ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

T.-J. STIELTJES

Recherches sur les fractions continues

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 4, nº 2 (1995), p. J36-J75

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1995_6_4_2_J36_0>

CHAPITRE IV.

ÉTUDE DU CAS OU LA SÉRIE Σa_n EST CONVERGENTE.

17. On a identiquement

$$P_{2n}(z) = \sum_1^n a_{2k} P_{2k-1}(z),$$

$$Q_{2n}(z) = 1 + \sum_1^n a_{2k} Q_{2k-1}(z),$$

$$P_{2n+1}(z) = 1 + \sum_1^n a_{2k+1} z P_{2k}(z),$$

$$Q_{2n+1}(z) = \sum_0^n a_{2k+1} z Q_{2k}(z).$$

Par conséquent, en supposant que la série

$$\sum_1^\infty a_n$$

soit convergente, les séries

$$\sum_1^\infty a_{2k} P_{2k-1}(z),$$

$$1 + \sum_1^\infty a_{2k} Q_{2k-1}(z),$$

$$1 + \sum_1^\infty a_{2k+1} z P_{2k}(z),$$

$$\sum_0^\infty a_{2k+1} z Q_{2k}(z),$$

sont convergentes lorsque z est réel positif.

Considérons un domaine quelconque S dans lequel le module de z admet une limite supérieure λ qui soit finie. Je dis que les séries précédentes sont *uniformément convergentes* dans S, et, puisque leurs termes sont holomorphes dans S, il s'ensuit qu'elles représentent dans S des fonctions holomorphes. Il suffira de considérer la première série. On a

$$\left|\sum_{n}^{n+n'} a_{2k} P_{2k-1}(z)\right| < \sum_{n}^{n+n'} a_{2k} \,|\, P_{2k-1}(z) \,|.$$

Or $P_{2k-1}(z)$ est un polynome à coefficients positifs; donc

$$|\, P_{2k-1}(z) \,| < P_{2k-1}(|\, z \,|) \leqq P_{2k-1}(\lambda),$$

puisque

$$|\, z \,| \leqq \lambda,$$

donc

$$\left|\sum_{n}^{n+n'} a_{2k} P_{2k-1}(z)\right| < \sum_{n}^{n+n'} a_{2k} P_{2k-1}(\lambda).$$

Or, la série

$$\sum_{1}^{\infty} a_{2k} P_{2k-1}(\lambda)$$

étant *convergente*, on peut déterminer un nombre ν tel que, pour $n \geqq \nu$,

$$\sum_{n}^{n+n'} a_{2k} P_{2k-1}(\lambda) < \varepsilon,$$

quel que soit n', ε étant aussi petit qu'on le voudra. Pour les mêmes valeurs de n, on aura donc aussi

$$\left|\sum_{n}^{n+n'} a_{2k} P_{2k-1}(z)\right| < \varepsilon,$$

et, puisque z est un point quelconque du domaine S, cela montre que la série considérée est *uniformément convergente* dans S.

D'après cela, nous avons

$$\begin{aligned}
p(z) &= \sum_{1}^{\infty} a_{2k} P_{2k-1}(z) = \lim P_{2n}(z), \\
q(z) &= 1 + \sum_{1}^{\infty} a_{2k} Q_{2k-1}(z) = \lim Q_{2n}(z), \\
p_1(z) &= 1 + \sum_{1}^{\infty} a_{2k+1} z P_{2k}(z) = \lim P_{2n+1}(z), \\
q_1(z) &= \sum_{0}^{\infty} a_{2k+1} z Q_{2k}(z) = \lim Q_{2n+1}(z).
\end{aligned}$$

les quatre fonctions $p(z)$, $q(z)$, $p_1(z)$, $q_1(z)$ étant holomorphes dans tout le plan. Elles sont liées évidemment par la relation

$$p_1(z)q(z)-p(z)q_1(z)=+1.$$

18. Il est clair, d'après ce qui précède, que la série

$$\sum_1^\infty a_{2k}\mathrm{P}_{2k-1}(z)$$

est *absolument convergente,* et même que la nouvelle série, obtenue en remplaçant $\mathrm{P}_{2k-1}(z)$ par son expression comme polynome de z, est absolument convergente. Dès lors, dans la nouvelle série, il est permis d'ordonner suivant les puissances de z, ce qui donnera

$$p(z)=\sum_0^\infty \alpha_k z^k$$

et le coefficient α_k sera la limite du coefficient $\mathcal{A}_k$ de z^k dans $\mathrm{P}_{2n}(z)$ (n° 2). Les mêmes conclusions s'appliquent évidemment à $q(z)$, $p_1(z)$, $q_1(z)$.

Nous venons de voir que $\mathrm{P}_{2n}(z)$ tend *uniformément* vers $p(z)$, et il est clair que $p(z)$ est une fonction *continue* de z. On peut en conclure que,

$$z_1,\quad z_2,\quad z_3,\quad \ldots$$

étant une suite infinie de nombres et $\lim z_n=\mathrm{Z}$ (pour $n=\infty$), on aura aussi

$$\lim_{n=\infty}\mathrm{P}_{2n}(z_n)=p(\mathrm{Z}).$$

En effet, entourons le point limite Z (supposé fini) par un cercle C. A partir de $n\geqq\nu$, z_n sera à l'intérieur du cercle et, à cause de la convergence uniforme, on aura

$$(1)\qquad |\mathrm{P}_{2n}(z)-p(z)|<\varepsilon,$$

pour $n\geqq\nu'$, z étant un point *quelconque* situé à l'intérieur de C. D'autre part, z_n tendant vers Z, on aura aussi

$$|p(z_n)-p(\mathrm{Z})|<\varepsilon,$$

à partir de $n\geqq\nu''$. Or,

$$|\mathrm{P}_{2n}(z_n)-p(\mathrm{Z})|<|\mathrm{P}_{2n}(z_n)-p(z_n)|+|p(z_n)-p(\mathrm{Z})|,$$

et dans la formule (1) il est permis de remplacer z par z_n; dès lors, on conclut

$$|P_{2n}(z_n) - p(Z)| < 2\varepsilon,$$

pour $n \geqq N$, N étant le plus grand des nombres ν, ν', ν''. Enfin on trouvera facilement, par la considération de la série

$$p(z+h) = \sum_1^\infty a_{2k} P_{2k-1}(z+h),$$

qu'il est permis d'ordonner le second membre suivant les puissances de h, et d'en tirer la conclusion qu'il est permis de différentier autant de fois qu'on le voudra la série

$$p(z) = \sum_1^\infty a_{2k} P_{2k-1}(z);$$

on a donc

$$p'(z) = \lim P'_{2n}(z),$$

et la convergence de $P'_{2n}(z)$ vers $p'(z)$ est *uniforme* dans tout domaine S où $|z|$ est limité. Supposant $\lim z_n = Z$, on aura aussi

$$\lim P'_{2n}(z_n) = p'(Z).$$

19. Nous allons obtenir maintenant les fonctions $p(z)$, etc., sous forme de produits infinis, en nous bornant à développer le raisonnement dans le cas de

$$q(z) = \lim Q_{2n}(z).$$

Les polynomes P ne diffèrent pas au fond des polynomes Q, on a remarqué déjà (n° 3, à la fin) que

$$P_{2n}(z) = \frac{1}{z} Q^1_{2n-1}(z),$$
$$P_{2n+1}(z) = Q^1_{2n}(z),$$

et dès lors il sera facile d'étendre le résultat que nous allons établir pour $q(z)$ aux fonctions $p(z)$, $p_1(z)$, $q_1(z)$. On a

$$Q_{2n}(z) = \left(1 + \frac{z}{x_1}\right)\left(1 + \frac{z}{x_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{z}{x_n}\right).$$

Nous supposerons les x_k rangés par ordre de grandeur croissante,

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}=\mathfrak{B}_1<\beta_1,$$

β_1 étant le coefficient de z dans le développement

$$q(z)=\sum_0^\infty \beta_k z^k.$$

Lorsqu'on remplace n par $n+1$, nous savons que $x_1, x_2, \ldots, x_k$ décroissent, mais il est clair qu'on aura toujours

$$x_k>\frac{1}{\beta_1}.$$

Par conséquent, pour $n=\infty$, x_k tendra vers une limite *positive* que nous désignerons par λ_k, et

$$\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \lambda_3 \leqq \lambda_4 \ \ldots.$$

Je dis d'abord que la série

$$\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}+\frac{1}{\lambda_3}+\ldots$$

est *convergente*. En effet, soit k un nombre fini quelconque, en prenant $n>k$, on aura

$$\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}+\ldots+\frac{1}{\lambda_k}>\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_k},$$

puisque x_i tend vers λ_i en *diminuant* toujours. Mais, d'autre part, λ_i étant la limite de x_i, on peut supposer n assez grand pour que la différence

$$\left(\frac{1}{\lambda_1}+\ldots+\frac{1}{\lambda_k}\right)-\left(\frac{1}{x_1}+\ldots+\frac{1}{x_k}\right)$$

soit inférieure à ε, et alors

$$\frac{1}{\lambda_1}+\ldots+\frac{1}{\lambda_k}<\frac{1}{x_1}+\ldots+\frac{1}{x_k}+\varepsilon<\frac{1}{x_1}+\ldots+\frac{1}{x_n}+\varepsilon,$$

$$\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}+\ldots+\frac{1}{\lambda_k}<\beta_1+\varepsilon.$$

Ceci prouve que la série $\sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_k}$ est *convergente* et que la somme de cette série ne saurait surpasser β_1.

