ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

SAÏD EL MOUMNI

Rangements optimaux de carrés unité dans une bande infinie

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 6, nº 1 (1997), p. 121-125

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1997_6_6_1_121_0>

© Université Paul Sabatier, 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (http://picard.ups-tlse.fr/~annales/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. VI, n° 1, 1997

Rangements optimaux de carrés unité dans une bande infinie(*)

SAÏD EL MOUMNI(1)

RÉSUMÉ. — Nous déterminons les rangements les plus denses de carrés-unité dans une bande infinie de largeur ℓ du plan euclidien $\mathbb{R}^2$, lorsque $1 \leq \ell < 2$.

ABSTRACT. — We determine the densest packings of unit squares into an infinite srip of width ℓ in the Euclidean plane $\mathbb{R}^2$, when $1 \leq \ell < 2$.

1. Introduction

Le but de cette note est de déterminer les rangements les plus denses de carrés-unité dans une bande infinie de largeur ℓ du plan euclidien $\mathbb{R}^2$. Ce problème nous a été proposé par R. Kenyon (E.N.S. de Lyon).

L. Fejes Tóth [F1] a proposé, en 1971, un problème analogue avec des cercles-unité au lieu des carrés-unité. Pour $\ell \leq 1+\sqrt{3}/2$ la solution est facile; d'après R. K. Guy [G], J. Molnár a résolu en 1978 le cas où $\ell = 1 + n\sqrt{3}/2$ ($n \in \mathbb{N}$), et le cas $\ell < 1 + \sqrt{2}$ fut résolu par F. Kertész en 1982 (non publié). Les résultats les plus récents sont dus à Z. Füredi [F2] en 1989 pour $\ell < 1 + \sqrt{3}$.

Soit $B = \,]-\infty\,, +\infty\,[\, \times [-\ell/2\,, \ell/2]$ une bande infinie du plan euclidien $\mathbb{R}^2$, et soit $B_L = [-L/2\,, L/2] \times [-\ell/2\,, \ell/2]$. Un rangement de carrés-unité dans B est une famille de carrés-unité fermés contenus dans B et dont les

(*) Reçu le 4 juillet 94

(1) Université de Mons-Hainaut, Institut de Mathématique et d'Informatique, 15 avenue Maistriau, 7000 Mons (Belgique)

intérieurs sont disjoints deux à deux. La densité $d_{\mathcal{R}}$ d'un rangement $\mathcal{R}$ de carrés-unité C_i $(i \in \mathbb{N})$ dans B est défini par :

$$d_{\mathcal{R}} = \limsup_{L\to\infty} \frac{1}{\ell L} \sum_{C_i \subseteq B_L} 1 .$$

On prouve aisément que cette densité peut aussi être définie par :

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{R}} &= \limsup_{L\to+\infty} \frac{1}{\ell L} \sum_i \text{aire}\,(C_i \cap B_L) \\ &= \limsup_{L\to+\infty} \frac{1}{\ell L} \sum_{C_i \subseteq B'_L} 1 \end{aligned}$$

où

$$B'_L = \left[x_0 - \frac{L}{2}, x_0 + \frac{L}{2}\right] \times \left[-\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}\right] \quad \text{et} \quad x_0 \in \mathbb{R} .$$

Nous allons démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME .— *La densité maximale d'un rangement de carrés-unité dans une bande infinie de largeur ℓ vaut :*

(i) $1/\ell$ *si* $1 \le \ell \le 2\sqrt{2} - 1$,

(ii) $1/\ell(2\sqrt{2} - \ell)$ *si* $2\sqrt{2} - 1 \le \ell < 2$,

Nous comptons publier prochainement des résultats analogues pour d'autres intervalles de variation de ℓ.

