ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

DAVID HARARI

Principe de Hasse et approximation faible sur certaines hypersurfaces

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 4, nº 4 (1995), p. 731-762

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1995_6_4_4_731_0>

© Université Paul Sabatier, 1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (http://picard.ups-tlse.fr/~annales/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. IV, n° 4, 1995

Principe de Hasse et approximation faible sur certaines hypersurfaces(*)

DAVID HARARI[1]

RÉSUMÉ. — Dans ce texte, on étudie l'arithmétique de certaines hypersurfaces qui sont des généralisations des surfaces de Châtelet. Grâce à des calculs explicites de groupes de Brauer, on établit sous quelles conditions ces hypersurfaces vérifient le principe de Hasse et l'approximation faible.

ABSTRACT. — In this paper we study the arithmetic of certain hypersurfaces, which are generalizations of Châtelet surfaces. We make some explicit computations of Brauer groups to establish under which assumptions the Hasse principle and weak approximation are satisfied for those hypersurfaces.

0. Introduction

Soit k un corps de nombres. Pour toute place v de k, notons k_v le complété de k pour la place v. On dit qu'une classe de k-variétés algébriques lisses satisfait le *principe de Hasse* si, pour toute variété X dans cette classe, la condition $X(k_v) \neq \emptyset$ pour toute place v de k implique $X(k) \neq \emptyset$. On dit qu'une k-variété lisse X satisfait l'*approximation faible* si $X(k) \neq \emptyset$ et si, pour tout ensemble fini S de places de k, l'ensemble $X(k)$ est dense dans $\prod_{v \in S} X(k_v)$ muni de la topologie produit.

Le principe de Hasse et l'approximation faible ont déjà fait l'objet d'une étude pour plusieurs classes de variétés. En particulier :

- les intersections de deux quadriques dans l'espace projectif $\mathbb{P}^n_k$ (Colliot-Thélène, Sansuc et Swinnerton-Dyer, [7]);

(*) Reçu le 19 décembre 1994

(1) D.M.I., Ecole Normale Supérieure, 45 rue d'Ulm F-75005 Paris (France)
harari@dmi.ens.fr

- les surfaces de Châtelet, c'est-à-dire les surfaces de l'espace affine $\mathbf{A}_k^3$ d'équation $y^2 - az^2 = P(x)$ avec $a \in k^* \setminus k^{*2}$ et $P(x)$ polynôme séparable de degré 4 de $k[x]$ (Colliot-Thélène, Sansuc et Swinnerton-Dyer, [7]);
- les k-hypersurfaces cubiques possédant un ensemble globalement rationnel de trois points singuliers conjugués (Colliot-Thélène et Salberger, [6]);
- les fibrés en coniques au-dessus de la droite projective, dont au plus quatre fibres géométriques sont dégénérées (Salberger [13] et [14], Colliot-Thélène [4]);
- les fibrés en quadriques au-dessus de la droite projective (Skorobogatov, [18]).

Dans la suite, nous nous intéresserons au principe de Hasse et à l'approximation faible pour les modèles projectifs lisses X des hypersurfaces affines V de $\mathbf{A}_k^n$ $(n \geq 4)$ dont l'équation est du type :

$$y^2 - az^2 = P(x_1, \ldots, x_{n-2}) \tag{1}$$

avec $a \in k^* \setminus k^{*2}$ et P polynôme non nul de degré total au plus 4.

Il est bien connu [5, lemme 3.1.1] que ces propriétés ne dépendent pas du modèle projectif lisse X de V choisi; notons aussi que les variétés que nous considérons sont des exemples de fibrés en coniques au-dessus de $\mathbb{P}_k^m$ (où $m = n - 2$ est au moins égal à deux), elles constituent une généralisation des surfaces de Châtelet, qui sont fibrées en coniques au-dessus de $\mathbb{P}_k^1$; d'autre part, les k-hypersurfaces cubiques de $\mathbb{P}_k^n$, géométriquement intègres, non coniques, possédant un ensemble globalement rationnel de deux points singuliers conjugués, sont k-birationnelles à des hypersurfaces de ce type [7, propo. 9.8]. Colliot-Thélène, Sansuc et Swinnerton-Dyer ont démontré dans [7] la validité du principe de Hasse et de l'approximation faible quand le polynôme P de l'équation (1) est irréductible; nous étudierons en détail dans cet article le cas où P est le produit de deux facteurs irréductibles de degré 2 et indiquerons brièvement en appendice les résultats qu'on obtient dans les autres cas de factorisation de P (qui sont plus simples à traiter).

Colliot-Thélène et Sansuc ([15], [8]) ont conjecturé que pour les variétés rationnelles, la seule obstruction au principe de Hasse et à l'approximiation faible est l'obstruction de Manin. La définition précise de cette obstruction (introduite par Manin en 1970, [11]), qui fait intervenir de manière essentielle le groupe de Brauer Br X d'un modèle propre et lisse X de V, sera rappelée au paragraphe 1.5. Cette conjecture a été démontrée pour plusieurs des classes de variétés citées ci-dessus, par des méthodes de fibrations et de descente.

Le travail que nous menons dans cet article consiste à calculer l'obstruction de Manin, première étape dans l'étude du principe de Hasse et de l'approximation faible. La deuxième étape (consistant à prouver que cette obstruction est la seule pour les variétés que nous considérons) est traitée dans [10] (au moyen d'un théorème sur les fibrations qui généralise ceux utilisés dans [7], [6] ou [19]).

Pour calculer l'obstruction, il est essentiel de calculer le groupe de Brauer Br X d'un modèle propre et lisse X de V. En effet, quand celui-ci est trivial (c'est-à-dire réduit à Br k), l'obstruction de Manin s'évanouit et ainsi, le principe de Hasse et l'approximation faible valent pour X (C'est ce qui se passe quand le polynôme P est irréductible, voir [7]). On obtiendra en particulier que (sous réserve qu'il "ne manque pas une variable" ; on définira plus loin ce que signifie exactement cette condition) le principe de Hasse et l'approximation faible valent quand $n \geq 6$ et on donnera explicitement les cas d'exception qui peuvent se produire quand n est égal à 4 ou à 5.

Le plan de l'article est le suivant : la première section rappelle la définition de l'obstruction de Manin (§ 1.1) et les résultats établis dans [10] qui font qu'elle est la seule pour les variétés que nous considérons ici (§ 1.2). La deuxième section est consacrée à quelques résultats généraux sur le groupe de Brauer qui seront utilisés pour faire son calcul. Ce calcul proprement dit commence à la section 3, où l'on traite les cas où n vaut au moins 5; le résultat principal de cette partie est le théorème 3.2.1 qui établit la trivialité du groupe de Brauer en dehors d'un cas exceptionnel (E) pour $n = 5$ qui est explicité. Dans la section 4, on traite le cas général avec $n = 4$ (théorème 4.1.1); on y calcule le groupe de Brauer en construisant explicitement un modèle projectif lisse X de V et en utilisant une résolution de Pic$(\overline{X})$ par des G-modules de permutation (où l'on note $G = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ et $\overline{X} = X \times_k \overline{k}$); on donne dans la section 5 des contre-exemples numériques au principe de Hasse et à l'approximation faible, qui montrent que les énoncés obtenus sont les meilleurs possibles. Enfin, on indique brièvement en appendice les résultats qu'on obtient quand le polynôme P contient un facteur de degré 1 (au lieu d'être le produit de deux facteurs irréductibles de degré 2).

1. Préliminaires

1.1 Obstruction de Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible

Dans tout cet article, nous allons être amenés à plusieurs reprises à calculer le groupe de Brauer (cohomologique) $\operatorname{Br} X = H^2_{\text{ét}}(X, \mathbf{G}_m)$ d'une variété X. Ce qui suit permet de comprendre la motivation de ce calcul.

Soit X une k-variété algébrique, géométriquement intègre, propre et lisse, qui a des points dans tous les k_v. On appelle *obstruction de Manin* au principe de Hasse (resp. à l'approximation faible) pour X la condition :

$$\forall\ (P_v) \in X(A_k)\,,\ \exists\ A \in \operatorname{Br} X\,, \quad \sum_{v \in \Omega_k} j_v\big(A(P_v)\big) \neq 0 \quad \text{dans } \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\,,$$

respectivement

$$\exists\ A \in \operatorname{Br} X\,,\ \exists\ (P_v) \in X(A_k)\,, \quad \sum_{v \in \Omega_k} j_v\big(A(P_v)\big) \neq 0 \quad \text{dans } \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\,.$$

où Ω_k désigne l'ensemble des places de k et $X(A_k)$ l'ensemble des points adéliques de X. Le symbole j_v désigne le plongement $\operatorname{Br} k_v \hookrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ donné par la théorie du corps de classe local [3, sect. VI]. Ces conditions sont bien respectivement des obstructions au principe de Hasse et à l'approximation faible à cause de la formule du produit.

Notons que X étant complète, on a

$$X(A_k) = \prod_{v \in \Omega_k} X(k_v)\,.$$

Pour plus de détails on pourra consulter la section 3 de [8].

On dira ainsi que l'obstruction de Manin au principe de Hasse (resp. à l'approximation faible) est la seule pour une classe de variétés propres et lisses si, pour toute variété X dans cette classe, la condition qu'il existe un point adélique (P_v) tel que pour tout élément A de $\operatorname{Br} X$, on ait $\sum_{v\in\Omega_k} j_v\big(A(P_v)\big) = 0$ implique $X(k) \neq \emptyset$ (resp. pour tout A de $\operatorname{Br} X$, la condition $\sum_{v\in\Omega_k} j_v\big(A(P_v)\big) = 0$ implique que le point adélique (P_v) est dans l'adhérence de $X(k)$).

Pour plusieurs classes de variétés (notamment certaines de celles que nous évoquions dans l'introduction), il a été établi que l'obstruction de Manin est la seule possible pour le principe de Hasse et l'approximation faible. Comme nous l'avons dit plus haut, c'est notamment le cas pour les variétés que nous étudions dans cet article (voir § 1.2 pour quelques détails supplémentaires à ce sujet). C'est pourquoi nous serons amenés en particulier à établir sous quelles conditions $\mathrm{Br}\, X/\,\mathrm{Br}\, k = 0$; auquel cas, l'obstruction de Manin à l'approximation faible et au principe de Hasse s'évanouit lorsque X est un modèle propre lisse des variétés que nous étudions. Notons enfin que k étant un corps de nombres et X une variété rationnelle (c'est-à-dire que $\overline{X} = X \times_k \overline{k}$ est $\overline{k}$-birationnelle à l'espace projectif), on aura $H^3(\mathrm{Gal}(\overline{k}/k), \overline{k}^*)$ et $\mathrm{Br}\,\overline{X} = 0$ d'où $\mathrm{Br}\, X/\,\mathrm{Br}\, k = H^1(\mathrm{Gal}(\overline{k}/k), \mathrm{Pic}\,\overline{X})$ (d'après la suite exacte de [8, § 1.5]).

1.2 Un résultat arithmétique

Comme annoncé dans l'introduction, pour ramener le problème arithmétique au seul problème algébrique du calcul du groupe de Brauer, nous utilisons le théorème suivant.

THÉORÈME 1.2.1.— *Soient k un corps de nombres et $a \in k^* \setminus k^{*2}$. Soit V une k-hypersurface de $\mathbf{A}_k^n$ $(n \geq 3)$ dont l'équation est du type :*

$$y^2 - az^2 = P(x_1, \ldots, x_{n-2})$$

où P est un polynôme non nul de degré au plus quatre. Alors, l'obstruction de Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible est la seule pour les modèles projectifs lisses de V.

