathbb{C}} \xrightarrow{\tilde{\varphi}} \text{Jac}(X) \quad \text{et} \quad \text{Jac}(X) \xrightarrow{\tilde{\varphi}^*} \text{Prym}(C/E)$$

deux revêtements doubles étales duaux l'un de l'autre. Les surfaces abéliennes $\text{Prym}(C/E)$ et $\widetilde{T}_h^{\mathbb{C}}$ sont donc duales.

Remarque. — W. Barth [3] donne un résultat plus général pour tous les revêtements doubles d'une courbe de genre 1 par une courbe de genre 3.

Remerciement

Je tiens à remercier Michèle Audin pour son aide lors de l'élaboration de ce travail.

Références

- [1] AUDIN (M.) . — *Spinning tops (a course on integrable systems)*, Cambridge University Press, 1996.
- [2] AUDIN (M.) et SILHOL (R.) . — *Variétés abéliennes réelles et toupies de Kowalevski*, *Compositio Math.* **87** (1993), pp. 153-229.
- [3] BARTH (W.) . — *Abelian Surfaces with (1, 2)-Polarization*, *Adv. St. in Pure Math.* **10** (1987), pp. 41-84.

- [4] ERCOLANI (N.) et SIGGIA (E.) . — *Painlevé Property and Geometry*, Physica **34D** (1989), pp. 303-346.
- [5] FOMENKO (A. T.) (éditeur) . — *Topological classification of integrable systems*, Amer. Math. Soc., Adv. in Soviet Math. **10** (1991).
- [6] GAVRILOV (L.) . — *Bifurcations of Invariant Manifold in the Generalized Hénon-Heiles System*, Physica D **34** (1989), pp. 223-239.
- [7] GRIFFITHS (P. A.) . — *Linearizing flows and a cohomological interpretation of Lax equations*, Amer. J. Math. **107** (1985), pp. 1445-1483.
- [8] NEWEL (A. C.); TABOR (M.), ZENG (Y. B.) . — *A unified approach to Painlevé expansions*, Physica D **29** (1987), pp. 1-68.