Puisque x_k tend vers λ_k, on a

$$\lim_{n=\infty} Q_{2n}(-x_k) = 0 = q(-\lambda_k);$$

les λ_k sont des zéros de la fonction $q(-z)$.

20. Peut-il arriver que plusieurs λ soient égaux, qu'on ait par exemple

$$\lambda_{k+1} = \lambda_{k+2}, \ldots = \lambda_{k+i},$$

λ_k étant $< \lambda_{k+1}$, $\lambda_{k+i+1} > \lambda_{k+i}$? Il faut d'abord remarquer que i sera nécessairement fini puisque la série

$$\sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_k}$$

est convergente. Ensuite, nous pouvons prendre n assez grand pour que

$$x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+i}, \quad x_{k+i+1}$$

diffèrent aussi peu qu'on le voudra de leurs limites

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_{k+i}, \quad \lambda_{k+i+1}.$$

Nous pouvons donc supposer que

$$x_{k+1}, \quad x_{k+2}, \quad \ldots, \quad x_{k+i}$$

soient tous dans l'intervalle $(\lambda_{k+1}, \lambda_{k+i+1})$.

Ensuite, nous pourrons trouver un nombre n' tel que les racines

$$x'_{k+1}, \quad x'_{k+2}, \quad \ldots, \quad x'_{k+i}$$

de

$$Q_{2n+2n'}(-z) = 0$$

se trouvent toutes dans l'intervalle

$$(\lambda_{k+1}, \quad x_{k+1}),$$

x'_{k+i+1} restant toujours supérieur à λ_{k+i+1}.

De cette façon, on voit que l'intervalle

$$(x'_{k+i},\quad x'_{k+i+1}$$

de deux racines consécutives de $Q_{2n+2n'}(-z) = 0$ renferme les racines

$$x_{k+1},\quad x_{k+2},\quad \ldots,\quad x_{k+i}$$

de $Q_{2n}(-z) = 0$. Or nous avons vu (n° 5) que, dans l'intervalle de deux racines consécutives de

$$Q_{2n+2n'}(-z) = 0,$$

il se trouve soit *une* racine de $Q_{2n}(-z) = 0$, soit *une* racine de $P_{2n'}^{2n}(-z) = 0$. On a donc nécessairement $i = 1$, c'est-à-dire parmi les nombres

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \ldots,$$

il n'y en a point qui soient égaux.

21. Soit ε un nombre positif aussi petit qu'on le voudra; le produit

$$(1)\qquad \mathfrak{P} = \prod_1^\infty \left(1 + \frac{z}{\lambda_k}\right)$$

étant convergent pour toute valeur finie de z, il est possible de déterminer un nombre m tel que

$$\left| \prod_{m+1}^\infty \left(1 + \frac{|z|}{\lambda_k}\right) - 1 \right| < \varepsilon.$$

Nous supposons ici que z ait quelque valeur finie fixe. Soit

$$M = \prod_1^\infty \left(1 + \frac{|z|}{\lambda_k}\right),$$

il est clair que

$$\left| \prod_1^m \left(1 + \frac{z}{\lambda_k}\right) \right| < M,$$

et puis aussi

$$\left| \prod_{m+1}^\infty \left(1 + \frac{z}{\lambda_k}\right) - 1 \right| < \varepsilon.$$

A cause de

$$\mathfrak{P} = \prod_{1}^{m}\left(1+\frac{z}{\lambda_k}\right) \times \prod_{m+1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{\lambda_k}\right),$$

on en conclut facilement

$$\mathfrak{P} = \prod_{1}^{m}\left(1+\frac{z}{\lambda_k}\right) + \mathrm{M}\varepsilon', \tag{2}$$

le module de ε' étant inférieur à ε.

Considérons, d'autre part, pour $n > m$ l'expression

$$\mathrm{Q}_{2n}(z) = \prod_{1}^{m}\left(1+\frac{z}{x_k}\right) \times \prod_{m+1}^{n}\left(1+\frac{z}{x_k}\right),$$

il est clair qu'on aura encore

$$\left|\prod_{1}^{m}\left(1+\frac{z}{x_k}\right)\right| < \mathrm{M},$$

$$\left|\prod_{m+1}^{n}\left(1+\frac{z}{x_k}\right) - 1\right| < \varepsilon,$$

d'où l'on conclut

$$\mathrm{Q}_{2n}(z) = \prod_{1}^{m}\left(1+\frac{z}{x_k}\right) + \mathrm{M}\varepsilon'', \tag{3}$$

le module de ε'' étant inférieur à ε.

En faisant croître n indéfiniment,

$$\prod_{1}^{m}\left(1+\frac{z}{x_k}\right)$$

tendra vers

$$\prod_{1}^{m}\left(1+\frac{z}{\lambda_k}\right).$$

Dès lors la comparaison des formules (2) et (3) montre que l'on a

$$\lim \mathrm{Q}_{2n}(z) = \mathfrak{P},$$

c'est-à-dire la fonction holomorphe $q(z)$ peut se mettre sous la forme

$$\prod_1^\infty \left(1 + \frac{z}{\lambda_k}\right).$$

Ainsi, la fonction $q(z)$ est du genre zéro, elle n'admet point d'autres zéros que les $-\lambda_k$ qui sont des zéros simples. On arrive pour $p(z)$, $p_1(z)$, $q_1(z)$ à des conclusions toutes semblables.

22. Pour toute valeur de z qui n'annule pas $q(z)$ ou $q_1(z)$, on a

$$\lim \frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \frac{p(z)}{q(z)},$$
$$\lim \frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)} = \frac{p_1(z)}{q_1(z)}.$$

Nous allons obtenir ces limites encore sous la forme d'une série de fractions simples. Pour cela, considérons la décomposition en fractions simples

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \frac{M_1}{z+x_1} + \frac{M_2}{z+x_2} + \ldots + \frac{M_n}{z+x_n},$$
$$M_k = \frac{P_{2n}(-x_k)}{Q'_{2n}(-x_k)}.$$

Pour $n=\infty$, x_k tend vers λ_k, il s'ensuit que M_k tendra aussi vers une limite finie $\mu_k \geqq 0$,

$$\mu_k = \frac{p(-\lambda_k)}{q'(-\lambda_k)}.$$

Il est clair que μ_k est *positif*, car, à cause de la relation

$$p_1(z)\,q(z) - p(z)\,q_1(z) = +1,$$

les fonctions $p(z)$ et $q(z)$ ne peuvent pas s'annuler pour une même valeur $z = -\lambda_k$.

La série

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \ldots$$

est *convergente*. En effet, prenant n suffisamment grand,

$$\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_k$$

différera aussi peu qu'on le voudra de

$$M_1 + M_2 + \ldots + M_k;$$

donc

$$\mu_1 + \ldots + \mu_k < M_1 + M_2 + \ldots + M_k + \varepsilon,$$

$$\mu_1 + \ldots + \mu_k < M_1 + \ldots\ldots\ldots + M_n + \varepsilon = \frac{1}{a_1} + \varepsilon.$$

Il s'ensuit que la série

$$\sum_1^\infty \mu_k$$

est convergente et que la somme de cette série ne saurait surpasser $\frac{1}{a_1}$.

Cela étant, et puisque les nombres

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3, \quad \ldots$$

croissent au delà de toute limite, il est clair que la série

$$S = \sum_1^\infty \frac{\mu_k}{z + \lambda_k}$$

définit une fonction méromorphe dans tout le plan.

Soit ε un nombre positif aussi petit qu'on le voudra, puisque λ_k croît au delà de toute limite, on pourra trouver un entier m tel que

$$\lambda_{m+1} - |z| > \frac{1}{\varepsilon},$$

et l'on aura alors, à plus forte raison,

$$\lambda_{m+i} - |z| > \frac{1}{\varepsilon} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots),$$

d'où l'on conclut

$$|\lambda_{m+i} + z| > \lambda_{m+i} - |z| > \frac{1}{\varepsilon}, \quad \frac{1}{|\lambda_{m+i} + z|} < \varepsilon \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots).$$

En écrivant

$$S = \sum_1^m \frac{\mu_k}{z + \lambda_k} + \sum_{m+1}^\infty \frac{\mu_k}{z + \lambda_k},$$

on aura

$$\left| \sum_{m+1}^\infty \frac{\mu_k}{z + \lambda_k} \right| < \sum_{m+1}^\infty \frac{\mu_k}{|z + \lambda_k|} < \varepsilon \sum_{m+1}^\infty \mu_k < \frac{\varepsilon}{a_1},$$

donc

(4) $$S = \sum_1^m \frac{\mu_k}{z + \lambda_k} + \frac{\varepsilon'}{a_1},$$

le module de ε' étant inférieur à ε.