Remarque.— Nous n'avons pas défini la densité d'un rangement $\mathcal{R}$ par

$$d_{\mathcal{R}} = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{\ell L} \sum_{C_i \subseteq B_L} 1$$

car cette limite n'existe pas toujours, comme le montre l'exemple suivant : étant donnée la suite (a_n) définie par

$$\begin{cases} a_0 = 0\,,\ a_1 = 1\,,\ a_2 = 2\,,\ a_3 = 4 \\ a_{k+2} = 3a_k \quad \text{pour } k \ge 2\,, \end{cases}$$

pavons les rectangles $[\,a_{2n}\,,\ a_{2n+1}\,] \times [\,-1\,,\ 1\,]$ et $[\,-a_{2n+1}\,,\ -a_{2n}\,] \times [\,-1\,,\ 1\,]$ par des carrés-unité (pour tout $n \in \mathbb{N}$). Pour ce rangement de carrés-unité dans B, on a

$$\frac{1}{\ell L} \sum_{C_i \subseteq B_L} 1 = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{si } L = 2a_{2n} \\ \dfrac{3}{4} & \text{si } L = 2a_{2n+1} \end{cases}$$

de sorte que la limite $\lim_{L\to\infty}(1/\ell L)\sum_{C_i \subseteq B_L} 1$ n'existe pas.

Démonstration du théorème

Soit Δ la droite d'équation $y = 0$ située à égale distance des deux bords de B. Comme on suppose $\ell < 2$, l'intersection de Δ avec tout carré-unité C_i contenu dans B est un segment fermé et nous poserons $C_i \cap \Delta = [p_i\,,\, q_i]$. Il y a deux possibilités :

(1) si p_i et q_i appartiennent à deux côtés opposés de C_i, alors $|p_i q_i| \geq 1$;

(2) si p_i et q_i n'appartiennent pas à deux côtés opposés de C_i, désignons par h_i le minimum des distances des quatre sommets de C_i aux bords de la bande B, par s_i l'unique sommet de C_i situé à distance h_i d'un bord de B et par α_i l'angle formé par un des côtés issu de s_i et la droite parallèle aux bords de B et passant par s_i ($0 < \alpha_i < \pi/2$); on a

$$|p_i q_i| = \frac{\sin\alpha_i + \cos\alpha_i + h_i - \ell/2}{\sin\alpha_i \cos\alpha_i}\ ;$$

or la fonction $f(x) = (\sin x + \cos x - \ell/2)/(\sin x \cos x)$ est décroissante sur l'intervalle $]\,0\,,\,\pi/4\,]$ et croissante sur l'intervalle $[\,\pi/4\,,\,\pi/2\,[$; donc, quel que soit $\alpha \in\ ]\,0\,,\,\pi/2\,[$,

$$\frac{\sin\alpha + \cos\alpha - \ell/2}{\sin\alpha\cos\alpha} \geq f\Big(\frac{\pi}{4}\Big) = 2\sqrt{2} - \ell\ ;$$

on en déduit que $|p_i q_i| \geq 2\sqrt{2} - \ell$.

En résumé, quel que soit le carré-unité C_i contenu dans B, on a

$$|p_i q_i| \geq 1 \quad \text{ou} \quad |p_i q_i| \geq 2\sqrt{2} - \ell\,.$$

À présent, distinguons deux cas.

(I).— Si $1 \leq \ell \leq 2\sqrt{2} - 1$, alors $2\sqrt{2} - \ell \geq 1$ et par conséquent $|p_i q_i| \geq 1$, quel que soit le carré-unité C_i dans B. Dès lors, si on désigne par $C_1, \ldots, C_k$ les carrés-unité contenus dans B_L, l'inégalité évidente $\sum_{i=1}^{k} |p_i q_i| \leq L$ (en effet les segments ouverts $]\,p_i\,,\,q_i\,[$ sont disjoints deux à deux) entraîne $\sum_{i=1}^{k} 1 \leq L$, autrement dit

$$\frac{1}{\ell L} \sum_{C_i \subseteq B_L} 1 \leq \frac{1}{\ell}\,.$$

On en conclut que

$$d_{\mathcal{R}} = \limsup_{L\to\infty} \frac{1}{\ell L} \sum_{C_i \subseteq B_L} 1 \leq \frac{1}{\ell}.$$