Ce résultat est démontré dans [10, propo. 5.1.1]), en fibrant la variété V (via l'une des variables x_i) au-dessus de $\mathbf{A}_k^1$ ce qui permet par récurrence de se ramener au cas $n = 3$, traité par Colliot-Thélène, Sansuc et Swinnerton-Dyer dans [7]. Le théorème 1.2.1 apparaît alors comme un corollaire du théorème plus général sur les fibrations (s'inspirant de [19]) donné ci-après.

THÉORÈME 1.2.2 (cf. [10, th. 4.2.1]).— *Soient V une k-variété géométriquement intègre et $p : V \longrightarrow \mathbf{A}_k^1$ un morphisme projectif, surjectif, à fibres géométriquement intègres. Soit $K = k(T)$ le corps des fonctions de $\mathbf{A}_k^1$ et X un modèle projectif lisse de la fibre générique V_η de p, dont on suppose qu'elle admet un $\overline{k}(T)$-point lisse. On note $\overline{X} = X \times_K \overline{K}$. On fait l'hypothèse* *que* $\operatorname{Br}\overline{X}$ *est nul et que* $\operatorname{Pic}(\overline{X})$ *est sans torsion (c'est le cas par exemple si la variété* V_η *est rationnelle ou bien est une intersection complète lisse de dimension au moins* 3 *dans* $\mathbb{P}^r_K$*).*

On suppose enfin qu'il existe un ouvert de Zariski U *de* $\mathbf{A}^1_k$ *tel que pour tout point rationnel* θ *de* U*, l'obstruction de Manin au principe de Hasse (resp. à l'approximation faible) est la seule pour les modèles projectifs lisses de la fibre* V_θ *de* p *en* θ*. Alors, l'obstruction de Manin au principe de Hasse (resp. à l'approximation faible) est la seule pour les modèles projectifs lisses de* V*.*

2. Un premier calcul de groupes de Brauer

2.1 Enoncé des résultats

L'objet de ce paragraphe est de prouver les deux résultats suivants.

PROPOSITION 2.1.1.— *Soit* X *un modèle projectif lisse de la* k*-variété* V *définie dans* $\mathbf{A}^{m+2}_k$ *par l'équation :*

$$y^2 - az^2 = \prod_{i=1}^{r} P_i(x_1, \ldots, x_m)$$

où les P_i *sont des polynômes irréductibles sur* k*, deux à deux premiers entre eux. Soit* $K = k(\sqrt{a})$ *et* N *la norme de l'extension* K/k*. Alors, le groupe* $\operatorname{Br} X/\operatorname{Br} k$ *est inclus dans le sous-groupe de* $k(X)^*/k^*NK(X)^*$ *engendré par les classes des* P_i *(en particulier, comme* $\prod_{i=1}^r P_i$ *est une norme, le groupe* $\operatorname{Br} X/\operatorname{Br} k$ *s'identifie à un sous-groupe de* $(\mathbb{Z}/2)^{r-1}$*).*

THÉORÈME 2.1.2.— *Avec les notations de la proposition 2.1.1, on suppose qu'en tout point de codimension 2 de* $\mathbf{A}^m_k$*, où deux des* P_i *s'annulent, il n'y en a pas un troisième qui s'annule. On suppose également que, pour toute partition de* $\{1, \ldots, r\}$ *en deux sous-ensembles non vides* A *et* B*, il existe* $i_A \in A$ *et* $i_B \in B$ *tels qu'on puisse trouver un point de codimension 2 de* $\mathbf{A}^m_k$*, où les hypersurfaces définies par* P_{i_A} *et* P_{i_B} *se coupent transversalement, et dont le corps résiduel ne contienne pas* $K = (\sqrt{a})$*. Alors, on a* $\operatorname{Br} X/\operatorname{Br} k = 0$*.*

2.2 Preuves

Preuve de la proposition 2.1.1.— Rappelons d'abord que comme la variété V est K-rationnelle, le groupe $\operatorname{Br} X/\operatorname{Br} k$ s'identifie au noyau de la flèche $k(X)^*/k^*NK(X)^* \to \operatorname{Div} X/N \operatorname{Div} X_K$, où $X_K = X \times_k K$ [5, propo. 4.6].

Soit f une fonction sur X (ou sur V) dont le diviseur est une norme de l'extension K/k. Montrons d'abord que f est égale modulo $k^*NK(X)^*$ à une fonction $h(x_1, \dots, x_m)$ ne dépendant plus de (y, z).

La k-variété V peut être vue comme fibrée en coniques (par $(x_1, \dots, x_m)$) au-dessus de $\mathbf{A}_k^m$. La fibre générique est une conique lisse sur le corps $L = k(T_1, \dots, T_m)$. Soit C la conique projective associée. Posons $L' = K(T_1, \dots, T_m)$. Si $L'(C)$ désigne le corps des fonctions de C sur L' et $\operatorname{Pic} C_{L'}$ le groupe de Picard de C sur L', on a la suite exacte :

$$1 \longrightarrow L'(C)^*/L'^* \longrightarrow \operatorname{Div} C_{L'} \longrightarrow \operatorname{Pic} C_{L'} \longrightarrow 1 .$$

Notons $G_K = \operatorname{Gal}(K/k)$. Comme C est une conique projective lisse, le G_K-module $\operatorname{Pic} C_{L'}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$ avec action triviale de G_K ; ainsi $\widehat{H}^{-1}(G_K, \operatorname{Pic} C_{L'}) = 0$ (pour des rappels sur les groupes de cohomologie modifiés $\widehat{H}^i$ on pourra consulter le chapitre 8 de [16]) et on a la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \widehat{H}^0(G_K\,, L'(C)^*/L'^*) \longrightarrow \widehat{H}^0(G_K, \operatorname{Div} C_{L'}) = \operatorname{Div} C/N \operatorname{Div} C_{L'} .$$

De même, de la suite exacte :

$$1 \longrightarrow L'^* \longrightarrow L'(C)^* \longrightarrow L'(C)^*/L'^* \longrightarrow 1$$

on tire, vu que $H^1(G_K, L'^*) = 0$ (Hilbert 90) la suite exacte :

$$1 \longrightarrow L^*/NL'^* \longrightarrow L(C)^*/NL'(C)^* \longrightarrow \widehat{H}^0(G_K, L'(C)^*/L'^*) \longrightarrow 1 .$$

Donc $\widehat{H}^0(G_K, L'(C)^*/L'^*) = L(C)^*/L^*NL'(C)^*$ et le noyau de la flèche $L(C)^* \to \operatorname{Div} C/N \operatorname{Div} C_{L'}$ est réduit à $L^*NL'(C)^*$. Ainsi, la fonction de $L(C)^*$ induite par f est, à une norme près, constante sur le corps L. Le résultat annoncé en découle.

Soit alors $h(x_1, \dots, x_m)$ une fonction dont le diviseur est une norme, c'est-à-dire que pour tout anneau de valuation discrète A ($k \subset A \subset k(X) = \operatorname{Frac} A$) avec $A \otimes_k K$ restant local, la valuation $v_A(h)$ est paire.

On peut supposer que les facteurs irréductibles de h sur k ne sont pas dans $k^*NK(X)^*$. Soit alors r un tel facteur, le polynôme r est encore irréductible au niveau K. Comme X est régulière en codimension 1, la sous-variété de X définie par :

$$\begin{cases} y^2 - az^2 = \prod_{i=1}^{r} P_i(x_1, \ldots, x_m) \\ r(x_1, \ldots, x_m) = 0 \end{cases}$$

définit, dès que r n'est pas l'un des P_i, un anneau de valuation discrète A qui reste local au niveau K. Ainsi, la valuation de h par rapport à A est paire et r ne peut diviser h (qui est sans facteur carré). D'où la proposition. □

Preuve du théorème 2.1.2.— Soit $A \subset \{1, \ldots, r\}$. Soit B le complémentaire de A dans $\{1, \ldots, r\}$. Supposons A et B non vides. Par hypothèse, on peut trouver i_A dans A et i_B dans B tels que les hypersurfaces définies par P_{i_A} et P_{i_B} se coupent transversalement en un point M de codimension 2 de l'espace affine $\mathbf{A}_k^m$, dont le corps résiduel ne contient pas K. Alors, la variété X est k-birationnelle à la k-variété Y définie dans $\mathbf{A}_k^{m+2}$ par l'équation :

$$(y^2 - az^2) \prod_{i \in A} P_i(x_1, \ldots, x_m) = \prod_{i \in B} P_i(x_1, \ldots, x_m).$$

Sur Y, le point M définit un anneau de valuation discrète A (car M correspond à un point de codimension 1 sur Y), qui reste local au niveau K dès que a n'est pas un carré dans le corps résiduel en M. Comme la valuation de $\prod_{i \in A} P_i$ par rapport à A est 1 (car les hypersurfaces définies par P_{i_A} et P_{i_B} se coupent transversalement en M et les hypersurfaces définies par les autres P_i ne passent pas par M), son diviseur ne peut être une norme. D'où le résultat avec la proposition 2.1.1. □

Nous allons maintenant appliquer le théorème 2.1.2 aux variétés que nous considérons.

3. Les cas $n \geq 6$ et $n = 5$

3.1 La condition "il ne manque pas une variable"

Soit V l'hypersurface de $\mathbf{A}_k^n$ ($n \geq 4$) d'équation :

$$y^2 - az^2 = P(x_1, \ldots, x_{n-2})$$

où $P = fg$ avec f et g de degré 2. Notons φ et ψ les homogénéisés respectifs de f et g, ce sont des formes quadratiques. La condition "il ne manque pas une variable" se traduit par le fait que l'intersection de leurs noyaux $N(\varphi)$ et $N(\psi)$ est réduite à zéro : cela signifie bien qu'on ne peut pas, par un changement de variable linéaire en les x_i, se ramener à une équation comportant moins de variables.

3.2 Énoncé des résultats

On dira qu'une forme quadratique de rang 2 définie sur k est *du type* (T) si elle est isomorphe à $\langle \theta \, , -a\theta \rangle$ avec $\theta \in k^*$.

THÉORÈME 3.2.1.— *Soit V l'hypersurface d'équation*

$$y^2 - az^2 = P(x_1, \ldots, x_{n-2})$$

dans $\mathbf{A}_k^n$ ($n \geq 5$). On suppose que $P = fg$ avec f et g irréductibles de degré 2 et on appelle φ et ψ leurs homogénéisés respectifs. On suppose que l'intersection, $N(\varphi) \cap N(\psi)$ de leurs noyaux est réduite à 0.

Supposons qu'on n'est pas dans le cas exceptionnel (E) suivant :

(E) $n = 5$ et il existe λ et μ dans k^* tels que la forme $Q = \lambda\varphi + \mu\psi$, ainsi que les restrictions de φ et ψ au noyau N de Q, soient du type (T).

Alors, un modèle projectif lisse X de V vérifie le principe de Hasse et l'approximation faible.

Toute la fin de cette section est consacrée à la preuve du théorème 3.2.1.

3.3 Remarques préliminaires

Notons d'abord que la variété V est k-birationnelle à la k-hypersurface V' définie dans $\mathbf{A}_k^2 \times \mathbb{P}_k^{n-2}$ par l'équation :

$$\varphi(x_1, \ldots, x_{n-2}, t)(y^2 - az^2) - \psi(x_1, \ldots, x_{n-2} \, , t) = 0$$
$$(x_1, \ldots, x_{n-2} \, , t) \in \mathbb{P}_k^{n-2} \, , \quad (y, z) \in \mathbf{A}_k^2 \, .$$

Démontrons alors un lemme qui nous sera souvent utile.