D'autre part,

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \sum_1^m \frac{M_k}{z + x_k} + \sum_{m+1}^n \frac{M_k}{z + x_k},$$

et, si l'on se souvient que $x_k > \lambda_k$, on conclut

$$\left| \sum_{m+1}^n \frac{M_k}{z + x_k} \right| < \sum_{m+1}^n \frac{M_k}{|z + x_k|} < \varepsilon \sum_{m+1}^n M_k < \frac{\varepsilon}{a_1},$$

donc

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \sum_1^m \frac{M_k}{z + x_k} + \frac{\varepsilon''}{a_1}, \tag{5}$$

le module de ε'' étant inférieur à ε.

Or, pour $n = \infty$, on a

$$\lim \sum_1^m \frac{M_k}{z + x_k} = \sum_1^m \frac{\mu_k}{z + \lambda_k},$$

et dès lors la comparaison des formules (4) et (5) montre qu'on a

$$\lim \frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \frac{p(z)}{q(z)} = \mathcal{S}, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

23. Nous venons de voir que la série

$$\sum_1^\infty \mu_k$$

est convergente; plus généralement, on a

$$\sum_1^\infty \mu_k \lambda_k^i = c_i \qquad (i = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

D'abord la série considérée est bien convergente, car la somme

$$\mu_1 \lambda_1^i + \mu_2 \lambda_2^i + \ldots + \mu_k \lambda_k^i$$

diffère aussi peu qu'on le voudra de

$$M_1 x_1^i + M_2 x_2^i + \ldots + M_k x_k^i;$$

par conséquent, elle sera inférieure à

$$M_1 x_1^i + \ldots + M_k x_k^i + \varepsilon,$$

et, à plus forte raison, inférieure à $c_i + \varepsilon$, puisque

$$c_i = \sum_1^n \mathrm{M}_k x_k^i.$$

Soit donc

$$\sigma = \sum_1^\infty \mu_k \lambda_k^i.$$

On aura $\sigma \leqq c_i$. Déterminons un nombre m tel que

$$\frac{c_{i+1}}{\lambda_{m+1}} < \varepsilon,$$

ε étant un nombre positif aussi petit qu'on voudra, on aura

$$(6) \qquad \sigma = \sum_1^m \mu_k \lambda_k^i + \varepsilon',$$

ε' étant plus petit que ε. En effet,

$$\sum_{m+1}^\infty \mu_k \lambda_k^i < \frac{1}{\lambda_{m+1}} \sum_{m+1}^\infty \mu_k \lambda_k^{i+1} < \frac{1}{\lambda_{m+1}} \sum_1^\infty \mu_k \lambda_k^{i+1} \leqq \frac{c_{i+1}}{\lambda_{m+1}} < \varepsilon.$$

D'autre part, on a

$$c_i = \sum_1^m \mathrm{M}_k x_k^i + \sum_{m+1}^n \mathrm{M}_k x_k^i,$$

et il est clair que

$$\sum_{m+1}^n \mathrm{M}_k x_k^i < \frac{1}{x_{m+1}} \sum_{m+1}^n \mathrm{M}_k x_k^{i+1} < \frac{c_{i+1}}{\lambda_{m+1}} < \varepsilon,$$

donc

$$(7) \qquad c_i = \sum_1^m \mathrm{M}_k x_k^i + \varepsilon'',$$

ε'' étant plus petit que ε.

Or, pour $n = \infty$, on a

$$\lim \sum_1^m \mathrm{M}_k x_k^i = \sum_1^m \mu_k \lambda_k^i;$$

dès lors la comparaison des formules (6) et (7) montre qu'on a

$$\sigma = c_i \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

24. Il suffira d'énoncer les conclusions analogues résultant de l'étude de la formule

$$\frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)} = \frac{N_0}{z} + \frac{N_1}{z+x_1} + \ldots + \frac{N_n}{z+x_n},$$

en cherchant ce qu'elle devient pour $n = \infty$. On aura

$$\nu_k = \lim N_k \qquad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots),$$

$$\theta_k = \lim x_k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$\lim \frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)} = \frac{p_1(z)}{q_1(z)} = \frac{\nu_0}{z} + \sum_1^\infty \frac{\nu_k}{z+\theta_k},$$

$$c_0 = \sum_0^\infty \nu_k,$$

$$c_i = \sum_1^\infty \nu_k \theta_k^i \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots).$$

Considérons sur une droite infinie OX... une distribution de masse (positive), la masse m_i se trouvant concentrée à la distance ξ_i de l'origine O. La somme

$$\Sigma\, m_i \xi_i^k$$

peut être appelée le *moment* d'ordre k de la masse par rapport à l'origine.

Il résulte alors des formules précédentes que le système des masses

$$(\mu_i, \lambda_i) \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

a pour moment d'ordre k la valeur c_k $(k = 0, 1, 2, 3, \ldots)$.

De même, le système des masses

$$(\nu_i, \theta_i) \qquad (i = 0, 1, 2, 3, \ldots),$$

où $\theta_0 = 0$, aura les mêmes moments c_k.

Nous appellerons *problème des moments* le problème suivant :

Trouver une distribution de masse positive sur une droite $(O\infty)$, *les moments d'ordre* k $(k = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ *étant donnés.*

Désignons ces moments par c_k, et remarquons d'abord que ces données de la question doivent satisfaire à certaines inégalités.

En effet, nous supposons qu'il soit possible de trouver des m_i, ξ_i tels que

$$c_k = \Sigma\, m_i \xi_i^k;$$

il s'ensuit (*voir* la fin du n° 8) que tous les déterminants

$$\begin{vmatrix} c_p & c_{p+1} & \dots & c_{p+m-1} \\ c_{p+1} & c_{p+2} & \dots & c_{p+m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{p+m-1} & c_{p+m} & \dots & c_{p+2m-2} \end{vmatrix}$$

doivent être positifs et, en particulier, les déterminants A_n, B_n du n° 11. On en conclut que, si l'on réduit en fraction continue la série

$$\frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \dots,$$

on doit obtenir une fraction continue du type que nous étudions avec des valeurs *positives* des a_i.

Cela étant, nous distinguerons deux cas dans le problème des moments, le cas *déterminé* et le cas *indéterminé*.

Le cas *indéterminé* a lieu lorsque les données c_k sont telles que la série

$$\sum_1^\infty a_n$$

est *convergente*.

Il est facile de justifier cette dénomination : en effet, nous venons de voir que dans ce cas le problème admet au moins deux solutions, soit par le système des masses (μ_i, λ_i), soit par le système des masses (ν_i, θ_i), et, dès lors, il est facile de voir qu'il y a une infinité de solutions. Nous montrerons plus loin qu'il y a même toujours une infinité de solutions dans lesquelles la masse est distribuée sur l'axe d'une façon continue avec une *densité* finie en chaque point.

Le cas *déterminé* a lieu lorsque la série

$$\sum_1^\infty a_n$$

est *divergente*. Nous montrerons en effet que, dans ce cas, le problème des moments admet toujours une solution et une seule.

CHAPITRE V.

SUR QUELQUES THÉORÈMES DE LA THÉORIE DES FONCTIONS, ET LEUR APPLICATION A LA THÉORIE DE NOTRE FRACTION CONTINUE.

25. Soit

$$f_1(z), \quad f_2(z), \quad f_3(z), \quad \ldots$$

une suite infinie de fonctions analytiques, toutes holomorphes dans un cercle C tracé autour de l'origine avec un rayon R.

On aura donc

$$f_k(z) = \sum_0^\infty A_i^k z^i,$$

ces séries étant convergentes tant que $|z| < R$.

Considérons la série

$$\sum_1^\infty f_k(z),$$

nous la supposerons *uniformément convergente* pour $|z| \leqq R_1$, c'est-à-dire à l'intérieur et sur le contour d'un cercle C_1 tracé autour de l'origine avec un rayon R_1 plus petit que R.

Soit encore R′ un nombre plus petit que R, mais pouvant différer de R aussi peu qu'on le voudra. Nous supposerons encore que le module de la somme

$$f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z)$$

admet une limite supérieure L, quel que soit n et quelle que soit la valeur de z à l'intérieur ou sur le contour du cercle C′, tracé autour de l'origine avec le rayon R′. Il peut arriver, du reste, que ce nombre fini L croisse au delà de toute limite lorsque R′ tend vers R.

Dans ces conditions, nous allons démontrer le théorème suivant :

La série

$$\sum_1^\infty f_k(z)$$

est uniformément convergente pour $|z| \leqq R'$.

Et l'on peut ajouter, d'après un théorème connu de M. Weierstrass, que nous avons appliqué déjà plus d'une fois (nos 15, 17), que cette série représente une fonction holomorphe dans le cercle C. C'est du reste ce qui résultera aussi de notre démonstration.

26. Rappelons d'abord ce lemme :

Si la série

$$f(z)=\sum_{0}^{\infty}\alpha_i z^i$$

est uniformément convergente pour $|z|=\text{R}$, *on aura*

$$|\alpha_i|<\frac{\text{M}}{\text{R}^i},$$

M *étant le maximum du module de* $f(z)$ *pour* $|z|=\text{R}$.

Et l'on sait que l'uniformité de convergence de la série pour $|z|=\text{R}$ est assurée, lorsque le rayon de convergence de la série surpasse R.

On aurait pu considérer une série

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty}\alpha_i z^i;$$

la limitation

$$|\alpha_i|<\frac{\text{M}}{\text{R}^i}$$

aura lieu alors pour les valeurs positives et négatives de i.