(II).— Si $2\sqrt{2} - 1 \leq \ell < 2$, alors $2\sqrt{2} - \ell \leq 1$ et par conséquent $|p_i q_i| \geq 2\sqrt{2} - \ell$ quel que soit le carré-unité C_i dans B. Dès lors, si on désigne par $C_1, \ldots, C_k$ les carrés-unité contenus dans B_L, l'inégalité $\sum_{i=1}^{k} |p_i q_i| \leq L$ entraîne $(2\sqrt{2} - \ell)k \leq L$, autrement dit

$$\frac{1}{\ell L} \sum_{C_i \subseteq B_L} 1 \leq \frac{1}{\ell(2\sqrt{2} - \ell)}.$$

On en conclut que

$$d_{\mathcal{R}} = \limsup_{L\to\infty} \frac{1}{\ell L} \sum_{C_i \subseteq B_L} 1 \leq \frac{1}{\ell(2\sqrt{2} - \ell)}.$$

Or, lorsque $1 \leq \ell \leq 2\sqrt{2} - 1$, le rangement sur la figure 1 a pour densité $1/\ell$.

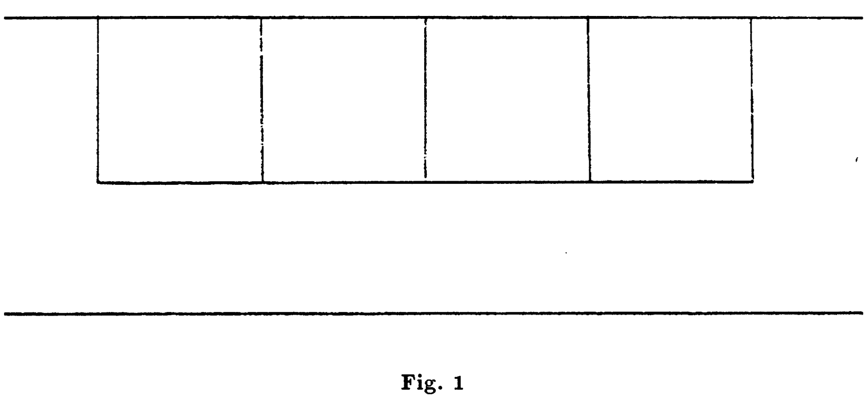

Fig. 1

et, lorsque $2\sqrt{2} - 1 \leq \ell < 2$, le rangement représenté sur la figure 2 a pour densité $1/\ell(2\sqrt{2} - \ell)$.

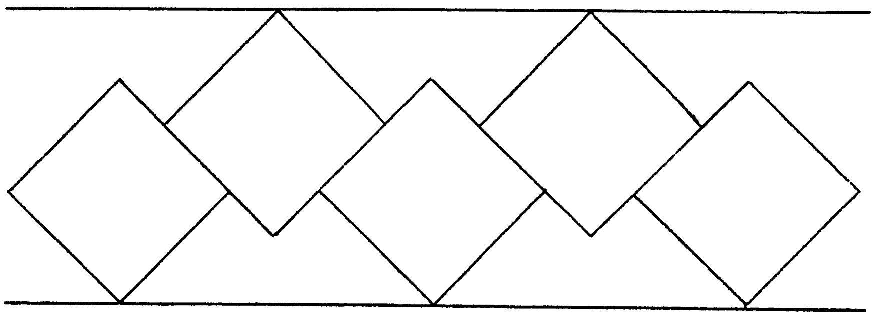

Fig. 2

Ceci termine la démonstration du théorème. □

Remerciements

Je remercie le Professeur Richard Kenyon de l'École Normale Supérieure de Lyon pour m'avoir posé le problème, et le Professeur Jean Doyen de l'Université Libre de Bruxelles pour les discussions qui m'ont été très profitables durant la préparation de cet article.

Références

[F1] FEJES TÓTH (L.) . — *Parasites on the stem of a plant*, Amer. Math. Monthly **78** (1971), pp. 528-529.

[F2] FÜREDI (Z.) . — *The densest packing of equal circles into a parallel strip*, Discrete Comput. Geom. **6** (1991), pp. 95-106.

[G] GUY (R. K.) . — *Unsolved problems come of age* Amer. Math. Monthly **96** (1989), pp. 903-909.