LEMME 3.3.1.— *Soit V' l'hypersurface de $\mathbf{A}_k^2 \times \mathbb{P}_k^{n-2}$ d'équation :*

$$(y^2 - az^2)\,\varphi(x_1, \ldots, x_{n-2}, t) = \psi(x_1, \ldots, x_{n-2}, t)$$

(où φ et ψ sont des formes quadratiques), avec $n \geq 4$. On suppose que l'intersection des noyaux de φ et ψ est réduite à 0. Si les quadriques définies par φ et ψ ont un point k-rationnel commun, alors V' est k-rationnelle.

Preuve du lemme 3.3.1.— Soit M un point k-rationnel de l'intersection des quadriques de $\mathbb{P}_k^{n-2}$ définies par φ et ψ. On peut voir V' comme une famille de quadriques projectives dont la fibre générique admet le point rationnel M. Si M est un point conique de cette quadrique générique, ce point M est dans l'intersection des noyaux des formes quadratiques φ et ψ, cas exclu par l'hypothèse. Ainsi, la fibre générique admet un point rationnel non conique, elle est donc birationnelle à $\mathbb{P}^{n-3}$ et V' est k-birationnelle à $\mathbb{P}_k^{n-3} \times \mathbf{A}_k^2$ (la projection sur $\mathbf{A}_k^2$ admettant une section via M). D'où le lemme. □

3.4 Le cas $n \geq 6$

Il nous suffit, d'après le théorème 1.2.1, de prouver l'énoncé suivant.

PROPOSITION 3.4.1.— *Soit V' l'hypersurface de $\mathbf{A}_k^2 \times \mathbb{P}_k^{n-2}$ $(n \geq 6)$ d'équation :*

$$(y^2 - az^2)\,\varphi(x_1, \ldots, x_{n-2}, t) = \psi(x_1, \ldots, x_{n-2}, t)$$

où φ et ψ sont des formes quadratiques irréductibles sur k dont l'intersection des noyaux est réduite à 0. Soit X un modèle projectif lisse de V'. Alors le groupe $\operatorname{Br} X$ *est réduit à* $\operatorname{Br} k$.

Preuve de la proposition 3.4.1.— On peut supposer que les polynômes φ et ψ sont irréductibles sur $K = k(\sqrt{a})$ (sinon ce sont des normes de l'extension K/k et $\operatorname{Br} X$ est trivial en vertu de la proposition 2.1.1). Soit W l'intersection dans $\mathbb{P}_k^3$ des quadriques définies par φ et ψ. Si le polynôme homogène $\det(\lambda\varphi + \mu\psi)$ est identiquement nul, alors W contient un point k-rationnel (d'après le lemme 1.14 de [7]) et la variété V' est k-rationnelle par le lemme 3.3.1. Nous supposerons donc qu'il existe une forme de rang ≥ 5 dans le pinceau $(\lambda\varphi + \mu\psi)$. Alors, le lemme 1.9 de [7] garantit qu'il n'y a pas de cycle irréductible de degré 1 dans la décomposition du cycle $[\overline{W}]$. Ainsi, d'après le théorème 2.1.2, les seuls cas où $\operatorname{Br} X / \operatorname{Br} k$ pourrait ne pas être nul sont :

- $[\overline{W}] = [C_1]+[C_2]$, avec C_1 et C_2 quadriques géométriquement intègres conjuguées sur $K = k(\sqrt{a})$,
- ou bien $[\overline{W}] = 2[C]$ avec C quadrique k-rationnelle géométriquement intègre.

• Dans le premier cas, il existe (d'après les lemmes 1.7 et 4.2 de [7]) une forme de rang 2 se factorisant sur K (donc du type (T) car, si cette forme se factorisait sur k, les quadriques C_1 et C_2 seraient définies sur k et non pas conjuguées) qui s'écrit $Q = \lambda\varphi + \mu\psi$ avec λ et μ dans k^* (λ et μ sont non nuls car les polynômes φ et ψ sont irréductibles sur K). On peut supposer par exemple que $Q(x_1, \ldots, t) = \alpha(x_1^2 - at^2)$ avec $\alpha \in k^*$. La variété V' est k-birationnelle à l'intersection X_1 dans $\mathbb{P}_k^{n+1}$ des deux variétés :

$$\begin{cases} t(y^2 - az^2) = u\psi(x_1, \ldots, t) \\ \varphi(x_1, \ldots, t) = ut\,. \end{cases}$$

Considérons alors la sous-variété Y de codimension 1 de X_1 définie dans $\mathbb{P}_k^{n+1}$ par les équations :

$$x_1 = t = 0\,, \quad \psi(0, x_2, \ldots, x_{n-2}, 0) = 0\,.$$

(Remarquons que $\psi(0, x_2, \ldots, x_{n-2}, 0) = 0 \Leftrightarrow \varphi(0, x_2, \ldots, x_{n-2}, 0) = 0$, car Q n'est proportionnelle ni à φ, ni à ψ, qui sont irréductibles sur K.) Alors les restrictions de φ et ψ au noyau N de Q sont proportionnelles, et de rang au moins 3 (sinon, vu que $n \geq 6$, ces restrictions seraient dégénérées et l'intersection des noyaux de φ et ψ ne serait pas réduite à 0), donc Y est géométriquement intègre et définit un anneau de valuation de valuation discrète (au niveau K également) par rapport auquel la valuation de $\varphi(x_1, \ldots, t)/t^2$ (fonction correspondant à φ dans le nouveau modèle) est -1. La proposition 2.1.1 permet de conclure dans ce cas, puisque sur la sous-variété de $\mathbf{A}_k^n$ d'équation :

$$y^2 - az^2 = f(x_1, \ldots, x_{n-2})\, g(x_1, \ldots, x_{n-2})$$

le diviseur de la fonction f n'est pas une norme de l'extension K/k.

• Dans le deuxième cas, le lemme 1.10 de [7] dit qu'il existe une forme $Q = \lambda\varphi + \mu\psi$ de rang 1 avec λ et μ dans k^*, soit par exemple $Q = \alpha t^2$ et $\psi = \beta\varphi + Q$ avec $\beta \in k^*$. La variété V' est alors k-birationnelle à l'intersection X_2 dans $\mathbb{P}_k^{n+1}$ des deux variétés :

$$\begin{cases} (y^2 - az^2) = u(\beta u + \alpha t) \\ \varphi(x_1, \ldots, t) = ut\,. \end{cases}$$

On conclut alors en considérant la sous-variété de codimension 1 de X_2 définie par $t = 0$, qui est géométriquement intègre vu que la forme quadratique $\varphi(x_1, \dots, x_{n-2}, 0)$ est encore de rang au moins 3 (et même 4).

3.5 Le cas $n = 5$

Pour conclure la discussion, nous allons prouver, par la même méthode que précédemment, le résultat suivant.

PROPOSITION 3.5.1.— *Soit V' l'hypersurface de $\mathbf{A}_k^2 \times \mathbb{P}_k^3$ d'équation :*

$$(y^2 - az^2)\,\varphi(x_1, x_2, x_3, t) = \psi(x_1, x_2, x_3, t)$$

où φ et ψ sont des formes quadratiques irréductibles sur $K = k(\sqrt{a})$ et dont l'intersection des noyaux est réduite à 0. Soit X un modèle projectif lisse de V'. Alors, le groupe $\operatorname{Br} X/\operatorname{Br} k$ est nul sauf dans le cas exceptionnel (E) du théorème 3.2.1 où il est isomorphe à $\mathbb{Z}/2$.

Preuve de la proposition 3.5.1.— Supposons $\operatorname{Br} X/\operatorname{Br} k$ non nul et considérons encore la décomposition du cycle $[\,\overline{W}\,]$. On ne peut avoir $[\,\overline{W}\,] = [C] + \cdots$, avec C quadrique k-rationnelle géométriquement intègre sinon le théorème 2.1.2 est contredit. On ne peut pas non plus avoir $[\,\overline{W}\,] = [L_1]+[L_2]+\cdots$ avec L_1 et L_2 droites conjuguées se rencontrant sinon le point d'intersection serait k-rationnel et X serait k-rationnelle. Ainsi, restent les cas : $[\,\overline{W}\,] = 2[C]$ avec C quadrique k-rationnelle géométriquement intègre, $[\,\overline{W}\,] = [C_1] + [C_2]$ avec C_1 et C_2 quadriques géométriquement intègres conjuguées sur K, et $[\,\overline{W}\,] = [L_1] + [L_2] + [L_3] + [L_4]$ (où les L_i sont des droites deux à deux distinctes) avec L_1 et L_2 (resp. L_3 et L_4) conjuguées sur K et ne se rencontrant pas. Mais dans ce dernier cas, on a encore une forme de type (T) dans le pinceau d'après le lemme 4.2 de [7]. On procède alors comme dans le cas $n \geq 6$.

- Dans le cas où il y a une forme de type (T) dans le pinceau, soit par exemple $Q(x_1, x_2, x_3, t) = \alpha(x_1^2 - at^2)$ avec $\alpha \in k^*$, on écrit que la variété V' est k-birationnelle à l'intersection X_1 dans $\mathbb{P}_k^6$ des deux variétés :

$$\begin{cases} t(y^2 - az^2) = u\psi(x_1, x_2, x_3, t) \\ \varphi(x_1, x_2, x_3, t) = ut \end{cases}$$

et on considère la sous-variété Y de codimension 1 de X_1 définie dans $\mathbb{P}_k^6$ par les équations :

$$x_1 = t = 0\,, \quad \psi(0, x_2, x_3, 0) = 0\,.$$

Vu que $\mathrm{Br}\, X / \mathrm{Br}\, k \neq 0$, celle-ci ne peut être intègre au niveau K (toujours à cause du théorème 2.1.2) donc les restrictions de φ et ψ sont du type (T) et on est dans le cas exceptionnel (E) (ces restrictions ne peuvent être de rang 1 à cause de l'hypothèse que l'intersection des noyaux de φ et ψ est réduite à 0).

- Dans le cas où il y a une forme de rang 1 dans le pinceau, on peut encore supposer que $\psi = \beta\varphi + \alpha t^2$ et écrire que V' est k-birationnelle à l'intersection X_2 dans $\mathbb{P}_k^6$ des deux variétés :

$$\begin{cases} (y^2 - az^2) = u(\beta u + \alpha t) \\ \varphi(x_1, x_2, x_3, t) = ut\,. \end{cases}$$

On obtient alors une contradiction en considérant la sous-variété de codimension 1 de X_2 définie par $t = 0$, qui est géométriquement intègre vu que la forme $\varphi(x_1, x_2, x_3, 0)$ est ici de rang exactement trois.

Finalement, on a bien prouvé que la condition $\mathrm{Br}\, X / \mathrm{Br}\, k \neq 0$ implique que l'on est dans le cas exceptionnel (E). Il reste à prouver que, quand on est dans ce cas (E), le groupe $\mathrm{Br}\, X / \mathrm{Br}\, k$ est effectivement isomorphe à $\mathbb{Z}/2$.