La série

$$\sum_{1}^{\infty}f_k(z)$$

étant uniformément convergente pour $|z|\leqq \text{R}_1$, cela veut dire qu'étant donné un nombre ε aussi petit qu'on le voudra, il est possible de trouver un entier n tel que

$$\left|\sum_{n}^{n+n'}f_k(z)\right|<\varepsilon,$$

quel que soit n', et cela pour toutes les valeurs de z dont le module ne surpasse pas R_1.

Cette somme

$$\sum_{n}^{n+n'} f_k(z)$$

est une somme d'un nombre fini de séries

$$\sum_{0}^{\infty} A_i^k z^i$$

toutes convergentes dans le cercle C. Elle pourra donc se mettre aussi sous la forme d'une telle série

$$\sum_{n}^{n+n'} f_k(z) = \sum_{0}^{\infty} z^i \left(\sum_{n}^{n+n'} A_i^k \right).$$

En appliquant à cette série le lemme rappelé plus haut, en posant $|z| = R_1$, il vient

$$\left| \sum_{n}^{n+n'} A_i^k \right| < \frac{\varepsilon}{R_1^i}.$$

Cette limitation montre que la série

$$\sum_{1}^{\infty} A_i^k$$

est *convergente;* nous posons

$$c_i = \sum_{1}^{\infty} A_i^k.$$

27. A l'intérieur, ou sur le contour du cercle C′, on a

$$|f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z)| < L,$$

mais cette somme

$$f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z)$$

peut se mettre encore sous la forme d'une série

$$\sum_{0}^{\infty} z^i \left(\sum_{1}^{n} A_i^k \right),$$

convergente dans le cercle C. En appliquant le lemme pour $|z| = R'$, on conclut

$$\left|\sum_1^n A_i^k\right| < \frac{L}{R'^i}.$$

Cette limitation a lieu quel que soit n. Or nous savons déjà qu'en faisant croître indéfiniment n,

$$\sum_1^n A_i^k$$

tend vers une limite finie c_i. On en conclut

$$|c_i| \leqq \frac{L}{R'^i},$$

et l'on voit par là que la série

$$F(z) = \sum_0^\infty c_i z^i$$

est convergente dans le cercle C, puisqu'elle l'est dans le cercle C' qui diffère aussi peu qu'on le veut de C.

28. Soit ε un nombre aussi petit qu'on le voudra; nous avons vu qu'on peut déterminer un nombre n tel que

$$\left|\sum_n^{n+n'} A_i^k\right| < \frac{\varepsilon}{R_1^i},$$

donc aussi

$$\left|\sum_n^\infty A_i^k\right| \leqq \frac{\varepsilon}{R_1^i},$$

et puisque

$$\sum_{n+n'+1}^\infty A_i^k = \sum_n^\infty A_i^k - \sum_n^{n+n} A_i^k,$$

on aura

$$\left|\sum_{n+n'+1}^\infty A_i^k\right| < \frac{2\varepsilon}{R_1^i}.$$

Nous obtenons une autre limitation, pour la même expression, par le raisonnement suivant. D'après l'hypothèse admise on a

$$\left|\sum_{n+n'+1}^{n+n'+n''} f_k(z)\right| < 2\mathrm{L},$$

tant que $|z| \leqq \mathrm{R}'$. Or

$$\sum_{n+n'+1}^{n+n'+n''} f_k(z) = \sum_0^{\infty} z_i \left(\sum_{n+n'+1}^{n+n'+n''} \mathrm{A}_i^k\right).$$

En appliquant le lemme pour $|z| = \mathrm{R}'$, il viendra

$$\left|\sum_{n+n'+1}^{n+n'+n''} \mathrm{A}_i^k\right| < \frac{2\mathrm{L}}{\mathrm{R}'^i};$$

donc, en faisant croître indéfiniment n'',

$$\left|\sum_{n+n'+1}^{\infty} \mathrm{A}_i^k\right| \leqq \frac{2\mathrm{L}}{\mathrm{R}'^i}.$$

29. Nous allons démontrer maintenant le théorème énoncé, en faisant voir en même temps que la somme de la série est $\mathrm{F}(z)$.

Pour cela considérons l'expression

$$\mathrm{F}(z) - \sum_1^{n+n'} f_k(z),$$

et soit R'' un nombre un peu inférieur à R', la différence $\mathrm{R}' - \mathrm{R}''$ étant d'ailleurs aussi petite qu'on le voudra.

Soit ε un nombre aussi petit qu'on le voudra; nous allons faire voir qu'on peut trouver toujours un entier n tel que

$$\left|\mathrm{F}(z) - \sum_1^{n+n'} f_k(z)\right| < \varepsilon,$$

quel que soit n' et quelle que soit la valeur de z dont le module seulement ne doit pas surpasser R''.

Voici en effet comment on obtiendra ce nombre n. Déterminons d'abord un entier p tel que

$$2\mathrm{L}\left(\frac{\mathrm{R}''}{\mathrm{R}'}\right)^{p+1} \times \frac{1}{1 - \frac{\mathrm{R}''}{\mathrm{R}'}} < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Cela est possible puisque $R'' < R'$. Soit ensuite

$$M = 1 + \frac{R''}{R_1} + \left(\frac{R''}{R_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{R''}{R_1}\right)^p,$$

et choisissons un nombre positif ε' tel que

$$2M\varepsilon' < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Ce nombre ε' obtenu, on détermine enfin n par la condition

$$\left|\sum_{n}^{n+n'} f_k(z)\right| < \varepsilon',$$

tant que $|z| \leqq R_1$. Cette détermination est encore possible parce qu'on suppose que la série

$$\sum_{1}^{\infty} f_k(z)$$

est *uniformément convergente* pour $|z| \leqq R_1$.

D'après les nos 26 et 28 on peut en conclure

$$\left|\sum_{n+n'+1}^{\infty} A_i^k\right| < \frac{2\varepsilon'}{R_1^i},$$

$$\left|\sum_{n+n'+1}^{\infty} A_i^k\right| \leqq \frac{2L}{R'^i}.$$

Or on a

$$F(z) - \sum_{1}^{n+n'} f_k(z) = \sum_{0}^{\infty} z^i \left(c_i - \sum_{1}^{n+n'} A_i^k\right),$$

c'est-à-dire, si l'on se rappelle la définition de c_i,

$$F(z) - \sum_{1}^{n+n'} f_k(z) = \sum_{0}^{\infty} z^i \left(\sum_{n+n'+1}^{\infty} A_i^k\right).$$

On en conclut, tant que $|z| \leqq R''$,

$$\left|F(z) - \sum_{1}^{n+n'} f_k(z)\right| < \sum_{0}^{\infty} R''^i \left|\sum_{n+n'+1}^{\infty} A_i^k\right|.$$

Cette limite supérieure est égale à

$$\sum_0^p \mathrm{R}''^i \left| \sum_{n+n'+1}^{\infty} \mathrm{A}_i^k \right| + \sum_{p+1}^{\infty} \mathrm{R}''^i \left| \sum_{n+n'+1}^{\infty} \mathrm{A}_i^k \right|,$$

et, par conséquent, inférieure à

$$\sum_0^p \mathrm{R}''^i \frac{2\varepsilon'}{\mathrm{R}_1^i} + \sum_{p+1}^{\infty} \mathrm{R}''^i \frac{2\mathrm{L}}{\mathrm{R}'^i},$$

c'est-à-dire inférieure à

$$2\mathrm{M}\varepsilon' + 2\mathrm{L}\left(\frac{\mathrm{R}''}{\mathrm{R}'}\right)^{p+1} \times \frac{1}{1 - \frac{\mathrm{R}''}{\mathrm{R}'}},$$

c'est-à-dire enfin inférieure à ε.

Notre théorème se trouve ainsi démontré, car la substitution de R'' au lieu de R' n'a aucune importance.

30. Considérons maintenant une suite infinie de fonctions

$$f_1(z), \quad f_2(z), \quad f_3(z), \quad \ldots,$$

holomorphes dans une aire quelconque S, dont nous désignerons le contour par s. Nous supposerons que la série

$$\sum_1^{\infty} f_k(z)$$

soit uniformément convergente à l'intérieur et sur le contour d'un cercle C_1 décrit autour d'un point z_0 de S comme centre avec un rayon R_1, ce domaine de convergence n'ayant aucun point commun avec s.

Nous supposerons ensuite que le module de la somme

$$f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z)$$

admet une limite supérieure indépendante de n dans toute aire S′ intérieure à S et sans point commun avec s.

La série

$$\mathrm{F}(z) = \sum_1^{\infty} f_k(z)$$

est uniformément convergente dans S′ *et représente une fonction holomorphe dans* S.