Si l'on est dans le cas (E), on peut supposer, après avoir effectué des changements de variables linéaires, que

$$\psi(x_1, x_2, x_3, t) = \gamma\varphi(x_1, x_2, x_3, t) + Q(x_3, t)$$

avec $Q(x_3, t) = \alpha(x_3^2 - at^2)$ et

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, t) = \beta(x_1^2 - ax_2^2) + tL_1(x_1, x_2, x_3, t) + x_3 L_2(x_1, x_2, x_3, t)$$

où L_1 et L_2 sont des formes linéaires et (α, β, γ) est un triplet d'éléments de k^*. Passons à un modèle affine de V' en faisant $t = 1$. La variété V' est alors k-birationnelle à l'hypersurface V de $\mathbf{A}_k^5$ d'équation :

$$y^2 - az^2 = f(x_1, x_2, x_3)\, g(x_1, x_2, x_3)$$

avec $f(x_1, x_2, x_3) = \varphi(x_1, x_2, x_3, 1)$ et $g(x_1, x_2, x_3) = \psi(x_1, x_2, x_3, 1)$.

Soit A un anneau de valuation discrète, avec $k \subset A \subset k(X) = \mathrm{Frac}\, A$, le restant au niveau K ; soit v la valuation associée. Supposons $v(f(x_1, x_2, x_3))$ impaire. Alors, comme $v(x_3^2 - a)$ est paire et négative ou nulle, on a

$$v(f(x_1, x_2, x_3)) = v(g(x_1, x_2, x_3)) = 2k + 1$$

avec $k < 0$ (en effet $v(f-g) = v(x_3^2 - a)$ donc $v(f-g)$ est paire donc $v(f-g) > \min(v(f), v(g))$). Ainsi, on a $v(x_3) \geq k+1$ (sinon $v(x_3^2-a) < v(f)$ et on aurait $v(g) = v(x_3^2 - a)$). Supposons par exemple $v(x_2) \leq v(x_1)$. Si $v(x_2) \geq k+1$, alors $v\big(L_1(x_1, x_2, x_3, 1)\big) \geq k+1$ et $v\big(x_3 L_2(x_1, x_2, x_3, 1)\big) \geq 2k+2$ ce qui contredit $v\big(f(x_1, x_2, x_3)\big) = 2k+1$. Si $v(x_2) \leq k$, alors $v\big(L_1(x_1, x_2, x_3, 1)\big) \geq v(x_2)$ et $v\big(x_3 L_2(x_1, x_2, x_3, 1)\big) \geq v(x_2)+k+1$ alors que $v(x_1^2 - ax_2^2) = 2v(x_2) < v(x_2) + k + 1 \leq v(x_2)$ donc $v\big(f(x_1, x_2, x_3)\big) = 2v(x_2)$ et on obtient encore une contradiction. Donc le diviseur de f est une norme de l'extension K/k (et f, qui est irréductible sur K, n'est pas le produit d'une constante et d'une norme) ; la proposition 2.1.1 permet de conclure que $\operatorname{Br} X/\operatorname{Br} k$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2$ et engendré par la classe de la fonction f. □

4. Le cas général avec $n = 4$

Nous traitons ici le cas où $n = 4$ et où le polynôme P est produit de deux facteurs irréductibles de degré 2. Nous utiliserons une fibration en produit de deux coniques permettant de calculer $\operatorname{Pic}(\overline{X})$.

4.1 Énoncé du résultat principal

Le but de cette section est de démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME 4.1.1.— *Soit V/k l'hypersurface de $\mathbf{A}_k^4$ définie par l'équation :*

$$y^2 - az^2 = f(u,v)\,g(u,v)$$

avec f et g polynômes irréductibles de degré 2 premiers entre eux. On suppose que les coniques de $\mathbb{P}_k^2$ définies par f et g sont lisses et se coupent transversalement. On suppose aussi que V a des points lisses dans tous les complétés de k. Soit X un modèle projectif lisse de V. Alors, le groupe $\operatorname{Br} X/\operatorname{Br} k$ *est nul (et donc le principe de Hasse et l'approximation faible valent pour X) sauf dans les cas suivants, où il est égal à $\mathbb{Z}/2$:*

- *les quatre points d'intersection des coniques définies par f et g forment deux paires de points conjugués dans $k(\sqrt{a})$.*
- *ces quatre points sont conjugués et l'extension L/k de degré 4 associée contient $k(\sqrt{a})$.*

Notons que V est k-birationnelle à la variété (qui est fibrée en λ) définie dans $\mathbf{A}_k^5$ par les équations :

$$\begin{cases} y^2 - az^2 = \lambda \\ f(u,v) = \lambda g(u,v)\,. \end{cases}$$

La méthode va consister, pour un modèle propre lisse X de V, à construire une résolution de $\operatorname{Pic}\overline{X}$ par des G-modules de permutation (rappelons qu'on note $G = \operatorname{Gal}(\overline{k}/k)$ et $\overline{X} = X \times_k \overline{k}$) et à en déduire $H^1(G, \operatorname{Pic}\overline{X})$. Le théorème 2.1.2 donne immédiatement les conditions nécessaires pour que $\operatorname{Br} X$ soit non trivial mais il ne permet pas de prouver que ces conditions sont suffisantes; la méthode du présent paragraphe a en outre l'avantage de calculer explicitement $\operatorname{Pic}\overline{X}$, ce qui permettrait ensuite de faire des descentes et de retrouver partiellement le résultat arithmétique du théorème 1.2.1 sans utiliser le théorème 1.2.2 (dont la preuve est longue); en effet, la même méthode que celle qui est décrite dans [8, § 2.6] pour les fibrés en coniques fonctionne et permet de ramener le problème du principe de Hasse et de l'approximation faible au même problème pour des variétés de descente dont la géométrie est plus simple. En l'occurrence, quand l'intersection des deux coniques φ et ψ consiste en deux paires de points conjugués, on tombe sur des intersections de deux quadriques que l'on sait traiter grâce aux résultats de [7], ce qui permet de retrouver le théorème 1.2.1 dans ce cas particulier. Par contre, quand l'intersection des deux coniques φ et ψ consiste en quatre points conjugués, les variétés de descente qu'on trouve sont des intersections de trois quadriques que l'on ne sait pas traiter a priori.

4.2 Construction d'un modèle projectif lisse de V

On notera encore φ et ψ les homogénéisés respectifs de f et g. Soit X_1 la k-variété définie dans l'espace $\mathbf{A}_k^1 \times \mathbb{P}_k^2 \times \mathbb{P}_k^2$, dont on note les coordonnées $(\lambda\,;\, y, z, t_1\,;\, x_1, x_2, t_2)$, par les équations :

$$\begin{cases} y^2 - az^2 = \lambda t_1^2 \\ \varphi(x_1,\, x_2,\, t_2) = \lambda\psi(x_1,\, x_2,\, t_2)\,. \end{cases}$$

Soit X_2 la k-variété définie dans un exemplaire du même espace, dont on note les coordonnées $(\mu\,;\, Y, Z, T_1\,;\, X_1, X_2, T_2)$ par les équations :

$$\begin{cases} Y^2 - aZ^2 = \mu T_1^2 \\ \mu\varphi(X_1,\, X_2,\, T_2) = \psi(X_1,\, X_2,\, T_2)\,. \end{cases}$$

On définit alors X via le recollement :

$$X_1 - \{\lambda = 0\} \longrightarrow X_2 - \{\mu = 0\}$$

$$(\lambda\,;\, y, z, t_1\,;\, x_1, x_2, t_2) \longmapsto \left(\frac{1}{\lambda}\,;\, \frac{y}{\lambda}, \frac{z}{\lambda}, t_1\,;\, \frac{x_1}{\lambda}, \frac{x_2}{\lambda}, \frac{t_2}{\lambda}\right).$$

PROPOSITION 4.2.1.— *X est une k-variété propre lisse.*

Preuve.— Soit $\pi : X \to \mathbb{P}^1_k$ le k-morphisme obtenu par recollement des projections de X_1 et X_2 sur $\mathbf{A}^1_k$. Le morphisme π est propre donc X est propre sur k. Par ailleurs, la conique $y^2 - az^2 = \lambda t_1^2$ est dégénérée si et seulement si $\lambda = 0$ et la conique $\varphi(x_1, x_2, t_2) = \lambda\psi(x_1, x_2, t_2)$ est dégénérée pour trois valeurs distinctes non nulles de $\lambda \in \overline{k}$ (parce que φ et ψ définissent par hypothèse des coniques projectives lisses se coupant transversalement). De même, pour $\mu \in \overline{k}$, les deux coniques $Y^2 - aZ^2 = \mu T_1^2$ et $\mu\varphi(X_1, X_2, T_2) = \psi(X_1, X_2, T_2)$ ne peuvent dégénérer simultanément. Le critère jacobien montre alors immédiatement que X est lisse.

4.3 Une suite exacte

Comme des deux coniques définies par φ et ψ sont en position générale, elles se coupent en quatre points distincts de $\mathbb{P}^2_{\overline{k}}$ que nous noterons R_1, R_2, R_3, R_4. On notera $(\alpha_i)_{1\leq i\leq 3}$ les valeurs de λ pour lesquelles la conique définie par $(\varphi - \lambda\psi)$ est dégénérée, ce sont les racines dans $\overline{k}$ du polynôme $\det(\varphi - \lambda\psi)$. Pour tout point fermé de P de $\mathbb{P}^1_k$ tel que la fibre de $X/\mathbb{P}^1_k$ en P soit dégénérée (on notera S l'ensemble de ces points dits de "mauvaise réduction"), on note K'_P le corps résiduel de $\mathbb{P}^1_k$ en P; alors, pour $1 \leq i \leq 3$, on a

$$\varphi(x_1, x_2, t_2) - \alpha_i\psi(x_1, x_2, t_2) = A_i(x_1, x_2, t_2)B_i(x_1, x_2, t_2)$$

où A_i et B_i sont deux formes linéaires définies sur une extension quadratique ou triviale K''_P de K'_P (où P est le point fermé de $\mathbb{P}^1_k$ correspondant à α_i), soit $K''_P = K'_P(\sqrt{a_P})$; quitte à permuter, on peut supposer que les formes linéaires A_1 et B_1 représentent respectivement les droites (R_3R_4) et (R_1R_2), que les formes A_2 et B_2 représentent les droites (R_2R_4) et (R_1R_3), et enfin que les formes A_3 et B_3 représentent les droites (R_2R_3) et (R_1R_4). On note enfin

$$G' = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k(\sqrt{a}\,))\,,\quad G'_P = \mathrm{Gal}(\overline{k}/K'_P) \quad \text{et} \quad G''_P = \mathrm{Gal}(\overline{k}/K''_P)\;;$$

on a donc $G''_P \subset G'_P \subset G$. On fixe $\theta \in k \setminus \{0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$. On a les diviseurs effectifs intègres sur $\overline{X}$:

- F_0 défini sur $\overline{X}_1$ par $\lambda = 0$, $y = \sqrt{a}\, z$;
- $\widetilde{F_0}$ défini sur $\overline{X}_1$ par $\lambda = 0$, $y = -\sqrt{a}\, z$;
- F_P et $\widetilde{F_P}$ définis comme les composantes irréductibles de la fibre en P de $X/\mathbb{P}^1_k$ ($P \in S$), et de même F_{α_i} et $\widetilde{F_{\alpha_i}}$, composantes irréductibles de la fibre définie sur $\overline{X}_1$ par $\lambda = \alpha_i$, pour $1 \leq i \leq 3$;
- F défini sur $\overline{X}_1$ par $\lambda = \theta$ ("fibre générale") ;
- F_∞ défini sur $\overline{X}_2$ par $\mu = 0$, $Y = \sqrt{a}\, Z$;
- $\widetilde{F_\infty}$ défini sur $\overline{X}_2$ par $\mu = 0$, $Y = -\sqrt{a}\, Z$.

On désigne par f_0, $\widetilde{f_0}$, f_P, $\widetilde{f_P}$, f, f_∞, $\widetilde{f_\infty}$ leurs images respectives dans $\operatorname{Pic} \overline{X}$ et on pose également

$$E_P = -F + F_P + \widetilde{F_P}\,, \quad E_i = -F + F_i + \widetilde{F_i}$$

pour $P \in S$ et $i \in \{0, \infty\}$.

Avec ces notations, on a le résultat suivant.

PROPOSITION 4.3.1.— *La suite suivante de G-modules est exacte :*

$$0 \longrightarrow T \longrightarrow M \longrightarrow \operatorname{Pic} \overline{X} \xrightarrow{\ \omega\ } \operatorname{Pic} \overline{X}_{\overline{k(\eta)}} \longrightarrow 0$$

avec

$$T = \mathbb{Z} E_0 \oplus \mathbb{Z} E_\infty \oplus \bigoplus_{P \in S} \mathbb{Z}\,[G/G'_P] \cdot E_P$$

$$M = \mathbb{Z} F \oplus (\mathbb{Z} F_0 \oplus \mathbb{Z} \widetilde{F_0}) \oplus (\mathbb{Z} F_\infty \oplus \mathbb{Z} \widetilde{F_\infty}) \oplus \bigoplus_{P \in S} \left(\mathbb{Z}\,[G/G'_P] \cdot F_P \oplus \mathbb{Z}\,[G/G'_P] \cdot \widetilde{F_P}\right)$$

(c'est-à-dire que T et M sont les sous-G-modules de $\operatorname{Div} \overline{X}$ *respectivement engendrés par*

$$\left\{E_0, E_\infty, (E_P)_{P \in S}\right\} \quad \textit{et} \quad \left\{F, F_0, F_\infty, (F_P)_{P \in S}\right\}$$

et ω est la flèche induite par la restriction à la fibre générique).

Preuve.— On a les égalités :

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\lambda-\theta)&=F-F_\infty-\widetilde{F_\infty}\\ \operatorname{div}(\lambda)&=F_0+\widetilde{F_0}-F_\infty-\widetilde{F_\infty}\\ \operatorname{div}(\lambda-\alpha_i)&=F_{\alpha_i}+\widetilde{F_{\alpha_i}}-F_\infty-\widetilde{F_\infty}\ ;\end{aligned}$$

donc dans $\operatorname{Pic}\overline{X}$ on a les relations $f=f_\infty+\widetilde{f_\infty}=f_0+\widetilde{f_0}=f_{\alpha_i}+\widetilde{f_{\alpha_i}}$. De ce fait, l'image de la flèche $T\to M$ est bien incluse dans le noyau de $M\to\operatorname{Pic}\overline{X}$. D'autre part, on sait que le noyau de la flèche ω est engendré par les composantes des fibres réductibles, d'où l'exactitude de $M\to\operatorname{Pic}\overline{X}\to\operatorname{Pic}\overline{X}_{\overline{k}(\eta)}$. Pour prouver l'exactitude de $T\to M\to\operatorname{Pic}\overline{X}$, on est ramené, vu les relations ci-dessus, à prouver que la famille $(f_0, f_\infty, f, f_{\alpha_1}, f_{\alpha_1}, f_{\alpha_3})$, est libre dans $\operatorname{Pic}\overline{X}$. Mais ceci résulte d'un calcul simple de nombres d'intersection, utilisant les sections de la projection $\overline{\pi}:\overline{X}\to\mathbb{P}^1_k$ obtenues à partir des points R_i.

On notera θ la flèche $H^2(G,T)\to H^2(G,M)$ induite par la suite exacte de la proposition 4.3.1 et ω' la restriction de $\omega:\operatorname{Pic}\overline{X}\to\operatorname{Pic}\overline{X}_{\overline{k}(\eta)}$ à $\operatorname{Pic}X$.

COROLLAIRE 4.3.2.— *On a l'égalité :*

$$H^1(G,\operatorname{Pic}\overline{X})=\ker\theta/\operatorname{coker}\omega'\,.$$

Preuve.— Introduisons l'image N de la flèche $M\to\operatorname{Pic}\overline{X}$. On a les suites exactes courtes :

$$0\longrightarrow N\xrightarrow{\lambda}\operatorname{Pic}\overline{X}\xrightarrow{\omega}\operatorname{Pic}\overline{X}_{\overline{k}(\eta)}\longrightarrow 0$$
$$0\longrightarrow T\longrightarrow M\longrightarrow N\longrightarrow 0\,.$$

- La deuxième donne, vu que $H^1(G,T)=H^1(G,M)=0$ (T et M sont des G-modules de permutation), la suite exacte :

$$0=H^1(G,M)\longrightarrow H^1(G,N)\longrightarrow H^2(G,T)\xrightarrow{\theta}H^2(G,M)$$

D'où $H^1(G,N)=\ker\theta$.

- La première donne naissance à la suite exacte :

$$\begin{aligned}0\longrightarrow N^G\longrightarrow(\operatorname{Pic}\overline{X})^G&=\operatorname{Pic}\overline{X}\\ &\xrightarrow{\omega'}\operatorname{Pic}\overline{X}_{\overline{k}(\eta)}\longrightarrow H^1(G,N)\longrightarrow H^1(G,\operatorname{Pic}\overline{X})\longrightarrow 0\,.\end{aligned}$$

En effet, l'égalité $(\operatorname{Pic}\overline{X})^G = \operatorname{Pic} X$ est vérifiée car X a des points dans tous les complétés de k et d'autre part $\overline{X}_{\overline{k}(\eta)}$ est le produit de deux coniques sur $\overline{k}(\eta)$ qui ont des $\overline{k}(\eta)$-points, donc $\overline{X}_{\overline{k}(\eta)}$ est isomorphe à $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ sur $\overline{k}(\eta)$. Son groupe de Picard est donc $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ avec action triviale de G et $H^0(G, \operatorname{Pic}\overline{X}_{\overline{k}(\eta)}) = \operatorname{Pic}\overline{X}_{\overline{k}(\eta)}$; on a aussi $H^1(G, \operatorname{Pic}\overline{X}_{\overline{k}(\eta)}) = 0$.

Ainsi, on a bien :

$$H^1(G, \operatorname{Pic}\overline{X}) = H^1(G, N)/\operatorname{coker}\omega' = \ker\theta/\operatorname{coker}\omega'.$$

4.4 Calcul de $\operatorname{coker}\omega'$

PROPOSITION 4.4.1.— *On a* $\operatorname{coker}\omega' = \mathbb{Z}/2$ *si les coniques définies dans* $\mathbb{P}^2_k$ *par* φ *et* ψ *ont un point rationnel commun, et* $\operatorname{coker}\omega' = (\mathbb{Z}/2)^2$ *sinon.*

Nous aurons besoin du lemme ci-après.

LEMME 4.4.2.— *Soient* C_1 *et* C_2 *deux coniques (projectives, lisses) sur un corps* F. *Si* C_1 *n'est pas isomorphe à* C_2, *alors*

$$\operatorname{Pic}(C_1 \times C_2) \simeq \operatorname{Pic} C_1 \oplus \operatorname{Pic} C_2.$$

Preuve du lemme 4.4.2.— Au niveau de la clôture algébrique $\overline{F}$, on a déjà

$$\operatorname{Pic}(\overline{C}_1 \times \overline{C}_2) = \operatorname{Pic}(\overline{C}_1) \oplus \operatorname{Pic}(\overline{C}_2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

(avec action triviale de $\operatorname{Gal}(\overline{F}/F)$). Notons e_1 un générateur de $\operatorname{Pic}(\overline{C}_1)$ et e_2 un générateur de $\operatorname{Pic}(\overline{C}_2)$. On a le diagramme commutatif suivant, où les suites horizontales sont exactes, valable pour $1 \leq i \leq 2$:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \operatorname{Pic}(C_i) & \xrightarrow{j_i} & \operatorname{Pic}(\overline{C}_i) & \xrightarrow{\xi_i} & \operatorname{Br} F \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle p_i^*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \overline{p}_i^*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \\
0 & \longrightarrow & \operatorname{Pic}(C_1 \times C_2) & \xrightarrow{j} & \operatorname{Pic}(\overline{C}_1 \times \overline{C}_2) & \xrightarrow{\xi} & \operatorname{Br} F
\end{array}$$

Si α_i désigne l'image de e_i par l'application $\zeta_i : \operatorname{Pic}(\overline{C}_i) \to \operatorname{Br} F$, on a (dans $\operatorname{Br} F$) $2\alpha_i = 0$ et $\alpha_1 \neq \alpha_2$ parce que les deux coniques C_1, C_2 ne sont pas isomorphes. Identifiant $\operatorname{Pic}(C_i)$ avec son image dans $\operatorname{Pic}(\overline{C}_i)$, on a $\operatorname{Pic}(C_i) = \mathbb{Z}e_i$ si C_i a un F-point, $\operatorname{Pic}(C_i) = 2\mathbb{Z}e_i$ sinon. Identifions de même $\mathrm{Pic}(C_1 \times C_2)$ avec son image dans $\mathrm{Pic}(\overline{C}_1 \times \overline{C}_2) = \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2$. Alors, si e_i est dans $\mathrm{Pic}(C_1 \times C_2)$, son image par ξ dans $\mathrm{Br}\, F$ est nulle, c'est-à-dire que $\alpha_i = 0$ et C_i a un F-point. De même, l'élément $e_1 + e_2$ ne peut être dans $\mathrm{Pic}(C_1 \times C_2)$ sinon son image par ξ dans $\mathrm{Br}\, F$ serait nulle et on aurait $\alpha_1 = \alpha_2$. Ainsi :

- si C_1 a un F-point et pas C_2, alors $\mathrm{Pic}(C_1) \oplus \mathrm{Pic}(C_2) = \mathbb{Z}e_1 \oplus 2\mathbb{Z}e_2$ mais comme e_2 n'est pas dans $\mathrm{Pic}(C_2)$, on a vu qu'il n'était pas non plus dans $\mathrm{Pic}(C_1 \times C_2)$ donc forcément

$$\mathrm{Pic}(C_1 \times C_2) = \mathbb{Z}e_1 \oplus 2\mathbb{Z}e_2 \ ;$$

- si ni C_1 ni C_2 n'ont de F-points, alors $\mathrm{Pic}(C_1) \oplus \mathrm{Pic}(C_2) = 2\mathbb{Z}e_1 \oplus 2\mathbb{Z}e_2$ et $\mathrm{Pic}(C_1 \times C_2)$ ne peut contenir ni e_1, ni e_2, ni $e_1 + e_2$ donc, là encore, la seule possibilité est

$$\mathrm{Pic}(C_1 \times C_2) = 2\mathbb{Z}e_1 \oplus 2\mathbb{Z}e_2\,.$$

Preuve de la proposition 4.4.1.— La flèche $\omega' : \mathrm{Pic}\, X \to \mathrm{Pic}\, \overline{X}_{\overline{k}(\eta)}$ se factorise via la flèche $\mathrm{Pic}\, X_{k(\eta)} \to \mathrm{Pic}\, \overline{X}_{\overline{k}(\eta)}$ dont on est ramené à chercher le conoyau. $\mathrm{Pic}\, X_{k(\eta)}$ est le produit des deux coniques projectives lisses sur le corps $k(\eta)$ définies par

$$C_1 : y^2 - az^2 = \eta t^2 \quad \text{et} \quad C_2 : \varphi(x_1, x_2, t_2) = \eta\psi(x_1, x_2, t_2)\,.$$

Pour une conique (projective, lisse) C sur $k(\eta)$, on a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}\, C \longrightarrow \mathrm{Pic}(\overline{C})^{G_1} = \mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Br}\, k(\eta)$$

où $\overline{C} = C \times_{k(\eta)} \overline{k(\eta)}$ et $G_1 = \mathrm{Gal}(\overline{k(\eta)}/k(\eta))$ mais les coniques C_1 et C_2 ont déjà un $\overline{k}(\eta)$-point donc

$$\mathrm{Pic}(\overline{C}_i) = \mathrm{Pic}(C_i \times_{k(\eta)} \overline{k}(\eta))\,.$$

La flèche $\mathbb{Z} \to \mathrm{Br}\, k(\eta)$ associe à l'élément 1 de $\mathbb{Z}$ un élément α_C de $\mathrm{Br}\, k(\eta)$ tel que $2\alpha_C = 0$, et $\alpha_C = 0$ si et seulement si la conique C a un $k(\eta)$-point. Rappelons que, d'après le théorème d'Amer-Brumer ([1], [2]), la conique C_2 a un $k(\eta)$-point si et seulement si φ et ψ ont un k-point commun (et la conique C_1 n'a clairement pas de $k(\eta)$-point vu que a n'est pas un carré dans k^*). D'autre part, les coniques C_1 et C_2 ne sont pas isomorphes sur $k(\eta)$ sinon les éléments α_{C_1}, α_{C_2} associés dans $\mathrm{Br}\,k(\eta)$ auraient en particulier même résidu en $\eta = 0$; mais α_{C_2} a un résidu trivial puisque $\varphi(x_1, x_2, t_2)$ est non dégénérée et α_{C_1} a un résidu égal à a (vu comme élément de $k^*/k^{*2} = H^1(G, \mathbb{Z}/2) \subset H^1(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$), donc non trivial.