Il est aisé de déduire ce théorème de celui qu'on vient de démontrer. Décrivons autour de z_0, comme centre, un cercle C avec le plus grand rayon possible qui ne déborde point en dehors de S. Soient $R > R_1$ le rayon de ce cercle, $R' < R$ le rayon d'un cercle concentrique C' qui ne déborde pas en dehors de S'. Il est clair alors que nous pouvons appliquer le théorème démontré et conclure que la série considérée est uniformément convergente dans C', et représente une fonction holomorphe dans C. De cette façon on a *étendu* le domaine de convergence de la série du cercle C_1 au cercle C'. Soit maintenant z'_0 un point quelconque à l'intérieur de C', décrivons autour de ce point un cercle C'_1 avec un rayon R'_1 qui soit entièrement à l'intérieur de C'. Alors on voit que la série est uniformément convergente pour $|z - z'_0| \leqq R'_1$. On pourra donc répéter le même raisonnement que nous avons fait pour le point z_0 et le cercle C_1, et, en continuant de cette façon, il est clair qu'on finira par reconnaître que la série

$$F(z) = \sum_1^{\infty} f_k(z)$$

est *uniformément convergente* dans toute aire S'' intérieure à S' et sans point commun avec le contour de S'. En même temps il est évident que $F(z)$ est holomorphe. C'est là le théorème énoncé, la substitution de S'' au lieu de S' étant sans conséquence.

On sait que le maximum du module de $f_1(z) + \ldots + f_n(z)$ dans S' a toujours lieu sur le contour de S'. Dans l'énoncé de notre théorème on aurait donc pu exiger seulement que le module $f_1(z) + \ldots + f_n(z)$ sur le contour de S' reste inférieur à un nombre fixe.

Enfin, il serait facile de généraliser notre théorème au cas où il s'agit d'une série dont les termes sont des fonctions de deux variables imaginaires.

31. On peut donner à notre premier théorème une forme un peu plus générale en considérant une suite de fonctions

$$f_1(z), \quad f_2(z), \quad f_3(z), \quad \ldots$$

holomorphes pour $r < |z| < R$ et par conséquent développables en séries

$$f_k(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_i^k z^i,$$

convergentes pour

$$r < |z| < R.$$

Quoique les raisonnements soient absolument analogues à ceux que nous avons exposés, nous devons cependant les indiquer rapidement, parce qu'ils donnent lieu à une remarque qui nous sera indispensable dans la suite.

Nous supposerons que la série

$$\sum_1^\infty f_k(z)$$

soit *uniformément convergente* pour $r_1 \leqq |z| \leqq R_1$

$$r < r_1 < R_1 < R,$$

et ensuite si r' est un nombre quelconque surpassant r, R' un nombre quelconque inférieur à R,

$$r < r' < r_1 < R_1 < R' < R,$$

nous supposerons que pour $r' \leqq |z| \leqq R'$ le module de la somme

$$f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z)$$

admet une limite supérieure indépendante de n. Cela étant, on peut affirmer que *la série*

$$F(z) = \sum_1^\infty f_k(z)$$

est uniformément convergente pour $r' \leqq |z| \leqq R'$.

En même temps $F(z)$ est holomorphe pour $r < |z| < R$. On peut d'abord déterminer un nombre n tel que

$$\left| \sum_n^{n+n'} f_k(z) \right| < \varepsilon,$$

pour $r_1 \leqq |z| \leqq R_1$. On en conclut

$$\left| \sum_n^{n+n'} A_i^k \right| < \frac{\varepsilon}{R_1^i} \quad \text{et} \quad \left| \sum_n^{n+n'} A_i^k \right| < \frac{\varepsilon}{r_1^i},$$

d'où l'on voit que la série

$$c_i = \sum_1^\infty A_i^k$$

est *convergente*.

Pour $r' \leqq |z| \leqq R'$, on a

$$\left|\sum_1^n f_k(z)\right| < L,$$

d'où

$$\left|\sum_1^n A_i^k\right| < \frac{L}{R'^i} \quad \text{et} \quad \left|\sum_1^n A_i^k\right| < \frac{L}{r'^i}$$

et ensuite

$$|c_i| < \frac{L}{R'^i} \quad \text{et} \quad |c_i| < \frac{L}{r'^i}.$$

On voit par là que la série

$$F(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_i z^i$$

est convergente pour $r < |z| < R$ puisqu'elle est convergente pour $r' < |z| < R'$.

Ensuite il est facile de voir que, ε étant un nombre aussi petit qu'on le voudra, on aura

$$\left|\sum_{n+n'+1}^\infty A_i^k\right| < \frac{2\varepsilon}{R_1^i} \quad \text{et} \quad \left|\sum_{n+n'+1}^\infty A_i^k\right| < \frac{2\varepsilon}{r_1^i},$$

puis aussi

$$\left|\sum_{n+n'+1}^\infty A_i^k\right| < \frac{2L}{R'^i} \quad \text{et} \quad \left|\sum_{n+n'+1}^\infty A_i^k\right| < \frac{2L}{r'^i}.$$

32. On pourra maintenant, par un choix convenable de n et pour $r'' \leqq |z| \leqq R''$ $(r' < r'', R'' < R')$, rendre

$$F(z) - \sum^{n+n'} f_k(z) < \varepsilon.$$

Pour cela on déterminera d'abord les entiers p et q par les conditions

$$2L\left(\frac{R''}{R'}\right)^{p+1} \times \frac{1}{1-\frac{R''}{R'}} < \frac{1}{4}\varepsilon,$$

$$2L\left(\frac{r'}{r''}\right)^{q+1} \times \frac{1}{1-\frac{r'}{r''}} < \frac{1}{4}\varepsilon.$$

Soit ensuite M le plus grand des deux nombres

$$1+\frac{R''}{R_1}+\left(\frac{R''}{R_1}\right)^2+\ldots+\left(\frac{R''}{R_1}\right)^p,$$

$$\frac{r_1}{r''}+\left(\frac{r_1}{r''}\right)^2+\ldots+\left(\frac{r_1}{r''}\right)^q,$$

et choisissons un nombre positif ε' tel que

$$2M\varepsilon' < \frac{1}{4}\varepsilon.$$

Ce nombre ε' obtenu, on détermine enfin n par la condition

$$\left|\sum_n^{n+n'} f_k(z)\right| < \varepsilon',$$

tant que $r_1 \leqq z \leqq R_1$.

Pour faire voir que ce choix de n satisfait, en effet, à la condition énoncée, remarquons d'abord qu'on aura

$$\left|\sum_{n+n'+1}^{\infty} A_i^k\right| < \frac{2\varepsilon'}{R_1^i} \quad \text{et} \quad \left|\sum_{n+n'+1}^{\infty} A_i^k\right| < \frac{2\varepsilon'}{r_1^i},$$

puis aussi

$$\left|\sum_{n+n'+1}^{\infty} A_i^k\right| < \frac{2L}{R'^i} \quad \text{et} \quad \left|\sum_{n+n'+1}^{\infty} A_i^k\right| < \frac{2L}{r'^i}.$$

Ensuite il vient

$$F(z)-\sum_1^{n+n'} f_k(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} z^i\left(\sum_{n+n'+1}^{\infty} A_i^k\right).$$

Pour $r'' \leqq |z| \leqq R''$, on aura donc

$$\left|F(z) - \sum_1^{n+n'} f_k(z)\right| < \sum_0^{\infty} R''^i \left|\sum_{n+n'+1}^{\infty} A_i^k\right| + \sum_{-1}^{-\infty} r''^i \left|\sum_{n+n'+1}^{\infty} A_i^k\right|.$$

Cette limite supérieure est égale à

$$\sum_0^p R''^i \left|\sum_{n+n'+1}^{\infty} A_i^k\right| + \sum_{p+1}^{\infty} R''^i \left|\sum_{n+n'+1}^{\infty} A_i^k\right|$$
$$+ \sum_{-1}^{-q} r''^i \left|\sum_{n+n'+1}^{\infty} A_i^k\right| + \sum_{-(q+1)}^{-\infty} r''^i \left|\sum_{n+n'+1}^{\infty} A_i^k\right|,$$

et, par conséquent, inférieure à

$$\sum_0^p R''^i \frac{2\varepsilon'}{R_1^i} + \sum_{p+1}^{\infty} R''^i \frac{2L}{R'^i} + \sum_{-1}^{-q} r''^i \frac{2\varepsilon'}{r_1^i} + \sum_{-(q+1)}^{-\infty} r''^i \frac{2L}{r'^i},$$

c'est-à-dire inférieure à

$$2M\varepsilon' + 2L\left(\frac{R''}{R'}\right)^{p+1} \times \frac{1}{1 - \frac{R''}{R'}} + 2M\varepsilon' + 2L\left(\frac{r'}{r''}\right)^{q+1} \times \frac{1}{1 - \frac{r'}{r''}},$$

c'est-à-dire inférieure à ε.

Il résulte de cette démonstration que dans le développement

$$F(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_i z^i,$$

le coefficient c_i est la limite du coefficient de z^i dans le développement de

$$\sum_1^n f_k(z),$$

pour $n = \infty$. Cette remarque nous sera utile plus tard.

33. Nous avons vu (n° 15) que, tant que la partie réelle de z est positive, la réduite

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \sum_1^n \frac{a_{2k}}{Q_{2k-2}(z)\,Q_{2k}(z)}$$

tend pour $n=\infty$ vers une limite $F(z)$ qui est une fonction holomorphe de z. La série

$$\sum_1^\infty \frac{a_{2k}}{Q_{2k-2}(z)\,Q_{2k}(z)}$$

est *uniformément convergente* dans tout domaine S dans lequel la partie réelle de z admet une limite inférieure qui soit positive.