D'après le lemme, on est ramené au conoyau de $\mathrm{Pic}\, C_1 \oplus \mathrm{Pic}\, C_2 \to \mathrm{Pic}\, \overline{C}_1 \oplus \mathrm{Pic}\, \overline{C}_2$. Si φ et ψ ont un k-point commun, alors $\alpha_{C_2} = 0$ et $\alpha_{C_1} \neq 0$ donc $\mathrm{Pic}\, C_1 \to \mathrm{Pic}\, \overline{C}_1$ a pour conoyau $\mathbb{Z}/2$ et $\mathrm{Pic}\, C_2 \to \mathrm{Pic}\, \overline{C}_2$ a pour conoyau 0; dans ce cas, le conoyau de ω' est $\mathbb{Z}/2$. Sinon, on a $\alpha_{C_2} \neq 0$ et $\alpha_{C_1} \neq 0$ donc le conoyau cherché est $(\mathbb{Z}/2)^2$.

4.5 Calcul de $\ker\theta$

PROPOSITION 4.5.1.— *Le groupe* $\ker\theta$ *s'identifie aux éléments de*

$$k^*/k^{*2} \times k^*/k^{*2} \times \prod_{P\in S} K_P'^*/K_P'^{*2}$$

de la forme $\left(a^m,\, a^n,\, (a_P^{r_P})_{P\in S}\right)$ *(où* m, n, r_P *sont dans* $\mathbb{Z}/2$*) tels que :*

$$a^{m+n} \prod_{P\in S} N_{K'_P/k}(a_P)^{r_P} = 1 \quad \textit{dans } k^*/k^{*2}.$$

Preuve.— Par le lemme de Schapiro, on a, pour tout sous-groupe H de G, $H^2(G, \mathbb{Z}[G/H]) = H^1(H, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Ainsi, si K''_P est une extension non triviale de K'_P, on a :

$$H^2(G,T) = H^1(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \oplus H^1(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \oplus \left(\bigoplus_{P\in S} H^1(G'_P, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})\right)$$

$$H^2(G,M) = H^1(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \oplus H^1(G', \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \oplus H^1(G', \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \oplus \left(\bigoplus_{P\in S} H^1(G''_P, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})\right).$$

(Si $K''_P = K_P$, on a $G''_P = G'_P$ et il faut, dans la deuxième égalité, remplacer $H^1(G''_P, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ par $H^1(G''_P, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \oplus H^1(G''_P, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$).

Le noyau de $H^1(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to H^1(G', \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est $\mathrm{Hom}((G/G'), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, c'est-à-dire

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}(K/k), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}(K/k), \mathbb{Z}/2),$$

donc ce noyau n'est autre que $H^1(\mathrm{Gal}(K/k), \mathbb{Z}/2)$. De même, le noyau de $H^1(G'_P, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to H^1(G''_P, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est $H^1(\mathrm{Gal}(K''_P/K'_P), \mathbb{Z}/2)$. Or, d'après la théorie de Kummer, $H^1(G, \mathbb{Z}/2) \simeq k^*/k^{*2}$ et $H^1(\mathrm{Gal}(K/k), \mathbb{Z}/2)$ correspond au sous-groupe de k^*/k^{*2} engendré par a. De manière similaire, le groupe $H^1(\mathrm{Gal}(K''_P/K'_P), \mathbb{Z}/2)$ s'identifie au sous-groupe de K'^*_P/K'^{*2}_P engendré par a_P. Un élément de $\ker\theta$ s'identifie donc bien à un élément du groupe multiplicatif

$$k^*/k^{*2} \times k^*/k^{*2} \times \prod_{P\in S} K'^*_P/K'^{*2}_P$$

de la forme $\left(a^m,\, a^n,\, (a_P^{r_P})_{P\in S}\right)$. Un tel élément est effectivement dans $\ker\theta$ si et seulement s'il est dans le noyau de

$$H^2(G,T) \xrightarrow{\xi} H^1(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}),$$

application composée de θ et de la projection de $H^2(G,M)$ sur $H^1(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Or, la flèche $H^2(G'_P, \mathbb{Z}) \to H^2(G, \mathbb{Z})$ induite par ξ est la corestriction, donc la flèche $K'^*_P/K'^{*2}_P \to k^*/k^{*2}$ induite par ξ est bien $N_{K'_P/K}$, ce qui démontre la proposition. □

4.6 Preuve du théorème 4.1.1, les différents cas

Avant de passer à la discussion, donnons un lemme qui simplifiera les calculs dans certains cas.

LEMME 4.6.1.— *Avec les mêmes notations que précédemment, on a :*

$$\prod_{P\in S} N_{K'_P/k}(a_P) = 1 \qquad \textit{dans } k^*/k^{*2}.$$

Preuve du lemme 4.6.1.— D'après ce qu'on a vu dans la preuve de la proposition 4.5.1, il s'agit de prouver que si ζ_P désigne le générateur du groupe $H^1(\mathrm{Gal}(K''_P/K'_P)\,,\, \mathbb{Z}/2)$, l'image de $(\zeta_P)_{P\in S}$ par la flèche (induite par θ):

$$\bigoplus_{P\in S} H^1(\mathrm{Gal}(K''_P/K'_P)\,,\, \mathbb{Z}/2) \longrightarrow H^1(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

est triviale. Mais pour cela, il suffit d'appliquer la remarque suivant la preuve du lemme 1 de [9] au fibré en coniques défini par $\varphi(x_1,\, x_2,\, t) = \lambda\psi(x_1,\, x_2,\, t)$.

Nous démontrons alors le théorème 4.1.1 en distinguant suivant les extensions de k où R_1, R_2, R_3, R_4 sont définis.

• Si certains R_i sont définis sur k, la variété V est k-rationnelle par le lemme 3.3.1 donc $\operatorname{Br} X/\operatorname{Br} k = 0$ (on peut vérifier que le lemme 4.5.1 donne bien le même résultat).

• Supposons R_1, R_2 conjugués dans l'extension quadratique $k(\sqrt{b})$ et R_3, R_4 conjugués dans l'extension quadratique $k(\sqrt{c})$ avec $k(\sqrt{b}) \neq k(\sqrt{c})$. On trouve alors $\alpha_1 \in k$ et α_2 et α_3 conjugués dans $k(\sqrt{bc})$ (et correspondant à un unique point fermé P_0 de S). On a $K'_{P_0} = k(\sqrt{bc})$ et $K''_{P_0} = K'_{P_0}(\sqrt{b})$ et ainsi le groupe $\ker\theta$ est le noyau de :

$$\Big[H^1(\mathrm{Gal}(K/k)\,,\,\mathbb{Z}/2)\Big]^2 \times H^1(\mathrm{Gal}(K''_{P_0}/K_{P_0})\,,\,\mathbb{Z}/2) \longrightarrow k^*/k^{*2}$$
$$(a^m,\, a^n,\, b^r) \longmapsto a^{m+n}\,.$$

De ce fait, on a $\ker\theta = (\mathbb{Z}/2)^2$ et $H^1(G, \operatorname{Pic}\overline{X}) = 0$.

• Supposons R_1, R_2 conjugués dans l'extension quadratique $k(\sqrt{b})$ et R_3, R_4 conjugués dans la même extension quadratique. Dans ce cas α_i est dans k pour $1 \leq i \leq 3$ et $\ker\theta$ est le noyau de :

$$\Big[H^1(\mathrm{Gal}(K/k)\,,\,\mathbb{Z}/2)\Big]^2 \times H^1\Big(\mathrm{Gal}(k(\sqrt{b})/k)\,,\,\mathbb{Z}/2\Big)^2 \longrightarrow k^*/k^{*2}$$
$$(a^m,\, a^n,\, b^r,\, b^s) \longmapsto a^{m+n}\cdot b^{r+s}\,.$$

De ce fait, on a $\ker\theta = (\mathbb{Z}/2)^2$ si $k(\sqrt{b}) \neq k(\sqrt{a})$ mais $\ker\theta = (\mathbb{Z}/2)^3$ si $k(\sqrt{b}) = k(\sqrt{a})$. On a donc

$$H^1(G, \operatorname{Pic}\overline{X}) = 0 \quad \text{si } k(\sqrt{b}) \neq k(\sqrt{a})$$

tandis que

$$H^1(G, \operatorname{Pic}\overline{X}) = \mathbb{Z}/2 \quad \text{si } k(\sqrt{b}) = k(\sqrt{a})\,.$$

Ces résultats sont bien conformes à l'énoncé du théorème 4.1.1.

• Supposons enfin que les quatre points R_1, R_2, R_3, R_4 sont conjugués. Soit L/k l'extension de degré 4 correspondante et L' la clôture galoisienne de L. Alors, le groupe $\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(L'/k)$ est un sous-groupe de $\mathcal{S}_4$ agissant transitivement sur $\{R_1, R_2, R_3, R_4\}$ et il y a à nouveau plusieurs cas à distinguer.

— Si $\mathcal{G}$ est égal à $\mathcal{S}_4$ ou à $\mathcal{A}_4$, alors le polynôme $\det(\varphi - \lambda\psi)$ est irréductible sur k et α_1, α_2, α_3 sont conjugués par G. De ce fait, l'ensemble S est constitué d'un seul point fermé de $\mathbb{P}^1_k$, donc $\ker\theta \subset (\mathbb{Z}/2)^2$ et ainsi on a forcément $H^1(G, \operatorname{Pic}\overline{X}) = 0$. Comme $\mathcal{A}_4$ n'a pas de quotient d'ordre 2, on ne peut avoir $L \supset k(\sqrt{a}\,)$ et on trouve bien un résultat conforme à l'énoncé du théorème 4.1.1.