Posons

$$f_k(z)=\frac{a_{2k}}{Q_{2k-2}(z)\,Q_{2k}(z)},$$

on aura

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)}=\sum_1^n f_k(z),$$

c'est-à-dire

$$\sum_1^n f_k(z)=\sum_1^n \frac{M_i}{z+x_i}.$$

Admettons que z ait une valeur quelconque non sur la coupure, on aura

$$\left|\sum_1^n f_k(z)\right|<\sum_1^n \frac{M_i}{|z+x_i|}.$$

Je désigne par (z) le *minimum* du module de $z+u$ lorsque u varie de o à ∞ en passant par toutes les valeurs réelles et positives. Il est clair que, lorsque la partie réelle de z est *positive* ou *nulle*, on aura

$$(z)=|z|,$$

mais si, dans $z=\alpha+\beta i$, α est négatif, on aura

$$(z)=|\beta|.$$

On voit que (z) est positif, non nul tant que le point z n'est pas sur la coupure. Puisque, par définition, on a

$$|z+x_i|\geqq(z),$$

il viendra

$$\left|\sum_1^n f_k(z)\right|<\frac{1}{(z)}\sum_1^n M_i,$$

c'est-à-dire

$$\left|\sum_1^n f_k(z)\right|<\frac{1}{a_1(z)}.$$

Considérons maintenant un domaine quelconque S qui reste à distance finie de la coupure; dans ce domaine (z) il y aura une limite inférieure λ qui sera positive. Dans tout le domaine S on aura alors

$$\left|\sum_1^n f_k(z)\right| < \frac{1}{a_1\lambda},$$

et cette limite supérieure est *indépendante* de n.

Soit maintenant a un point quelconque du plan non sur la coupure; nous allons montrer que la série

$$\sum_1^\infty f_k(z)$$

est *convergente* pour $z = a$, et que la convergence est *uniforme* dans le voisinage de a, c'est-à-dire dans un cercle C décrit autour de a avec un rayon assez petit pour n'avoir pas de point commun avec la coupure.

Prenons arbitrairement un point z_0 et un cercle C_1 dont z_0 est le centre et qui soit tout entier dans la partie du plan où la partie réelle de z est positive.

Nous pouvons alors construire encore d'une infinité de manières un domaine S englobant les cercles C et C_1 et qui reste à distance finie de la coupure. Dans ce domaine S le module de la somme

$$\sum_1^n f_k(z)$$

admet une limite supérieure indépendante de n, comme on vient de le voir. D'autre part, nous savons que dans le cercle C_1 la série

$$F(z) = \sum_1^\infty f_k(z)$$

est *uniformément convergente*. Nous pouvons donc appliquer le théorème du n° 30 et affirmer que cette série est *uniformément convergente* dans S et partant dans C_1. Et, en même temps, nous savons que $F(z)$ est holomorphe dans S.

Cela revient donc à dire que les réduites

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \sum_1^n f_k(z)$$

tendent vers une fonction holomorphe $F(z)$, tant que z n'est pas sur la coupure.

34. L'étude des réduites d'ordre impair

$$\frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)} = \frac{1}{\alpha_1 z} - \sum_1^n \frac{a_{2k+1} z}{Q_{2k-1}(z)\, Q_{2k+1}(z)}$$

se fait de la même manière et conduit au même résultat. Nous savons que la série

$$F_1(z) = \frac{1}{a_1 z} - \sum_1^\infty \frac{a_{2k+1} z}{Q_{2k-1}(z)\, Q_{2k+1}(z)}$$

est *uniformément convergente* dans tout domaine S où la partie réelle de z admet une limite inférieure *positive*. Or, à l'aide du théorème du n° 30, on peut conclure que la série est convergente dans tout le plan hors de la coupure, et représente une fonction holomorphe. Ce théorème, en effet, s'applique grâce à la limitation

$$\left|\frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)}\right| < \frac{1}{a_1(z)},$$

qu'on obtient sans difficulté.

Dans tout ce qui précède, nous n'avons pas eu à distinguer les deux cas où la série

$$\sum_1^\infty a_n$$

est *convergente* ou *divergente*. Dans le premier cas, les fonctions $F(z)$ et $F_1(z)$ sont distinctes, mais nous n'apprenons rien de nouveau, ce cas ayant été déjà étudié d'une manière plus approfondie.

Mais, dans le second cas, les fonctions $F(z)$ et $F_1(z)$ sont évidemment identiques et l'on peut écrire pour un point quelconque du plan non sur la coupure

$$\lim \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = F(z),$$

la convergence étant uniforme dans le voisinage du point considéré.

La nature de la fonction $F(z)$ se trouve ainsi mise en lumière; le seul point obscur qui reste à éclaircir, c'est la nature de la coupure. Pour cela, nous allons obtenir pour cette fonction $F(z)$ une autre expression analytique, plus explicite que la série par laquelle nous l'avons définie jusqu'ici. Mais cette recherche rencontre encore de sérieuses difficultés et exige des considérations assez délicates.

35. Étudions d'abord un cas particulier dans lequel un segment de la coupure ne présente aucune espèce de singularité pour la fonction $F(z)$.

Soit

$$\nu_1,\quad \nu_2,\quad \nu_3,\quad \ldots,\quad \nu_k$$

une suite infinie de nombres entiers, positifs, croissants. On aura évidemment, *n parcourant la suite de ces nombres,*

$$\lim \frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = F(z),$$

et la convergence sera encore uniforme dans le voisinage du point z. Soient a et b $(a < b)$ deux nombres positifs, nous supposons que pour $n = \nu_k$ l'équation

$$Q_{2n}(z) = 0$$

n'admet jamais une racine comprise entre $-b$ et $-a$.

Considérons un cercle C dont le centre est le point $-\frac{a+b}{2}$ et dont le rayon R est un peu inférieur à $\frac{b-a}{2}$. On constate facilement que pour tous les points à l'intérieur ou sur le contour de ce cercle, on aura

$$\left|\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)}\right| < \frac{1}{a_1\left(\frac{b-a}{2} - R\right)},$$

en supposant toujours $n = \nu_k$. Il est aisé d'en conclure, d'après notre théorème, que si l'on pose $(n = \nu_k)$

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_k(z),$$

la série

$$\sum_1^\infty f_k(z)$$

est uniformément convergente dans tout le cercle C et représente une fonction holomorphe. Donc la fonction $F(z)$ est holomorphe dans ce cas, même dans un domaine qui comprend à son intérieur une partie de la coupure, et sur le segment de la coupure entre $-b$ et $-a$ la fonction $F(z)$ n'a point de singularités. Cependant il faut remarquer que, dans ce cas, si z est sur la coupure entre $-b$ et $-a$, la relation

$$\lim \frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = F(z)$$

n'a lieu que tant que n parcourt les nombres ν_k.

Soient r_1, R_1 $(r_1 < R_1)$ deux nombres compris entre a et b. Les fonctions $f_k(z)$ sont toutes holomorphes pour

$$a < |z| < b;$$

ensuite pour $r_1 \leqq |z| \leqq R_1$ la série

$$\sum_1^\infty f_k(z)$$

est uniformément convergente, comme cela résulte aisément de ce qui vient d'être dit et de ce que nous avons démontré déjà antérieurement.

Dès lors il est facile de voir que nous sommes dans les conditions exigées par le théorème du n° 31, et nous pouvons conclure : la série

$$F(z) = \sum_1^\infty f_k(z)$$

représente pour $a < |z| < b$ une fonction holomorphe qui peut se mettre sous la forme

$$F(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_i z^i,$$

et, d'après la remarque à la fin du n° 32, le coefficient c_i est la limite du coefficient de z^i dans le développement de

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} \qquad (n = \nu_k).$$

La valeur de c_{-1} est donc la limite du coefficient de z^{-1} dans le développement de

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \frac{M_1}{z + x_1} + \frac{M_2}{z + x_2} + \ldots + \frac{M_n}{z + x_n}.$$

Si l'on suppose $x_p \leqq a$, $x_{p+1} \geqq b$, ce coefficient est évidemment

$$\mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_2 + \ldots + \mathrm{M}_p,$$

car on a pour $a < |z| < b$

$$\frac{\mathrm{P}_{2n}(z)}{\mathrm{Q}_{2n}(z)} = \sum_1^p \mathrm{M}_k \left(\frac{1}{z} - \frac{x_k}{z^2} + \frac{x_k^2}{z^3} \cdots \right)$$
$$+ \sum_{p+1}^n \mathrm{M}_k \left(\frac{1}{x_k} - \frac{z}{x_k^2} + \frac{z^2}{x_k^3} \cdots \right).$$

36. Nous allons exprimer ce résultat un peu autrement en introduisant une fonction croissante, discontinue $\varphi_n(u)$ qui jouera un rôle important dans la suite de nos raisonnements.

Ayant posé

$$\frac{\mathrm{P}_{2n}(z)}{\mathrm{Q}_{2n}(z)} = \sum_1^n \frac{\mathrm{M}_k}{z + x_k},$$

nous définissons la fonction $\varphi_n(u)$ de la manière suivante

$$\begin{array}{ll}
\varphi_n(u) = 0, & 0 \leqq u < x_1, \\
\varphi_n(u) = \mathrm{M}_1, & x_1 \leqq u < x_2, \\
\varphi_n(u) = \mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_2, & x_2 \leqq u < x_3, \\
\varphi_n(u) = \mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_2 + \mathrm{M}_3, & x_3 \leqq u < x_4, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, \\
\varphi_n(u) = \mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_2 + \ldots + \mathrm{M}_{n-1}, & x_{n-1} \leqq u < x_n, \\
\varphi_n(u) = \mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_2 + \ldots + \mathrm{M}_n, & x_n \leqq u < \infty.
\end{array}$$

Soit c un nombre compris entre a et b, on aura

$$\mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_2 + \ldots + \mathrm{M}_p = \varphi_n(c).$$

Ainsi dans le cas particulier que nous considérons on a

$$\mathrm{F}(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_i z^i,$$

tant que $a < |z| < b$ et la valeur de c_{-1} s'exprime par

$$c_{-1} = \lim \varphi_n(c),$$

n parcourant toujours les nombres ν_k.

[redacted] [redacted]

CHAPITRE VI.

REMARQUES SUR LES FONCTIONS CROISSANTES ET LES INTÉGRALES DÉFINIES.

---

37. Le problème des moments que nous avons posé au n° 24 nous conduira à considérer une distribution de masse quelconque sur une droite Ox. Une telle distribution sera parfaitement déterminée si l'on sait calculer la masse totale, répandue sur le segment Ox. Ce sera évidemment une fonction croissante de x, et réciproquement, étant donnée une fonction croissante de x, on pourra toujours imaginer qu'elle représente, de la manière indiquée, une distribution de masse. Ceci nous amène à faire quelques remarques sur les fonctions croissantes. Soit donc $\varphi(x)$ une fonction croissante définie dans l'intervalle (a, b),

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \varepsilon_3, \quad \ldots$$

une suite infinie de nombres positifs décroissants, tendant vers zéro.

Les nombres

$$\varphi(x + \varepsilon_n) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

seront aussi décroissants, mais ils resteront $\geqq \varphi(x)$. Ces nombres tendent donc vers une limite déterminée A. Soit

$$\varepsilon'_1, \quad \varepsilon'_2, \quad \varepsilon'_3, \quad \ldots$$

une autre suite infinie de nombres positifs décroissants, tendant vers zéro, on aura encore

$$\lim \varphi(x + \varepsilon'_n) = \mathrm{B} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Mais il est facile de voir que $\mathrm{A} = \mathrm{B}$, et nous pourrons dire que $\varphi(x + \varepsilon)$ tend vers une limite déterminée, dès que la quantité positive ε tend vers zéro, d'une façon quelconque. Nous écrirons

$$\lim \varphi(x + \varepsilon) = \overset{+}{\varphi}(x),$$

et il est clair que de même $\varphi(x - \varepsilon)$ tend vers une limite que nous désignerons par $\bar{\varphi}(x)$. On a évidemment

$$\bar{\varphi}(x) \leqq \varphi(x) \leqq \overset{+}{\varphi}(x).$$

Lorsque $\overset{+}{\varphi}(x) = \bar{\varphi}(x)$, nous dirons que x est un point de *continuité;* lorsque $\overset{+}{\varphi}(x) > \bar{\varphi}(x)$, x est un point de discontinuité, et $\overset{+}{\varphi}(x) - \bar{\varphi}(x)$ est la mesure de la discontinuité.

Dans tout intervalle (α, β), il y a des points de continuité.

En effet, soit

$$\lambda = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha),$$

et choisissons quatre nombres p, q, r, s, de façon que

$$\alpha < p < q < r < s < \beta;$$

il est clair que l'une au moins des deux différences

$$\varphi(q) - \varphi(p), \quad \varphi(s) - \varphi(r)$$

sera $< \frac{\lambda}{2}$. Supposons, par exemple, que ce soit la première de ces différences qui soit plus petite que $\frac{\lambda}{2}$.

Écrivons $p = \alpha'$, $q = \beta'$, nous aurons maintenant un intervalle (α', β'), tel que

$$\varphi(\beta') - \varphi(\alpha') < \frac{\lambda}{2}$$

et

$$\alpha < \alpha' < \beta' < \beta.$$

De même, en partant de l'intervalle (α', β'), on pourra trouver un intervalle (α'', β''), tel que

$$\varphi(\beta'') - \varphi(\alpha'') < \frac{\lambda}{4},$$
$$\alpha' < \alpha'' < \beta'' < \beta'.$$

En continuant ainsi, on obtient une infinité d'intervalles

$$(\alpha, \beta), \quad (\alpha', \beta'), \quad (\alpha'', \beta''), \quad \ldots, \quad (\alpha^{(n)}, \beta^{(n)}), \quad \ldots,$$

tels que

$$\varphi(\beta^{(n)}) - \varphi(\alpha^{(n)}) < \frac{\lambda}{2^n}.$$

On pourra faire en sorte que

$$\lim \alpha^{(n)} = \lim \beta^{(n)} = \gamma \quad \text{pour} \quad n = \infty.$$

Or il est clair que γ sera nécessairement un point de continuité, car

$$\overset{+}{\varphi}(\gamma) - \overset{-}{\varphi}(\gamma)$$

ne peut pas être plus grand que $\varphi(\beta^{(n)}) - \varphi(\alpha^{(n)})$, quel que soit n : cette différence est donc nulle. Il est à peu près évident que la somme des discontinuités que peut présenter $\varphi(x)$ à l'intérieur de l'intervalle (a, b) ne peut jamais surpasser $\varphi(b) - \varphi(a)$. Donc le nombre des discontinuités qui surpassent un nombre donné est fini, et il est clair par là qu'on peut ranger les discontinuités par ordre de grandeur décroissante.

Les points de discontinuité de l'intervalle (a, b) peuvent donc être rangés dans une suite simplement infinie à indices entiers positifs

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4, \quad \ldots.$$

Cela est vrai même lorsque l'intervalle considéré s'étend à l'infini; on le divisera en intervalles

$$(a, b), \quad (b, c), \quad (c, d), \quad (d, e), \quad \ldots.$$

On trouvera une suite infinie de discontinuités pour chaque intervalle; l'ensemble des discontinuités constituera une suite à double entrée, qu'on sait ranger comme une suite simple. De là on peut conclure de nouveau, d'après un théorème de M. Cantor, qu'il y a des points de continuité dans tout intervalle. A la vérité, ce théorème se trouve démontré par les considérations précédentes.

38. Si maintenant, à cette notion d'une fonction croissante, on veut associer l'image d'une distribution de masse, on sera conduit à dire qu'en un point de discontinuité il y a une condensation d'une masse finie. Un tel point est un point matériel de masse $\overset{+}{\varphi}(x) - \overset{-}{\varphi}(x)$; et, superposé à ces masses condensées dans des points, il y aura une distribution continue de masse. Il convient de regarder toujours $\varphi(b) - \varphi(a)$ comme la masse comprise dans l'intervalle (a, b). L'intervalle (Ox) contient alors la masse $\varphi(x) - \varphi(o)$ ou $\varphi(x)$ simplement, si l'on suppose $\varphi(o) = o$. On voit alors que $\varphi(x) - \overset{-}{\varphi}(x)$ est la partie de la masse concentrée au point x, qui est

censée faire partie de l'intervalle Ox, tandis que la masse $\overset{+}{\varphi}(x) - \varphi(x)$ est censée faire partie de l'intervalle (x, x'), $(x' > x)$. En changeant donc la valeur de $\varphi(x)$ dans un point de discontinuité $\left[\text{naturellement il faut qu'on ait toujours } \overset{-}{\varphi}(x) \leqq \varphi(x) \leqq \overset{+}{\varphi}(x)\right]$, on ne change en rien la distribution de masse, on fait seulement une nouvelle convention, relative à la façon de compter une masse concentrée en x, comme appartenant aux intervalles $(0, x)$ et (x, x').

Considérons maintenant le moment d'une telle distribution de masse par rapport à l'origine. Posons $a = x_0$, $b = x_n$, et intercalons entre x_0 et x_n, $n - 1$ valeurs

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n.$$

Ensuite prenons n nombres $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, tels que

$$x_{k-1} \leqq \xi_k \leqq x_k.$$

La limite de la somme

$$\xi_1[\varphi(x_1) - \varphi(x_0)] + \xi_2[\varphi(x_2) - \varphi(x_1)] + \ldots + \xi_n[\varphi(x_n) - \varphi(x_{n-1})]$$

sera le moment, par définition. Considérons plus généralement la somme

$$\text{(A)} \quad \mathrm{f}(\xi_1)[\varphi(x_1) - \varphi(x_0)] + \mathrm{f}(\xi_2)[\varphi(x_2) - \varphi(x_1)] + \ldots + \mathrm{f}(\xi_n)[\varphi(x_n) - \varphi(x_{n-1})],$$

elle aura encore une limite que nous désignerons par

$$\int_a^b \mathrm{f}(u)\, d\varphi(u).$$

Nous aurons à considérer seulement quelques cas très simples comme $\mathrm{f}(u) = u^k$, $\mathrm{f}(u) = \frac{1}{z + u}$, et il n'y a pas intérêt à donner toute sa généralité à la fonction $f(u)$. Ainsi il suffira, par exemple, de supposer la fonction $f(u)$ continue, et alors la démonstration ne présente aucune difficulté, et nous n'avons pas besoin de la développer, puisqu'elle se fait comme dans le cas ordinaire d'une intégrale définie.