— Si $\mathcal{G}$ est égal au sous-groupe de Klein V_4 de $\mathcal{S}_4$ constitué de l'identité et des doubles transpositions, alors les éléments α_1, α_2, α_3 sont dans k. Par la théorie de Galois, il y a exactement trois extensions quadratiques de k incluses dans $L = L'$, soit $k(\sqrt{b}\,)$, $k(\sqrt{c}\,)$, $k(\sqrt{bc}\,)$ qui sont les extensions K_i'' où les fibres f_{α_i} dégénèrent. En notant $G_i = \operatorname{Gal}(K_i''/k)$, on trouve que $\ker\theta$ est le noyau de :

$$\Big[H^1(\operatorname{Gal}(K/k)\,,\,\mathbb{Z}/2)\Big]^2 \times \prod_{i=1}^{3} H^1(G_i, \mathbb{Z}/2) \longrightarrow k^*/k^{*2}$$
$$(a^m,\, a^n,\, b^r,\, c^s,\, (bc)^t) \longmapsto a^{m+n} \cdot b^r \cdot c^s \cdot (bc)^t\,.$$

Il en résulte que

$$H^1(G, \operatorname{Pic}\overline{X}) = \mathbb{Z}/2 \quad \text{si } L \supset K = k(\sqrt{a}\,)\ ;$$

sinon, on a

$$H^1(G, \operatorname{Pic}\overline{X}) = 0\,.$$

— Si $\mathcal{G}$ est cyclique d'ordre 4 engendré par exemple par le cycle (1, 2, 3, 4), alors α_2 est dans k et α_1, α_3 sont conjugués dans l'unique extension quadratique de k contenue dans $L = L'$, soit $k(\sqrt{b}\,)$. Soit H le sous-groupe d'ordre 2 de $\mathcal{G}$, le lemme 4.6.1 permet de voir que si β désigne un générateur de $H^1(H, \mathbb{Z}/2)$, le groupe $\ker\theta$ est le noyau de :

$$H^1(\operatorname{Gal}(K/k), \mathbb{Z}/2)^2 \times H^1(\mathcal{G}/H, \mathbb{Z}/2) \times H^1(H, \mathbb{Z}/2) \longrightarrow k^*/k^{*2}$$
$$(a^m,\, a^n,\, b^r,\, \beta^s) \longmapsto a^{m+n} \cdot b^{r+s}\,.$$

On a donc encore

$$H^1(G, \operatorname{Pic}\overline{X}) = \mathbb{Z}/2 \quad \text{si } L \supset K = k(\sqrt{a}\,)\ ;$$

sinon, on a

$$H^1(G, \operatorname{Pic}\overline{X}) = 0\,.$$

— Si $\mathcal{G}$ est diédral d'ordre 8, engendré par exemple par la transposition $(2,4)$ et la double transposition $(1,2)(3,4)$, α_2 est dans k, mais α_1 et α_3 sont conjugués. Si Q est le point fermé de $\mathbb{P}^1_k$ correspondant à α_2, il est facile de voir que K''_Q est l'extension quadratique de k incluse dans L. Maintenant, en appliquant le lemme 4.6.1, on voit que $\ker\theta$ est le noyau de :

$$\Big[H^1(\mathrm{Gal}(K/k)\,,\,\mathbb{Z}/2)\Big]^2 \times \prod_{P\in S} H^1(\mathrm{Gal}(K''_P/K'_P)\,,\,\mathbb{Z}/2) \longrightarrow k^*/k^{*2}$$
$$(a^m,\, a^n,\, b^r,\, \beta^s) \longmapsto a^{m+n}\cdot b^{r+s}\,.$$

(Si P_0 est le point fermé de $\mathbb{P}^1_k$ correspondant à α_1 et α_3, on note β un générateur du groupe $H^1(\mathrm{Gal}(K''_{P_0}/K'_{P_0})\,,\,\mathbb{Z}/2)$ qui est d'ordre 2). On a donc encore

$$H^1(G,\mathrm{Pic}\,\overline{X}) = \mathbb{Z}/2 \quad \text{si } L\supset K = k(\sqrt{a})$$

et sinon

$$H^1(G,\mathrm{Pic}\,\overline{X}) = 0\,.$$

Ceci achève la preuve du théorème 4.1.1. □

5. Contre-exemples au principe de Hasse et à l'approximation faible

Nous présentons ici quatre exemples où l'on a obstruction de Brauer-Manin. Nous nous contenterons d'étudier en détail le premier exemple, les autres s'analysant de la même manière.

5.1 Exemple détaillé

Proposition 5.1.1.— *Soit X la $\mathbb{Q}$-hypersurface de $\mathbf{A}^4_{\mathbb{Q}}$ d'équation :*

$$y^2+z^2 = \big(28\,(x_1^2+1)+79\,(x_2^2+1)\big)\big(95\,(x_1^2+1)+268\,(x_2^2+1)\big)\,.$$

Alors X ne vérifie pas le principe de Hasse.

Posons $\alpha=28$, $\beta=79$, $\gamma=95$, $\delta=268$. On a

$$\alpha\delta-\beta\gamma=-1$$

et

$$\alpha = 4(4k-1), \quad \beta = 4\ell - 1, \quad \gamma = 4k' - 1, \quad \delta = 4(4\ell' - 1)$$

avec $(k, \ell, k', \ell') \in \mathbb{N}$ (ces deux propriétés sont en fait essentiellement les seules dont on va se servir dans la preuve). On notera encore

$$f(x_1, x_2) = \big(\alpha(x_1^2+1) + \beta(x_2^2+1)\big)$$

et

$$g(x_1, x_2) = \big(\gamma(x_1^2+1) + \delta(x_2^2+1)\big)$$

et U l'ouvert de X défini par $y^2 + z^2 = f(x_1, x_2)\, g(x_1, x_2) \neq 0$. Nous utiliserons les deux lemmes suivants.

LEMME 5.1.2.— *Soit $M_p \in U(\mathbb{Q}_p)$ un point local avec p premier, $p \notin \{2, \infty\}$. Alors, l'image $\varphi_p(M_p)$ de $f(M_p)$ dans $\mathbb{Q}_p^*/NK_p^*$ est triviale (où $K_p = \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(i)$).*

Preuve du lemme 5.1.2.— Soit p premier inerte dans l'extension $\mathbb{Q}(i)/\mathbb{Q}$ (si p n'est pas inerte, $\mathbb{Q}_p^*/NK_p^*$ est trivial), c'est-à-dire p tel que -1 n'est pas un carré dans $\mathbb{Q}_p^*$, ou encore $p \equiv -1 \bmod 4$. Supposons $v_p\big(f(x_1, x_2)\big) = 2r+1$ avec $(y, z, x_1, x_2) \in U(\mathbb{Q}_p)$. Alors, $v_p\big(g(x_1, x_2)\big) = 2s+1$ avec par exemple $s \geq r$. De

$$v_p\big(\alpha g(x_1, x_2) - \gamma f(x_1, x_2)\big) \geq 2r+1\,,$$

on tire $v_p(x_2^2+1) \geq 2r+1$ et, de même, de

$$v_p\big(\beta g(x_1, x_2) - \delta f(x_1, x_2)\big) \geq 2r+1\,,$$

on tire $v_p(x_1^2+1) \geq 2r+1$. Comme la valuation p-adique d'une norme est paire, on en déduit $v_p(x_1^2+1) \geq 2r+2$ et $v_p(x_2^2+1) \geq 2r+2$ ce qui contredit $v\big(f(x_1, x_2)\big) = 2r+1$. Ainsi, pour tout p inerte, $v_p\big(f(x_1, x_2)\big)$ est paire et on a le résultat voulu [17, théorème 1, p. 39].

LEMME 5.1.3.— *Soit $M_2 \in U(\mathbb{Q}_2)$ un point local 2-adique. Alors, $f(M_2)$ est non trivial dans $\mathbb{Q}_2^*/NK_2^*$.*

Preuve du lemme 5.1.3.— Posons $M_2 = (y, z, x_1, x_2) \in \mathbb{Q}_2^4$. Comme (x_1^2+1) et (x_2^2+1) sont des normes, on peut [17, théorème 1, p. 39] écrire

$$(x_1^2+1) = 2^u(4r+1) \quad \text{et} \quad (x_2^2+1) = 2^v(4s+1)$$

avec u, v dans $\mathbb{Z}$ et r, s dans $\mathbb{Z}_2$. Si $u \geq v$,

$$\alpha(x_1^2+1)+\beta(x_2^2+1)=2^v\big(\alpha 2^{(u-v)}(4r+1)+\beta(4s+1)\big)\,.$$

Comme $\alpha = 4(4k-1)$ et $\beta = 4\ell - 1$, $\alpha 2^{(u-v)}(4r+1)+\beta(4s+1)$ est un élément de $\mathbb{Z}_2$ de la forme $4t-1$ avec $t \in \mathbb{Z}_2$ donc $f(x_1,x_2)$ n'est pas une norme 2-adique [17]. De même, si $v \geq u$, c'est $g(x_1,x_2)$ qui ne peut être une norme 2-adique, d'où le résultat.

Preuve de la proposition 5.1.1.— Pour tout point réel M_∞, on a trivialement $f(M_\infty)$ positif. Ainsi, d'après les deux lemmes précédents, pour toute famille de points locaux (M_p) $(M_p \in U(\mathbb{Q}_p))$, $\sum_p j_p\big(\varphi(M_p)\big)$ n'est pas trivial dans $\mathbb{Z}/2$; il suffit donc pour conclure de montrer que X a des points dans tous les complétés de $\mathbb{Q}$. Or en faisant $x_1 = x_2 = 0$, on obtient un point 2-adique puisque dans ce cas $(\alpha+\beta)(\gamma+\delta) = 107 \cdot 7 \cdot 11^2$ est une norme 2-adique. De même, en faisant $x_1 = x_2 = 0$ on obtient un point p-adique pour $p \notin \{3,\ 11,\ 107\}$ et en faisant $x_1 = 1/p$, $x_2 = 0$ on obtient un point p-adique pour $p \in \{3,\ 11,\ 107\}$. Ceci achève la preuve. □

5.2 Autres exemples

PROPOSITION 5.2.1.— *Soit V la $\mathbb{Q}$-hypersurface de $\mathbf{A}^5_{\mathbb{Q}}$ d'équation :*

$$y^2+z^2=\big(28\,(x_1^2+1)+79\,(x_2^2+x_3^2)\big)\big(95\,(x_1^2+1)+268\,(x_2^2+x_3^2)\big)\,.$$

Soit X un modèle projectif lisse de V. Alors X ne vérifie pas le principe de Hasse.

PROPOSITION 5.2.2.— *Soit V la $\mathbb{Q}$-hypersurface de $\mathbf{A}^4_{\mathbb{Q}}$ d'équation :*

$$y^2+z^2=\big((x_1-2)^2+x_2^2-3\big)\big((x_1+2)^2+x_2^2-3\big)\,.$$

Alors X ne vérifie pas l'approximation faible.

PROPOSITION 5.2.3.— *Soit V la $\mathbb{Q}$-hypersurface de $\mathbf{A}^5_{\mathbb{Q}}$ d'équation :*

$$y^2+z^2=f(x_1,\,x_2,\,x_3)\,g(x_1,\,x_2,\,x_3)$$

avec

$$f(x_1,\,x_2,\,x_3)=(x_1^2+1)+(x_2^2+x_3^2+3)\,,\quad g(x_1,\,x_2,\,x_3)=x_2^2+x_3^2+3\,.$$

Alors X ne vérifie pas l'approximation faible.

Appendice : résultats annexes

Dans cet appendice, nous donnons (sans trop nous attarder sur les détails des preuves) les résultats qu'on obtient dans les autres cas de factorisation de P et dans les cas dégénérés non couverts par le théorème 4.1.1. On couvre ainsi tous les cas pour les hypersurfaces dont l'équation est du type (1).