La valeur d'une telle intégrale ne change pas, si l'on change la valeur de $\varphi(x)$ aux points de discontinuité qui se trouvent à l'intérieur de l'intervalle (a, b). Et, en effet, puisqu'il y a des points de continuité dans tout intervalle, rien n'empêche de supposer que $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ soient toujours des points de continuité. Il faut remarquer seulement que a et b aussi pourront être des points de discontinuité, mais un changement de valeur de $\varphi(x)$ dans ces points-là affecte la valeur de l'intégrale, puisque $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ figurent explicitement dans la définition de l'intégrale comme limite de l'expression (A).

Posons $a = \xi_0$, $b = \xi_{n+1}$, l'expression (A) peut s'écrire

$$\begin{aligned} f(b)\varphi(b) - f(a)\varphi(a) &- \varphi(x_0)[f(\xi_1) - f(\xi_0)] \\ &- \varphi(x_1)[f(\xi_2) - f(\xi_1)] \\ &- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &- \varphi(x_n)[f(\xi_{n+1}) - f(\xi_n)], \end{aligned}$$

et l'on a

$$\xi_k \leqq x_k \leqq \xi_{k+1}.$$

En passant à la limite, on a donc

$$\int_a^b f(u)\, d\varphi(u) = f(b)\varphi(b) - f(a)\varphi(a) - \int_a^b \varphi(u)\, df(u).$$

Dans le cas $f(u) = \frac{1}{u+x}$, $a = 0 = \varphi(0)$,

$$\int_0^b \frac{d\varphi(u)}{u+x} = \frac{\varphi(b)}{b+x} + \int_0^b \frac{\varphi(u)\, du}{(u+x)^2}.$$

Faisons croître b indéfiniment, en supposant que $\varphi(b)$ reste finie, on aura

$$\int_0^\infty \frac{d\varphi(u)}{u+x} = \int_0^\infty \frac{\varphi(u)\, du}{(u+x)^2}.$$

Il importait de ne laisser subsister aucun doute sur la légitimité de l'intégration par parties dans les circonstances actuelles.

39. Soit toujours $\varphi(u)$ une fonction croissante

$$\varphi(0) = 0, \qquad \varphi(\infty) = c,$$

et posons

$$F(z) = \int_0^\infty \frac{d\varphi(u)}{z+u}.$$

On définit ainsi une fonction holomorphe dans tout le plan, excepté la coupure, qui se compose de la partie négative de l'axe réel. Cette fonction $\varphi(u)$ caractérise une certaine distribution de la masse totale c sur une droite OX.

Soit $\varphi_1(u)$ une fonction de même nature que $\varphi(u)$,

$$\varphi_1(0) = 0, \qquad \varphi_1(\infty) = c_1,$$

et posons

$$\mathrm{F}_1(z) = \int_0^\infty \frac{d\,\varphi_1(u)}{z+u}.$$

Nous allons montrer que, si les fonctions $\mathrm{F}(z)$ et $\mathrm{F}_1(z)$ sont identiques, on peut en conclure que les fonctions $\varphi(u)$ et $\varphi_1(u)$ caractérisent la *même distribution* de masse; ces fonctions ne peuvent différer qu'aux points de discontinuité, et peuvent être considérées comme identiques si l'on n'a en vue que la distribution de masse.

Il est aisé d'abord de voir qu'on peut écrire

$$\mathrm{F}(z) = \int_0^\infty \frac{\varphi(u)\,du}{(z+u)^2},$$

puis que $\mathrm{F}(z) = \Phi'(z)$ si l'on pose

$$\Phi(z) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{a+u} - \frac{1}{z+u}\right)\varphi(u)\,du.$$

Soient maintenant x un nombre positif, ε un nombre positif que nous allons faire tendre vers zéro; considérons, d'après l'exemple de M. Hermite, la différence

$$\Phi(-x+\varepsilon i) - \Phi(-x-\varepsilon i) = \int_0^\infty \frac{2\varepsilon i\,\varphi(u)\,du}{(u-x)^2+\varepsilon^2}.$$

Nous allons voir que, pour $\lim \varepsilon = 0$, cette expression a une limite finie. Décomposons l'intégrale en deux

$$\int_0^x \frac{2\varepsilon i\,\varphi(u)\,du}{(u-x)^2+\varepsilon^2} + \int_0^\infty \frac{2\varepsilon i\,\varphi(u)\,du}{(u-x)^2+\varepsilon^2}.$$

Je dis qu'on aura

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_0^x \frac{2\varepsilon i\,\varphi(u)\,du}{(u-x)^2+\varepsilon^2} = \pi i\,\overset{-}{\varphi}(x),$$

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_x^\infty \frac{2\varepsilon i\,\varphi(u)\,du}{(u-x)^2+\varepsilon^2} = \pi i\,\overset{+}{\varphi}(x).$$

En effet, écrivons

$$\int_0^x \frac{\varepsilon\,\varphi(u)\,du}{(u-x)^2+\varepsilon^2} = \int_0^{x-\sqrt{\varepsilon}} \frac{\varepsilon\,\varphi(u)\,du}{(u-x)^2+\varepsilon^2} + \int_{x-\sqrt{\varepsilon}}^x \frac{\varepsilon\,\varphi(u)\,du}{(u-x)^2+\varepsilon^2},$$

on aura

$$\int_0^{x-\sqrt{\varepsilon}} \frac{\varepsilon\,\varphi(u)\,du}{(u-x)^2+\varepsilon^2} < c\int_0^{x-\sqrt{\varepsilon}} \frac{\varepsilon\,du}{(u-x)^2+\varepsilon^2} = c\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{\varepsilon} - \operatorname{arc\,tang}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right),$$

donc

$$\lim \int_0^{x-\sqrt{\varepsilon}} \frac{\varepsilon\,\varphi(u)\,du}{(u-x)^2+\varepsilon^2} = 0.$$

D'autre part, dans l'intégrale

$$\int_{x-\sqrt{\varepsilon}}^x \frac{\varepsilon\,\varphi(u)\,du}{(u-x)^2+\varepsilon^2},$$

la fonction $\varphi(u)$ pour $x-\sqrt{\varepsilon} \leqq u < x$ prend des valeurs qui sont infiniment voisines de $\bar{\varphi}(x)$. Il est vrai que la valeur de $\varphi(x)$ peut surpasser $\bar{\varphi}(x)$ d'une quantité finie, mais cette valeur de $\varphi(x)$ n'a aucune influence sur la valeur de l'intégrale. Il est aisé de voir alors que cette valeur diffère infiniment peu de

$$\bar{\varphi}(x)\int_{x-\sqrt{\varepsilon}}^x \frac{\varepsilon\,du}{(u-x)^2+\varepsilon^2} = \bar{\varphi}(x)\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}},$$

donc

$$\lim \int_{x-\sqrt{\varepsilon}}^x \frac{\varepsilon\,\varphi(u)\,du}{(u-x)^2+\varepsilon^2} = \frac{\pi}{2}\bar{\varphi}(x) = \lim \int_0^x \frac{\varepsilon\,\varphi(u)\,du}{(u-x)^2+\varepsilon^2}.$$

On trouvera de même sans difficulté

$$\lim \int_x^{\infty} \frac{\varepsilon\,\varphi(u)\,du}{(u-x)^2+\varepsilon^2} = \frac{\pi}{2}\overset{+}{\varphi}(x),$$

et nous aurons donc

$$\lim_{\varepsilon=0}[\Phi(-x+\varepsilon i) - \Phi(-x-\varepsilon i)] = \pi i[\bar{\varphi}(x) + \overset{+}{\varphi}(x)].$$

Posons maintenant

$$\Phi_1(z) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{a+u} - \frac{1}{z+u}\right) \varphi_1(u)\, du,$$

on aura $F_1(z) = \Phi_1'(z)$, et, puisque nous supposons $F(z) = F_1(z)$, les fonctions $\Phi(z)$ et $\Phi_1(z)$ ne pourront différer que par une constante. On aura donc

$$\Phi(-x+\varepsilon i) - \Phi(-x-\varepsilon i) = \Phi_1(-x+\varepsilon i) - \Phi_1(-x-\varepsilon i),$$

et, faisant tendre ε vers zéro, on en conclut

$$\overset{-}{\varphi}(x) + \overset{+}{\varphi}(x) = \overset{-}{\varphi}_1(x) + \overset{+}{\varphi}_1(x).$$

Cette relation a lieu pour toute valeur *positive* de x tandis que nous supposons $\varphi(0) = \varphi_1(0) = 0$. On peut en conclure que les fonctions $\varphi(u)$ et $\varphi_1(u)$ caractérisent la *même* distribution de masse. En effet, tant qu'il ne s'agit que de caractériser une distribution de masse, on peut prendre arbitrairement les valeurs de $\varphi(u)$, $\varphi_1(u)$ aux points de discontinuité. Rien n'empêche donc de prendre toujours

$$\varphi(x) = \frac{\overset{-}{\varphi}(x) + \overset{+}{\varphi}(x)}{2}, \qquad \varphi_1(x) = \frac{\overset{-}{\varphi}_1(x) + \overset{+}{\varphi}_1(x)}{2}.$$

De cette façon, on voit qu'on a pour toute valeur positive de x

$$\varphi(x) = \varphi_1(x),$$

et, puisque $\varphi(0) = \varphi_1(0) = 0$, les deux fonctions sont identiques.