PROPOSITION 1.— *Soit V : $y^2 - az^2 = P(x_1, \ldots, x_{n-2})$ une k-hypersurface de $\mathbf{A}_k^n$ ($n \geq 4$) dont l'équation est du type (1). Soit X un modèle projectif lisse de V. Alors la variété X satisfait le principe de Hasse et l'approximation faible dans les cas suivants :*

- *P est produit d'un facteur linéaire et d'un facteur irréductible de degré 3 ;*
- *P est le produit de quatre facteurs linéaires et V n'est pas k-birationnelle au produit d'un espace linéaire et d'une surface de Châtelet.*

Preuve

• Dans le premier cas, il est facile de voir (en expédiant la droite correspondant au facteur linéaire de P à l'infini) que V est k-birationnelle à une surface dont l'équation est du type $y^2 - az^2 = C(x_1, \ldots x_{n-2})$, mais avec C irréductible de degré 3 (le caractère irréductible de C s'obtenant au moyen du théorème d'irréductibilité de Hilbert). On conclut avec le résultat de [7] rappelé dans l'introduction.

• Dans le deuxième cas, on utilise un argument géométrique simple de Tsfasman et Skorobogatov : on se ramène d'abord au cas $n = 4$ (en fibrant V via $(x_3, \ldots, x_{n-2})$ et en raisonnant dans le corps $k(x_3, \ldots, x_{n-2})$) et on considère alors les droites correspondant aux facteurs de P ; on appelle C le point d'intersection de deux d'entre elles et D celui des deux autres et si $C \neq D$, on expédie la droite CD à l'infini. On trouve alors que V est k-birationnelle à :

$$y^2 - az^2 = v(u - \alpha)x(x - \beta)\,, \quad \alpha,\, \beta \in k^*$$

qui est une famille de quadriques dont la fibre générique est lisse et possède un point rationnel, donc V est k-rationnelle. Dans le cas $C = D$, la variété V est k-birationnelle au produit d'une droite et d'une surface de Châtelet.

PROPOSITION 2.— *Soit*

$$V : y^2 - az^2 = f(x_1, \ldots, x_{n-2})\, g(x_1, \ldots, x_{n-2})$$

avec f irréductible de degré 2 et g produit de deux facteurs de degré 1. Soit X un modèle projectif lisse de V. Alors, si $n \geq 5$ et s'il ne manque pas une variable (§ 3.1), on a $\operatorname{Br} X/\operatorname{Br} k = 0$ *et ainsi X vérifie le principe de Hasse et l'approximation faible.*

Preuve.— La variété V est k-birationnelle à une variété du type $y^2 - az^2 = x_1 f(x_1, \ldots, x_{n-2})$. Notons φ la forme homogénéisée de f. Si la forme quadratique $\varphi(0, x_2, \ldots, x_{n-2}, t)$ n'est pas de rang $n-2$, on conclut avec le lemme 3.3.1; si elle est de rang $n-2$, la sous-variété de $\mathbf{A}_k^{n-2}$ définie par $x_1 = f(0, \ldots, x_{n-2})$ est géométriquement intègre et le théorème 2.1.2 donne alors le résultat.

PROPOSITION 3.— *Soit $V : y^2 - az^2 = f(x_1, x_2)\, g(x_1, x_2)$ avec f irréductible de degré 2 et g produit de deux facteurs de degré 1. Alors V est k-rationnelle, ou est k-birationnelle au produit d'une droite et d'une surface de Châtelet, ou est k-birationnelle à une k-hypersurface de $\mathbf{A}_k^3$ d'équation :*

$$y^2 - az^2 = u\big(v^2 - r(u)\big) \tag{2}$$

avec $r(u)$ polynôme non nul de degré ≤ 2 qui n'est pas un carré. Dans ce dernier cas, un modèle projectif lisse X de V satisfait le principe de Hasse et l'approximation faible sauf si le terme constant et le terme de degré 2 de $r(u)$ sont dans ak^{*2} (auquel cas on a $\operatorname{Br} X/\operatorname{Br} k = \mathbb{Z}/2$*).*

Preuve.— La variété V est déjà k-birationnelle à l'hypersurface d'équation $y^2 - az^2 = uh(u, v)$, avec h irréductible de degré 2. Si h ne dépend que de v, la variété V est k-birationnelle au produit d'une droite et d'une surface de Châtelet et si h est linéaire en v, la variété V est k-birationnelle sinon on se ramène à une équation du type (2) (et si $r(u)$ est un carré, la variété V est encore k-rationnelle). Quand V est k-birationnelle à Z dont l'équation est de ce type, on n'a plus qu'à appliquer les résultats de Skorobogatov sur les fibrés en quadriques [18, corollaires 3.1 et 3.2] vu que Z est un fibré en quadriques (via u) dont seules les fibres en zéro et à l'infini peuvent être dégénérées. On obtient alors la proposition.

PROPOSITION 4.— *Soit*

$$V : y^2 - az^2 = f(x_1, x_2)\, g(x_1, x_2)$$

avec f et g polynômes irréductibles de degré 2 premiers entre eux. On suppose qu'il ne manque pas une variable et on note φ et ψ les homogénéisés respectifs de f et g. Soit X un modèle projectif lisse de V. Alors :

- *si les coniques φ et ψ ne se coupent pas transversalement, elles se coupent en deux points d'intersection définis sur une extension quadratique ou triviale de k ; on a $\operatorname{Br} X/\operatorname{Br} k = 0$ sauf si cette extension est $k(\sqrt{a})$, auquel cas $\operatorname{Br} X/\operatorname{Br} k$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2$;*
- *si l'une des formes φ, ψ est dégénérée, on a encore $\operatorname{Br} X/\operatorname{Br} k = 0$ sauf quand les deux conditions suivantes sont remplies (auquel cas $\operatorname{Br} X/\operatorname{Br} k$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2$) :*

  i) ni φ ni ψ n'est du type (T) *;*

  ii) l'intersection des coniques φ et ψ consiste en quatre points conjugués dans une extension du type $k(\sqrt{a}, \sqrt{b})$ avec $k(\sqrt{a}) \neq k(\sqrt{b})$.

(Bien entendu, en vertu du théorème 1.2.1, la condition $\operatorname{Br} X/\operatorname{Br} k = 0$ implique que X vérifie le principe de Hasse et l'approximation faible).

Preuve.— Dans le cas où les coniques φ et ψ ne se coupent pas transversalement, on se ramène au cas où

$$f(x_1, x_2) = \left(\alpha(x_1^2 - bx_2^2) + C\right) \quad \text{et} \quad g(x_1, x_2) = \left(\beta(x_1^2 - bx_2^2) + C'\right)$$

avec α, β dans k^* et C, C' dans k (non tous deux nuls). La proposition 2.1.1 et le théorème 2.1.2 donnent alors la condition nécessaire pour que $\operatorname{Br} X$ soit non trivial et la condition suffisante s'obtient par un raisonnement analogue à celui de la fin de la preuve du théorème 3.5.1.

Dans le cas où la forme φ est dégénérée, on se ramène à $f(x_1, x_2) = \alpha(x_1^2 - b)$ avec b, α dans k^* et $k(\sqrt{a}) \neq k(\sqrt{b})$ et $g(x_1, x_2) = x_2^2 - C(x_1)$ avec C polynôme non nul de degré ≥ 2. Le théorème 2.1.2 permet encore de trouver la condition nécessaire et cette condition permet d'écrire $C(x_1) = aL(x_1)^2 + \beta(x_1^2 - b)$ avec $\beta \in k^*$ et $L(x_1)$ polynôme de degré 1. On conclut alors que cette condition est suffisante par le même genre d'argument que précédemment.

Remerciements

Je remercie J.-L. Colliot-Thélène pour son aide pendant la préparation de ce texte.

Bibliographie

[1] AMER (M.) .— *Quadratische Formen über Funktionenkörpern*, Dissertation, Mainz (1976).

[2] BRUMER (A.) .— *Remarques sur les couples de formes quadratiques*, C.R. Acad. Sci. Paris **286**, série A (1978), pp. 679-681.

[3] CASSELS J. (W. S.) et FRÖHLICH (A.) .— *Algebraic number theory*, Academic Press, London and New York (1967).

[4] COLLIOT-THÉLÈNE (J.-L.) .— *Surfaces rationnelles fibrées en coniques*, Séminaire de théorie des nombres de Paris 1988-1989, éd. C. Goldstein, Progress in Math, Birkhäuser **91** (1990), pp. 43-55.

[5] COLLIOT-THÉLÈNE (J.-L.), CORAY (D.) et SANSUC (J.-J.) .— *Descente et principe de Hasse pour certaines variétés rationnelles*, J. Reine Angew. Math. **320** (1980), pp. 150-191.

[6] COLLIOT-THÉLÈNE (J.-L.) et SALBERGER (P.) .— *Arithmetic on singular cubic hypersurfaces*, Proc. London Math. Soc. **58**, n° 3 (1989), pp. 519-549.

[7] COLLIOT-THÉLÈNE (J.-L.), SANSUC (J.-J.) et SIR SWINNERTON-DYER (P.) .— *Intersection of two quadrics and Châtelet surfaces*, J. Reine Angew. Math. **373** (1987), pp. 37-107; **374** (1987), pp. 72-168.

[8] COLLIOT-THÉLÈNE (J.-L.) et SANSUC (J.-J.) .— *La descente sur les variétés rationnelles* II, Duke Math. J. **54** (1987), pp. 375-492.

[9] COLLIOT-THÉLÈNE (J.-L.) et SANSUC (J.-J.) .— *On the Chow groups of certain rational surfaces : a sequel to a paper of S. Bloch* Duke Math. **48** (1981), pp. 421-447.

[10] HARARI (D.) .— *Méthode des fibrations et obstruction de Manin*, Duke Math. J. **75** (1994), pp. 221-260.

[11] MANIN (YU. I.) .— *Le groupe de Brauer-Grothendieck en géométrie diophantienne*, in Actes du Congrès Intern. Math. (Nice 1970), Tome 1, Gauthiers-Villars, Paris 1971, pp. 401-411.

[12] NISHIMURA (H.) .— *Some remark on rational points*, Mem. Coll. Sci. Kyoto, Ser. A, **29** (1954), pp. 189-192.

[13] SALBERGER (P.) .— *Zero cycles on rational surfaces over number fields*, Invent. Math. **91** (1988), pp. 505-524.

[14] SALBERGER (P.) .— *Some new Hasse, principles for conic bundle surfaces*, Séminaire de théorie des nombres de Paris 1987-1988, éd. C. Goldstein, Progress in Math. Birkhäuser **81** (1989), pp. 283-305.

[15] SANSUC (J.-J.) .— *Principe de Hasse, surfaces cubiques et intersections de deux quadriques*, Journées arithmétiques de Besançon 1985, Astérique **147-148** (1987), pp. 183-207.

[16] SERRE (J.-P.) .— *Corps Locaux*, Hermann, Paris 1968.

[17] SERRE (J.-P.) .— *Cours d'arithmétique*, P.U.F., Paris 1970.

[18] SKOROBOGATOV (A. N.) .— *Arithmétic on certain quadric bundles of relative dimension 2*, J. Reine Angew. Math. **407** (1990), pp. 57-74.

[19] SKOROBOGATOV (A. N.) .— *On the fibration method for proving the Hasse principle and weak approximation*, Séminaire de théorie des nombres de Paris 1988-1989, éd. C. Goldstein, Progress in Math. Birkhäuser **91** (1990), pp. 205-219.